
தமிழ் உரைநூல்
SMART ENGLISH
MATHEMATICS
PHYSICS
CHEMISTRY
BIO-BOTANY & BOTANY
BIO-ZOOLOGY & ZOOLOGY
COMMERCE
ACCOUNTANCY
ECONOMICS
Business Mathematics and Statistics
COMPUTER APPLICATIONS
COMPUTER SCIENCE
SMART ENGLISH Workbook
கணிதவியல்
இயற்பியல்
வேதியியல்
உயிரி-தாவரவியல் & தாவரவியல்
உயிரி-விலங்கியல் & விலங்கியல்
பொருளியல்
வணிகவியல்
கணக்குப்பதிவியல்
கணினி பயன்பாடுகள்
கணினி அறிவியல்

சுராவின்

கணிதவியல்

11 ஆம் வகுப்பு

புதிய பாடப்புத்தகத்தின்படி தயாரிக்கப்பட்டது

தொகுதி - I & II

சிறப்பம்சங்கள்

- பாட நூலில் உள்ள பயிற்சி வினாக்களுக்கு முழுமையான, எளிமையான தீர்வுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.
- அரசு மாதிரி வினாத்தாள் - 2018 [அ.மா.வி - 2018], முதல் பருவ இடைத்தேர்வு [First Mid-2018], காலாண்டுத் தேர்வு [Qy. 2018 & 2019], அரையாண்டுத் தேர்வு [Hy - 2018 & 2019], மார்ச் பொதுத்தேர்வு [மார்ச் 2019 & 2020], ஜூன் உடனடித்தேர்வு [ஜூன் - 2019] மற்றும் அரசு துணைத்தேர்வு [செப்.- 2020 & 2021] வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு துணைத்தேர்வு செப்டம்பர் – 2021 வினாத்தாள் விடைகளுடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்
சென்னை

2022-23 புதிய பதிப்பு
© வெளியீட்டாளர்கள்

ISBN : **978-93-92559-92-1**
குறியீட்டு எண் : SG261

எழுதி வழங்கியவர்
திருமதி. தாமரை M.Sc., M.A., M.Ed., M.Phil.
சென்னை

தலைமை அலுவலகம்:
சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்
1620, 'ஜே' பிளாக், 16-ஆவது பிரதான சாலை,
அண்ணா நகர், சென்னை-600 040.
☎ 044-4862 9977, 044-486 27755
80562 94222/ 80562 15222
e-mail : orders@surabooks.com
website : www.surabooks.com

பதிப்பாசிரியர் உரை

11ம் வகுப்பிற்கான சுராவின் **கணிதவியல் (தொகுதி - 1 மற்றும் தொகுதி - 2)** வழிகாட்டியை வெளியிடுவதில் பெருமிதமும் மகிழ்ச்சியும் அடைகிறோம். கணிதவியல் பாடங்களுக்கான வினா விடைகள் /பயிற்சிகள் மிகவும் எளிமையாக, சுலபமாக புரிந்துகொள்ளும் விதத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டி மாணவர்களின் எல்லாத் தேவைகளையும் கருத்தில் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. பாடநூலை நன்கு மதிப்பாய்வு செய்து மாணவர்கள் எல்லாப் பாடங்களையும் வெகுவாக உட்கிரகித்து அறிந்துகொண்டு தேர்வை சுலபமாக எழுதி அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்று வெற்றியாளர்களாகும் விதத்தில், நமது வெற்றிக்கான இந்த வழிகாட்டி தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடம் நடத்துவதிலும், மாணவர்களுக்குக் கற்றுக் கொள்வதிலும் இந்த வழிகாட்டி துணையாக இருக்கும்.

அரசு பொதுத் தேர்வுக்கான **புதிய மதிப்பீட்டு முறையில் 100 மதிப்பெண்கள் வடிவமைப்பில், 90 மதிப்பெண்களுக்கான எழுத்துத் தேர்வின் வினாத்தாள் அடிப்படையில்** நமது வழிகாட்டி உருவாக்கப்பட்டுள்ளதால், தேர்வுகளை மிகச் சரியான விதத்தில் எதிர்கொள்ளலாம்.

நமது சுராவின் கணிதவியல் வழிகாட்டியில் இது போன்ற பல சிறப்பம்சங்கள் அடங்கியிருந்தாலும், மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள உதவிடும் ஆசிரியர்களின் பணியும் மகத்தானது என்பதை மறுப்பதற்கில்லை.

ஆசிரியர்களின் கற்றுத்தரும் பணியில் உறுதுணையாகவும், மாணவர்கள் பாடங்களைக் கற்கும் விதத்தில் ஊக்கம் தரும் வகையிலும் நமது வழிகாட்டி திகழும் என நம்புகிறோம்.

இறையருளை வேண்டுகிறோம். நலமே விளைக!

சுபாஷ் ராஜ், B.E., M.S.
- பதிப்பகத்தார்.

வாழ்த்துக்கள் !!!

மேலும் விவரங்களுக்கு / தொடர்புக்கு
புத்தகத்தில் உள்ள சந்தேகங்களுக்கு : enquiry@surabooks.com
புத்தகங்கள் வாங்க : orders@surabooks.com
தொடர்புக்கு : 81242 01000 / 81243 01000
வாட்ஸ்அப் : 81242 01000 / 98409 26027
ஆன்லைன் வலைதளம் : www.surabooks.com
பாடக் குறிப்புகளின் தொகுக்கப்பட்ட பகுதிகளை
எமது http://tnkalvi.in இணையதளத்திலிருந்து இலவசமாக
பதிவிறக்கிக்கொள்ளலாம்

14-03-2022

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

தொகுதி - II

TO ORDER WITH US

SCHOOLS and TEACHERS:

We are grateful for your support and patronage to **'SURA PUBLICATIONS'**
Kindly prepare your order in your School letterhead and send it to us.
For Orders contact: 81242 01000 / 81243 01000

DIRECT DEPOSIT

A/c Name	: **Sura Publications**	A/c Name	: **Sura Publications**
Our A/c No.	: **36550290536**	Our A/c No.	: **21000210001240**
Bank Name	: **STATE BANK OF INDIA**	Bank Name	: **UCO BANK**
Bank Branch	: Padi	Bank Branch	: Anna Nagar West
IFSC	: SBIN0005083	IFSC	: UCBA0002100

A/c Name	: **Sura Publications**	A/c Name	: **Sura Publications**
Our A/c No.	: **6502699356**	Our A/c No.	: **1154135000017684**
Bank Name	: **INDIAN BANK**	Bank Name	: **KVB BANK**
Bank Branch	: Asiad Colony	Bank Branch	: Anna Nagar
IFSC	: IDIB000A098	IFSC	: KVBL0001154

A/c Name	: **Sura Publications**	A/c Name	: **Sura Publications**
Our A/c No.	: **13240200032412**	Our A/c No.	: **50200031530945**
Bank Name	: **FEDERAL BANK**	Bank Name	: **HDFC BANK**
Bank Branch	: Anna Nagar	Bank Branch	: Cenotaph Road, Teynampet
IFSC	: FDRL0001324	IFSC	: HDFC0001216

After Deposit, please send challan and order to our address.
email to : orders@surabooks.com / Whatsapp : 81242 01000.

GPay **For Google Pay :** 98409 26027

For PhonePe : 98409 26027

DEMAND DRAFT / CHEQUE

Please send Demand Draft / cheque in favour of **'SURA PUBLICATIONS'** payable at **Chennai**.

The Demand Draft / cheque should be sent with your order in School letterhead.

STUDENTS :

Order via Money Order (M/O) to

SURA PUBLICATIONS
1620, 'J' Block, 16th Main Road, Anna Nagar, Chennai - 600 040.
Phones : 044-4862 9977, 044-4862 7755.
Mobile : 96001 75757 / 81242 01000 / 81243 01000.
email : orders@surabooks.com Website : www.surabooks.com

தொகுதி - I

கணிதவியல்

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

01 கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்க்காண்பவைகளை பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

(i) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 121$ **மற்றும்** x **ஒரு பகா எண்ணாகும்.**$\}$

(ii) $(x-1)(x+1)(x^2-1)=0$ **எனும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களின் கணம்.**

(iii) $\{x \in \mathbb{N} : 4x+9<52\}$

(iv) $\left\{x : \frac{x-4}{x+2}=3, x \in \mathbb{R}-\{-2\}\right\}$

தீர்வு :

(i) $A = \{x \in \mathbb{N}, x^2 < 121$ மற்றும் x ஓர் பகா எண்$\}$ என்க.

$A = \{2, 3, 5, 7\}$.

(ii) $B = \{(x-1), (x+1), (x^2-1) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களின் கணம்$\}$ என்க.

$$(x-1)(x+1)(x+1)(x-1) = 0$$
$$(x+1)^2 (x-1)^2 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0 \text{ (அ) } (x-1)^2 = 0$$
$$x+1 = 0 \text{ (அ) } x-1 = 0$$
$$x = -1 \text{ (அ) } x = 1$$
$$x = 1, -1$$
$$B = \{1\}.$$

(iii) $C = \{x \in \mathbb{N}, 4x+9<52\}$ என்க.

$\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, 4x < 52-9\}$

$\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, 4x < 43\}$

$\Rightarrow C = \left\{x \in \mathbb{N}, x < \frac{43}{4}\right\}$

$\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, x < 10.75\}$

$\Rightarrow C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(iv) $D = \left\{x, \frac{x-4}{x+2} = 3, x \in R - \{-2\}\right\}$ என்க.

$\Rightarrow D = \{x : x-4 = 3x+6, x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow D = \{x : -4-6 = 3x - x, x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow D = \{x : -10 = 2x, x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow D = \{x : x = -5, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D = \{-5\}$.

2. $\{-1, 1\}$ எனும் கணத்தைக் கணக் கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.

தீர்வு : $P = \{-1, 1\}$ என்க

$\Rightarrow$ $P = \{x \in \mathbb{R} : x$ என்பது $x^2 - 1 = 0$ -ன் தீர்வு$\}$.

$P = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$

3. கீழ்க்காண்பனவற்றுள் எவை முடிவுள்ள கணம், முடிவில்லாத கணம் என்பதனைக் குறிப்பிடுக.

(i) $\{x \in \mathbb{N}: x$ **என்பது ஒரு இரட்டைப் படை பகா எண்**$\}$.

(ii) $\{x \in \mathbb{N}: x$ **என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை பகா எண்**$\}$.

(iii) $\{x \in \mathbb{Z}: x$ **என்பது பத்தை விடக் குறைந்த இரட்டைப் படை எண்**$\}$.

(iv) $\{x \in \mathbb{R}: x$ **என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்**$\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{N}: x$ **என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்**$\}$.

தீர்வு :

(i) $A = \{x \in \mathbb{N}, x$ என்பது ஒரு இரட்டைப் படை பகா எண்$\}$ என்க,

$\Rightarrow A = \{2\} \Rightarrow A$ ஒரு முடிவுறு கணம்.

(ii) $B = \{x \in \mathbb{N}, x$ என்பது ஒரு ஒற்றைப் படை பகா எண்$\}$ என்க.

$\Rightarrow B = \{1, 3, 5, 7, 11......\}$ ஒரு முடிவுறா கணம்.

(iii) $C = \{x \in \mathbb{Z}, x$ என்பது பத்தை விடக் குறைந்த இரட்டைப்படை எண்$\}$ என்க.

$\Rightarrow C = \{-\infty ... -4. -2, 2, 4, 6, 8\}$

முடிவுறா கணம்.

(iv) D $=\{x \in \mathbb{R}$, என்பது ஒரு விகித முறு எண்$\}$ என்க.

$\Rightarrow$ D $= \{$ விகித முறு எண்களின் கணம்$\}$ ஒரு முடிவுறா கணம்.

(v) E $= \{x \in \mathbb{N} : x$ ஒரு விகித முறு எண்$\}$

$$\Rightarrow E = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots\ldots\ldots\right\}$$

$\Rightarrow$ E ஒரு முடிவுறா கணம்.

4. பின்வருவனவற்றை, தகுந்த A,B,C கணங்களைக் கொண்டு சரிபார்க்கவும்.

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$.

(iv) $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B')$.

(v) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$.

(vi) $(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$.

தீர்வு :

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$,

$C = \{4, 3, 5, 9\}$ என்க.

L.H.S $= A \times (B \cap C)$

$(B \cap C) = \{4, 5\}$

$A \times (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$

$= \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$ ...(1)

R.H.S $= (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{(1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7)\}$

$A \times C = \{1,2,3\} \times \{4,3,5,9\}$

$= \{(1,4), (1,3), (1,5), (1,9), (2,4), (2,3), (2,5), (2,9), (3,4), (3,3), (3,5), (3,9)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$ ...(2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2) லிருந்து

L.H.S = R.H.S என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(ii) L.H.S $= A \times (B \cup C)$

$B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{4,3,5,9\}$

$= \{3,4,5,6,7,9\}$

$A \times (B \cup C) = \{1,2,3\} \times \{3,4,5,6,7,9\}$

$= \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (1,7),(1,9),(2,3),(2,4), (2,5),(2,6), (2,7), (2,9), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,9)\}$ ...(1)

R. H.S $= (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7)\}$

$A \times C = \{1, 2, 3\} \times \{4, 3, 5, 9\}$

$= \{(1,4), (1,3), (1,5), (1,9), (2,4), (2,3), (2,5), (2,9), (3,4), (3,3), (3,5), (3,9)\}$

RHS$=(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7),(1,9),(2,3),(2,4),(2,5), (2,6),(2,7),(2,9),(3,3),(3,4), (3,5),(3,6),(3,7),(3,9)\}$... (2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2) லிருந்து

LHS = RHS என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$

$B \times A = \{(4, 1), (4. 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$

L.H.S $= (A \times B) \cap (B \times A) = \{\}$...(1)

$A \cap B = \{\}, B \cap A = \{\}$

$\therefore$ RHS $= (A \cap B) \times (B \cap A) = \{\}$...(2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2) லிருந்து

LHS = RHS என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(iv) $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B')$

L.H.S $= C - (B - A)$

$B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3\}$

$= \{4, 5, 6, 7\}$

$C - (B - A) = \{3, 4, 5, 9\} - \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{3, 9\}$ ...(1)

R.H.S $= (C \cap A) \cup (C \cap B')$

$C \cap A = \{3, 4, 5, 9\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$

$C \cap B' = \{3, 4, 5, 9\} \cap \{1, 2, 3, 8, 9\}$

$= \{3, 9\}$

R.H.S $= (C \cap A) \cup (C \cap B') = \{3,9\}$ ...(2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2) லிருந்து

LHS = RHS என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(v) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$

$B - A = \{4, 5, 6, 7\}$

$(B - A) \cap C = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 9\}$

$= \{4, 5\}$ ...(1)

$(B \cap C) - A = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5, 9\} - \{1, 2, 3\}$

$= \{4, 5\} - \{1, 2, 3\}$

$= \{4, 5\}$ ...(2)

$B \cap (C - A) = \{4, 5, 6, 7\} \cap [\{3, 4, 5, 9\} - \{1, 2, 3\}]$

$= \{4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 5, 9\}$

$= \{4, 5\}$ ...(3)

(1) = (2) = (3) என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(vi) $(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$

$\text{L.H.S} = (B - A) \cup C$

$B - A = \{4, 5, 6, 7\}$

$(B - A) \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ ...(1)

$\text{RHS} = (B \cup C) - (A - C)$

$B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

$A - C = \{1, 2\}$

$(B \cup C) - (A - C) = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ ...(2)

$\therefore$ (1) மற்றும் (2) லிருந்து

LHS = RHS என நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. "ஒரு கணத்திலுள்ள ஓர் உறுப்பு எப்பொழுதும் தன் கணத்திற்கே உட்கணமாக அமையாது" என்ற கூற்றின் உண்மைத்தன்மையை ஆராய்க.

தீர்வு : $P = \{a, b, c, d\}$

உட்கணங்கள் $P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

ஒரு கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் அக்கணத்தின் உட்கணமாகும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கூற்று உண்மை அல்ல.

6. $n(P(A)) = 1024$, $n(A \cup B) = 15$ மற்றும் $n(P(B)) = 32$ எனில், $n(A \cap B)$ காண்க.

தீர்வு :

$n(P(A)) = 1024 = 2^{10}$

$n(P(A)) = 2^{n(A)}$

$\therefore n(A) = 10$

$n(P(B)) = 32 = 2^5$

$n(B) = 5$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$15 = 10 + 5 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 15 - 15 = 0.$

7. $n(A \cap B) = 3$ மற்றும் $n(A \cup B) = 10$ எனில், $n(P(A \Delta B))$ காண்க. [Qy - 2018]

தீர்வு : A, B என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் கணங்கள் எனில்

$n(A \cup B) = n(A-B)+n(B-A)+n(A \cap B)$

$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

$n(A \Delta B) = 10 - 3$

$\therefore n(A\Delta B) = 7$

$n[p(A \Delta B)] = 2^7 = 128.$

8. $A \times A$ என்ற கணத்தில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும் அதிலுள்ள இரு உறுப்புகள் (1,3) மற்றும் (0,2) எனில் A-ன் உறுப்புகளைக் காண்க. [Hy - 2018; ஜூன் - 2019]

தீர்வு : $A \times A$ -ல் 16 உறுப்புகள் உள்ளது எனில் A ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும்.

$\Rightarrow n(A) = 4$

$A \times A$ -ல் உறுப்புகள் (1, 3), (0, 2) எனில் A-ல் உள்ள உறுப்புகள் $A = \{0, 1, 2, 3\}$ என இருக்கலாம்.

9. $n(A) = 3$ மற்றும் $n(B) = 2$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைந்துள்ள இரு கணங்கள் A, B ஆகும். $(x, 1)$, $(y, 2)$, $(z, 1)$ என்பவை $A \times B$ எனும் கணத்திலுள்ள சில உறுப்புகள் எனில், A,B கணங்களைக் காண்க. (இங்கு, x, y, z முற்றிலும் வேறுபட்ட உறுப்புகள்). [Hy - 2018]

தீர்வு : $A \times B = \{(x, 1), (y, 2), (z, 1)\}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$n(A) = 3$, $n(B) = 2$ என்பதால்

$n(A \times B) = 6$

$A \times B = \{(x, 1),(y, 2),(z, 1),(x, 2),(y, 1), (z, 2)\}$

$\Rightarrow A = \{x, y, z\}, B = \{1, 2\}.$

10. $A \times A$ கணத்தில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன. $S = \{(a,b) \in A \times A: a < b\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள இரு உறுப்புகள் $(-1, 2)$ மற்றும் $(0, 1)$ எனில் S இல் உள்ள மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. [Qy - 2018; ஜூன் - 2019]

தீர்வு : $n(A \times A) = 16 \Rightarrow n(A) = 4$;

$S = \{(a, b) \in A \times A ; a < b\}$

$A = \{0, 1, 2, -1\}$

$A \times A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,-1), (1,0), (1,1),(1,2),(1,-1), (2,0), (2,1),(2,2), (2,-1), (-1,0), (-1,1),(-1,2),(-1,-1)\}$

$\therefore S = \{(0,1),(0,2),(1,2),(-1,0),(-1,1), (-1,2)\}$

$\therefore$ எஞ்சியுள்ள S-ன் உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $(-1, 2)$, $(0, 1)$ ஐத் தவிர்த்து

$= \{(0, 2), (1, 2), (-1, 0), (-1, 1)\}.$

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்க்காணும் தொடர்புகளுக்கு தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு ஆகியவற்றை பற்றி ஆராய்க.

(i) மிகை முழு எண்களில் தொடர்பு R ஆனது "n-ன் வகுத்தி m ஆக இருந்தால் mR n" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

தீர்வு : மிகை முழு எண்களில் தொடர்பு R ஆனது "n-ன் வகுத்தி m ஆக இருந்தால் mRn".

தற்சுட்டு :

m ஆனது m ஆல் வகுபடும்பொழுது m என்பது அனைத்து மிகை முழுக்கள் ஆகும்.

$\therefore$ R என்பது தற்சுட்டுத் தொடர்பு ஆகும்.

சமச்சீர் தொடர்பு :

$m \text{ R } n \Rightarrow n \text{ R } m$

m ஆனது n -ன் வகுத்தி $\Rightarrow$ 4-ன் வகுத்தி

$2 \neq 2$-ன் வகுத்தி 4

$\therefore$ R என்பது சமச்சீர் அல்ல.

கடப்புத் தொடர்பு :

$m \,\mathrm{R}\, n,\ n \,\mathrm{R}\, p \Rightarrow m \,\mathrm{R}\, p$

m ஆனது n -ன் வகுத்தி, n ஆனது p -ன் வகுத்தி

$\Rightarrow m$ ஆனது p -ன் வகுத்தி.

$\therefore$ R ஒரு கடப்புத் தொடர்பு.

$\therefore$ R ஒரு தற்சுட்டு; சமச்சீர் அல்ல ; கடப்பு.

(ii) P என்பது தளத்திலுள்ள அனைத்து நேர்க்கோடுகளின் கணத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. தொடர்பு R என்பது "l ஆனது m-க்குச் செங்குத்தாக இருந்தால் $l\mathrm{R}m$" என வரையறுக்கப்படுகிறது. [Qy - 2019]

$l, m, n \in$ P என்க.

தற்சுட்டு:

l ஆனது l ற்கு செங்குத்தாக இருக்க முடியாது.

$\therefore\ l \not\mathrm{R}\, l \Rightarrow$ R ஒரு தற்சுட்டு தொடர்பு அல்ல.

சமச்சீர் தொடர்பு:

$l \,\mathrm{R}\, m \Rightarrow m \,\mathrm{R}\, l$

l ஆனது m ற்குச் செங்குத்து

m ஆனது l ற்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ R என்பது ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

கடப்புத் தொடர்பு:

$l \,\mathrm{R}\, m$ மேலும் $m \,\mathrm{R}\, n \neq l \,\mathrm{R}\, n$

l ஆனது m ற்குச் செங்குத்து

m ஆனது n ற்குச் செங்குத்து

ஆனால் l ஆனது n ற்குச் செங்குத்து ஆக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ R ஆனது ஒரு கடப்புத் தொடர்பு அல்ல.

$\Rightarrow$ R என்பது சமச்சீர் தொடர்பு மட்டுமே.

(iii) A என்பது ஒரு குடும்பத்தின் உறுப்பினர்கள் அனைவரையும் கொண்ட கணமாகக் கருதுக. "a என்பவர் b-ன் சகோதரி இல்லையெனில் தொடர்பு R ஆனது $a\mathrm{R}b$" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

A என்பது ஒரு குடும்பத்தில் உறுப்பினர்கள் அனைவரையும் கொண்ட கணம்.

தொடர்பு R என்பது "a என்பவர் b -ன் சகோதரி இல்லை. $a, b, c \in$ A

தற்சுட்டு:

$a\mathrm{R}a \Rightarrow a$ -ஆனது a-ன் சகோதரி ஆக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ R ஒரு தற்சுட்டு தொடர்பு.

சமச்சீர் தொடர்பு :

$a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$

a ஆனது b -ன் சகோதரி அல்ல. b ஆனது a -ன் சகோதரி

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு அல்ல.

கடப்புத் தொடர்பு :

$a\mathrm{R}b$ மற்றும் $b\mathrm{R}c \Rightarrow a\mathrm{R}c$

a ஆனது b -ன் சகோதரி அல்ல.

b ஆனது c-ன் சகோதரி அல்ல.

$\Rightarrow a$ ஆனது c -ன் சகோதரி.

$\therefore$ R ஒரு கடப்புத் தொடர்பு அல்ல.

(iv) A என்பது ஒரு குடும்பத்தின் பெண் உறுப்பினர்கள் அனைவரையும் கொண்ட கணம் என்க. தொடர்பு R என்பது "a என்பவர் b-ன் சகோதரி இல்லையெனில் தொடர்பு R ஆனது $a\mathrm{R}b$" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$a, b, c \in$ A என்க

தற்சுட்டு:

$a \,\mathrm{R}\, a \Rightarrow a$ ஆனது a -ன் சகோதரி அல்ல.

$\therefore$ R ஒரு தற்சுட்டு

சமச்சீர் தொடர்பு :

$a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$

a என்பது b -இன் சகோதரி அல்ல.

$\Rightarrow b$ என்பது a -இன் சகோதரி அல்ல.

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு

கடப்புத் தொடர்பு :

$a\mathrm{R}b$, $b\mathrm{R}c \Rightarrow a\mathrm{R}c$

a ஆனவர் b -ன் சகோதரி அல்ல.

b ஆனவர் c -ன் சகோதரி அல்ல.

a ஆனவர் c -ன் சகோதரி ஆவார்.

(எடு) தாய் மகளின் சகோதரி அல்ல, மகள் சித்தியின் சகோதரி அல்ல, ஆனால் தாய் சித்தியின் சகோதரி.

$\therefore$ R என்பது கடப்பு தொடர்பு அல்ல.

$\therefore$ R ஒரு தற்சுட்டு மற்றும் சமச்சீர் மட்டுமே.

(v) அனைத்து இயல் எண்களின் கணத்தில் தொடர்பு R என்பது "$x + 2y = 1$" எனில் $x\mathrm{R}y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x, y \in \mathbb{N}$ என்க.

தற்சுட்டு :

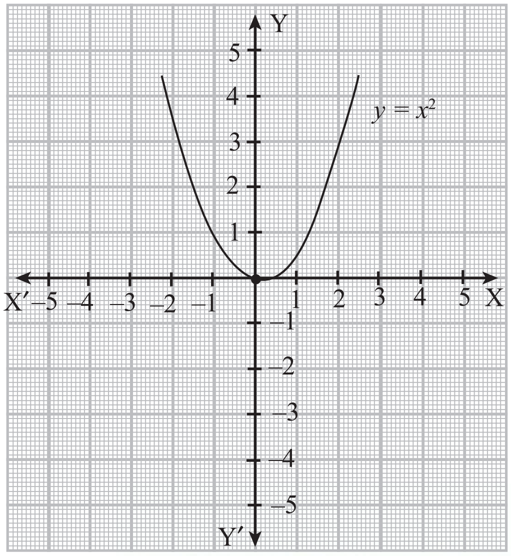
$$x \,\mathrm{R}\, x \Rightarrow x + 2x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

$\therefore$ R என்பது தற்சுட்டு தொடர்பு அல்ல.

4. $y = x^2$ **என்ற வளைவரையிலிருந்து** $y = 3(x-1)^2 + 5$ **என்ற வளைவரையை காணும் படிநிலைகளை எழுதுக.**

தீர்வு : படி 1

$y = x^2$ யின் வரைபடம் வரைக.



படி 2 : $y = (x-1)^2$, ஓரலகு வலது புறத்தில் நகர்த்தப்பட்டு வரையப்படுகிறது.

படி 3 : $y = 3(x-1)^2$ - ன் வரைபடம் y -அச்சை நோக்கி அழுத்தப்பட்டு அதாவது x அச்சிலிருந்து விலகுவதால் வரையப்படுகிறது. ஏனென்றால் $(x-1)^2$ ஆனது 3 ஆல் பெருக்கப்பட்டு பெறப்படுகிறது. $[3 > 1]$

படி 4 : $y = 3(x-1)^2 + 5$-ன் வரைபடம் 5 அலகுகள் மேல்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

5. $y = \sin x$ **என்ற சார்பினை வரைந்து அதன் மூலம்**

(i) $y = \sin(-x)$ **(ii)** $y = -\sin(-x)$

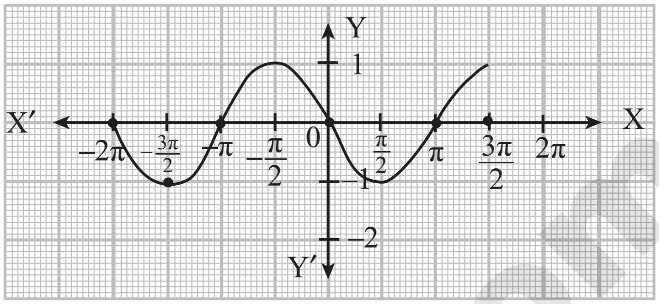
(iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **(iv)** $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ஆகியவற்றை வரைக. (இங்கு (iii), (iv), என்பவை $\cos x$ **என்பது முக்கோணவியல் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்).**

தீர்வு :

(i) $y = \sin(-x)$

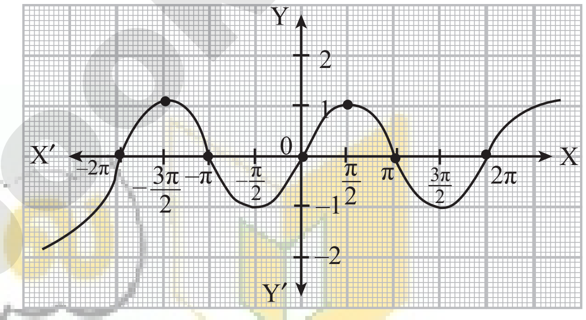
x	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$
y	0	-1	0	-1	0	1



$y = -\sin x$-ன் வரைபடம் $y = \sin x$- வரைபடத்தின் y - அச்சை பொறுத்த பிரதிபலிப்பு வரைபடமாகும்.

(ii) $y = -\sin(-x)$

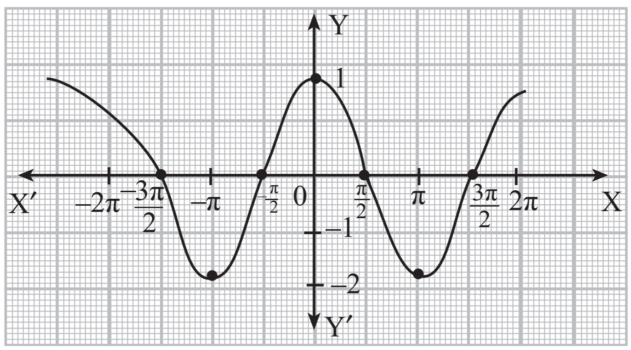
x	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



$y = -\sin(-x)$-ன் வரைபடம் x அச்சைப் பொறுத்து $\sin(-x)$ ன் பிரதிபலிப்பு வரைபடமாகும்.

(iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

x	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

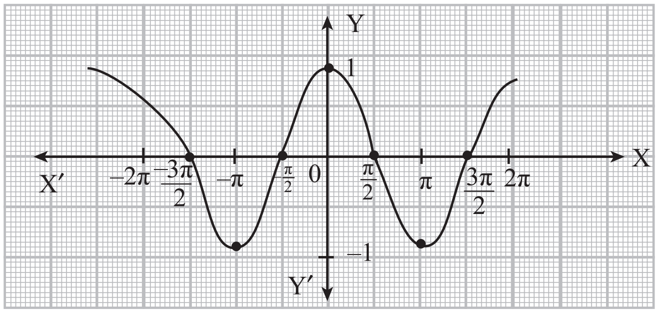


$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$-ன் வரைபடம் $\sin x$ வரைபடத்தை $\frac{\pi}{2}$ அலகுகள் இடப்பக்க நகர்வினால் பெறப்படுகிறது.

இவ்வரைபடம் $\cos x$-ஐ குறிக்கிறது.

(iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

x	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
y	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1



$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ -ன் வரைபடம் $\sin(-x)$-ன் வரைபடத்தை $\frac{\pi}{2}$ அலகுகள் வலப்பக்க நகர்வினால் பெறப்படுகிறது.

இவ்வரைபடம் $\cos x$-ஐ குறிக்கிறது.

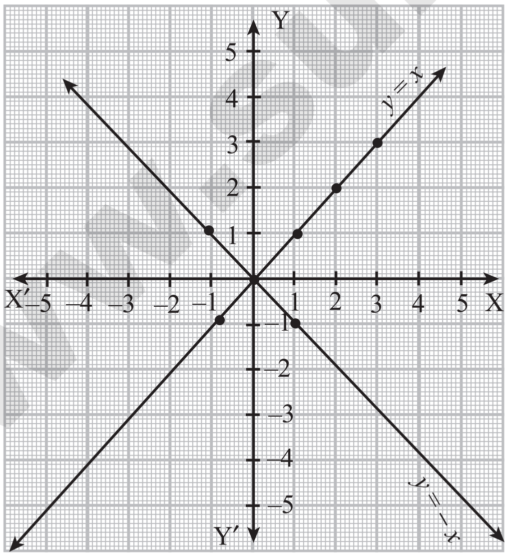
6. **$y = x$ என்ற நேர்கோட்டின் மூலம்**

(i) $y = -x$ **(ii)** $y = 2x$

(iii) $y = x + 1$ **(iv)** $y = \frac{1}{2}x + 1$

(v) **$2x + y + 3 = 0$ ஆகியவற்றைத் தோராயமாக வரைக.**

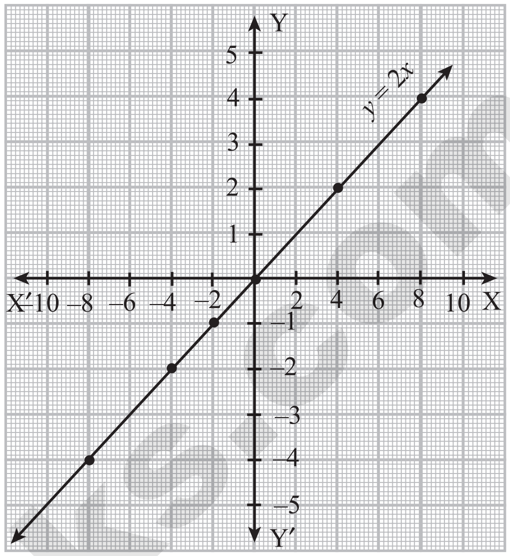
தீர்வு : (i) $y = -x$



$y = -x$ -ன் வரைபடம்

$y = x$ வரைபடத்தின் x அச்சை ஒத்த பிரதிபலிப்பு ஆகும்.

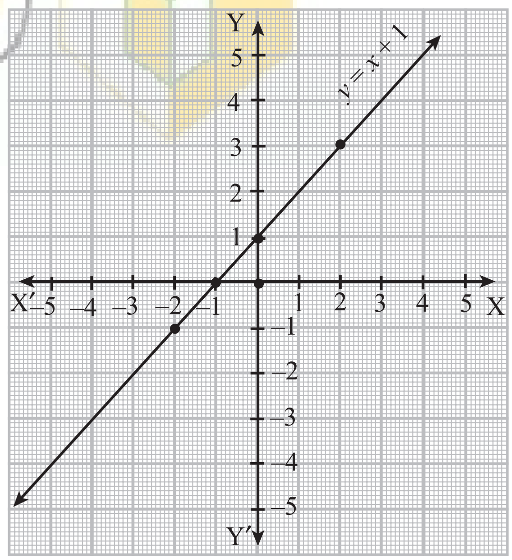
(ii) $y = 2x$



$y = 2x$ என்பது y அச்சை நோக்கி அழுத்தப்படுவதால் வரையப்படுகிறது. ஏனென்றால் இங்கு பெருக்கும் காரணி 2

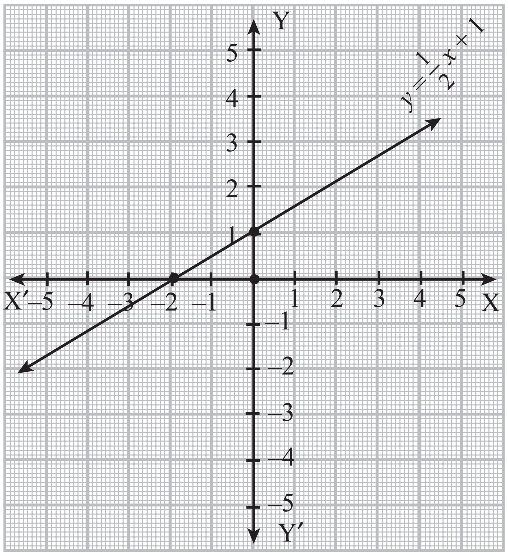
$\because 2 > 1$

(iii) $y = x + 1$



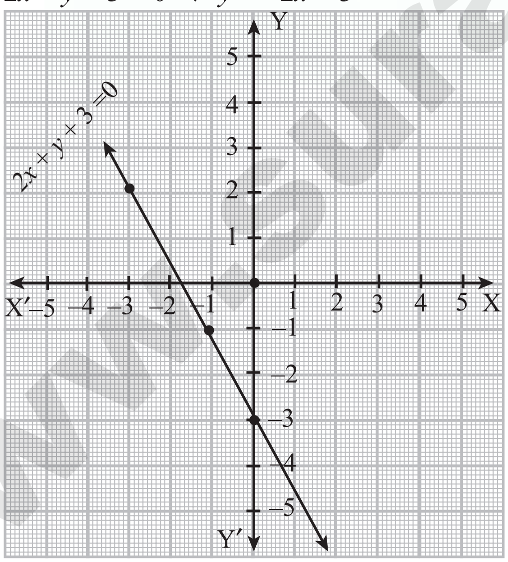
$y = x + 1$ வரைபடம் ஓர் அலகு மேல்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

(iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$



வரைபடம் x அச்சை நோக்கி பெறப்படுகிறது ஏனென்றால் பெருக்கப்படும் காரணி $\frac{1}{2} < 1$ மேலும் ஓரலகு மேல் நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

(v) $2x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -2x - 3$



வரைபடம் $-2 < 1$

$\therefore$ x அச்சை நோக்கி 3 அலகுகள் கீழ்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

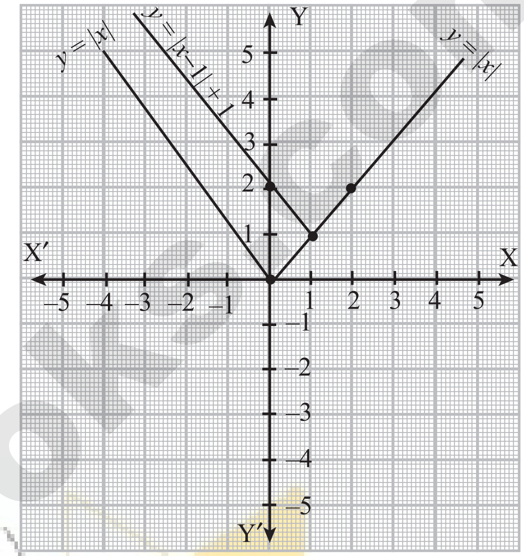
7. $y = |x|$ **என்ற வளைவரையின் மூலம்**

(i) $y = |x - 1| + 1$ **(ii)** $y = |x + 1| - 1$

(iii) $y = |x + 2| + 3$ **ஆகியவற்றை வரைக.**

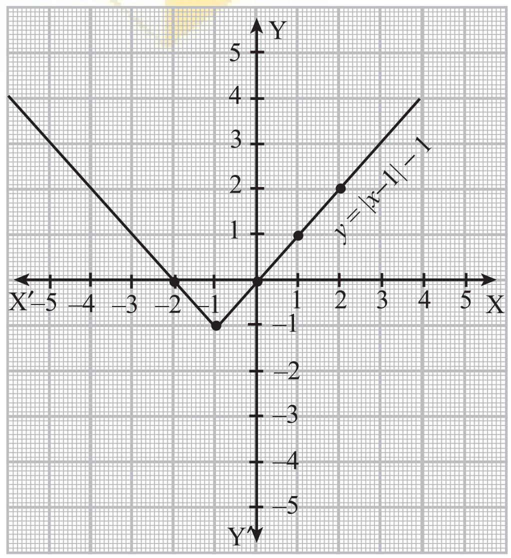
தீர்வு :

(i) $y = |x - 1| + 1$



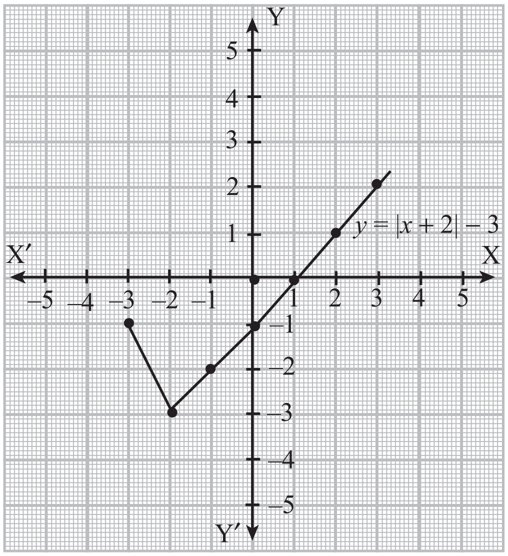
வரைபடம் ஓரலகு வலப்புறமாக மேல்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

(ii) $y = |x + 1| - 1$



வரைபடம் ஓரலகு இடப்புறமாக கீழ்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

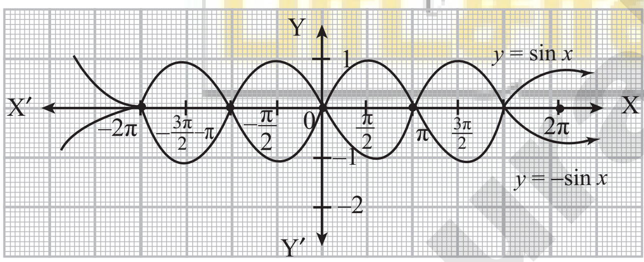
(iii) $y = |x + 2| - 3$



வரைபடம் 2 அலகுகள் இடது புறமாக மற்றும் 3 அலகுகள் கீழ்ப்புறமாக நகர்த்துவதால் பெறப்படுகிறது.

8. **$y = \sin x$ என்ற வளைவரை மூலம் $y = \sin|x|$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக. [இங்கு $\sin(-x) = -\sin x$].**

தீர்வு : $y = \sin|x|$ **[ஜூன் - 2019]**



$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \sin|x| = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$$

$y = \sin(-x)$ என்ற வரைபடமானது $-\sin x$ வரைபடத்தின் பிரதிபலிப்பாகும்.

பயிற்சி 1.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. **A = $\{(x, y): y = e^x, x \in \mathbb{R}\}$ மற்றும் B = $\{(x, y) : y = e^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$ எனில், $n(A \cap B)$ என்பது** [Hy - 2019] **[First Mid - 2018]**

(1) ∞ (2) 0 (3) 1 (4) 2

குறிப்பு : A = $\{(0,1)\ (1, e)\ (2, e^2)...\}$ **[விடை : (3) 1]**

B = $\{(0,1)\ (1, e^{-1})\ (2, e^{-2})...\} \Rightarrow n(A \cap B) = (0, 1) = 1$

2. **A = $\{(x, y) : y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}$ மற்றும் B = $\{(x, y) : y = \cos x, x \in \mathbb{R}\}$ எனில், A∩B-ல்**

[அ.மா.வி - 2018, மார்ச் - 2020]

(1) உறுப்புகளில்லை
(2) எண்ணிலடங்கா உறுப்புகள் உள்ளன
(3) ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது
(4) தீர்மானிக்க இயலாது

[விடை : (2) எண்ணிலடங்கா உறுப்புகள் உள்ளன]

3. **A = {0,–1, 1, 2} எனும் கணத்தில் $|x^2 + y^2| \leq 2$ எனுமாறு xRy ஆக வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு R எனில், கீழ்க்கண்டவற்றில் எது சரியானது?**

(1) R = {(0,0),(0,–1),(0,1),(–1,0),(–1,1),(1,2), (1,0)}
(2) R^{-1} = {(0, 0), (0,–1), (0, 1), (–1, 0), (1, 0)}
(3) R-ன் சார்பகம் {0,–1, 1, 2}
(4) R-ன் வீச்சகம் {0,–1, 1}

[விடை : (4) R- வீச்சகம் {0,–1, 1}]

குறிப்பு : R = $|x^2 + y^2| \leq 2$ = (0, 0)(0, –1) (0,1) (–1,0) (–1,–1) (–1,1) (1,0) (1,–1) (1,1) (2,0)}

∴ வீச்சகம் = {0, –1, 1}

4. **$f(x) = |x - 2| + |x + 2|, x \in \mathbb{R}$ எனில்,**

(1) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; & x \in (-\infty, -2] \\ 4 & ; & x \in (-2, 2] \\ 2x & ; & x \in (2, \infty) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 2x & ; & x \in (-\infty, -2] \\ 4 & ; & x \in (-2, 2] \\ -2x & ; & x \in (2, \infty) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; & x \in (-\infty, -2] \\ -4 & ; & x \in (-2, 2] \\ 2x & ; & x \in (2, \infty) \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; & x \in (-\infty, -2] \\ 2 & ; & x \in (-2, 2] \\ 2x & ; & x \in (2, \infty) \end{cases}$

[விடை : (1) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; & x \in (-\infty, -2] \\ 4 & ; & x \in (-2, 2] \\ 2x & ; & x \in (2, \infty) \end{cases}$ **]**

குறிப்பு : $x \in (-\infty, -2),\ x = -3$ எனில்

$f(x) = |-5| + |1| = 6 = -2x$

$x \in (-2, 2), x = 0$ எனில்

$f(x) = |0 - 2| + |0 + 2| = 4$

$x \in (2, \infty), x = 4$ எனில்

$f(x) = |2| + |6| = 8 = 2x$

5. $\mathbb{R}$ மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-ல் கீழ்க்கண்ட உட்கணங்களைக் கருதுக.

$S = \{(x, y) : y = x + 1$ மற்றும் $0 < x < 2\}$; $T = \{(x, y) : x - y \in \mathbb{Z}\}$ எனில் கீழ்க்காணும் கூற்றில் எது மெய்யானது?

(1) T சமானத் தொடர்பு ஆனால், S சமானத் தொடர்பு அல்ல.

(2) S, T இரண்டுமே சமானத் தொடர்பு அல்ல.

(3) S, T இரண்டுமே சமானத் தொடர்பு.

(4) S சமானத் தொடர்பு ஆனால், T சமானத் தொடர்பு அல்ல.

[விடை : (1) T சமானத் தொடர்பு ஆனால், S சமானத் தொடர்பு அல்ல**]**

குறிப்பு : $(x - y)$ என்பது ஒரு முழு எண் $\Rightarrow xRy$

(i) $x - x = 0$ என்பது ஒரு முழு எண் $\Rightarrow xRx$ தற்சுட்டுத் தொடர்பு ஆகும்.

(ii) $(x - y)$ ஒரு முழு எண் $\Rightarrow (y - x)$ ஒரு முழு எண் $\Rightarrow$ சமச்சீர் தொடர்பு ஆகும்.

(iii) $(x - y)$ ஒரு முழு எண். $(y - z)$ ஒரு முழு எண் $\Rightarrow (x - y) + (y - z) = x - z$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாகும் $\Rightarrow$ கடப்பு தொடர்பு ஆகும்.

(iv) $y = x + 1 \Rightarrow xRx$ உண்மையல்ல.

$\therefore$ ஒரு சமானத் தொடர்பு அல்ல.

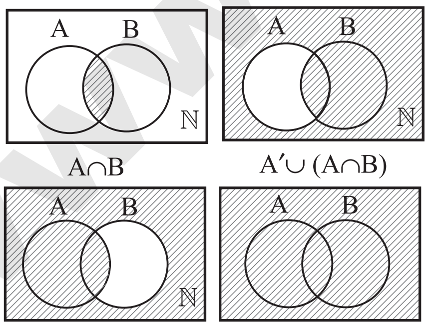
$\therefore$ T சமானத் தொடர்பு ஆனால், S சமானத் தொடர்பு அல்ல.

6. இயல் எண்களின் அனைத்துக்கணம் $\mathbb{N}$-க்கு A மற்றும் B உட்கணங்கள் எனில், $A' \cup [(A \cap B) \cup B']$ என்பது [First Mid - 2018]

(1) A (2) A′ (3) B (4) $\mathbb{N}$

[விடை : (4) $\mathbb{N}$**]**

குறிப்பு :



$A \cap B$; $A' \cup (A \cap B)$; $(A \cap B) \cup B'$; $A' \cup (A \cap B) \cup B'$

7. கணிதம் மற்றும் வேதியியல் இரண்டும் பாடங்களாக ஏற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 70. இது கணிதத்தை ஏற்றவர்களின் 10% மற்றும் வேதியியல் ஏற்றவர்களின் 14% ஆகும். இவற்றில் ஏதாவதொன்றைப் பாடமாக ஏற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

(1) 1120 (2) 1130

(3) 1100

(4) போதுமான தகவல் இல்லை **[விடை :** (2) 1130**]**

குறிப்பு : $M \cap C = 70$

இது M-ன் 10% மற்றும் C -ன் 14%

$M = 700$

$C = 500$

$M \cup C = 700 + 500 - 70 = 1130$

8. $n[(A \times B) \cap (A \times C)] = 8$ மற்றும் $n(B \cap C) = 2$, எனில், $n(A)$ என்பது

(1) 6 (2) 4 (3) 8 (4) 16

[விடை : (2) 4**]**

குறிப்பு : $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$

$n[(A \times B) \cap (A \times C)] = 8$

$n(B \cap C) = 2$

$n(A) = 4$

9. $n(A) = 2$ மற்றும் $n(B \cup C) = 3$, எனில், $n[(A \times B) \cup (A \times C)]$ என்பது [Qy - 2018]

(1) 2^3 (2) 3^2 (3) 6 (4) 5

[விடை : (3) 6**]**

குறிப்பு : $n[(A \times B) \cup (A \times C)] = n(A) \times n(B \cup C)$

$= 2 \times 3 = 6$

10. A மற்றும் B எனும் இரு கணங்களில் 17 உறுப்புகள் பொதுவானவை எனில், $A \times B$ மற்றும் $B \times A$ ஆகிய கணங்களில் உள்ள பொது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34

(4) போதுமான தகவல் இல்லை **[விடை :** (2) 17^2**]**

குறிப்பு : $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{5, 2, 3, 6\}$

A மற்றும் B இரண்டு உறுப்புகளை பொதுவாக கொண்டுள்ளன.

$A \times B$ மற்றும் $B \times A$ இரண்டுக்கும் பொதுவாக உறுப்புகள் $= 2 \times 2 = 2^2$

அதைப்போல இங்கு 17^2 உறுப்புகள் பொதுவாக உள்ளன.

11. வெற்றற்ற கணங்கள் A மற்றும் B என்க. $A \subset B$ எனில், $(A \times B) \cap (B \times A) =$ [Hy- 2018]

(1) $A \cap B$
(2) $A \times A$
(3) $B \times B$
(4) இவற்றுள் எதுவும் இல்லை **[விடை :** (2) $A \times A$**]**

குறிப்பு : $A = \{a, b\}$ $B = \{a, b, c\}$ என்க.

$A \times B = \{(a, a), (a, b) (a, c) (b, a) (b,b) (b, c)\}$

$B \times A = \{(a, a), (a, b) (b, a) (b, b) (c,a) (c, b)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(a, a), (a, b) (b, a) (b,b)\}$

$= A \times A$

12. 3 உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தின் மீதான தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை [Govt.MQP & First Mid - 2018]

(1) 9 (2) 81 (3) 512 (4) 1024

குறிப்பு : $S = \{a, b, c\}$ என்க. **[விடை :** (3) 512**]**

$n(S) = 3 \Rightarrow n(S \times S) = 9$

தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை $n\{P(S \times S)\} = 2^9 = 512$

13. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் X-ன் மீதான அனைத்துத் தொடர்பு R எனில் R என்பது

(1) தற்சுட்டுத் தொடர்பு அல்ல
(2) சமச்சீர் தொடர்பல்ல
(3) கடப்புத் தொடர்பு
(4) இவற்றுள் எதுவுமன்று **[விடை :** (3) கடப்புத் தொடர்பு**]**

குறிப்பு : $X = \{a, b, c\}$ என்க

R = அனைத்துத் தொடர்பு

$= \{(a, a), (a, b) (a, c) (b, a) (b,b) (b, c) (c,a) (c, b)(c, c)\}$

இது கடப்புத் தொடர்பு

14. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 4),(4, 1)\}$. எனில் R என்பது [First Mid - 2018; செப் - 2021]

(1) தற்சுட்டுத் தொடர்பு (2) சமச்சீர் தொடர்பு
(3) கடப்புத் தொடர்பு (4) சமானத் தொடர்பு

[விடை : (2) சமச்சீர் தொடர்பு**]**

குறிப்பு : (4,4) $\therefore$ R தற்சுட்டுத் தொடர்பு அல்ல

aRb எனில் $bRc \Rightarrow$ சமச்சீர் தொடர்பு

15. $\dfrac{1}{1-2\sin x}$ என்ற சார்பின் வீச்சகம் [ஜூன் & Qy - 2019]

(1) $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ (2) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
(3) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (4) $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

[விடை : (4)$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$**]**

குறிப்பு :

$-1 \le \sin x \le 1$

$-2 \le 2 \sin x \le 2$

$2 \ge -2 \sin x \ge -2$

(அல்லது) $-2 \le -2 \sin x \le 2$

1 உடன் கூட்டுக, $1 - 2 \le 1 - 2 \sin x \le 1 + 2$

$-1 \le 1 - 2 \sin x \le 3$

$-1 \ge \dfrac{1}{1-2\sin x} \ge \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{1-2\sin x} \le -1$ வீச்சானது $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

16. $f(x) = |\lfloor x \rfloor - x|, x \in \mathbb{R}$ என்ற சார்பின் வீச்சகம் [Hy - 2019]

(1) [0, 1] (2) $[0,\infty)$ (3) [0,1) (4) (0,1)

குறிப்பு : $f(x) = |\lfloor x \rfloor - x|$ **[விடை :** (3) [0,1)**]**

$f(0) = |0 - 0| = 0$

$f(6.5) = |6 - 6.5| = |-0.5| = 0.5$

$f(-7.2) = |-8 + 7.2| = |-0.8| = 0.8$

வீச்சானது [0,1)

17. $f(x) = x^2$ என்ற சார்பு இருபுறச் சார்பாக அமைய வேண்டுமெனில் அதன் சார்பகமும், துணைச் சார்பகமும் முறையே

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R}, (0, \infty)$
(3) $(0,\infty), \mathbb{R}$ (4) $[0,\infty), [0,\infty)$

[விடை : (4) $[0,\infty); [0,\infty)$**]**

குறிப்பு : சார்பகமானது $[0,\infty)$

துணை சார்பகமானது $[0,\infty)$

18. m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் மாறிலிச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை [அ.மா.வி - 2018; Hy - 2019]

(1) mn (2) m (3) n (4) $m + n$

குறிப்பு : வரையறை மூலம் அறியப்படுகிறது. **[விடை :** (3) n**]**

19. $f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ **என்ற சார்பு,** $f(x) = \sin x$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், அது**

[அ.மா.வி - 2018; Qy - 2019; செப். - 2020]

(1) ஒன்றுக்கொன்று (2) மேற்கோர்த்தல்

(3) இருபுறச் சார்பு (4) வரையறுக்க இயலாது

[**விடை :** (2) மேற்கோர்த்தல்]

குறிப்பு : இது மேற்கோர்த்தல் ஒன்றுக்கொன்று அல்ல

ஏனெனில் $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$

20. $f : [-3, 3] \to S$ **என்ற சார்பு,** $f(x) = x^2$ **என வரையறுக்கப்பட்டு மேற்கோர்த்தல் எனில், S என்பது** [ஜூன் - 2019, மார்ச் - 2020]

(1) $[-9, 9]$ (2) $\mathbb{R}$

(3) $[-3, 3]$ (4) $[0, 9]$

குறிப்பு : $f(0) = 0, f(-3) = 9$ மற்றும் $f(3) = 9$ [**விடை :** (4) $[0, 9]$]

21. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ **மற்றும்** $f = \{(1, a), (4, b) (2, c) (3, d) (2, d)\}$ **எனில் f என்பது**

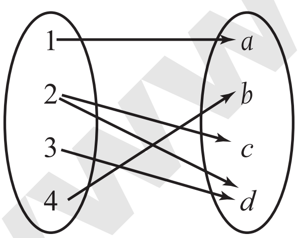
(1) ஒன்றுக்கொன்றானச் சார்பு

(2) மேற்கோர்த்தல் சார்பு

(3) ஒன்றுக்கொன்று அல்லாத சார்பு

(4) சார்பன்று [**விடை :** (4) சார்பன்று]

குறிப்பு : இது சார்பன்று ஏனெனில் 2க்கு இரண்டு பிம்பங்கள் உள்ளன.



22. $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 1 \\ x^2 & ; \quad 1 \le x \le 4 \\ 8\sqrt{x} & ; \quad x > 4 \end{cases}$ **எனில்**

(1) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad 1 \le x \le 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & ; \quad x > 16 \end{cases}$

(2) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad 1 \le x \le 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & ; \quad x > 16 \end{cases}$

(3) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad 1 \le x \le 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & ; \quad x > 16 \end{cases}$

(4) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad 1 \le x \le 16 \\ \dfrac{x^2}{8} & ; \quad x > 16 \end{cases}$

[**விடை :** (1) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad 1 \le x \le 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & ; \quad x > 16 \end{cases}$]

குறிப்பு :

$y = x$ எனில் $x = y \Rightarrow f^{-1}(x) = x$

$y = x^2$ எனில்

$y = \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$y = 8\sqrt{x}$ எனில் $\dfrac{y^2}{64} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{64}$

23. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **-ல் சார்பு** $f(x) = 1 - |x|$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்** f **-ன் வீச்சகம்.**

[அ.மா.வி & Qy & Hy - 2018]

(1) $\mathbb{R}$ (2) $(1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(-\infty, 1]$

குறிப்பு : $f : R \to R$ ஆனது [**விடை :** (4) $(-\infty, 1]$]

$f(x) = 1 - |x|$

என வரையறுக்கப்படுகிறது

$f(-\infty) = -\infty$

$f(0) = 1$

$f(\infty) = -\infty$

வீச்சானது $(-\infty, 1]$ ஆகும்.

02 அடிப்படை இயற்கணிதம்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 2.1

1. $\left\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\right\}$ ஆகிய ஒவ்வொரு எண்ணினையும் $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ அல்லது $\mathbb{Z}$ என்ற அடிப்படையில் எழுதுக.

தீர்வு : $\sqrt{7}$ விகிதமுறா எண், $\sqrt{7} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

$\frac{-1}{4}$ குறை விகிதமுறு எண், $\frac{-1}{4} \in \mathbb{Q}$

0 ஒரு முழு, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

3.1w = π முடிவுறா சுழல் தன்மையற்ற தசம பின்னம்

$\Rightarrow 3.14 \in \mathbb{Q}$

4 ஒரு மிகை முழு $\Rightarrow 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

$\frac{22}{7}$ ஒரு விகிதமுறா எண் $\Rightarrow \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

2. $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக் காட்டுக. (குறிப்பு $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$-க்குப் பயன்படுத்திய முறையை பின்பற்றவும்.) [First Mid - 2018]

தீர்வு : $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறுஎண் என்க.

$\therefore \sqrt{3} = \frac{m}{n}$ என்க (m, n என்பன 1 ஐத் தவிர பொதுவகுத்தி இல்லாதவை)

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 3n^2 = m^2$$

$$\Rightarrow 3n^2 = m^2$$

2 ஆல் இருபுறமும் பெருக்குக

$$\Rightarrow 6n^2 = 2m^2 \Rightarrow 3(2n^2) = 2m^2$$

$2n^2$ ஆனது 2-ஆல் வகுபடும் m^2-ம் ஒரு இரட்டை எண்

$\Rightarrow$ m ஒரு இரட்டையாக இருக்க வேண்டும்

$\Rightarrow m = 2k, k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 3n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 3n^2 = 4k^2$

n ஒரு இரட்டை எண். எனவே, m, n இரட்டை எண்கள் 2-ன் காரணிகள் ஆகும். இது முதல் கூற்றை முரண்பாடுடையதாக்குகிறது.

$\therefore \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க இயலாது.

$\Rightarrow \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

3. தனித்த (அ) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறா எண்கள் உள்ளனவா எனில், அவ்விரு விகிதமுறா எண்களின் வித்தியாசம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியுமா? நியாயப்படுத்துக.

தீர்வு : இரண்டு வெவ்வேறான விகிதமுறா எண்கள் $(2+\sqrt{3}), (4+\sqrt{3})$ என்க.

அவற்றின் வித்தியாசம் $(2+\sqrt{3})-(4+\sqrt{3})$

$= 2+\sqrt{3}-4-\sqrt{3}$

$= 2-4 = -2$

இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

4. இருவிகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க. இரு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காணமுடியுமா?

தீர்வு : இரண்டு விகிதமுறா எண்கள் $5+\sqrt{7}, 7-\sqrt{7}$ என்க.

அவற்றின் கூடுதல் $= 5+\cancel{\sqrt{7}}+7-\cancel{\sqrt{7}} = 12$ இது ஒரு விகிதமுறு எண்

$4+\sqrt{6}, 4-\sqrt{6}$ என்ற இரு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $(4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6})$

$= 4^2-(\sqrt{6})^2 = 16-6 = 10$ இது ஒரு விகிதமுறு எண்

5. $\frac{1}{2^{1000}}$ **-ஐவிட சிறிய மிகை எண் காண்க. நியாயப்படுத்துக.**

தீர்வு : $\frac{1}{2^{1000}}$ கொடுக்கப்பட்ட எண். இங்கு $1000 < 1001$

$$\Rightarrow \quad 2^{1000} < 2^{1001} \Rightarrow \frac{1}{2^{1000}} > \frac{1}{2^{1001}}$$

$\therefore \frac{1}{2^{1000}}$ ஐ விட சிறிய மிகை எண் $\frac{1}{2^{1001}}$

பயிற்சி 2.2

1. **தீர்வு காண்க.**

(i) $|3 - x| < 7$ **(ii)** $|4x - 5| \geq -2$

(iii) $\left|3 - \frac{3}{4}x\right| \leq \frac{1}{4}$ **(iv)** $|x| - 10 < -3$

தீர்வு :

(i) $|3 - x| < 7$

$a < b \Rightarrow ay \geq by, y < 0$

$|3 - x| < 7$

$\Rightarrow -7 < 3 - x < 7 \quad \Rightarrow -7-3 < -x < 7-3$

$\Rightarrow -10 < -x < 4 \quad \Rightarrow 10 > x > -4$

$\Rightarrow -4 < x < 10$

தீர்வுக்கணம் $(-4, 10)$

(ii) $|4x-5| \geq -2$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\Rightarrow 4\left|x - \frac{5}{4}\right| \geq -2 \quad \Rightarrow \left|x - \frac{5}{4}\right| \geq -\frac{2}{4}$$

(iii) $\left|3 - \frac{3}{4}x\right| \leq \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4} \leq 3 - \frac{3}{4}x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{4} - 3 \leq -\frac{3}{4}x \leq \frac{1}{4} - 3$$

$$\Rightarrow \frac{-13}{4} \leq \frac{-3}{4}x \leq \frac{-11}{4}$$

4 ஆல் பெருக்க

$\Rightarrow -13 \geq -3x \geq -11$

$$\Rightarrow \frac{11}{3} \leq x \leq \frac{13}{3}$$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $\left[\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right]$

(iv) $|x| - 10 < -3$

$|x| - 10 < -3$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\Rightarrow |x| < -3 + 10 \Rightarrow |x| < 7 \Rightarrow -7 < x < 7$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $(-7, 7)$.

2. $\frac{1}{|2x - 1|} < 6$ **-க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை இடைவெளிக் குறியீட்டில் எழுதுக.**

தீர்வு : $\frac{1}{|2x - 1|} < 6$ பகுதி, தொகுதிகளை $|2x-1|$ஆல் பெருக்க

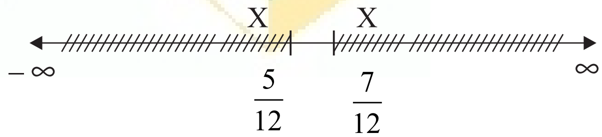
$\Rightarrow \quad 1 < 6\,|2x - 1|$

$\Rightarrow \quad 0 < 6\,|2x - 1| - 1$

$\Rightarrow \quad 6\,|2x - 1| - 1 > 0$

$\Rightarrow \quad \pm 6\,(2x - 1) - 1 > 0$

$6\,(2x - 1) - 1 > 0$	$-6\,(2x - 1) - 1 > 0$
$12x - 6 - 1 > 0$	$-12x + 6 - 1 > 0$
$12x - 7 > 0$	$-12x + 5 > 0$
$12x > 7$	$-12x > -5$
$x > \frac{7}{12}$	$x < \frac{5}{12}$



$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $\left(-\infty, \frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{7}{12}, \infty\right)$

3. **$-3\,|x| + 5 \leq -2$- க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை எண் கோட்டில் குறிக்க.**

தீர்வு : $-3\,|x| + 5 \leq -2$

$\Rightarrow \; -3|x| \leq -7 \quad \Rightarrow |x| \geq \frac{7}{3}$ [-3-ஆல் வகுக்க]

$$\Rightarrow \; \frac{-7}{3} \geq |x| \geq \frac{7}{3}$$

தீர்வுக்கணம் : $\left(-\infty, \frac{-7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

4. $2|x+1| - 6 \le 7$ க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை எண் கோட்டில் குறிக்க. [Hy - 2018]

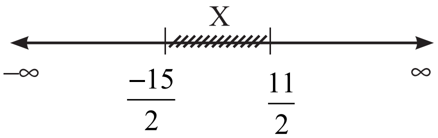
தீர்வு : $2|x+1| - 6 \le 7$

$\Rightarrow 2|x+1| \le 7+6 \qquad \Rightarrow 2|x+1| \le 13$

$\Rightarrow |x+1| \le \frac{13}{2}$

$\Rightarrow \frac{-13}{2} \le x+1 \le \frac{13}{2}$

$\Rightarrow \frac{-13}{2} - 1 \le x \le \frac{13}{2} - 1 \Rightarrow \frac{-15}{2} \le x \le \frac{11}{2}$



$\therefore$ தீர்வுகணம் $\left[\frac{-15}{2}, \frac{11}{2}\right]$

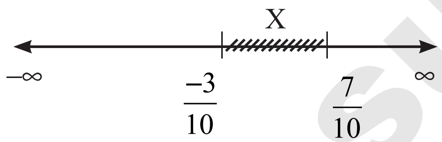
5. தீர்க்க : $\frac{1}{5}|10x-2| < 1$

தீர்வு : $\frac{1}{5}|10x-2| < 1$

$\Rightarrow |10x-2| < 5 \qquad \Rightarrow -5 < 10x-2 < 5$

$\Rightarrow -5+2 < 10x < 5+2 \qquad \Rightarrow -3 < 10x < 7$

$\Rightarrow \frac{-3}{10} < x < \frac{7}{10}$



$\therefore$ தீர்வுகணம் $\left(\frac{-3}{10}, \frac{7}{10}\right)$

6. தீர்க்க : $|5x-12| < -2$

தீர்வு : $-(-2) < 5x - 12 < -2.$

$+2 + 12 < 5x < -2 + 12$

$14 < 5x < 10$

$\frac{14}{5} < x < 2$

$2.8 < x < 2$ இதனை தீர்வு காண இயலாது.

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளை இடைவெளி அமைப்பில் எழுதுக.

(i) $x \ge -1$ மற்றும் $x < 4$

(ii) $x \le 5$ மற்றும் $x \ge -3$

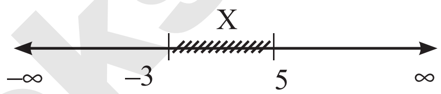
(iii) $x < -1$ அல்லது $x < 3$

(iv) $-2x > 0$ அல்லது $3x - 4 < 11$

தீர்வு : (i) $x \ge -1$ மற்றும் $x < 4$

$\Rightarrow x \in [-1, 4)$

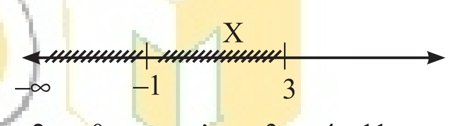
(ii) $x \le 5$ மற்றும் $x \ge -3$



$\Rightarrow x \in [-3, 5]$

(iii) $x < -1$ அல்லது $x < 3$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 3)$

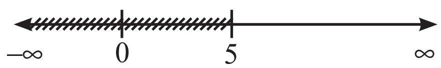


(iv) $-2x > 0$ அல்லது $3x - 4 < 11$

$\Rightarrow -x > 0$ அல்லது $3x < 11 + 4$

$\Rightarrow -x > 0$ அல்லது $3x < 15$

$\Rightarrow x < 0$ அல்லது $x < 5$



$\Rightarrow x \in (-\infty, 5]$

2. $23x < 100$-ன் தீர்வை (i) $x \in \mathbb{N}$ (ii) $x \in \mathbb{Z}$-க்கு காண்க.

தீர்வு : $23x < 100$

(i) $x \in \mathbb{N}$ எனில்

$\Rightarrow 23x < 100 \Rightarrow x < \frac{100}{23}$

$\Rightarrow x < 4.348 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4$

தீர்வுகணம் $\{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $x \in \mathbb{Z}$ எனில்

$x < 4.348$

$\Rightarrow x = \{\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3 மதிப்பெண்கள்

1. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ **எனில், x -ன் மதிப்பைக் காண்க.** **[Qy - 2019]**

தீர்வு : குறிப்பு $x > 0$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2} \text{ லிருந்து}$$

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16} = \frac{7}{2}.$$

(அடிமான மாற்று விதிப்படி)

$$\text{ஆகையால் } \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2} \text{ இங்கு } a = \log_x 2.$$

$$\text{அதாவது } \frac{7}{4a} = \frac{7}{2}$$

2. $\frac{1}{\log_x(yz)+1} + \frac{1}{\log_y(zx)+1} + \frac{1}{\log_z(xy)+1}$ **-ன் மதிப்பைக் காண்க.** **[Qy - 2019]**

தீர்வு :

$$= \frac{1}{\log_x(yz)+1} + \frac{1}{\log_y(zx)+1} + \frac{1}{\log_z(xy)+1}$$

$$= \frac{1}{\frac{\log(yz)}{\log x}+1} + \frac{1}{\frac{\log(zx)}{\log y}+1} + \frac{1}{\frac{\log(xy)}{\log z}+1}$$

$$= \frac{\log x}{\log(yz)+\log x} + \frac{\log y}{\log(zx)+\log y} + \frac{\log z}{\log(xy)+\log z}$$

$$= \frac{\log x}{\log xyz} + \frac{\log y}{\log xyz} + \frac{\log z}{\log xyz}$$

$$= \frac{\log x + \log y + \log z}{\log xyz} = \frac{\log xyz}{\log xyz} = 1$$

3. **தீர்க்க :** $\frac{|x|-1}{|x|-3} \geq 0, x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 3.$ **[Qy - 2018]**

தீர்வு : மாறுநிலை புள்ளிகள் $-3, -1, 1, 3$

இடைவெளிகள் $(-\infty, -3), (-3, -1), [1, 1], (1, 3), (3, \infty)$

தீர்வுக்கணம் $(-\infty, -3), [-1, 1], (3, \infty)$

4. **பகுதிப் பின்னங்களாக பிரித்தெழுது :** $\frac{x}{(x+3)(x-4)}$. **[Hy - 2018]**

தீர்வு :

$$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4} \text{ என்க.}$$

இங்கு A மற்றும் B மாறிலிகள்

$$\text{எனவே } \frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)},$$

$$\Rightarrow \quad x = A(x-4) + B(x+3)$$

$$x = 4, \text{ எனில், } B = \frac{4}{7}$$

$$x = -3, \text{ எனில் } A = \frac{3}{7}$$

$$\text{எனவே, } \frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{3}{7(x+3)} + \frac{4}{7(x-4)}$$

5. $\log_{10}2 = 0.30103$, $\log_{10}3 = 0.47712$ **(தோராய மதிப்புகள்), $2^8, 3^{12}$-ல் எத்தனை இலக்கங்கள் உண்டு என்பதைக் காண்க.** **[First Mid - 2018]**

தீர்வு : $N = 2^8 3^{12}$ -க்கு $n + 1$ இலக்கங்கள் உண்டு என்க.

$1 \leq b < 10$ என்றிருக்குமாறு N-ஐ $10^n \times b$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

10 அடிமான மடக்கையை இருபுறமும் எடுக்க.

$$\log N = \log(10^n b)$$

$$= n \log_{10} + \log b = n + \log b$$

என நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$$\log N = \log 2^8 3^{12}$$

$$= 8 \log 2 + 12 \log 3$$

$$= 8 \times 0.30103 + 12 \times 0.47712$$

$$= 8.13368$$

இவ்வாறாக, $n + \log b = 8.13368$ எனக் கிடைக்கிறது.

$1 \leq b < 10$ என்பதால் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 9.

6. பகுதி பின்னமாக பிரிக்கவும் : $\dfrac{10x+30}{(x^2-9)(x+7)}$. [அ.மா.வி- 2018]

தீர்வு :

$$\frac{10x+30}{(x^2-9)(x+7)} = \frac{10(x+3)}{(x+3)(x-3)(x+7)} \text{ என்க}$$

$$= \frac{10}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7}$$

$$= \frac{A(x+7)+B(x-3)}{(x-3)(x+7)}$$

$$\therefore 10 = A(x+7) + B(x-3)$$

$x = 3$ எனில் $A = 1$

$x = -7$ எனில் $B = -1$ ஆகையால்,

$$\frac{10x+30}{(x^2-9)(x+7)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+7}$$

7. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $x = 1$ எனில் பிற மூலங்களை காண்க. [Qy - 2018]

தீர்வு : ஒரு மூலம் $x = 1$ என தரப்பட்டால்

வகுத்த மூலம் கிடைப்பது,

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

பிற மூலங்கள் $2, 3$

$\therefore x = 1, 2, 3$

❋ ❋ ❋ ❋ ❋

03 முக்கோணவியல்

புத்தக வினாக்கள்

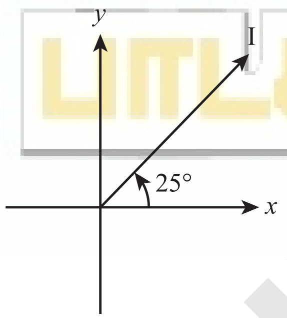
பயிற்சி 3.1

1. கொடுக்கப்பட்ட கோணங்கள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும் என்பதைக் காண்க.

(i) 25° (ii) 825° (iii) –55° (iv) 328° (v) –230°

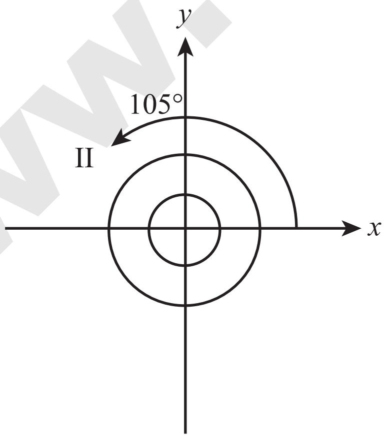
தீர்வு :

(i) 25° = முதல் காற்பகுதியில் அமையும்.

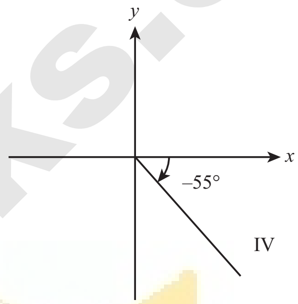


(ii) 825°

825° = 2 × 360° + <u>105°</u> = (2 × 360°) + (90°+ 15°) = இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும்.

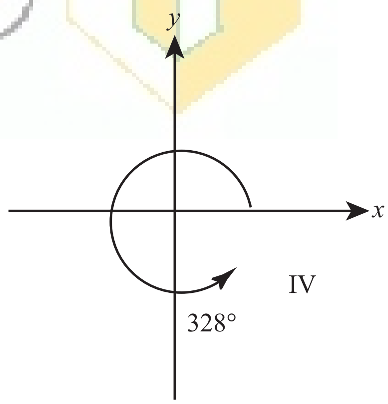


(iii) –55° = நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும்.



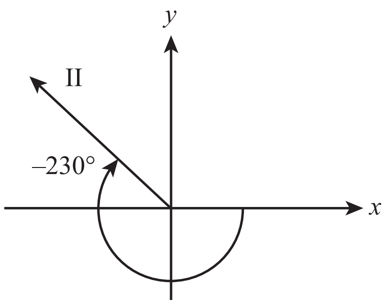
(iv) 328°

328° = 270° + 58° = நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும்.



(v) –230°

–230° = –180° + (–50°) = இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும்.



2. $0 \le \theta \le 360°$-ல் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோணத்திற்கான இணை முனையக் கோணத்தை காண்க.

(i) 395° (ii) 525° (iii) 1150°

(iv) –270° (v) –450°

தீர்வு :

(i) $395° = 360° + 35°$

$\Rightarrow 395° - 35° = 360°$

$\therefore$ 395°-க்கான இணை முனையக் கோணம் = 35°

(ii) 525°

$525 = 360° + 165°$

$\Rightarrow 525° - 165° = 360°$

$\therefore$ 525°-க்கான இணை முனையக் கோணம் = 165°

(iii) 1150°

$\Rightarrow 1150° = 360° + 360° + 360° + 70°$

$\therefore$ 1150°-க்கான இணை முனையக் கோணம் = 70°

(iv) –270°

$\Rightarrow -270° = -360° + 90°$

$\Rightarrow -270° - 90° = -360°$

$\therefore$ –270°-க்கான இணை முனையக் கோணம் = 90°

(v) –450°

$\Rightarrow -450° = -720° + 270°$

$\Rightarrow -450° - 270° = -720°$

$\therefore$ –450° -க்கான இணை முனையக் கோணம் = 270°

3. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ எனில், $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு : $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

$$(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = (c)^2$$

$$\Rightarrow a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$$

$$\Rightarrow a^2(1-\sin^2\theta) + b^2(1-\cos^2\theta) - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a^2\sin^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$$

$$\Rightarrow -a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2 - a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow (a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$$

4. $\sin\theta + \cos\theta = m$ எனில், $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{4-3(m^2-1)^2}{4}$ என நிறுவுக. (இங்கு $m^2 \le 2$).

தீர்வு : $\sin\theta + \cos\theta = m$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

$$\text{LHS} = \cos^6\theta + \sin^6\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3 + (\sin^2\theta)^3$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta)$$

$$= 1(\cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) \quad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= (\cos^2\theta)^2 + (\sin^2\theta)^2 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta) + 2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$[\because a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\text{RHS} = \frac{4-3(m^2-1)^2}{4}$$

$$= \frac{4-3\left((\cos\theta+\sin\theta)^2-1\right)^2}{4} \quad \because 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= \frac{4-3\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\right)^2}{4}$$

$$= \frac{4-3(2\cos\theta\sin\theta)^2}{4}$$

$$= \frac{4-12\cos^2\theta\sin^2\theta}{4}$$

$$= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta = \text{LHS}$$

$\therefore$ LHS = RHS

5. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ எனில்,

(i) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

(ii) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\cos^4\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos^2\beta\cdot\sin^2\beta}+\dfrac{\cos^2\beta\cdot\sin^4\alpha}{\cos^2\beta\sin^2\beta}=1$

$\Rightarrow \cos^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta$

$\Rightarrow \cos^4\alpha(1-\cos^2\beta)+\cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)^2$

$=\cos^2\beta(1-\cos^2\beta)$

$\Rightarrow \cos^4\alpha-\cancel{\cos^4\alpha\cos^2\beta}+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta$
$+\cancel{\cos^4\alpha\cos^2\beta}=\cos^2\beta-\cos^4\beta$

$\Rightarrow \cos^4\alpha-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^4\beta=0$

$\Rightarrow (\cos^2\alpha-\cos^2\beta)^2=0$

$\Rightarrow \cos^2\alpha-\cos^2\beta=0$

$\Rightarrow \cos^2\alpha=\cos^2\beta$ ...(1)

$\Rightarrow \cancel{1}-\sin^2\alpha=\cancel{1}-\sin^2\beta$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=\sin^2\beta$ ...(2)

(i) $\sin^4\alpha+\sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

LHS $=\sin^4\alpha+\sin^4\beta$

$=(\sin^2\alpha)^2+(\sin^2\beta)^2$

$=(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2$

$+2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$[\because \sin^2\alpha=\sin^2\beta]$ $[\because (a-b)^2+2ab=a^2+b^2]$

(மேற்கண்ட சமன்பாடு (2) - இல் இருந்து)

LHS $=2\sin^2\alpha\sin^2\beta=$ RHS

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

(ii) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$

LHS $=\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\beta\cdot\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\beta\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\beta\cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}}+\dfrac{\sin^2\beta\cancel{\sin^2\alpha}}{\cancel{\sin^2\alpha}}$

$=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1=$ RHS

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. $y=\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ **எனில்,** $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=y$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு : $y=\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)+(\cos\alpha)}\times\dfrac{(1+\sin\alpha)-(\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha)-(\cos\alpha)}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2-(\cos\alpha)^2}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2-(1-\sin^2\alpha)}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+2\sin\alpha+\sin^2-1+\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}{2\sin\alpha+1+2\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cancel{2\sin\alpha}(1+\sin\alpha-\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha)(\cancel{2\sin\alpha})}$

$=\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=y$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta$; $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta$ **மற்றும்** $z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta$ **எனில்,** $xyz=x+y+z$ **என நிறுவுக. (குறிப்பு :** $1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$**-ஐப் பயன்படுத்தலாம்.)** [அ.மா.வி - 2018]

தீர்வு : $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta=\cos^{0}\theta+\cos^2\theta+\cos^4\theta+\ldots\ldots$

$=1+\cos^2\theta+\cos^4\theta+\ldots\ldots$

$=1+(\cos\theta)^2+(\cos^2\theta)^2+\ldots\ldots=\dfrac{1}{1-\cos^2\theta}$

$\left(\because 1+x+x^2+\ldots=\dfrac{1}{1-x}\right)$ $|x|<1$

$=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ...(1)

$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta=\sin^0\theta+\sin^2\theta+\sin^4\theta\ldots$

$=1+\sin^2\theta+\sin^4\theta+\ldots$

6. நிறுவுக :

(i) $\cos(30° + x) = \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$

(ii) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

(iii) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

தீர்வு : (i) $\cos(30° + x) = \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$ நிரூபி.

$$\cos(30° + x) = \cos 30°.\cos x - \sin 30.\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$$

∴ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

(ii) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$$\text{L.H.S} = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

(iii) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(\pi + \theta) = \sin\pi\cos\theta + \cos\pi.\sin\theta$$
$$= 0.\cos\theta + (-1)\sin\theta$$
$$\therefore \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. sin 15° மற்றும் cos 15° ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : மூலங்களின் கூடுதல் = sin 15° + cos 15°

$$= \sin(45° - 30°) + \cos(45° - 30°)$$
$$= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° + \cos 45°\cos 30° + \sin 45°.\sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{2 \times \cancel{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் = sin 15°.cos 15°

$$= \frac{2\sin 15°\cos 15°}{2} = \frac{\sin 30°}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$(\because \sin 2A = 2\sin A\cos A)$

∴ தேவையான சமன்பாடு

$\Rightarrow x^2 -$ (மூலங்களின்கூடுதல்) x

$+$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $= 0$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$
$$\Rightarrow 4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0.$$

8. cos (A + B + C)-ஐ விரிவாக்கு. இங்கு A + B + C $= \dfrac{\pi}{2}$ எனில், cos A cos B cos C = sin A sin B cos C + sin B sin C cos A + sin C sin A cos B என நிறுவுக.

தீர்வு : $A + B + C = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos(A + B + C) = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \cos(A + B + C) = 0$$

$$\cos(A + B + C) = \cos(A + B)\cos C - \sin(A + B)\sin C$$
$$= \cos C(\cos A\cos B - \sin A\sin B) - \sin C(\sin A\cos B + \cos A\sin B)$$
$$= \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$$
$$0 = \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$$
$$\therefore \cos A\cos B\cos C = \sin A\sin B\cos C + \sin A\cos B\sin C + \cos A\sin B\sin C$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

9. நிறுவுக.

(i) $\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

(ii) $\sin(30° + \theta) + \cos(60° + \theta) = \cos\theta$

தீர்வு :(i) LHS $= (\sin 45° + \theta) - \sin(45° - \theta)$

$$= [\sin 45°.\cos\theta + \cos 45°\sin\theta] [\sin 45°.\cos\theta - \cos 45°\sin\theta]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]$$
$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$
$$= 2\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\theta = \text{RHS}$$

(ii) LHS $= \sin(30° + \theta) + \cos(60° + \theta)$

$$= \sin 30°.\cos\theta + \cos 30°.\sin\theta + \cos 60°.\cos\theta - \sin 60°.\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\cos\theta + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta} + \frac{1}{2}\cos\theta - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\cancel{2}\cos\theta}{\cancel{2}}$$
$$= \cos\theta = \text{R.H.S.}$$

05 ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 5.1

1. **விரிவுபடுத்துக. (i)** $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^3$

(ii) $\left(2x^2-3\sqrt{1-x^2}\right)^4+\left(2x^2+3\sqrt{1-x^2}\right)^4$

தீர்வு :

(i) $\because (x-a)^n = {}^nC_0x^n\, b^{\circ} - nC_1x^{n-1}b^1 + {}^nC_2\, x^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\, nC_n x^{\circ}b^n$

$$\Rightarrow \left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^3 = {}^3C_0\left(2x^2\right)^3\left(\frac{3}{x}\right)^{\circ} - {}^3C_1\left(2x^2\right)^2\left(\frac{3}{x}\right) + {}^3C_2\left(2x^2\right)\left(\frac{3}{x}\right)^2 - {}^3C_3\left(2x\right)^{\circ}\left(\frac{3}{x}\right)^3$$

$$= \left(2x^2\right)^3 - 3\left(2x^2\right)^2\left(\frac{3}{x}\right) + 3\left(2x^2\right)\left(\frac{3}{x}\right)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^3$$

$$= 8x^6 + 3\left(4x^4\right)\left(\frac{3}{x}\right) + 3\left(2x^2\right)\left(\frac{9}{x^2}\right) - \frac{27}{x^3}$$

$$= 8x^6 - 36x^3 + 54 - \frac{27}{x^3}$$

(ii) $\left(2x^2-3\sqrt{1-x^2}\right)^4+\left(2x^2+3\sqrt{1-x^2}\right)^4$

$$= \Big[\left(2x^2\right)^4 - {}^4C_1\left(2x^2\right)^3\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^1 + {}^4C_2\left(2x^2\right)^2\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 - {}^4C_3\left(2x^2\right)\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^4\Big]$$

$$+\Big[\left(2x^2\right)^4 + {}^4C_1\left(2x^2\right)^3\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^1 + {}^4C_2\left(2x^2\right)^2\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 + {}^4C_3\left(2x^2\right)\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^4\Big]$$

$$= 2\left[\left(2x^2\right)^4 + {}^4C_2\left(2x^2\right)^2\left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^4\right]$$

$$= 2\left[\left(16x^8\right) + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times 3}{\cancel{2}\times 1}\times 4x^4 \times 9\left(1-x^2\right) + 3^4\left(1-x^2\right)^2\right]$$

$$= 2\left[16x^8 + 216x^4\left(1-x^2\right) + 81\left(1-x^2\right)^2\right]$$

2. **மதிப்புக் காண்க.**

(i) 102^4 **(ii)** 99^4 **(iii)** 9^7

தீர்வு :

(i) $(a+b)^n = {}^nC_0a^n\,b^0 + {}^nC_1a^{n-1}\,b^1 + {}^nC_2a^{n-2}\,b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nC_na^0\,b^n$

$\Rightarrow (102)^4 = (100+2)^4 = (100)^4 + {}^4C_1(100)^3(2)^1 + {}^4C_2(100^2)(2^2) + {}^4C_3(100^1)(2^3) + {}^4C_4(100^0)(2^4)$

$= 100000000 + 2(1000000)(2) + \frac{4\times(3)}{2(1)}(10000)(4)$

$= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16$

$= 108,243,216$

(ii) $\because (a-b)^n = {}^nC_0\,a^n - {}^nC_1a^{n-1}\,b + {}^nC_2\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n\,{}^nC_na^0\,b^n$ **[Qy - 2018]**

$\Rightarrow 99^4 = (100-1)^4$

$= 100^4 - {}^4C_1100^3 + {}^4C_2100^2 - {}^4C_3\,100\,(1)^3 + 1^4$

$= 100000000 - 4(1000000) + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times 3}{\cancel{2}\times 1}(10000) - 4(100) + 1$

$= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1$

$= 96,059,601$

(iii) $\because (a-b)^n = {}^nC_0\,a^n - {}^nC_1a^{n-1}\,b + {}^nC_2\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n\,{}^nC_n\,b^n$

$\Rightarrow 9^7 = (10-1)^7 = 10^7 - {}^7C_110^6 + {}^7C_210^5 - {}^7C_3\,10^4 + {}^7C_4\,10^3 - {}^7C_5\,10^2 + {}^7C_6\,10^1$

$$= 10000000 - 7(1000000) + \frac{7\times \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\times 1}(100000)$$

$$- \frac{7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}(1000) - \frac{7\times \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\times 1}(100) + 7(10) - 1$$

$$= 10000000 - 7000000 + 2100000 - 350000 + 35000 - 2100 + 70 - 1$$

$$= 4782969$$

3. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1.01)^{1000000}$ மற்றும் 10000 ஆகியவற்றில் எது பெரியது எனக் காண்க.

தீர்வு : $(1.01)^{1000000} - 10000$

$= (1 + 0.01)^{1000000} - 10,000$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1\,(0.01) + {}^{1000000}C_2(0.01)^2 + \ldots + (.01)^{1000000} - 10,000$

$= (1 + 1000000 \times (0.01) +$ சாதகமான எண்) $- 10,000$

$= 1 +$ சாதகமான எண் $> 10,000$

$\therefore (1.01)^{1000000} - 10,000 > 0 \Rightarrow (1.01)^{1000000} > 10,000.$

4. $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$-ன் விரிவில் x^{15}-ன் கெழுவைக் காண்க. **[அ.மா.வி - 2018]**

தீர்வு : $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}, n = 10, x = x^2, a = \frac{1}{x^3}$

$\therefore$ பொது உறுப்பு $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$

$$\Rightarrow T_{r+1} = {}^{10}C_r (x^2)^{10-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r$$

$$= {}^{10}C_r\, x^{20-2r}.x^{-3r}$$

$$= {}^{10}C_r\, x^{20-5r} \quad \ldots(1)$$

x^{15}ன் கெழுவினைக் காண,

$20 - 5r = 15$ என பிரதியிட

$\Rightarrow 20 - 15 = 5r$

$\Rightarrow r = 1$ என (1) ல் பிரதியிட

$T_2 = {}^{10}C_1\, x^{20-5} = 10\, C_1\, x^{15}$

x^{15} ன் கெழு 10.

5. $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^6$ -ன் விரிவில் x^6 மற்றும் x^2-ன் கெழுக்களைக் காண்க.

தீர்வு : $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^6, n = 6, x = x^2, a = \frac{-1}{x^3}$

$\therefore$ பொது உறுப்பு $\Rightarrow T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$

$$\Rightarrow T_{r+1} = {}^6C_r (x^2)^{6-r}\left(\frac{-1}{x^3}\right)^r$$

$$= (-1)^r\, {}^6C_r\, x^{12-5r} \quad \ldots(1)$$

x^6 ன் கெழுவினைக்கான $12 - 5r = 6$ எனக்கொள்க

$12 - 5r = 6 \Rightarrow 12 - 6 = 5r \Rightarrow 6 = 5r$

$r = \frac{6}{5}$

இங்கு x^6 இருக்கமுடியாது

x^2–ன் கெழுவைக் காண $12 - 5r = 2$ என பிரதியிட

$12 - 5r = 2$

$\Rightarrow 12 - 2 = 5r \Rightarrow 10 = 5r \Rightarrow r = 2$

$r = 2$ என (1) ல் பிரதியிட

$$T_3 = (-1)^2\, {}^6C_2\, x^{12-10} = \frac{\cancel{6}^{3}\times 5}{\cancel{2}\times 1}x^2 = 15x^2$$

$\therefore x^2$ ன்கெழு $= 15$.

6. $(1 + x^3)^{50}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ -ன் விரிவில் x^4 -ன் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது : $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5 (1 + x^3)^{50}$

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ -ன் விரிவு

$$= (x^2)^5 + {}^5C_1 (x^2)^4\left(\frac{1}{x}\right)^1 + {}^5C_2 (x^2)^3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^5C_3 (x^2)^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5C_4 (x^2)^1\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= x^{10} + 5\frac{x^8}{x} + \frac{5\times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\times 1}\cdot\frac{x^6}{x^2} + \frac{5\times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\times 1}\frac{x^4}{x^3} + 5\frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^5}$$

$$= x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}$$

பொது உறுப்பு

$$= T_{r+1} = {}^{50}C_r\, (1)^{50-r}(x^3)^r = {}^{50}C_r\, x^{3r} \quad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5 (1 + x^3)^{50}$$

$$= \left(x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)(1 + x^3)^{50}$$

$$= \left(x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$({}^{50}C_0 + {}^{50}C_1\, x^3 + {}^{50}C_2\, x^6 + {}^{50}C_3\, x^6 + {}^{50}C_3\, x^9 + \ldots)$$

$$= \left(x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 10x + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$(1 + 50x^3 + 1225\, x^6 + 19600\, x^9 + \ldots)$$

x^4 –ன் கெழு

$=$ 10 (மாறிலி உறுப்பு $(1+x^3)^{50}$) + 10 [$(1+x^3)^{50}$ ல் உள்ள x^3 ன் கெழு] + 5 (x^6 ன் கெழு) + 1 (x^9 ன்கெழு)

$= 10(1)+10(50)+5(1225)+1(19600)$ ($\because$ (1)-ஐப் பயன்படுத்தி)

$= 10+500+6125+19600 = 26235$

$\therefore$ x^4-ன் கெழு $= 26235$.

7. $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ **-ன் விரிவில் மாறிலி உறுப்பைக் காண்க.**

தீர்வு : $\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$, $n=5, x=2x^3, a=\dfrac{-1}{3x^2}$ பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$
$$= {}^5C_r \left(2x^3\right)^{5-r}\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^r$$
$$= {}^5C_r 2^{5-r} x^{15-3r}\frac{(-1)^r}{3^r x^{2r}}$$
$$= {}^5C_r \frac{2^{5-r}(-1)^r}{3^r}.x^{15-3r-2r} \quad ...(1)$$

மாறிலி உறுப்பைக் காண,

$15-3r-2r = 0$ என்க

$\Rightarrow$ $15-5r = 0 \Rightarrow 15=5r \Rightarrow r=\dfrac{15}{5}=3$

$r = 3$ ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$T_4 = {}^5C_3 \frac{2^2}{3^3}(-1)^3x^0 = -{}^5C_3\frac{4}{27}$$
$$= \frac{-5\times \cancel{4}^{2}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}\times\frac{4}{27} = \frac{-40}{27}$$

$\therefore$ மாறிலி உறுப்பு $= \dfrac{-40}{27}$

8. 3^{600}**-ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்களைக் காண்க.**

தீர்வு : $3^{600}=3^{2\times300}=(9)^{300}=(10-1)^{300} \Rightarrow 3^{600}=(10-1)^{300}$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$(10-1)^{300} = {}^{300}C_0(10)^{300}(-1)^0 - {}^{300}C_1(10)^{299}(-1)^1 + {}^{300}C_2(10)^{298}(-1)^2 + {}^{300}C_3(10)^{297}(-1)^3 \ldots {}^{300}C_{299}(10)^1(-1)^{299} + {}^{300}C_{300}(-1)^{300}$

$= 10^{300}-300\times10^{299}+...-300(10)+(1)1$

கடைசி இரு உறுப்புகள் தவிர, மற்ற எல்லா உறுப்புகளும் 100 –ஆல் வகுக்கப்படும்.

$\therefore$ கடைசி இரு உறுப்புகள் 0, 1.

9. **எல்லா மிகை முழு எண் n-க்கும் $9^{n+1}-8n-9$ என்பது 64ஆல் வகுபடும் என ஈருறுப்புத் தேற்றம் மூலம் நிறுவுக.**

தீர்வு : $(1+x)^n = {}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots+{}^nC_{n-1}x^{n-1}+{}^nC_nx^n$

$c=8$ என்க

$\Rightarrow (1+8)^n = {}^nC_0+{}^nC_1 8+{}^nC_2 8^2\ldots+{}^nC_{n-1}8^{n-1}+{}^nC_n 8^n$

$\Rightarrow 9^n = 1+8n+{}^nC_2 8^2+\ldots+{}^nC_{n-1}8^{n-1}+{}^nC_n 8^n$

$\Rightarrow 9^n-1-8n = 64[{}^nC_2+8{}^nC_3+\ldots+{}^nC_n 8^{n-2}]$

$\Rightarrow 9^n-8n-1$ ஆனது nன் அனைத்து மிகை முழுக்களும் 64 ஆல் வகுபடும்

$\therefore n = n+1$ என பிரதியிட

$9^{n+1}-8(n+1)-1$ ஆனது n–ன் அனைத்து மிகை முழுக்களும் 64 ஆல் வகுபடும்.

$\Rightarrow 9^{n+1}-8n-8-1$ ஆனது 64 ஆல் வகுபடும்.

$\Rightarrow 9^{n+1}-8n-9$ஆனது 64 ஆல் வகுபடும்.

10. ***n*** **ஒரு ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண் எனில், $(x+y)^n$ -ன் விரிவில் மைய உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமம் என நிறுவுக.**

தீர்வு : $(x+y)^n$ கொடுக்கப்பட்டது. இதில் n ஓர் ஒற்றை எண் எனில் $(x+y)^n$

நடு உறுப்புகள் $T_{\frac{n-1}{2}+1}$ மற்றும் $T_{\frac{n+1}{2}+1}$

$$T_{\frac{n-1}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}\, y^{\frac{n-1}{2}} \text{ மற்றும்}$$
$$T_{\frac{n+1}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}}\, y^{\frac{n+1}{2}}$$

நடு உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ மற்றும் ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ ஆகும்.

$$nC_r = nC_{n-r}$$
$${}^nC_{\frac{n-1}{2}} = {}^nC_{n-\frac{(n-1)}{2}} = {}^nC_{\frac{2n-n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}$$

$\Rightarrow {}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ மற்றும் ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ கெழுக்கள் சமம்

$\Rightarrow$ இரண்டு நடு உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாகும்.

11. ***n*** **ஒரு மிகை முழு எண் மற்றும் *r* என்பது குறையற்ற முழு எண் எனில், $(1+x)^n$-ன் விரிவில் x^r மற்றும் x^{n-r} உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமம் என நிறுவுக.**

தீர்வு: $(1+x)^n$ $n=n, x=1, a=x$

பொது உறுப்பு $t_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$

$\Rightarrow t_{r+1} = {}^nC_r\, 1^{n-r} x^r = {}^nC_r\, x^r \quad ...(1)$

06 இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 6.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆயத்தொலைகளை உடைய நகரும் புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு α ஒரு துணையலகு ஆகும்.

(i) $(9\cos\alpha, 9\sin\alpha)$ (ii) $(9\cos\alpha, 6\sin\alpha)$

தீர்வு :

(i) $P(h, k)$ நகரும் புள்ளி, $h = 9\cos\alpha$, $k = 9\sin\alpha$

$$\frac{h}{9} = \cos\alpha, \quad \frac{k}{9} = \sin\alpha$$

α வை முழுவதும் நீக்க, வர்க்கப்படுத்த

$$\left(\frac{h}{9}\right)^2 + \left(\frac{h}{9}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{81} = 1 \qquad [\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1]$$

$$h^2 + k^2 = 81$$

$P(h, k)$ ன் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = 81$

(ii) $(9\cos\alpha, 6\sin\alpha)$

$P(h, k)$ நகரும் புள்ளி $h = 9\cos\alpha$, $k = 6\sin\alpha$

α வை நீக்க, வர்க்கப்படுத்தி கூட்ட

$$\left(\frac{h}{9}\right)^2 + \left(\frac{k}{6}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

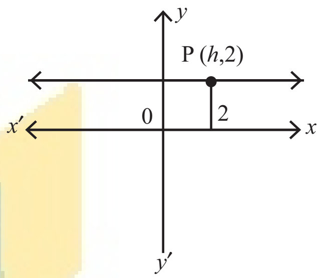
$$\frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{36} = 1 \qquad (\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$$

$\therefore$ $P(h, k)$ ன் நியமப்பாதை $= \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2. (i) x-அச்சிலிருந்து இரண்டு அலகுகள் மற்றும்
(ii) y-அச்சிலிருந்து மூன்று அலகுகள் என்ற மாறாத தொலைவில் நகரும் புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) x அச்சிலிருந்து 2 அலகுகள் தூரத்தில் நகரும் புள்ளி $P(h, k)$ x அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $y = \pm c$



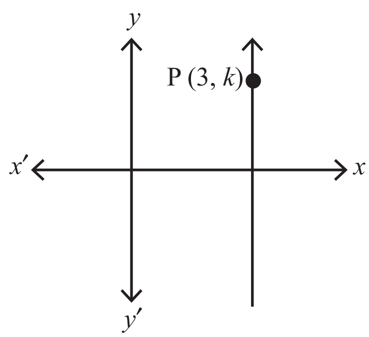
$\therefore c = \pm 2$

$\therefore$ $P(h, k)$ ன் நியமப்பாதை

$y = \pm 2$

(ii) y அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $x = \pm k$

y அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் தூரத்தில் நகரும் புள்ளி $P(h, k)$-ன் நியமப்பாதை $x = \pm 3$



3. θ ஒரு துணையலகு எனில், $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ஆகிய ஆயத்தொலைகளை உடைய நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$

$$\frac{x}{a} = \cos^3\theta, \frac{y}{a} = \sin^3\theta$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தி கனமூலம் காண

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\cos^3\theta\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin^3\theta\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\theta \text{ மற்றும் } \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2\theta$$

அவற்றைக் கூட்ட $(\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = 1 \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = 1$$

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ இதுவே நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையாகும்.

4. $x^2 - 5x + ky = 0$ என்ற நியமப்பாதையின் மீது புள்ளிகள் $P(-3, 1)$ மற்றும் $Q(2, b)$ அமையும் எனில் k மற்றும் b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : $x^2 - 5x + ky = 0$ ... (1) $\quad$ P (–3, 1), Q (2, b)

(1)-ன் மீது P (–3, 1) அமைந்துள்ளதால்

$$(-3)^2 - 5(-3) + k(1) = 0$$

$$9 + 15 + k = 0$$

$$k = -24$$

(1)-ன் மீது Q(2, 6) அமைந்துள்ளதால் நியமப்பாதை

$x^2 - 5x + ky = 0$

$$2^2 - 5(2) + k(b) = 0$$

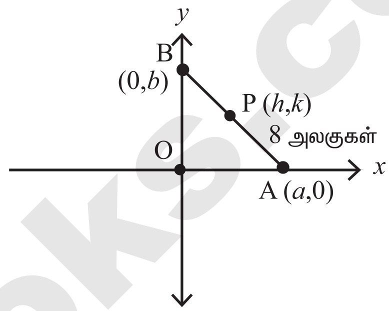
$$4 - 10 + (-24)\,b = 0$$

$$-24b = 6$$

$$b = \frac{6}{-24} = \frac{-1}{4}$$

5. 8 அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு நேரான கம்பியின் முனைகள் A மற்றும் B ஆகியவை முறையே எப்போதும் x மற்றும் y-அச்சுகளைத் தொடுமாறு நகர்ந்து கொண்டு இருக்கிறது, எனில் வெட்டுத்துண்டு AB-ன் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : P(h, k) என்பது தேவையான நியமப்பாதையின் நடுப்புள்ளி A, B என்பன முனைப்புள்ளிகள் A(a, 0) B(0, b). P(h, k) A, B யின் நடுப்புள்ளி என்பதால்



$$h = \left(\frac{a+0}{2}\right), k = \left(\frac{0+b}{2}\right)$$

$$h = \frac{a}{2}, \quad k = \frac{b}{2}$$

$$a = 2h, b = 2k$$

ΔOAB யிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பது

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$8^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow (2h)^2 + (2k)^2 = 64$$

$$\Rightarrow 4h^2 + 4k^2 = 64$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 = 16 \quad (\because 4 \text{ ஆல் வகுத்தல்})$$

$\therefore$ P(h, k) ன் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = 16$

6. (3, 5) மற்றும் (1, –1) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளிக்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 20-க்கு சமம் எனில் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : P (h, k) நகரும் புள்ளி.

A(3, 5), B(1, –1) என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள்.

$PA^2 + PB^2 = 20$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

6. ஒரு பொருளை P என்ற இடத்திலிருந்து ஒரு இலக்கைத் தாக்கச் சீரான வேகத்தில் ஏவப்படுகிறது. அது இலக்கைத தாக்குவதற்கு 15 வினாடிக்கு முன் 1400 மீட்டர் தூரத்திலும் மற்றும் 18ஆவது வினாடியில் 800 மீட்டர் தூரத்திலும் இருக்கிறது எனில்,

(i) இலக்கிற்கும் அந்த இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு என்ன?

(ii) 15ஆவது வினாடியில் எவ்வளவு தொலைவு கடந்திருக்கும்?

(iii) இலக்கைத் தாக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?

தீர்வு : (i)

நேரம்	தொலைவு
15	$d - 1400$
18	$d - 800$

d என்பது இலக்கிற்கும் இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு என்க.

வேகம் சீரானது என்பதால் வேகம் $= \dfrac{\text{தொலைவு}}{\text{நேரம்}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d-1400}{\cancel{15}_5} = \frac{d-800}{\cancel{18}_6}$$

$$\Rightarrow \quad 6(d-1400) = 5(d-800)$$

$$\Rightarrow \quad 6d - 8400 = 5d - 4000$$

$$\Rightarrow \quad d = 4400 \text{ மீ}$$

(ii) 15 வது வினாடியில் கடந்த தொலைவு :

நேரம்	தொலைவு
15	$d - 1400 = 4400 - 1400 = 3000$
18	$d - 800 = 4400 - 800 = 3600$

இருபுள்ளி வடிவம் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\Rightarrow \quad \frac{y-15}{18-15} = \frac{x-3000}{3600-3000}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-15}{\cancel{3}} = \frac{x-3000}{\cancel{600}_{200}}$$

$$\Rightarrow \quad y - 15 = \frac{x-3000}{200}$$

நேரம் 15 வினாடிகள் எனில்

$$15 - 15 = \frac{x-3000}{200}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{x-3000}{200}$$

$$\Rightarrow \quad x - 3000 = 0 \quad \Rightarrow x = 3000 \text{ மீ.}$$

(iii) இலக்கை தாக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

T_1(15 ஆவது வினாடி) D_1(1400 மீ)

T_2(18 ஆவது வினாடி) D_2(800 மீ)

இரு புள்ளி வடிவம் பயன்படுத்தி

$$\Rightarrow \quad \frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \frac{D-D_1}{D_2-D_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T-15}{18-15} = \frac{D-1400}{800-1400}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T-15}{3} = \frac{D-1400}{-\cancel{600}_{200}}$$

$$T - 15 = \frac{1400-D}{200}$$

$$T = \frac{1400-D}{200} + 15 \qquad \ldots(1)$$

$D = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட.

$$T = \frac{1400-0}{200} + 15 = 7 + 15 = 22 \text{ வினாடிகள்}$$

7. ஒரு நகரத்தில் மக்கள் தொகை 2005 மற்றும் 2010 ஆம் ஆண்டுகளில் முறையே 1,35,000 மற்றும் 1,45,000 எனில், 2015ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகையை தோராயமாகக் காண்க. (மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி ஒரு மாறிலி).

தீர்வு : x என்பது வருடங்களின் எண்ணிக்கையையும், y என்பது மக்கள் தொகையையும் குறிக்கிறது எனக் கொள்வோம்.

$x_1(2005)$ $y_1(1,35,000)$

$x_2(2010)$ $y_2(1,45,000)$

இரு புள்ளி வடிவம், x, y ற்கு இடைப்பட்ட தொடர்பு

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2005}{2010-2005} = \frac{y-1,35,000}{1,45,000-1,35,000}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2005}{\cancel{5}} = \frac{y-1,35,000}{\cancel{10,000}_{2000}}$$

$$\Rightarrow \quad x - 2005 = \frac{y-1,35,000}{2000}$$

$2000\,(x-2005) = y - 1{,}35{,}000$

$\therefore y = 2000\,(x-2005) + 1{,}35{,}000 \quad \ldots(1)$

2015-ம் ஆண்டு மக்கள் தொகையைக் காண்க.

$x = 2015$ (1) பிரதியிட

$y = 2000\,(2015-2005) + 1{,}35{,}000$

$= 2000(10) + 1{,}35{,}000$

$= 20000 + 1{,}35{,}000$

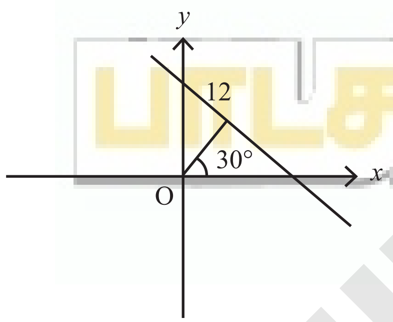
$= 1{,}55{,}000$

2015-ம் ஆண்டு மக்கள் தொகை $= 1{,}55{,}000$

8. ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 12 அலகுகள், அச்செங்குத்துக்கோடு x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 30° எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\alpha = 30,\ P = 12$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $= x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$



$\Rightarrow x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 12$

$\Rightarrow x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x + y}{2} = 12$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 24$

9. (8, 3) என்ற புள்ளி வழியே செல்லக்கூடியதும் ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத் துண்டுகளின் கூடுதல் 1 எனில், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots(1)$

கொடுக்கப்பட்டது $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{1-a} = 1$

(8, 3) இக்கோட்டின் மீது அமைவதால் நமக்குக் கிடைப்பது.

$\Rightarrow \frac{8}{a} + \frac{3}{1-a} = 1$

$\Rightarrow \frac{8(1-a)+3a}{a(1-a)} = 1$

$\Rightarrow \frac{8-8a+3a}{a-a^2} = 1$

$\Rightarrow 8 - 8a + 3a = a - a^2$

$\Rightarrow 8 - 8a + 3a - a + a^2 = c$

$a^2 - 6a + 8 = 0$

$\Rightarrow (a-4)(a-2) = 0 \quad \Rightarrow a = 4$ (அ) 2

$a = 4$ எனில் $b = 1 - 4 = -3$

$a = 2$ எனில் $b = 1 - 2 = -1$

$a = 4,\ b = -3$ எனில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

$\Rightarrow -3x + 4y = -12 \quad$ ((1) ன் மூலம்)

$\Rightarrow 3x - 4y = 12$

$a = 2,\ b = -1$ எனில் $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$

$\Rightarrow -x + 2y = -2 \quad \Rightarrow x - 2y = 2$

10. (1, 3), (2, 1) மற்றும் $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என, [ஜூன் - 2019]

(i) சாய்வு முறையில்

(ii) நேர்க்கோட்டு முறை மற்றும்

(iii) வேறு ஏதேனும் முறையில் காண்பி.

தீர்வு : (i) சாய்வு முறை

$A(1,3), B(2,1), C\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள்

AB-ன் சாய்வு $= \frac{1-3}{2-1} = \frac{-2}{1}\left(\because m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$

BC-ன் சாய்வு $= \frac{4-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{3}{\frac{1-4}{2}} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{-\cancel{3}} = -2$

$\therefore$ AB-ன் சாய்வு = BC-ன் சாய்வு

$\therefore$ A,B,C ஒரே கோட்டில் அமையும்.

(ii) நேர்கோட்டு முறை மற்றும்

AB-ன் சமன்பாடு

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{2-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-3}{-2} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow y-3 = -2x+2$$

$$\Rightarrow 2x+y-5 = 2x+y-5=0 \qquad \ldots (1)$$

$C\left(\frac{1}{2},4\right)$-ஐ 1-இல் பிரதியிட,

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+4-5 = 1+4-5=0$$

$\therefore$ A, B, C என்பன ஒரே கோட்டில் அமைவன என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(iii) வேறு ஏதேனும் முறை

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & \frac{1}{2} & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 3 & & 1 & & 4 & & 3 \end{array}$$

ΔABC-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left[\left(6+\frac{1}{2}+4\right)-\left(1+8+\frac{3}{2}\right)\right]$$

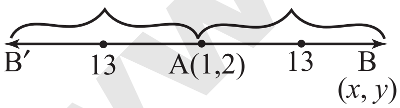
$$= \frac{1}{2}\left[\left(10+\frac{1}{2}\right)-\left(9+\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[10+\frac{1}{2}-9-\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}(1-1) = \frac{0}{2} = 0$$

$\therefore$ ΔABC-யின் பரப்பு $= 0$, $\therefore$ A, B, C ஒரே கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் ஆகும்.

11. A (1, 2) என்ற புள்ளி வழியாகவும் $\frac{5}{12}$ சாய்வைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் மீது, A என்ற புள்ளியிலிருந்து 13 அலகுகள் தூரத்தில் நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

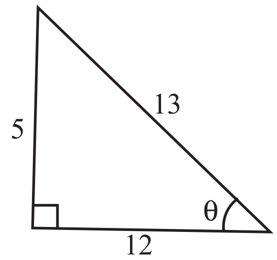


நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$$

இங்கு (x_1, y_1) is (1,2) மற்றும் $r = 13$, $m = \tan\theta = \frac{5}{12}$

$$\tan\theta = \frac{5}{12}, \sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}$$



$$\frac{x-1}{\frac{12}{13}} = \frac{y-2}{\frac{5}{13}} = \pm 13$$

$$\text{(i.e)} \quad \frac{13(x-1)}{12} = \frac{13(y-2)}{5} = \pm 13$$

$$(\div \text{ by } 13) \quad \frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{5} = \pm 1$$

$\frac{x-1}{12} = 1$	$\frac{x-1}{12} = -1$
$\Rightarrow x = 12+1 = 13$	$\Rightarrow x = -12+1 = -11$
$\frac{y-2}{5} = 1$	$\frac{y-2}{5} = -1$
$\Rightarrow y = 5+2 = 7$	$\Rightarrow y = -5+2 = -3$

தேவையான புள்ளிகள் (13, 7) அல்லது (–11, –3)

12. 150 மீட்டர் நீளமுள்ள தொடர் வண்டி வினாடிக்கு 12.5 மீ நிலையான திசைவேகத்தில் செல்கிறது.

(i) தொடர் வண்டி இயக்கத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(ii) ஒரு கம்பத்தைக் கடந்து செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் என்ன?

(iii) 850 மீட்டர் நீளம் கொண்ட பாலத்தைக் கடந்து செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் என்ன?

தீர்வு : (i) தொடர்வண்டி இயக்கத்தின் சமன்பாடு x அச்சை நேரத்தை (விநாடிகளில்) யும், y அச்சை தொலைவை (மீட்டரிலும்) குறிப்பதாகக் கொள்வோம்,

தொடர்வண்டி ஆதிப்புள்ளி என்க.

தொடர்வண்டியின் நீளம் $= 150$ மீ. இது ஒரு குறை மதிப்பு சாய்வு $= 12.5$ மீ / வினாடி

வண்டியின் நிலையின் திசைவேகம் $= 12.5$ மீ/வினாடி

சாய்வும் y வெட்டுத்துண்டும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளதால் சமன்பாடு $\Rightarrow y = mx - c$

$\therefore$ தொடர்வண்டியின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\Rightarrow \quad y = 12.5x - 150 \qquad \ldots(1)$$

(ii) ஒரு கம்பத்தைக் கடத்து செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் $y = 0$ நேரம்

$$\Rightarrow \quad \therefore 12.5x = 150$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{150}{12\cdot5} = 12 = 12 \text{ வினாடிகள்}$$

(iii) 850 மீ. நீளமுள்ள பாலத்தைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

$$850 = 12.5x - 150$$

$$\Rightarrow \quad 850 + 150 = 12.5x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1000}{12\cdot5}$$

$$\Rightarrow \quad x = 80 \text{ வினாடிகள்}$$

13. ஒரு அறிவியல் சோதனைக்காக, ஒரு சுருள் வளை கம்பி, (spring) ஒரு கொக்கியில் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சுருள் வளை கம்பியின் வெவ்வேறு எடைகள் இணைக்க சுருள் வளை கம்பியின் நீளம் அட்டவணையில் உள்ளவாறு நீளுகிறது எனில்,

எடை(கிகி)	2	4	5	8
நீளம்(செமீ)	3	4	4.5	6

(i) விளைவுகளை காட்டும் வரைபடம் வரைக.

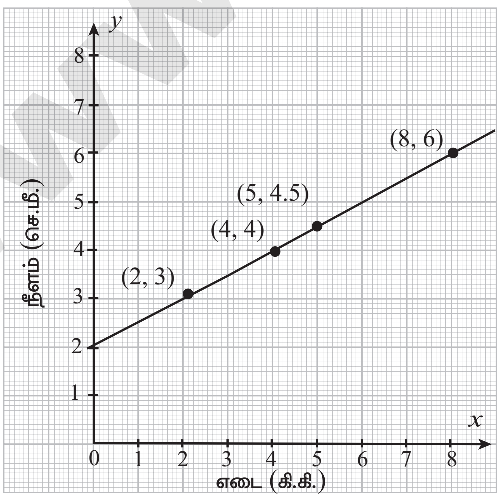
(ii) சுருள் வளை கம்பியின் நீளம் மற்றும் எடைக்கு உள்ள தொடர்புடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

(iii) சுருள் வளை கம்பியின் உண்மையான நீளத்தைக் காண்க.

(iv) சுருள் வளை கம்பி 9 செ.மீ. நீளம் அடைய வேண்டும் எனில் எவ்வளவு எடை இணைக்க வேண்டும்?

(v) 6 கி.கி. எடையை இணைக்க சுருள்வளைக் கம்பியின் நீளம் என்ன?

தீர்வு : (i) விளைவுகளை காட்டும் வரைபடம்



(ii) சுருள் வளை கம்பியின் நீளம் மற்றும் எடைக்கு உள்ள தொடர்புடைய சமன்பாடு.

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & & x_2 & y_2 \\ (2, & 3) & ' & (4, & 4) \end{matrix}$$

இருபுள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-3}{4-3} = \frac{x-2}{4-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-3}{1} = \frac{x-2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 6 = x - 2$$

$$\Rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0 \quad \ldots(1)$$

(iii) சுருள் வளைக் கம்பியின் உண்மையான நீளம்

$x = 0$ என்க.

$$\Rightarrow \quad 0 - 2y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2y = -4$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \text{ செ.மீ.}$$

(iv) சுருள் வளை கம்பி 9 செ.மீ. நீளம் அடைய வேண்டும் எனில் எவ்வளவு எடை இணைக்க வேண்டும்?

$y = 9$ என $(x - 2y + 4 = 0)$-ல் பிரதியிட

$$x - 2(9) + 4 = 0$$

$$x = 18 - 4 = 14 \text{ கி.கி.}$$

சுருள் வளை கம்பி 9 செ.மீ. நீளம் அடைய வேண்டும் எனில் 14 கி.கி. எடையை இணைக்க வேண்டும்.

(v) 6 கி.கி. எடையை இணைக்க சுருள்வளைக் கம்பியின் நீளம் என்ன?

$$x = 6$$

என $(x - 2y + 4 = 0)$-ல் பிரதியிட

$$\Rightarrow \quad 6 - 2y + 4 = 0$$

$$-2y = -10$$

$$y = 5 \text{ செ.மீ.}$$

6 கி.கி. எடையை இணைக்க சுருள் வளைக் கம்பியின் நீளம் = 5 செ.மீ.

14. ஒரு குடும்பம் 14.2 கிகி எடை கொண்ட சமையல் எரிவாயுவினை (LPG) (உருளையின் எடையுடன் 29.5 கிகி) சீரான முறையில் பயன்படுத்தும்போது 24-வது நாளில் சமையல் எரிவாயுத் தீர்ந்து விடுகிறது. உடனடியாக புதிய எரிவாயு உருளை இணைக்கப்படுகிறது. (i) உருளையிலுள்ள சமையல் எரிவாயுவின் அளவிற்கும் மற்றும் பயன்படுத்தப்பட்ட நாட்களுக்கும் உள்ள தொடர்புடைய சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) சமையல் எரிவாயுவினை முதல் 96 நாட்கள் பயன்படுத்துவதற்கான வரைபடம் வரைக.

தொகுதி - II

கணிதவியல்

பொருளடக்கம்

தொகுதி - II

07 அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 7.1

1. (i) $a_{ij} = \dfrac{(i-2j)^2}{2}$ $m = 2, n = 3$ **[செப் - 2021]**

(ii) $a_{ij} = \dfrac{|3i-4j|}{4}$, $m = 3$, $n = 4$ என இருக்குமாறு உறுப்புகளைக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய $A = [a_{ij}]$ அணிகளை உருவாக்குக.

தீர்வு : (i) $a_{ij} = \dfrac{(i-2j)^2}{2}$ $m = 2, n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\therefore a_{11} = \frac{(1-2\times1)^2}{2} = \frac{(1-2)^2}{2} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1-2\times2)^2}{2} = \frac{(1-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{13} = \frac{(1-2\times3)^2}{2} = \frac{(1-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-5)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2-2\times1)^2}{2} = \frac{(2-2)^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_{22} = \frac{(2-2\times2)^2}{2} = \frac{(2-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}} = 2$$

$$a_{23} = \frac{(2-2\times3)^2}{2} = \frac{(2-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-4)^2}{2} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}} = 8$$

$$\therefore A_{ij} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

(ii) $a_{ij} = \dfrac{|3i-4j|}{4}$, $m = 3$, $n = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{|3\times1-4\times1|}{4} = \frac{|3-4|}{4} = \frac{|-1|}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{|3\times1-4\times2|}{4} = \frac{|3-8|}{4} = \frac{|-5|}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = \frac{|3\times1-4\times3|}{4} = \frac{|3-12|}{4} = \frac{|-9|}{4} = \frac{9}{4}$$

$$a_{14} = \frac{|3\times1-4\times4|}{4} = \frac{|3-16|}{4} = \frac{|-13|}{4} = \frac{13}{4}$$

$$a_{21} = \frac{|3\times2-4\times1|}{4} = \frac{|6-4|}{4} = \frac{|2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{22} = \frac{|3\times2-4\times2|}{4} = \frac{|6-8|}{4} = \frac{|-2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{23} = \frac{|3\times2-4\times3|}{4} = \frac{|6-12|}{4} = \frac{|-6|}{4} = \frac{6}{4}$$

$$a_{24} = \frac{|3\times2-4\times4|}{4} = \frac{|6-16|}{4} = \frac{|-10|}{4} = \frac{10}{4}$$

$$a_{31} = \frac{|3\times3-4\times1|}{4} = \frac{|9-4|}{4} = \frac{|5|}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{32} = \frac{|3\times3-4\times2|}{4} = \frac{|9-8|}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{33} = \frac{|3\times3-4\times3|}{4} = \frac{|9-12|}{4} = \frac{|-3|}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_{34} = \frac{|3\times3-4\times4|}{4} = \frac{|9-16|}{4} = \frac{|-7|}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} p^2-1 & 0 & -31-q^3 \\ 7 & r+1 & 9 \\ -2 & 8 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}$ **எனில்,**

p, q, r, s **ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$p^2 - 1 = 1$$
$$p^2 = 1+1 = 2 \quad \Rightarrow p = \pm\sqrt{2}$$
$$-31-q^3 = -4 \Rightarrow -q^3 = -4+31 = 27 = 3^3$$
$$\Rightarrow q = -3$$
$$r+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$
$$s-1 = -\pi$$
$$s = -\pi + 1 = 1-\pi$$
$$\therefore p = \pm\sqrt{2},\ q = -3,\ r = \frac{1}{2},\ s = 1-\pi.$$

3. $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$ **எனில்,** $x + y$ **ஐ காண்க.**

தீர்வு :

$$2x+y = 7 \quad \ldots(1)$$
$$7y-13 = 4x$$
$$\Rightarrow 4x-7y = -13 \quad \ldots(2)$$
(1), (2) விருந்து $\cancel{4x}-7y = -13 \quad \ldots(2)$
(1) × 2 ⇒ $\cancel{4x}+2y = 14$
$$(-)\ (-)\quad (-)$$
$$\Rightarrow \cancel{-}9y = \cancel{-}27$$
$$y = \frac{27}{9} = 3$$

$y = 3$ என (1)- ல் பிரதியிட,
$$2x+3 = 7 \Rightarrow 2x = 7-3 = 4$$
$$\Rightarrow x = 2$$
$$\therefore x+y = 2+3 = 5$$

4. $2A - B + \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ **மற்றும்**

$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ **என்ற**

அணிச்சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும், A, B என்ற அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$
$$2A - B = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$$
$$(1)\times 2 \Rightarrow \cancel{2A} - 4B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 16 \\ -4 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$
$$\cancel{2A} - B = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$(-)\ (+)\quad (-)$$
$$-3B = \begin{bmatrix} (6+6) & (4-6) & (16-0) \\ (-4-4) & (2+2) & (-14+1) \end{bmatrix}$$
$$-3B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -8 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$
$$B = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -8 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -12 & 2 & -16 \\ 8 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$
$$A - \cancel{2B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$
$$(2)\times 2 \Rightarrow 4A - \cancel{2B} = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$(-)\ (+)\quad (-)$$
$$-3A = \begin{bmatrix} (3+12) & (2-12) & (8-0) \\ (-2-8) & (1+4) & (-7+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 8 \\ -10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$
$$A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 15 & -10 & 8 \\ -10 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\therefore \text{தீர்வு} : A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$
$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -12 & 2 & -16 \\ 8 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, எனில், A^4-ஐ காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = AAAA$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times1+a\times0) & (1\times a+a\times1) \\ (0\times1+1\times0) & (0\times a+1\times1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0) & (a+a) \\ (0+0) & (0+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ((1\times1)+(2a\times0)) & (2a+2a) \\ (0\times1)+(0+0) & (0+1) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ எனில்,

(i) $A_\alpha A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$ என நிறுவுக.

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் α-ன் அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு : (i)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A_\alpha A_\beta = \begin{bmatrix} (\cos\alpha\ \cos\beta)+(-\sin\alpha\ \sin\beta) & [-\cos\alpha\ \sin\beta-\sin\alpha\ \cos\beta] \\ (\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta) & (-\sin\alpha\ \sin\beta+\cos\alpha\ \cos\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta) & -(\cos\alpha\ \sin\beta+\sin\alpha\ \cos\beta) \\ (\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta) & (\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$= A_{\alpha+\beta}$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

(ii)

$$A_\alpha + A_\alpha^T = I$$

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_\alpha^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_\alpha + A_\alpha^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\cos\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A-2I)(A-3I) = 0$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & x-2 \end{bmatrix}$$

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & x-3 \end{pmatrix}$$

$= 0$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{bmatrix} (2-2) & 4+(2x-6) \\ 1-(x-2) & 2+(x-2)(x-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4+2x-6 = 0$$

$$2x-2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$ எனில், A^2 என்பது அலகு அணியாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ a+0-a & 0+b-b & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{I}$$ எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

9. $\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $\text{A}^3 - 6\text{A}^2 + 7\text{A} + k\text{I} = 0$**, எனில்,** k **- ஐ காண்க.** **[Hy - 2018]**

தீர்வு : $\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{A}^3 = \text{AAA}$$

$$\text{A}^2 = \text{AA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0+4) & (0+0+0) & (2+0+6) \\ (0+0+2) & (0+4+0) & (0+2+3) \\ (2+0+6) & (0+0+0) & (4+0+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\text{A}^3 = \text{A}^2.\text{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5+0+16) & (0+0+0) & (10+0+24) \\ (2+0+10) & (0+8+0) & (4+4+15) \\ (8+0+26) & (0+0+0) & (16+0+39) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$\text{A}^3 - 6\text{A}^2 + 7\text{A} + k\text{I}$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (21-30+7+k) & (0+0+0+0) & (34-48+14+0) \\ (12-12+0+0) & (8-24+14+k) & (23-30+7+0) \\ (34-48+14+0) & (0+0+0+0) & (55-78+21+k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 21 - 30 + 7 + k = 0$$

$$-2 + k = 0$$

$$\boxed{k = 2}$$

10. பின்வரும் நிபந்தனைகள் ஒவ்வொன்றையும் நிறைவு செய்யும் அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

(i) $\text{AB} \neq \text{BA}$ **எனுமாறுள்ள A மற்றும் B அணிகள்.**

(ii) $\text{AB} = 0 = \text{BA}, \text{A} \neq 0$ **மற்றும்** $\text{B} \neq 0$ **எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்.**

(iii) $\text{AB} = 0$ **மற்றும்** $\text{BA} \neq 0$ **எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்**

தீர்வு : $\text{AB} \neq \text{BA}$

(i) $\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2) & (1+0) \\ (0+1) & (0+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{... (1)}$$

$$\text{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (4-1) \\ (-1+0) & (-2+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{... (2)}$$

$$(1) \neq (2)$$

(ii) $\text{AB} = 0 = \text{BA}, \text{A} \neq 0, \ \text{B} \neq 0$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1+1) & (1-1) \\ (-1+1) & (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1+1) & (-1+1) \\ (1-1) & (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \text{AB} = 0 = \text{BA}$ எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

16. 3 × 4 வரிசை உடைய ஒரு அணி A மற்றும் B என்ற இரண்டு அணிகளும் A^TB மற்றும் BA^T ஆகிய இரண்டையும் வரையறை செய்யுமாறுள்ள அணிகள் எனில், B அணியின் வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = [a_{ij}]_{3\times 4}$$
$$A^T = [a_{ij}]_{4\times 3}$$
$$B = [b_{ij}]_{x\times y} \text{ என்க}$$
$$A^TB = [a_{ij}]_{4\times 3}\,[b_{ij}]_{x\times y}$$
$$\therefore x = 3$$
$$BA^T = [b_{ij}]_{x\times y}\,[a_{ij}]_{4\times 3}$$
$$\therefore y = 4$$

$\therefore$ B-ன் வரிசை $x \times y = 3 \times 4$

17. பின்வரும் அணிகளை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

தீர்வு : (i)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(A+A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

இப்பொழுது $P^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} = P$

ஆகையால் $P = \frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$Q = \frac{1}{2}\left[A - A^T\right]$ என்க.

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2}\left[A - A^T\right]$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$A = P + Q$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகவே A என்பதை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

(ii)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(A+A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} = P$$

இப்பொழுது $P = \frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\left[A - A^T\right] \text{ என்க.}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2}\left[A - A^T\right]$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$\Rightarrow A = P + Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் A என்பதை ஒரு சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ **எனுமாறுள்ள A என்ற அணியைக் காண்க.**

தீர்வு : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ எனில்

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \text{ என்க.}$$

8. A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல? [Hy - 2019; மார்ச் - 2020; செப் - 2021]

(1) $A+A^T$ (2) AA^T (3) A^TA (4) $A-A^T$

[விடை : (4) $A-A^T$]

குறிப்பு : 1. $(A+A^T)^T = A^T+(A^T)^T = A^T+A \Rightarrow$ சமச்சீர்
2. $(AA)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \Rightarrow$ சமச்சீர்
3. $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA \Rightarrow$ சமச்சீர்
4. $(A-A^T)^T = A^T-(A^T)^T$
$= A^T - A = -(A-A^T) \Rightarrow$ சமச்சீர் இல்லை

9. A,B என்பன n வரிசையுள்ள சமச்சீர் அணிகள், இங்கு $(A \neq B)$ எனில்,

(1) A + B ஆனது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணி
(2) A + B என்பது ஓர் சமச்சீர் அணி
(3) A + B என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணி
(4) A + B என்பது ஒரு பூஜ்ஜிய அணி

[விடை: (2) A + B என்பது ஓர் சமச்சீர் அணி]

குறிப்பு : $2(A+B)^T = A^T+B^T = A+B =$ சமச்சீர் அணி

10. $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}$ மற்றும் $xy = 1$, எனில் (AA^T)- ன் மதிப்பு

(1) $(a-1)^2$ (2) $(a^2+1)^2$
(3) a^2-1 (4) $(a^2-1)^2$

[விடை : (4) $(a^2-1)^2$]

குறிப்பு :
$$A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix},\ xy = 1 \text{ எனில்,}$$
$$AA^T = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & y \\ x & a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^2+x^2 & ay+ax \\ ay+ax & y^2+a^2 \end{bmatrix}$$
$$|AA^T| = |A||A^T|$$
$$\text{R.H.S} = (a^2-xy)(a^2-xy)$$
$$= (a^2-1)(a^2-1) = (a^2-1)^2$$

11. $A = \begin{bmatrix} e^{x-2} & e^{7+x} \\ e^{2+x} & e^{2x+3} \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணி எனில், x-ன் மதிப்பு [மார்ச் - 2019]

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

குறிப்பு : $(e^{x-2}.e^{2x+3}) - e^{2+x}.e^{7+x} = 0$ [விடை : (2) 8]
$$\cancel{x} - 2 + 2x + 3 = 2 + \cancel{x} + 7 + x$$
$$2x + 1 = x + 9$$
$$x = 9 - 1 = 8$$

12. $(x, -2), (5, 2), (8,8)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் எனில், x-ன் மதிப்பு. [Hy - 2018]

(1) -3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

[விடை : (4) 3]

குறிப்பு : Δ-ன் பரப்பு 0 எனில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள்.
$$\therefore \Delta\text{-ன் பரப்பு} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$x(2-8) + 2(5-8) + 1(40-16) = 0$$
$$-6x - 6 + 24 = 0$$
$$-6x = -18$$
$$x = \frac{-\cancel{18}^{\,3}}{-\cancel{6}}$$
$$x = 3$$

13. $\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{2} \neq 0$ எனில், $\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right), \left(\frac{x_2}{b}, \frac{y_2}{b}\right), \left(\frac{x_3}{c}, \frac{y_3}{c}\right)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}abc$
(3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{8}abc$ [விடை : (3) $\frac{1}{8}$]

குறிப்பு : Δ- ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{a} & 1 \\ \frac{x_2}{b} & \frac{y_2}{b} & 1 \\ \frac{x_3}{c} & \frac{y_3}{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{a} & 1 \\ \frac{x_2}{b} & \frac{y_2}{b} & 1 \\ \frac{x_3}{c} & \frac{y_3}{c} & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a \\ x_2 & y_2 & b \\ x_3 & y_3 & c \end{vmatrix}$$
[R_1 ஐ a ஆல் R_2 ஐ b ஆல் R_3 ஐ c ஆல் பெருக்கி abc வகுக்க]
$$= \frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad C_1 \rightleftarrows C_3$$
$$= \frac{1}{2abc \times 2}\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\cancel{abc}} \times \frac{\cancel{abc}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + I)(A - I) = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$$

25. A, B என்பன சம வரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(1) $A + B$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி
(2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி
(3) $AB = (BA)^T$
(4) $A^TB = AB^T$

[விடை : (2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி]

குறிப்பு : 1. AB என்பன சம வரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணி $\Rightarrow A + B$ என்பதும் சமச்சீர் ஆகும்.

2. $(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB$

$\therefore$ AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி என்ற கூற்று உண்மை அல்ல.

3. A சமச்சீர் அணி $\Rightarrow A^T = A$

B சமச்சீர் அணி $\Rightarrow B^T = B$

$\therefore (BA)^T = A^T B^T = AB \therefore AB = (BA)^T$

4. $A^T B = AB\ [\because A^T = A] = AB^T\ [\because B = B^T]$

$\therefore A^T B = AB^T$

அரசு தேர்வு வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ **என்பது ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி எனில் x ன் மதிப்பு** [Hy - 2018]

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) 3 (4) –2

[விடை : (2) $-\frac{3}{2}$]

குறிப்பு : $A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix}$, $|A| = 0$

$$\Rightarrow 4x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 4x = -6$$
$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **என்ற அணிக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?** [மார்ச் - 2019]

(1) ஒரு மேல் முக்கோண வடிவ அணி
(2) ஒரு கீழ் முக்கோண வடிவ அணி
(3) ஒரு திசையிலி அணி
(4) ஒரு மூலைவிட்ட அணி

[விடை : (3) ஒரு திசையிலி அணி]

2 மதிப்பெண்கள்

1. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, **எனில் $\vec{a} \cdot \vec{b}$ -ன் மதிப்பு காண்க.** [செப் - 2021]

தீர்வு : $\vec{a}.\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(-3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$

$= (1)(-3) + (2)(4) + 3(-5)$

$= -3 + 8 - 15 = 8 - 18 = -10$

3 மதிப்பெண்கள்

1. ஒரு சதுர அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம் என நிறுவுக.

தீர்வு : சதுர அணியானது A என்க. [மார்ச் - 2019]

எனில்; $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

ஆனால்; $A + A^T$ என்பது சமச்சீர்

$A - A^T$ என்பது எதிர் சமச்சீர்

$\therefore$ A யை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

2. $\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ **எனில், x-ன் மதிப்பு காண்க.** [செப் - 2021]

தீர்வு : முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் என்பதால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x = 1, 2, 3.$$

5 மதிப்பெண்கள்

1. காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி **[Hy - 2018]**

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & c+a \\ a+b & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

தீர்வு :

$$A = \begin{vmatrix} -2a & a+b & c+a \\ a+b & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

$a = -b$ என்க

$$\begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2b & -2b & 2c \\ b+c & l+c & -(b+c) \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + R_1$
$R_3 \to R_3 + R_1$

$$= 2b(b+c)\begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (a+b)$ ஒரு காரணி.

அதே போல் $(b+c)$ மற்றும் $(c+a)$ காரணிகள்

($\because$ $|A|$ என்பது a, b, c யில் வட்ட சமச்சீரானது)

$|A|$ -ன் படி 3.

கிடைக்கப் பெற்ற காரணிகளின் பெற்ற தொகை படி 3.

$\therefore |A| = k(a+b)(b+c)(c+a)$

மதிப்புகள் பிரதியிட $k = 4$

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & c+a \\ a+b & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

2. $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ **எனில்,**

A^2-ன் மதிப்பைக் காண்க. **[செப். - 2020]**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 & a^3b + ab^3 + abc^2 & a^3c + ab^2c + ac^3 \\ a^3b + ab^3 + abc^2 & a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 & a^2bc + b^3c + bc^3 \\ a^3c + ab^2c + ac^3 & a^2bc + b^3c + bc^3 & a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2) \\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) \\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} [\because a^2 + b^2 + c^2 = 1]$$

$$A^2 = A \Rightarrow A.A = A \Rightarrow A = I$$

3. $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$ **என நிறுவுக.** **[மார்ச் - 2020]**

தீர்வு :

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

[இரண்டாவது அணிக்கோவையில் $R_2 \leftrightarrow R_3$]

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

நிரை–நிரல் பெருக்கல் முறைப்படி

$$= \begin{vmatrix} -a^2 + bc + cb & -ab + ab + c^2 & -ac + b^2 + ac \\ -ab + c^2 + ab & -b^2 + ac + ac & -bc + bc + a^2 \\ -ac + ac + b^2 & -bc + a^2 + bc & -c^2 + ab + ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}$$

❁ ❁ ❁ ❁ ❁