சூராவின்

கணிதவியல்

12ஆம் வகுப்பு

புதிய பாடப்புத்தகத்தின்படி தயாரிக்கப்பட்டது

தொகுதி - I & II

சிறப்பம்சங்கள்

- பாட நூலில் உள்ள பயிற்சி வினாக்களுக்கு முழுமையான, எளிமையான தீர்வுகள் தரப்பட்டுள்ளன.
- ஒவ்வொரு பாடத்திற்கும் முக்கிய வரையறைகள் மற்றும் நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.
- அனைத்துப் பாடப்பகுதிகளிலும் மிகுதியான அளவில் கூடுதல் வினாக்கள் விடைகளுடன் தரப்பட்டுள்ளன.
- மாதிரி வினாத்தாள்கள் 1 முதல் 6 வரை (பிடிஏ) வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு மாதிரி வினாத்தாள் - 2019 **[அ.மா.வி -2019]**, காலாண்டுத் தேர்வு - 2019 **[QY-2019]**, அரையாண்டுத் தேர்வு - 2019 **[HY-2019]**, பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020 **[மார்ச் - 2020]** மற்றும் அரசு துணைத்தேர்வு செப். 2020 & ஆகஸ்ட் 2021 **[செப். - 2020 & ஆகஸ்ட் - 2021]** வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு பொதுத் தேர்வு மே - 2022 வினாத்தாள் விடைகளுடன் தரப்பட்டுள்ளது.

சூரா பப்ளிகேஷன்ஸ்
சென்னை

2023-24 புதிய பதிப்பு
© வெளியீட்டாளர்கள்

ISBN : **978-93-5330-526-0**
குறியீட்டு எண் : SG 326

எழுதி வழங்கியவர்
திரு.G. **செல்வராஜ்** M.Sc., M.Ed., M.Phil. *சென்னை*

திருத்தியவர்
திரு.S. **சதிஷ்** M.Sc., M.Phil.

மதிப்பாளர்
திரு. S. **நிரஞ்சன்** B.Tech., (NITT) PGDM (IIM).
சென்னை

பதிப்பாசிரியர் உரை

12ம் வகுப்பிற்கான சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியை வெளியிடுவதில் பெருமிதமும் மகிழ்ச்சியும் அடைகிறோம். **கணிதவியல்** பாடங்களுக்கான வினா விடைகள் மிகவும் எளிமையாக, சுலபமாக புரிந்துகொள்ளும் விதத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டி மாணவர்களின் எல்லாத் தேவைகளையும் கருத்தில் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. பாடநூலை நன்கு மதிப்பாய்வு செய்து மாணவர்கள் எல்லாப் பாடங்களையும் வெகுவாக உட்கிரகித்து அறிந்துகொண்டு தேர்வை சுலபமாக எழுதி அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்று வெற்றியாளர்களாகும் விதத்தில், நமது வெற்றிக்கான இந்த வழிகாட்டி தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடம் நடத்துவதிலும், மாணவர்களுக்குக் கற்றுக்கொள்வதிலும் இந்த வழிகாட்டி துணையாக இருக்கும்.

அரசு பொதுத் தேர்வுக்கான **புதிய மதிப்பீட்டு முறையில் 100 மதிப்பெண்கள் வடிவமைப்பில், 90 மதிப்பெண்களுக்கான எழுத்துத் தேர்வின் வினாத்தாள் அடிப்படையில்** நமது வழிகாட்டி உருவாக்கப்பட்டுள்ளதால், தேர்வுகளை மிகச் சரியான விதத்தில் எதிர்கொள்ளலாம்.

நமது சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியில் இது போன்ற பல சிறப்பம்சங்கள் அடங்கியிருந்தாலும், **கணிதவியல்** பாடத்தை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள உதவிடும் ஆசிரியர்களின் பணியும் மகத்தானது என்பதை மறுப்பதற்கில்லை.

ஆசிரியர்களின் கற்றுத்தரும் பணியில் உறுதுணையாகவும், மாணவர்கள் பாடங்களைக் கற்கும் விதத்தில் ஊக்கம் தரும் வகையிலும் நமது வழிகாட்டி திகழும் என நம்புகிறோம்.

இறையருளை வேண்டுகிறோம்.

நலமே விளைக!

சுபாஷ் ராஜ், B.E., M.S.,
- பதிப்பகத்தார்

வாழ்த்துக்கள் !!!

தலைமை அலுவலகம்
சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்
1620, 'ஜே' பிளாக், 16-ஆவது பிரதான சாலை,
அண்ணா நகர், சென்னை-600 040.
Phones : 044 - 4862 9977, 044 - 4862 7755.
e-mail : orders@surabooks.com
website : www.surabooks.com

For Orders Contact
80562 94222
81242 01000
81243 01000
96001 75757
78718 02000
98409 26027

23/11/2022

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

தொகுதி - II

TO ORDER WITH US

SCHOOLS and TEACHERS:

We are grateful for your support and patronage to **'SURA PUBLICATIONS'**
Kindly prepare your order in your School letterhead and send it to us.
For Orders contact: 81242 01000 / 81243 01000

DIRECT DEPOSIT

A/c Name : **Sura Publications**	A/c Name : **Sura Publications**
Our A/c No. : **36550290536**	Our A/c No. : **21000210001240**
Bank Name : **STATE BANK OF INDIA**	Bank Name : **UCO BANK**
Bank Branch : Padi	Bank Branch : Anna Nagar West
IFSC : SBIN0005083	IFSC : UCBA0002100
A/c Name : **Sura Publications**	A/c Name : **Sura Publications**
Our A/c No. : **6502699356**	Our A/c No. : **1154135000017684**
Bank Name : **INDIAN BANK**	Bank Name : **KVB BANK**
Bank Branch : Asiad Colony	Bank Branch : Anna Nagar
IFSC : IDIB000A098	IFSC : KVBL0001154
A/c Name : **Sura Publications**	A/c Name : **Sura Publications**
Our A/c No. : **13240200032412**	Our A/c No. : **50200031530945**
Bank Name : **FEDERAL BANK**	Bank Name : **HDFC BANK**
Bank Branch : Anna Nagar	Bank Branch : Cenotaph Road, Teynampet
IFSC : FDRL0001324	IFSC : HDFC0001216

A/c Name	: **Sura Publications**
Our A/c No.	: **446205000010**
Bank Name	: **ICICI BANK**
Bank Branch	: Anna Nagar
IFSC	: ICIC0004462

After Deposit, please send challan and order to our address.
email to : orders@surabooks.com / Whatsapp : 81242 01000.

G Pay **For Google Pay : 98409 26027**

For PhonePe : 98409 26027

DEMAND DRAFT / CHEQUE

Please send Demand Draft / cheque in favour of **'SURA PUBLICATIONS'** payable at **Chennai**. The Demand Draft / cheque should be sent with your order in School letterhead.

STUDENTS :

Order via Money Order (M/O) to

SURA PUBLICATIONS
1620, 'J' Block, 16th Main Road, Anna Nagar, Chennai - 600 040.
Phones : 044-4862 9977, 044-4862 7755.
Mobile : 96001 75757 / 81242 01000 / 81243 01000.
email : orders@surabooks.com Website : www.surabooks.com

அத்தியாயம்

1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- $|A| \neq 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் y $|A| = 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியக்கோவை அணி.
- A–ன் இணைக்காரணி அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A–ன் சேர்ப்பு அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது (adj A).
- $AB = BA = I_n$, எனில் அணி B A-ன் நேர்மாறு அணி எனப்படும்.
- ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.
- A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் மட்டுமே A^{-1} காண இயலும்.
- பூச்சியக் கோவை அணிக்கு நேர்மாறு காண இயலாது.
- A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ எனில், $B = C$ (இடது நீக்கல் விதி).
- A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$ (வலது நீக்கல் விதி).
- A மற்றும் B என்பன n, வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில்
  (adj AB) = (adj B) (adj A)
- ஒரு சதுர அணி A-க்கு $AA^T = A^TA = I$ எனில், A ஆனது செங்குத்து அணி எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு ஒரே வரிசையுடைய அணிகளில் ஏதாவது ஓர் அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் மற்ற அணியாகப் பெற முடியுமெனில், Aயும் Bயும் சமான அணிகள் என்றழைக்கப்படும் (A~B).
- ஓர் அணியில் அனைத்து பூச்சிய நிரைகளும் அணியின் அடிப்பகுதி நிரைகளாக அமைந்து, எந்தவொரு கீழ்வரிசை – நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது அந்நிரைக்கு மேலாக அமைந்து நிரைகள் ஒவ்வொன்றின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறமாக அமைந்தால் அவ்வணியானது நிரை – ஏறுபடி வடிவில் இருக்கும்.
- ஓர் அணி A- இன் தரம் என்பது அதன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் உச்ச வரிசையாகும் [$\rho(A)$].
- நிரை ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணியின் அணித்தரம் அப்பூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.
- ஓர் அலகு அணியில் ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியை தொடக்க நிலை அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலைச் செயலிகளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியினை ஓர் அலகு அணியாக உருமாற்றம் செய்யலாம்.
- ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது குறைந்தது ஒரு தீர்வு பெற்றிருந்தால், தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது எனப்படும்.
- ஒரு தீர்வு கூட பெறவில்லையெனில் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது எனப்படும்.

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- a_{ij} -ன் இணைக்காரணி $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, இதை M_{ij} -ன் சிற்றணிக்கோவை M_{ij}.
- ஒவ்வொரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A-விற்கும், $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_n$.
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்
  (i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$
  (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  (iii) $(\lambda A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி.

நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதி :

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ இங்கு A மற்றும் B என்பன பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் ஒரே வரிசையுடையவைகள்

இரட்டிப்பு நேர்மாறு விதி

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் A^{-1} யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$.

- A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்,
  (i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1}) = \dfrac{1}{|A|} \cdot A$
  (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$
  (iii) $\text{adj } (\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$
  (iv) $\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj } (A)$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி
  (v) $|\text{adj } (\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$
  (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj } (A^T)$
- ஓர் அணியில் குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு இருப்பின் $\rho(a) \geq 1$.
- அலகு அணி I_n -ன் தரம் n ஆகும்.
- A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \{m, n\}$- ன் மீச்சிறு.
- n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு காணத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = n$.
- தொடக்க நிலைச் செயலிகள் மூலம் A என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணியை, I_n வடிவத்திற்கு உருமாற்றுவது காஸ் ஜோர்டன் முறையாகும்.

நேர்மாறு அணி காணல் முறை :

- $AX = B$ க்கான தீர்வு $X = A^{-1}B$ இங்கு A மற்றும் B ஒரே வரிசையுடைய சதுர அணிகள் மற்றும் பூச்சியக் கோவை அணி.

கிராமரின் விதி :

- $\Delta = 0$, எனில் கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த இயலாது, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை :

நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றி பின்பு பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் மூலம் தீர்வு காண்பதாகும்.

ரூச்சி - கபெல்லி தேற்றம் :

$AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதற்கு $\rho(A) = \rho([A|B])$ எனில் மட்டும்.

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, மாறிகளின் எண்ணிக்கை, தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n - k$, $k \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A|B])$, எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாடுகள் தொகுப்பு :

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும், அது வெளிப்படையான தீர்வாகும், $|A| \neq 0$.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|O]) < n$, வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.
வெளிப்படையற்ற தீர்வுக்கு, $|A| = 0$.

- $A^{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\, A|}} \cdot \text{adj } A$
- $A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\, A|}} \cdot \text{adj } (\text{adj } A)$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு :(i) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ என்க.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டமல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ என்க.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7)-(6-3)+(21-12) \\ -(6-7)+(4-3)-(14-9) \\ +(3-4)-(2-3)+(8-9) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ என்க. மற்றும் $\lambda = \frac{1}{3}$

$\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1}(\text{adj } A)$ ஆதலால்

$$\text{adj}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{adj}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

∴ தேவையான அணியின் சேர்ப்பு

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (2+4)-(-4-2)+(4-1) \\ -(4+2)+(4-1)-(-4-2) \\ +(4-1)-(4+2)+(2+4) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{9}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 3 ஐ பொதுவில் எடுக்க]

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ என்க

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0$$

A பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} காணலாம்.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$$

இங்கு $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்றம் மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ என்க.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த,

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 5\,(25-1) - 1\,(5-1) + 1\,(1-5)$$
$$= 5\,(24) - 1\,(4) + 1\,(-4)$$
$$= 120 - 4 - 4 = 120 - 8 = 112 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை எனில் A^{-1} சாத்தியம்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(25-1)-(5-1)+(1-5) \\ -(5-1)+(25-1)-(5-1) \\ +(1-5)-(5-1)+(25-1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் 4 ஐ பொதுவில் எடுக்க,

$$\text{adj } A = 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A = \frac{1}{112}\cdot 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2\,(8-7) - 3\,(6-3) + 1\,(21-12)$$
$$= 2\,(1) - 3(3) + 1\,(9)$$
$$= 2 - \cancel{9} + \cancel{9} = 2 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} சாத்தியம்

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7)-(6-3)+(21-12) \\ -(6-7)+(4-3)-(14-9) \\ +(3-4)-(2-3)+(8-9) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

இங்கு, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **எனில், $[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$ எனக்காட்டுக.**

[Hy - 2019; FRT - 2022]

தீர்வு : $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ தரப்பட்டது.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|F(\alpha)| = \cos\alpha\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} - 0 + \sin\alpha\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \cos\alpha\,(\cos - 0) + \sin\alpha\,(0 + \sin\alpha)$$
$$= \cos^2 + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

F (α) ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால், $[F(\alpha)]^{-1}$ காணலாம்.

இங்கு, adj (F(α)) =

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(\cos\alpha - 0) & -(0) & +(0+\sin\alpha) \\ -(0) & +(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) & -(0) \\ +(0-\sin\alpha) & -(0) & +(\cos - 0)\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & +\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore F(\alpha)^{-1} = \frac{1}{|F(\alpha)|} \text{ adj } (F(\alpha))$$

$$[F(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

இங்கு, $F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$$

[∵ $\cos\alpha$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ மற்றும் $\sin\alpha$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$]

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

$[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 3A - 7I_2 = O_2$ எனக்காட்டுக. இதன் மூலம் A^{-1} காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-3 & 15-6 \\ -5+2 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 3A - 7I_2$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-15-7 & 9-9+0 \\ -3+3+0 & 1+6-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$\therefore A^2 - 3A - 7I_2 = 0$

பின்புறமாக A^{-1} ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$A^2 . A^{-1} - 3AA^{-1} - 7I_2 A^{-1} = 0.A^{-1}$

$\Rightarrow A(AA^{-1}) - 3(AA^{-1}) - 7(A^{-1}) = 0$

[∵ $I_2 A^{-1} = A^{-1}$ மற்றும் | $(0)A^{-1} = 0$]

$\Rightarrow AI - 3I - 7A^{-1} = 0$ [∵ $AA^{-1} = I$]

$\Rightarrow AI - 3I = 7A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}[A - 3I]$ [∵ $AI = A$]

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\left[\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5-3 & 3-0 \\ -1-0 & -2-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

5. $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ எனில், $A^{-1} = A^T$ நிறுவுக.

தீர்வு : $A^{-1} = A^T$ என நிறுவ வேண்டும்.

$AA^{-1} = AA^T$

$AA^T = I$ என நிறுவினால் போதும்.

$$AA^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16 \\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32-28 \\ -8-8+16 & 4-32+28 & 1+64+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \frac{81}{81}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே $A^{-1} = A^T$

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, எனில் $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_2$ என்பதைச் சரிபார்க்க. [செப். - 2020; ஆகஸ்ட் - 2021]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்ற]

$$|A| = 24 - 20 = 4$$

$$\therefore A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & 32-32 \\ -15+15 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$(\text{adj } A)(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & -12+12 \\ 40-40 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$$

$$|A|\, I_2 = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

(1), (2) மற்றும் (3)லிருந்து,

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_2$$

என நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில்** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+10 & -9+4 \\ -7+25 & -21+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

$|AB| = -77 + 90 = 13 \neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ காணலாம்

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ காணலாம்

$|B| = -2 + 15 = 13 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ காணலாம்

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 10-21 & -4+9 \\ -25+7 & 10-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) விருந்து

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. என நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில் A - ஐ காண்க.** **[பிடிஏ - 6]**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}.\text{adj}(\text{adj } A)$ என அறிவோம் ...(1)

$$|\text{adj } A| = 2\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$$= 2(24-0) + 4(-6-14) + 2(0+24)$$
$$= 2(24) + 4(-20) + 2(24) = 48 - 80 + 48$$
$$= 96 - 80 = 16 \quad \ldots(2)$$

இங்கு, adj (adj A)

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(24-0)-(-6-14)+(0+24) \\ -(-8-0)+(4+4)-(0-8) \\ +(28-24)-(-14+6)+(24-12) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 20 & 24 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐ (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{16}}.4\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \pm\frac{4}{4}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

9. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **எனில்** A^{-1} **-ஐ காண்க.** **[FRT - 2022]**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj (A)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}A|}}(\text{adj } A)$ என அறிவோம். ...(1)

$|\text{adj } A| = 0 + 2\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(36-18) = 2(18) = 36$

$\therefore A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{36}}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \pm \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில் adj (adj (A)) -ஐ காண்க .**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

இங்கு $\text{adj(adj } A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} +(2-0) & -(0) & +(0+2) \\ -(0) & +(1+1) & -(0) \\ +(0-2) & -(0) & +(2-0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$

$\text{adj (adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ **எனில்**

$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{vmatrix} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$

நாம் அறிவது $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A = \frac{1}{\sec^2 x}\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$

$= \cos^2 x\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 x\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\cos x \sin x \\ \cos x \sin x & \cos^2 x \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix}$

$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2 x & -\cos x \sin x \\ \cos x \sin x & \cos^2 x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -2\sin x \cos x \\ 2\sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

12. $A \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ **எனில் A -ஐ காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ மற்றும்

$C = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ என்க.

$\therefore AB = C$

B^{-1} ஆல் பின்புறம் பெருக்க கிடைப்பது

$A(BB^{-1}) = CB^{-1}$

$\Rightarrow A = CB^{-1}$ $[\because BB^{-1} = I]$

$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -10 + 3 = -7 \neq 0$

$\therefore B^{-1}$ காணலாம்

$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj } B = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$A = CB^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}14 & 7\\ 7 & 7\end{bmatrix}\cdot\left(\frac{-1}{7}\right)\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$
$$= 7\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\left(\frac{-1}{7}\right)\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}-4+1 & -6+5\\ -2+1 & -3+5\end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

13. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, **மற்றும் AXB = C எனில் X என்ற அணியைக் காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ மற்றும்

$C = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ மேலும், $A X B = C$

A^{-1} ஆல் முன்புறம் பெருக்க கிடைப்பது,

$$(A^{-1}A)XB = A^{-1}C$$
$$\Rightarrow XB = A^{-1}C. \qquad [\because A^{-1}A = I]$$

B^{-1} ஆல் பின்புறம் பெருக்க கிடைப்பது

$$(XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1}$$
$$\Rightarrow X = (A^{-1}C)B^{-1}$$
$$|A| = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0+2 = 2 \neq 0$$
$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$
$$|B| = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$$
$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj } B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$
$$A^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0+2 & 0+2\\ -2+2 & -2+2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}(2)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\therefore X = (A^{-1}C).B^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1-1 & 2+3\\ 0+0 & 0+0\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}(5)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\therefore X = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

14. $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **எனில்** $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$|A| = 0 - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$= -1(0-1) + 1(1-0) = 1+1 = 2$$

$|A| = 2 \neq 0$, எனவே A^{-1} காணலாம்

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix}(0-1) & -(0-1) & +(1-0)\\ -(0-1) & +(0-1) & -(0-1)\\ +(1-0) & -(0-1) & +(0-1)\end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$
$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \text{...(1)}$$

இங்கு $A^2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}0+1+1 & 0+0+1 & 0+1+0\\ 0+0+1 & 1+0+1 & 1+0+0\\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+1+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$A^2 - 3I = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2-3 & 1-0 & 1-0\\ 1-0 & 2-3 & 1-0\\ 1-0 & 1-0 & 2-3\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(A^2-3I) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \text{... (2)}$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து, $A^{-1} = \frac{1}{2}[A^2 - 3I]$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

15. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **என்ற அணியை பிந்தையப் பெருக்கல் சங்கேத மொழியாக்க அணியாகக் கொண்டு $[2\ \ -3]$ $[20\ \ 4]$ என்ற பெறப்பட்டச் செய்தியை $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$-ன் நேர்மாறு அணியின் பிந்தையப் பெருக்கற் சாவியாகக் கொண்டு சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்க. இங்கு ஆங்கில எழுத்துகள் $A - Z$ -க்கு முறையே எண்கள் $1 - 26$ ஐயும், காலியிடத்திற்கு எண் 0 ஐயும் பொருத்தி சங்கேத மொழியாக்கம் மற்றும் மொழிமாற்றம் செய்க.**

தீர்வு : சங்கேத மொழியாக்குதலுக்கான $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$$|A| = -1+2 = 1 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் பெருக்கற் சாவி அணி $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட நிரை அணி	மொழி மாற்றத்தின் அணி	சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை
$[2\ \ -3]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	$= [2+6\quad 2+3] = [8\quad 5]$
$[20\ \ 4]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	$= [20-8\quad 20-4] = [12\ \ 16]$

சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை அணிகளின் வரிசை பின்வருமாறு $[8\quad 5]$, $[\ 12\quad 16]$
இங்கு $8^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து H.
$5^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து E.
$12^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து L
மற்றும் $16^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து P பெறுபவர் தாம் பெற்ற சங்கேத செய்தி“HELP” எனப் படிக்கிறார்.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ [மிடிஏ - 5]

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ [ஜூலை - 2022]

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

[ஆகஸ்ட் - 2021]

தீர்வு : (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

A ஒரு 2×2 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \leq (2, 2)$ - மீச்சிறு $= 2$

A -ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 2 ஆகும்.

இது $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$ஆகையால், $\rho(A) < 2$

அடுத்து 1 வரிசையுடைய சிற்றணிக் கோவையை தேர்வு செய்வோம் $|2| = 2 \neq 0$

$$\therefore \rho(A) = 1$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ என்க.

A ஒரு 3×2 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \leq (3, 2)$ -ன் மீச்சிறு $= 2$

A -ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 2 ஆகும்.

அது $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 7-12 = -5 \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 2.$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

A ஒரு (2×4) வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \leq (2, 4)$ -ன் மீச்சிறு $= 2$

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்சவரிசை 2 ஆகும்.

அது $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6+6 = 0$

மேலும், $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1+0 = -1 \neq 0.$

$$\therefore \rho(A) = 2.$$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ என்க.

A ஒரு 3×3 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (3, 3)$ - ன் மீச்சிறு $= 3$

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்சவரிசை 3 ஆகும்.

அது, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

[R_1- ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 1\,(-4+6) + 2\,(-2+30) + 3\,(2-20)$
$= 1\,(2) + 2\,(28) + 3\,(-18)$
$= 2 + 56 - 54 = 58 - 54 = 4 \ne 0$
$\therefore \rho(A) = 3.$

(v) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

A ஒரு 3×4 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (3, 4)$- ன் மீச்சிறு $= 3$

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 3

அது $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 8\,(4-4) = 0$

[C_1 -ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

மேலும், $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

[C_1 -ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= -8\,(6-4) = -8\,(2) = -16 \ne 0 \qquad \therefore \rho(A) = 3$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **[FRT - 2022]**

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **[மே - 2022]**

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ என்க **[பிடிஏ - 1]**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது. இரண்டு அபூச்சிய நிரைகளை உடையது.

$\therefore \rho(A) = 2.$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \div 4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 7R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to 2R_4 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது. மூன்று அபூச்சிய நிரைகளை உடையது. $\therefore \rho(A) = 3$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ என்க.

$$A \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \div 2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவில் அமைந்துள்ளது. மூன்று அப்பூச்சிய நிரைகளை உடையது.

$\therefore \rho(A) = 3$

3. **பின்வரும் அணிகளுக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க:**

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **[அ.மா.வி - 2019]** **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 \div 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \times 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \quad \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

ஆகையால், $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ என அறிவோம்.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3+2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2-3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1+8R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

ஆகையால் $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ என அறிவோம்.

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

(i) $2x + 5y = -2,\ x + 2y = -3$

(ii) $2x - y = 8,\ 3x + 2y = -2$ [பிடிஎ - 3]

(iii) $2x + 3y - z = 9,\ x + y + z = 9,\ 3x - y - z = -1$

(iv) $x + y + z - 2 = 0,\ 6x - 4y + 5z - 31 = 0,\ 5x + 2y + 2z = 13.$

தீர்வு : (i) $2x + 5y = -2,\ x + 2y = -3$

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ AX = B இங்கு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0.$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 15 \\ -2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = -11, y = 4.$

(ii) $2x - y = 8,\ 3x + 2y = -2$

தொகையின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AX = B$ இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$

இப்பொழுது, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 16 - 2 \\ -24 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 14 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{-28}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = -4$

(iii) $2x + 3y - z = 9,\ x + y + z = 9,\ 3x - y - z = -1.$

தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ AX = B இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix},$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(-1 + 1) - 3(-1 - 3) - 1(-1 - 3)$

$= 0 - 3(-4) - 1(-4) = 12 + 4 = 16.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(-1+1) & -(-1-3) & +(-1-3) \\ -(-3-1) & +(-2+3) & -(-2-9) \\ +(3+1) & -(2+1) & +(2-3) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 11 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0+36-4 \\ 36+9+3 \\ -36+99+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = 3, z = 4$

(iv) $x + y + z - 2 = 0,\ 6x - 4y + 5z - 31 = 0,\ 5x + 2y + 2z = 13$

தொகையின் அணி வடிவம் $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$

$AX = B$ இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1\,(-8-10) - 1\,(12-25) + 1\,(12+20)$

$= 1\,(-18) - 1\,(-13) + 1\,(32) = -18 + 13 + 32 = 27$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(-8-10) & -(12-25) & +(12+20) \\ -(2-2) & +(2-5) & -(2-5) \\ +(5+4) & -(5-6) & +(-4-6) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 13 & 32 \\ 0 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -36+0+117 \\ 26-93+13 \\ 64+93-130 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 81 \\ -54 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 3, y = -2, z = 1$

2. $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க. இதன் மூலம் $x + y + 2z = 1$, $3x + 2y + z = 7$, $2x + y + 3z = 2$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+3+6 & -5+2+3 & -10+1+9 \\ 7+3-10 & 7+2-5 & 14+1-15 \\ 1-3+2 & 1-2+1 & 2-1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4.\ I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+7+2 & 1+1-2 & 3-5+2 \\ -15+14+1 & 3+2-1 & 9-10+1 \\ -10+7+3 & 2+1-3 & 6-5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4.\ I_3.$$

ஆகையால் $AB = BA = 4.\ I_3$ என அறிவோம்.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}A\right) B = B\left(\frac{1}{4}A\right) = I$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4}A$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு தொகுப்பை அணி வடிவில் எழுத கிடைப்பது,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{4}A\right]\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5+7+6 \\ 7+7-10 \\ 1-7+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = 1, z = -1$

3. ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாத ஊதியத்தில் ஒரு பணியில் அமர்த்தப்படுகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான ஊதிய உயர்வு அவருக்கு வழங்கப்படுகிறது. 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹ 19,800 மற்றும் 9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹23,400 எனில் அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் மற்றும் ஆண்டு உயர்வு எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

தீர்வு : அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் ₹ x என்க மற்றும் ஆண்டு உயர்வு ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி $x + 3y = 19800$ மற்றும் $x + 9y = 23400$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}\,A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 178200 & -70200 \\ -19800 & +23400 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 108000 \\ 3600 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18000 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 18000, y = 600.$

எனவே அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் ₹ 18000 மற்றும் ஆண்டு உயர்வு ₹ 600.

4. 4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள். எனில் அவ்வேலையை ஓர் ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும் ?

தீர்வு : ஒரு ஆடவர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு x நாட்கள் மற்றும் மகளிர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு y நாட்கள் ஆகும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி,

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{3} \text{ மற்றும் } \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} = s \text{ மற்றும் }$$

$$\frac{1}{y} = t \text{ என பிரதியிடு}$$

$$\therefore 4s + 4t = \frac{1}{3}$$

$$\text{மற்றும் } 2s + 5t = \frac{1}{4}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix}4 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ இங்கு}$$

$$A = \begin{bmatrix}4 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\text{இங்கு } |A| = \begin{vmatrix}4 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 20 - 8 = 12 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -1\\ \frac{-2}{3} & +1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}\\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{18}\\ \frac{1}{36}\end{bmatrix}$$

$$\therefore s = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow x = 18$$

$$t = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{36} \Rightarrow y = 36.$$

ஆகையால் ஓர் ஆடவர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு 18 நாட்கள் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு 36 நாட்கள் ஆகும்.

5. A, B மற்றும் C என்ற பொருட்களின் விலை ஓர் அலகிற்கு முறையே ₹ x, y, மற்றும் z ஆகும். P என்பவர் B-ல் 4 அலகுகள் வாங்கி, A-ல் 2 அலகையும் C-ல் 5 அலகையும் விற்கிறார். Q என்பவர் C-ல் 2 அலகுகள் வாங்கி A-ல் 3 அலகுகள் மற்றும் B-ல் 1 அலகையும் விற்கிறார். R என்பவர் A-ல் 1 அலகை வாங்கி, B-ல் 3 அலகையும் C அலகில் ஒரு அலகையும் விற்கிறார். இவ்வணிகத்தில் P, Q மற்றும் R முறையே ₹ 15,000, ₹ 1,000 மற்றும் ₹ 4,000 வருமானம் ஈட்டுகின்றனர் எனில் A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலை எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

தீர்வு : A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலை ₹ x, ₹ y மற்றும் ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி,

$$2x - 4y + 5z = 15000$$
$$3x + y - 2z = 1000$$
$$-x + 3y + z = 4000$$

சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15000\\ 1000\\ 4000\end{bmatrix}$$

$$AX = B \text{ இங்கு } A = \begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$

$$\text{மற்றும் } B = \begin{bmatrix}15000\\ 1000\\ 4000\end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 2(1+6) + 4(3-2) + 5(9+1)$$

$$= 2(7) + 4(1) + 5(10) = 14 + 4 + 50 = 68.$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}+(1+6) & -(3-2) & +(9+1)\\ -(-4-15) & +(2+5) & -(6-4)\\ +(8-5) & -(-4-15) & +(2+12)\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}7 & -1 & 10\\ 19 & 7 & -2\\ 3 & 19 & 14\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}7 & 19 & 3\\ -1 & 7 & 19\\ 10 & -2 & 14\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{68}\begin{bmatrix}7 & 19 & 3\\ -1 & 7 & 19\\ 10 & -2 & 14\end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{68}\begin{bmatrix}7 & 19 & 3\\ -1 & 7 & 19\\ 10 & -2 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15000\\ 1000\\ 4000\end{bmatrix}$$

பிடிஏ மாதிரி வினா- விடை

1 மதிப்பெண்

1. A, B என்பன செங்குத்து அணிகள் எனில், $(AB)^T$ (AB) என்பது [பிடிஏ - 1]

(1) A (2) B (3) I (4) A^T

குறிப்பு : [**விடை :** (3) I]

$$AA^T = A^TA = I$$
$$BB^T = B^TB = I$$
$$(AB)^T(AB) = B^TA^T(AB) = B^T(A^TA)B$$
$$= B^T(IB) = I$$
$$= B^T(IB) = I$$

2. ஓர் 3×3 அணியின் சேர்ப்பு அணி $P = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ எனில், அணிக்கோவை P-ன் சாத்தியமான மதிப்பு (கள்) [பிடிஏ - 4]

(1) 3 (2) –3 (3) ± 3 (4) $\pm\sqrt{3}$

[**விடை :** (3) ±3]

குறிப்பு : $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1[1-4]-2[1-4]+2[2-2]$

$$= -1(-3) - 2(-3) + 0 = 3 + 6 = 9$$
$$|P| = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

3. A என்ற 3 × 3 வரிசையுடைய, அணிக்கு $|3adj\ A| = 3$ எனில் |A| -ன் மதிப்பு [பிடிஏ - 5]

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\pm\frac{1}{3}$ (4) ± 3

குறிப்பு : $|3\ adj\ A| = 27\ |adj\ A|$ [**விடை :** (3) $\pm\frac{1}{3}$]

$$3 = 27|A|^2$$
$$|A|^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow |A| = \pm\frac{1}{3}$$

4. A ஆனது பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனில் பின்வருபனவற்றுள் எது தவறு? [பிடிஏ - 6]

(1) $(adjA)^{-1} = \frac{A}{|A|}$

(2) I என்பது செங்குத்து அணி

(3) $adj(adjA) = |A|^n A$

(4) A என்பது சமச்சீர் அணி எனில் *adj* A சமச்சீர் அணியாகும்.

[**விடை :** (3) $adj(adjA) = |A|^n A$]

குறிப்பு : $adj\ (adjA) = |A|^{n-2} A$

2 மதிப்பெண்கள்

1. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக. [பிடிஏ - 1; FRT - 2022]

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

எனவே, $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

இதேபோல் $A^TA = I_2$, எனவே $AA^T = A^TA = I_2$

∴ A ஆனது செங்குத்து அணியாகும்.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, எனில் *adj* (AB)-ஐக் காண்க. [பிடிஏ - 3]

தீர்வு : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+6 & 0+15 \\ 4+4 & 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

$$adj\ (AB) = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$$

3 மதிப்பெண்கள்

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 = \lambda A - 2I$ என்பதை நிறைவு செய்யுமாறு λ -ன் மதிப்பைக் காண்க [பிடிஏ - 2]

தீர்வு : $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9-2\lambda & -6+4 \\ 3\lambda-2\lambda & -2\lambda+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2\lambda & -2 \\ \lambda & -2\lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda A - 2I = \lambda\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\lambda & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda-2 & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -2\lambda = -2$$
$$\lambda = 1$$

அரசு தேர்வு வினா- விடை

1 மதிப்பெண்

I. சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^n$ அணியின் நேர்மறை அணி $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, எனில் a, b, c, d -இன் ஏறுவரிசை [அ.மா.வி - 2019]

(1) a, b, c, d (2) d, b, c, a
(3) c, a, b, d (4) b, a, c, d

[விடை : (2) d, b, c, a]

குறிப்பு : நேர்மாறு அணி $= \frac{1}{-5-6}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2. A என்பது செங்குத்து அணி எனில் $|A| =$ [Qy - 2019]

(1) 1 (2) –1 (3) ± 1 (4) 0

[விடை : (3) ± 1]

குறிப்பு : செங்கோண அணி அணி கோவை மதிப்பு 1 அல்லது –1.

3. $x + y + z = 2, 2x + y - z = 3, 3x + 2y + kz = 4$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் எனில் [Qy - 2019]

(1) $k \neq 0$ (2) $-1 < k < 1$
(3) $-2 < k < 2$ (4) $k = 0$

குறிப்பு : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$ [விடை : (1) $k \neq 0$]

$\Rightarrow 1[k+2] - 1[2k+3] + 1\,[4-3] \neq 0$

$\Rightarrow k + 2 - 2k - 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow -k + 0 \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் நேர்மாறு : [ஆகஸ்ட் - 2021]

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

[விடை : (2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$]

குறிப்பு : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

5. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ -ன் சேர்ப்பு அணி [FRT - 2022]

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

[விடை : (1) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$]

6. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது உண்மையல்ல? [மே - 2022]

(1) A என்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் λ என்பது ஒரு திசையிலி எனில் $\text{Adj}(\lambda A) = \lambda^n(\text{Adj } A)$.
(2) ஒரு சமச்சீர் அணியின் சேர்ப்பு அணி சமச்சீராக இருக்கும்.
(3) $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = |A|I$.
(4) ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணி மூலைவிட்ட அணியாக இருக்கும்.

[விடை : (1) A என்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் λ என்பது ஒரு திசையிலி எனில் $\text{Adj}(\lambda A) = \lambda^n(\text{Adj } A)$.]

2 மதிப்பெண்கள்

1. பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகள் தொகுப்பை கிராமரின் விதி கொண்டு தீர்க்க. $2x - y = 3, x + 2y = -1$. [அ.மா.வி - 2019]

தீர்வு :
$$2x - y = 3$$
$$x + 2y = -1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1)(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1(-1) \times -1 = 6 - 1 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$$

அத்தியாயம்

2

கலப்பு எண்கள்

முக்கிய வரையறைகள்

- ஒரு கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம் $x + iy$ ஆகும். இங்கு x என்பது கலப்பெண்ணின் மெய்ப்பகுதி மற்றும் y என்பது கற்பனை பகுதி.
- $z_1 = z_2$ க்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ மற்றும் $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$

கலப்பெண்களின் பண்புகள் :

கூட்டலை பொறுத்து

- z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற ஏதேனும் மூன்று கலப்பெண்கள்

  (i) அடைவுப் பண்பு ($z_1 + z_2$ ஒரு கலப்பெண்) (ii) பரிமாற்று பண்பு ($z_1 + z_2 = z_2 + z_1$)

  (iii) சேர்ப்பு பண்பு ($(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$) (iv) கூட்டல் சமனி ($z + 0 = 0 + 2 = z$)

  (v) கூட்டல் நேர்மாறு $(z + -z) = (-z + z) = 0$
- **பெருக்கலை பொறுத்து :**

  (i) அடைவுப் பண்பு ($z_1 z_2$ -யும் ஒரு கலப்பெண்) (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு ($z_1 z_2 = z_2 z_1$)

  (iii) சேர்ப்புப் பண்பு ($(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$) (iv) பெருக்கல் சமனி ($z_1 . 1 = 1. z_1 = z_1$)

  (v) பெருக்கல் நேர்மாறு $z.w = w.z = 1 \Rightarrow w - z^{-1}$
- **பங்கீட்டு விதி (கூட்டலின் மேல் பெருக்கலின பங்கீட்டு விதி)**

  $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ மேலும், $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$
- $x + iy$ இணை கலப்பெண் $x - iy$
- $z = x + iy$ எனில் $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|z - z_0| = r$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு இங்கு z_0 என்பது நிலையான கலப்பெண் மற்றும் r என்பது z லிருந்து z_0 க்கான தூரம் எனக.
- $z = x + iy$ -ன் துருவ வடிவம் $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ மற்றும் $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

டிமாய்வரின் தேற்றம் :

- கொடுக்கப்பட்ட கலப்பெண் $\cos\theta + i\sin\theta$ மற்றும் n என்ற முழு எண்ணிற்கு $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
- $z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n - 1.$

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- $i^0 = 1, i^1 = i, i^4 = 1, i^{-4} = 1, (i)^{-1} = -i, (i)^{-2} = -1, (i)^{-3} = i$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ என்பது a, b ஆகியவற்றிற்கு குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது குறையற்றதாக இருந்தால் மட்டும் உண்மை ஆகும்.
- $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ எனில் $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$; $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

இணைக்கலப்பெண்ணின் பண்புகள் :

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$

(5) $\text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

(6) $\text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$, இங்கு n ஒரு முழு

(8) z ஒரு மெய் எண் என இருந்தால் $z = \overline{z}$

(9) z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால் மட்டுமே $z = -\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}} = z$

கலப்பெண்ணின் மட்டுக்கான பண்புகள்

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, இங்கு n ஒரு முழு (முக்கோணச் சமனிலி)

(7) $\text{Re}(z) \leq |z|$

(8) $\text{Im}(z) \leq |z|$

- $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $a + ib = \sqrt{x + iy}$ எனில் $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$
- $|z - z_0| < r$ ஆனது வட்டத்தின் உள்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.
- $|z - z_0| > r$ ஆனது வட்டத்தின் வெளிப்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளை குறிக்கிறது.
- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
- $\cos\theta + i\sin\theta$ -ன் மற்றொரு வடிவம் $\cos(2k\pi + \theta) + i\sin(2k\pi + \theta), k \in \mathbb{Z}$ ஆகும்
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

யூலரின் சூத்திரம் :

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ அல்லது $z = re^{i\theta}$
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில் $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$ A $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ A $\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta)$
- $1 + \omega + \omega^2 + \ldots\ldots + \omega^{n-1} = 0$

இங்கு w என்பது ஒன்றின் n- ஆம் படி மூலம் $1 - \omega.\omega^2 \ldots.\omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$; $\omega^{n-k} = \omega^{-k} = (\bar{\omega})^k$ $0 \le k \le n-1$

பயிற்சி 2.1

பின்வருவனவற்றை சுருக்குக :

1. $i^{1947} + i^{1950}$ 2. $i^{1948} - i^{-1869}$

3. $\sum_{n=1}^{12} i^n$ [FRT & மே - 2022]

4. $i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$ [Hy - 2019; FRT - 2022]

5. $i\,i^2\,i^3 \ldots.\, i^{2000}$ 6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

தீர்வு : 1. $i^{1947} + i^{1950} = i^{1944}.\, i^3 + i^{1948}.\, i^2$

[$\because$ 1944 என்பது 4 –ன் பெருக்கல் மற்றும் 1948 என்பது மேலும் 4 – ன் பெருக்கல்]

$= (i^4)^{486}.\, i^2.\, i^1 + (i^4)^{487}.\, i^2$ [$i^4 = 1$]
$= (1^{486})(-1)(i) + (1)^{487}(-1)$ [$i^2 = -1$]
$= -i - 1 = -1 - i$

2. $= (i^4)^{487} - [i^{-1868}.\, i^{-1}]$
$= 1^{487} - \left[\left(i^4\right)^{-467}.\frac{1}{i}\right]$ [$i^4 = 1$]
$= 1 - [1.(-i)]$ [$\because i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$]

[1 -ன் எந்த அடுக்கும் 1 ஆகும்]

$= 1 + i$

3. $\sum_{n=1}^{12} i^n = (i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + (i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12})$
$= (i - 1 - i + 1) + (i^{4+1} + i^{4+2} + i^{4+3} + (i^4)^2) + (i^{8+1} + i^{8+2} + i^{8+3} + (i^4)^3)$
$= 0 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^1 + i^2 + i^3 + i^4)$
[$\because i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$]
$= 0 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1)$
$= 0 + 0 + 0 = 0$

4. $i^{4\times14+3} + i^{-(4\times14+3)}$
$= (i^4)^{14}.\, i^3 + (i^4)^{-14}.\, i^{-3}$
$= 1.\, i^3 + 1.i^{-3}$ [$\because i^4 = 1$]
$= -i + i = 0$ [$\because i^3 = -i$ மற்றும் $i^{-3} = i$]

5. $= i.\, i^2\, i^3 \ldots\ldots i^{2000} = i^{1+2+3+\ldots\ldots+2000}$
$= i^{\frac{2000\times2001}{2}}$ [$\because 1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$]
$= i^{1000\times2001} = i^{2001000} = 1$
[$\because$ 2001000 என்பது 4 ஆல் வகுபடும் அதன் கடைசி இரண்டு எண்களும் 4 ஆல் வகுபடும்]

6. $i^{1+50} + i^{2+50} + \ldots\ldots + i^{10+50}$
$= i^{51} + i^{52} + \ldots\ldots + i^{60}$

i^{50} ஐ பொதுவாக எடுக்க கிடைப்பது,

$i^{50}[(i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + i^9 + i^{10}]$
$= i^{50}[0 + (i^{4+1} + i^{4+2} + i^{4+3} + i^{4+4}) + (i^{8+1} + i^{8+2})]$
$= i^{50}[0 + 0 + i + i^2]$ [$\because i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$]
$= i^{50}[i - 1] = i^{48+2}(i - 1)$
$= i^2(i - 1)$ [$\because i^{48} = 1$]
$= -1(i - 1) = -i + 1 = 1 - i$

பயிற்சி 2.2

1. $z = 5 - 2i$ மற்றும் $w = -1 + 3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $z + w$ (ii) $z - iw$
(iii) $2z + 3w$ (iv) $z\,w$
(v) $z^2 + 2zw + w^2$ (vi) $(z + w)^2$

தீர்வு : (i) $z + w$
$= (5 - 2i) + (-1 + 3i)$
$= (5 - 1) + i(-2 + 3) = 4 + i(1) = 4 + i$

(ii) $z - iw$
$= (5 - 2i) - i(-1 + 3i) = (5 - 2i) + (+i - 3i^2)$
$= 5 - 2i + i - 3(-1) = 5 - i + 3 = 8 - i$

(iii) $2z + 3w$

$= 2(5 - 2i) + 3(-1 + 3i)$

$= 10 - 4i - 3 + 9i$

$= (10 - 3) + i(-4 + 9) = 7 + 5i$

(iv) zw

$= (5 - 2i)(-1 + 3i)$

$= -5 + 15i + 2i - 6i^2$

$= -5 + 17i - 6(-1)$

$= -5 + 17i + 6 = 1 + 17i$

(v) $z^2 + 2zw + w^2$

$= (5 - 2i)^2 + 2(5 - 2i)(-1 + 3i) + (-1 + 3i)^2$

$= 25 + 4i^2 - 20i + 2[-5 + 15i + 2i - 6i^2] + 1 + 9i^2 - 6i$

$= 25 - 4 - 20i + 2(-5 + 17i + 6) + 1 - 9 - 6i$

$[\because i^2 = -1]$

$= 21 - 20i + 2(1 + 17i) - 8 - 6i$

$= 21 - 20i + 2 + 34i - 8 - 6i = 15 + 8i$

(vi) $(z + w)^2$

$= [(5 - 2i) + (-1 + 3i)]^2 = (4 + i)^2$

$= 16 + 8i - 1 = 16 - 1 + 8i = 15 + 8i$

2. $z = 2 + 3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க.

(i) z, iz, மற்றும் $z + iz$

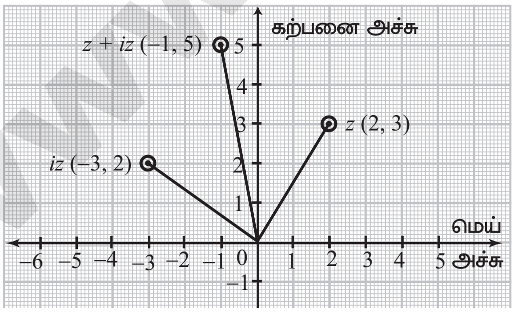
(ii) z, $-iz$, மற்றும் $z - iz$.

தீர்வு : (i) z, iz மற்றும் $z + iz$ ஐ ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க

$z = 2 + 3i$, $(2, 3)$ எனக் குறிக்கலாம்.

$iz = i(2 + 3i) = 2i + 3i^2 = 2i - 3 = -3 + 2i$ $(-3, 2)$ எனக் குறிக்கலாம்.

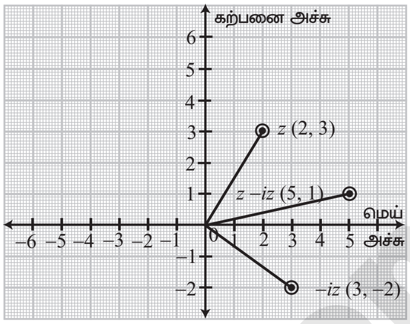
$z + iz = 2 + 3i - 3 + 2i = -1 + 5i$, $(-1, 5)$ என ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்கலாம்.



(ii) $z = 2 + 3i$, $(2, 3)$ எனக் குறிக்கலாம்.

$-iz = -i(2 + 3i) = -2i - 3i^2 = -2i - 3(-1) = 3 - 2i$

$z - iz = 2 + 3i + 3 - 2i = 5 + i$ $(5, 1)$ என ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்கலாம்.



3. $(3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5$ மற்றும் $2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. [Hy - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $(3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5$

$= 2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$

$\Rightarrow 3x - ix - 2y + iy + 2i + 5 = 2x - y + 2iy + 3 + 2i$

மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை தேர்ந்தெடுக்க

$(3x - 2y + 5) + i(-x + y + 2) = 2x - y + 3 + i(2y + 2)$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிட கிடைப்பது

$$3x - 2y + 5 = 2x - y + 3$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 5 - 2x + y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x - y = -2 \quad \dots (1)$$

$$-x + y + 2 = 2y + 2$$

$$\Rightarrow -x + y + 2 - 2y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \quad \dots (2)$$

(1) – (2) கிடைப்பது,

$$x - \cancel{y} = -2$$

$$x + \cancel{y} = 0$$

$$2x = -2$$

$$\Rightarrow x = -1$$

$x = -1$ என (2) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$-1 + y = 0 \Rightarrow y = 1 \qquad \therefore x = -1$ மற்றும் $y = 1$

பயிற்சி 2.3

1. $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4i$ மற்றும் $z_3 = 5$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

(i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

தீர்வு : (i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

கொடுக்கப்பட்ட $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4i$ மற்றும் $z_3 = 5$

LHS $= (z_1 + z_2) + z_3$

$= [1 - 3i + (-4i)] + 5$

$= [1 - 7i] + 5 = 6 - 7i$

RHS $= z_1 + (z_2 + z_3)$

$= 1 - 3i + (-4i + 5) = 6 - 7i$

LHS = RHS

$\therefore (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (z_1 z_2) z_3 \\ &= [(1-3i)(-4i)]\,5 \\ &= [-4i + 12i^2]\,5 \\ &= (-4i - 12)\,5 = -20i - 60 \\ \text{RHS} &= z_1 (z_2 z_3) \\ &= (1-3i)[(-4i)\,5] \\ &= (1-3i)(-20i) \\ &= -20i + 60i^2 = -20i - 60 \\ \text{LHS} &= \text{RHS} \\ \therefore (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned}$$

2. $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$, மற்றும் $z_3 = 5 + 4i$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

(i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ **[FRT & ஜூலை - 2022]**

(ii) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட $z_1 = 3, z_2 = -7i, z_3 = 5 + 4i$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= z_1 (z_2 + z_3) \\ &= 3\,[-7i + 5 + 4i] \\ &= 3\,[5 - 3i] = 15 - 9i \\ \text{RHS} &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ &= 3(-7i) + 3(5 + 4i) \\ &= -21i + 15 + 12i \\ &= -9i + 15 = 15 - 9i \\ \text{LHS} &= \text{RHS} \\ \therefore z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (z_1 + z_2) z_3 \\ &= (3 - 7i)(5 + 4i) \\ &= 15 + 12i - 35i - 28i^2 \\ &= 15 - 23i + 28 = 43 - 23i \\ \text{RHS} &= z_1 z_3 + z_2 z_3 \\ &= 3(5 + 4i) + (-7i)(5 + 4i) \\ &= 15 + 12i - 35i - 28i^2 \\ &= 15 - 23i + 28 = 43 - 23i \\ \text{LHS} &= \text{RHS} \\ \therefore (z_1 + z_2) z_3 &= z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{aligned}$$

3. $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3 - 4i$, மற்றும் $z_3 = 1 + i$ எனில், z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவற்றின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் நேர்மாறுகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3 - 4i$ மற்றும் $z_3 = 1 + i$

z_1 -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_1 = -(2 + 5i) = -2 - 5i$

z_2 -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_2 = -(-3 - 4i) = 3 + 4i$

z_3 -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_3 = -(1 + i) = -1 - i$

z_1 -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i}$$

[தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை பகுதியிலுள்ள கலப்பெண்ணால் பெருக்க]

$$= \frac{2-5i}{2^2-(5i)^2} = \frac{2-5i}{4-25i^2} = \frac{2-5i}{4+25}$$
$$= \frac{1}{29}(2-5i) \quad [\because i^2 = -1]$$

z_2 -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3-4i} \times \frac{-3+4i}{-3+4i}$$
$$= \frac{-3+4i}{(-3)^2-(4i)^2} = \frac{-3+4i}{9-16i^2}$$
$$= \frac{-3+4i}{9+16} = \frac{1}{25}(-3+4i)$$

z_3 -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2-(i^2)}$$
$$= \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2}(1-i)$$

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்காண்பவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக:

(i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$

(ii) $\dfrac{10-5i}{6+2i}$ (iii) $\overline{3i} + \dfrac{1}{2-i}$

தீர்வு :(i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$

$$= \overline{(5+2)+(9i-4i)} = \overline{7+5i} = 7-5i$$

[$\because 7 + 5i$ -ன் இணை கலப்பெண் $7 - 5i$]

(ii) $$\frac{10-5i}{6+2i} = \frac{10-5i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$

[தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை பகுதியிலுள்ள கலப்பெண்ணால் பெருக்க]

$$= \frac{60-20i-30i+10i^2}{6^2-(2i)^2}$$
$$= \frac{60-50i-10}{36+4} = \frac{50-50i}{40}$$
$$= \frac{50(1-i)}{40} = \frac{5}{4}(1-i)$$

கூடுதல் வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

I. சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. $(1 + i)(1 + i^2)(1 + i^3)(1 + i^4)$ -ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 0 (3) 1 (4) i

[விடை : (2) 0]

குறிப்பு : $(1 + i)(1 + i^2)(1 + i^3)(1+ i^4)$
$= (1 + i)(0)(1 - i)(2) = 0$

2. $\sqrt{a+ib} = x + iy$ எனில், $\sqrt{a-ib}$ க்கான சாத்தியமான மதிப்புகள்

(1) $x^2 + y^2$ (2) $\sqrt{x^2+y^2}$
(3) $x + iy$ (4) $x - iy$

குறிப்பு : **[விடை :** (4) $x - iy$]

$$a + ib = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$a = x^2 - y^2 \Rightarrow b = 2xy$$
$$a - ib = x^2 - y^2 - i2xy = (x - iy)^2$$
$$\sqrt{a-ib} = x - iy$$

3. $i^2 = -1$ எனில், $i^1 + i^2 + i^3 + ... + 1000$ உறுப்புகள்

(1) 1 (2) -1 (3) i (4) 0

[விடை : (4) 0]

குறிப்பு : $i + i^2 + i^3 + i^4 + ...$ 100 உறுப்புகள்
$= (i + (-1) - i + 1) + (i + (-1) - i + 1) + ...$
$= 0 + 0 + 0 + ... = 0$

4. $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{6}$ எனில்,

(1) $|z| = 1, \arg(z) = \frac{\pi}{4}$

(2) $|z| = 1, \arg(z) = \frac{\pi}{6}$

(3) $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \arg(z) = \frac{5\pi}{24}$

(4) $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

[விடை : (4) $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$]

குறிப்பு : $z = \cos 45^\circ + i\sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2+1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

5. $(1 + i)$-ன் வீச்சின் முதன்மை மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{12}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (4) π

[விடை :(1) $\frac{\pi}{4}$]

குறிப்பு : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

6. $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^n$ ஒரு மிகை முழு எனில் n க்கான குறைந்தபட்ச மிகை முழு

(1) 16 (2) 8 (3) 4 (4) 2

குறிப்பு : $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^n$ **[விடை :** (2) 8]

$$\frac{2i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i(1-i)}{1^2-i^2} = \frac{2i+2}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1 + i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1 + i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos 8\frac{\pi}{4} + i\sin 8\frac{\pi}{4}\right) = 2^4(1 + i0) = 2^4$$

7. $a = 1 + i$ எனில், $a^2 =$

(1) $1 - i$ (2) $2i$
(3) $(1 + i)(1 - i)$ (4) $i - 1$ **[விடை :**(2) $2i$]

குறிப்பு : $a^2 = (1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$

8. $z = \frac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$ எனில், Re (z) =

(1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\cot\frac{\theta}{2}$ (4) $\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$

[விடை :(2) $\frac{1}{2}$]

குறிப்பு : $z = \frac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$

$$= \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{(1-\cos\theta - i\sin\theta)(1-\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{2-2\cos\theta}$$

$$\text{Re}(z) = \frac{1-\cos\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

9. $x + iy = \dfrac{3+5i}{7-6i}$ **எனில், y =**

(1) $\dfrac{9}{85}$ (2) $-\dfrac{9}{85}$

(3) $\dfrac{53}{85}$ (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

[விடை : (3) $\dfrac{53}{85}$ **]**

குறிப்பு : $x+iy = \dfrac{3+5i}{7-6i} = \dfrac{(3+5i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$

$$= \frac{21+35i+18i+30(-1)}{49+36} = \frac{21-30+53i}{85}$$

$$= \frac{-9+53i}{85} = \frac{-9}{85} + \frac{53}{85}i$$

10. $\dfrac{1}{i}$ **-ன் வீச்சு =**

(1) 0 (2) $\dfrac{\pi}{2}$ (3) $-\dfrac{\pi}{2}$ (4) π

[விடை : (3) $-\dfrac{\pi}{2}$ **]**

குறிப்பு : $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i \qquad \text{amp}\left(\dfrac{1}{i}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

11. $(1+i)^4 + (1-i)^4$ **-ன் மதிப்பு**

(1) 8 (2) 4 (3) -8 (4) -4

[விடை : (3) -8**]**

குறிப்பு : $(1+i)^4 + (1-i)^4$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$$

$$= 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1-i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi - i\sin\pi)$$

$$= 4(-1) = -4$$

$$(1+i)^4 + (1-i) = -4-4 = -8$$

12. $\left|\dfrac{i+z}{i-z}\right| = 1$ **என்பதை நிறைவு செய்யும் கலப்பெண் z அமைந்திருப்பது**

(1) வட்டம் $x^2+y^2=1$ (2) x – அச்சு

(3) y – அச்சு

(4) கோடு $x+y=1$ **[விடை :** (2) x – அச்சு**]**

குறிப்பு :

$$\left|\frac{i+z}{i-z}\right| = 1$$

$$|i+z| = |i-z|$$

$$|i+x+iy| = |i-x-iy|$$

$$|x+i(y+1)| = |-x-i(y-1)|$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + 2y = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} - 2y$$

$$4y = 0$$

$$y = 0$$

13. $z = a + ib$ **-ல் III-ம் கால் பகுதியில் அமைந்திருந்தால் $\dfrac{\bar{z}}{z}$ ம் III ம் கால்பகுதியில் அமைந்திருக்க வேண்டுமெனில்**

(1) $a > b > 0$ (2) $a < b < 0$

(3) $b < a < 0$ (3) $b > a > 0$

[விடை : (3) $b < a < 0$**]**

குறிப்பு : ஆதலால் $z = a + ib$ மூன்றாம் கால்பகுதியில் $a < 0$ மற்றும் $b < 0$ என பிரதியிட கிடைப்பது.

இங்கு, $\dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{a-ib}{a+ib} = \dfrac{(a-ib)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}$

$$= \frac{a^2-b^2-2iab}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2iab}{a^2+b^2}$$

ஆதலால் $\dfrac{\bar{z}}{z}$ மூன்றாம் கால்பகுதியில், பிரதியிட கிடைப்பது

$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} < 0$ மற்றும் $\dfrac{-2ab}{a^2+b^2} < 0$

$\Rightarrow a^2 - b^2 < 0$ மற்றும் $-2\,ab < 0$

$\Rightarrow a^2 < b^2$ மற்றும் $ab > 0$

ஆனால் $a, b < 0 \Rightarrow b < a < 0$

14. $\dfrac{1+e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}} =$

(1) $\cos\theta + i\sin\theta$ (2) $\cos\theta - i\sin\theta$

(3) $\sin\theta - i\cos\theta$ (4) $\sin\theta + i\cos\theta$

[விடை : (2) $\cos\theta - i\sin\theta$**]**

அத்தியாயம்

5

இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல் - II

முக்கிய வரையறைகள்

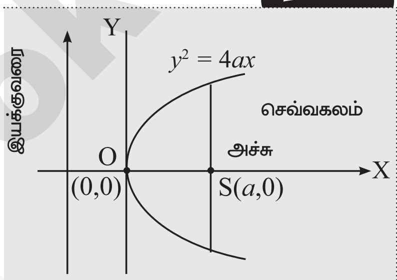
- ஒரு தளத்தில் உள்ள நிலைப்புள்ளியிலிருந்து மாறாத தூரத்தில் அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை வட்டம் ஆகும். அந்த நிலைப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம் என்றும் மாறாத தூரம் அந்த வட்டத்தின் ஆரம் என்றும் அழைக்கப்படும்.
- வட்டத்தின் மீதமைந்த P என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகள்.
- ஒரு நேர்கோடு வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச்சென்றால் அது தொடுகோடாகும். மேலும் அந்த தொடுகோட்டுக்குச் செங்குத்தாகவும் தொடுபுள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோடு செங்கோடாகும்.
- வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.
- **பரவளையம்**

  $y^2 = 4ax$

  $S(a, 0) \to$ குவியம் $O(0, 0) \to$ முனை $Y = 0 \to$ அச்சு

  செவ்வகலத்தின் நீளம் $= 4a$

பரவளையம்



- **நீள்வட்டம்**

  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

  $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0) \to$ குவியங்கள்

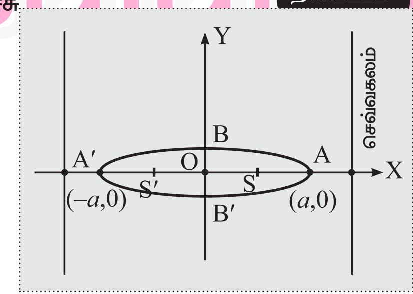
  $A(a, 0)$, $A'(-a, 0) \to$ முனைகள்

  $O\ (0, 0) \to$ மையம்

  $AA' \to$ நெட்டச்சு $\to 2a$; $BB' \to$ குற்றச்சு $\to 2b$; $b^2 = a^2(1 - e^2)$

  இயக்குவரைகள் $x = \frac{a}{e}$, $x = \frac{-a}{e}$

நீள்வட்டம்



- நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் கூடுதல் அதன் நெட்டச்சின் நீளத்திற்குச் சமம்.
- **அதிபரவளையம்**

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

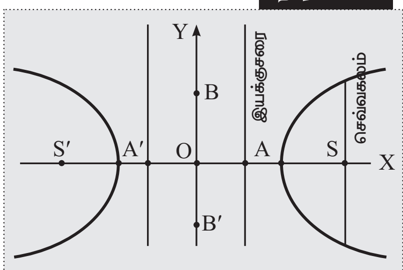
  $AA' = 2a \to$ துணையச்சு; $BB' = 2b \to$ குறுக்கச்சு

  $O(0, 0) \to$ மையம்

  $A(a, 0)$, $A'(-a, 0) \to$ முனைகள்; $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0) \to$குவியம்

  இயக்குவரைகள் $x = \pm\frac{a}{e}$;செவ்வகலம் $= \frac{2b^2}{a}$; $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

அதிபரவளையம்



நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- மையம் $(0, 0)$ மற்றும் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$.
- மையம் (h, k) மற்றும் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 1^2$.
- சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, ... (1) க்கு மையம் $(-g, -f)$ மற்றும் $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- சமன்பாடு (1)-ல்

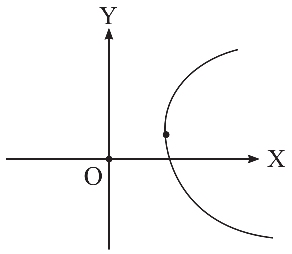
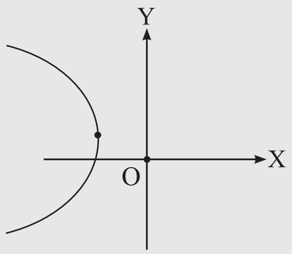
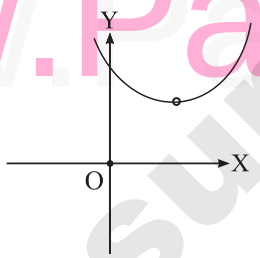
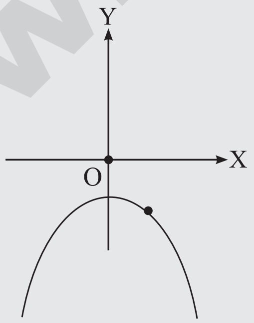
  (i) $g^2 + f^2 - c > 0$, எனில் மெய்வட்டத்தைக் குறிக்கும்;

  (ii) $g^2 + f^2 - c = 0$ எனில் ஒரு புள்ளி வட்டத்தைக் குறிக்கும் ;

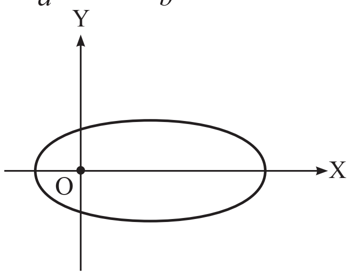
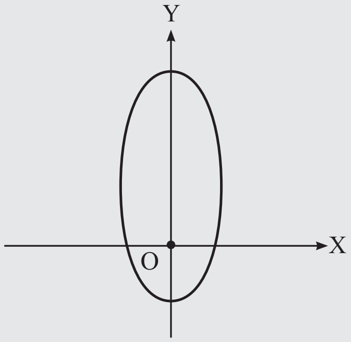
  (iii) மற்றும் $g^2 + f^2 - c < 0$ எனில் நியமப்பாதையற்ற ஒரு கற்பனை வட்டத்தைக் குறிக்கும்.
- ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) எனில் அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ ஆகும்.
- $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ எனில் $\begin{cases} > 0, & (x_1, y_1) \text{ வட்டத்தின் வெளியே} \\ = 0, & (x_1, y_1) \text{ வட்டத்தின் மேல்} \\ < 0, & (x_1, y_1) \text{ வட்டத்தின் உள்} \end{cases}$
- (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வட்டத்திற்கான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$
- $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.
- $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.
- இதனால் $y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு '$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைய கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.

  தொடுபுள்ளி $\left(-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ அல்லது $\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$
- $e = 1$, எனில் கூம்பு வளைவரையானது பரவளையம், $e < 1$ எனில் நீள்வட்டம் மற்றும் $e > 1$, எனில் அதிபரவளையம் ஆகும்.

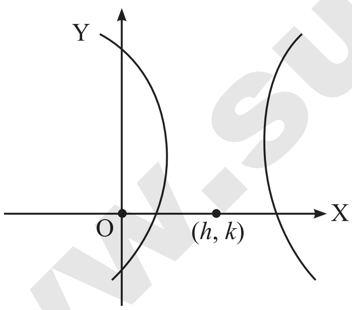
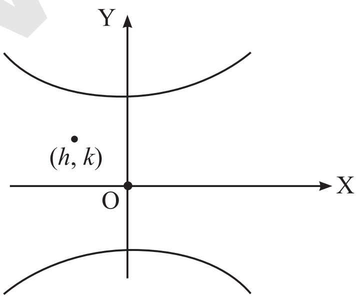
பரவளையம்

சமன்பாடு	வரைபடம்	முனைகள்	குவியம்	சமச்சீர் அச்சு	இயக்கு வரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் நீளம்
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$		(h, k)	$(h+a, 0+k)$	$y = k$	$x = h - a$	$4a$
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$		(h, k)	$(h-a, 0+k)$	$y = k$	$x = h + a$	$4a$
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$		(h, k)	$(0+h, a+k)$	$x = h$	$y = k - a$	$4a$
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$		(h, k)	$(0+h, -a+k)$	$x = h$	$y = k + a$	$4a$

நீள்வட்டம்

சமன்பாடு மற்றும் வரைபடம்	மையம்	நெட்டச்சு	முனைகள்	குவியங்கள்
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a^2>b^2$ 	(h, k)	x-அச்சுக்கு இணை	$(h+a, k)$	$(h+c, k)$
$(y-k)^2=-4a(x-h)$ 	(h, k)	y- அச்சுக்கு இணை	$(h, k+a)$	$(h, k+c)$

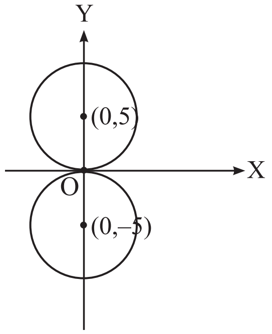
அதிபரவளையம்

அதிபரவளையம்	x-அச்சுக்கு இணையான குறுக்கச்சு
	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ மையம் $\to (h, k)$ முனைகள் $(h+a, k)\ (h-a, k)$ குவியங்கள் $\to\ (h+c, k)(h-c, k)$ இயக்கு வரைகளின் சமன்பாடு $= \pm\frac{a}{e}$
	**y-அச்சுக்கு இணையான குறுக்கச்சு** $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ மையம் $\to (h, k)$ முனைகள் $(h, k+a)\ (h, k-a)$ குவியங்கள் $(h, k+c)(h, k-c)$ இயக்கு வரைகளின் சமன்பாடுகள் $y=\pm\frac{a}{e}$

பயிற்சி 5.1

1. ஆரம் 5 செ.மீ. அலகுகள் உடையதும், x-அச்சை ஆதிப்புள்ளியில் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைத் தருவிக்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $r = 5$ செ.மீ



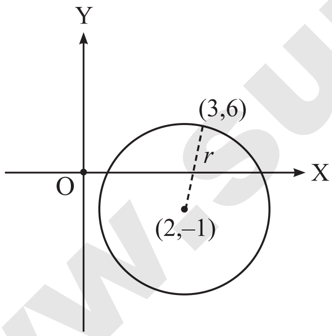
வட்டம் x அச்சை தொட்டுச் செல்வதால் அதனுடைய மையம் $(0, \pm 5)$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y \pm 5)^2 = 5^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \cancel{25} \pm 10y = \cancel{25}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 \pm 10y = 0$$

2. $(2, -1)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $(3, 6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட $(2, -1)$ மையம் மற்றும் $(3, 6)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$\therefore r =$ இடைப்பட்ட தூரம் $(2, -1)$ மற்றும் $(3, 6)$க்கு

$$= \sqrt{(2-3)^2 + (-1-6)^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$$
$$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{50})^2$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 50$$

3. இரு அச்சுக்களையும் தொட்டுச் செல்வதும், $(-4, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

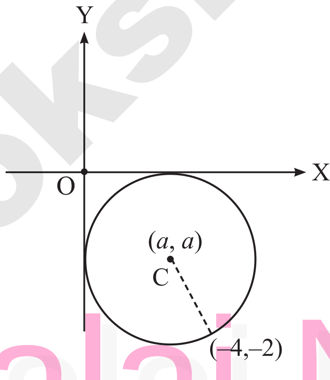
தீர்வு : வட்டமானது இரு அச்சுகளையும் தொட்டு செல்வதால் அதனுடைய சமன்பாடு

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \qquad ...(1)$$

இது $(-4, -2)$ வழிச் செல்கிறது

$$\therefore (-4-a)^2 + (-2-a)^2 = a^2$$
$$16 + \cancel{a^2} + 8a + 4 + a^2 + 4a = \cancel{a^2}$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + 12a + 20 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (a+10)(a+2) = 0$$

$a = -10$ அல்லது -2



நிலை (i)

$a = -10$ எனில், (1) ஆனது

$$(x+10)^2 + (y+10)^2 = -10^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 100 + 20x + y^2 + \cancel{100} + 20y = \cancel{100}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 20x + 20y + 100 = 0$$

நிலை (ii)

$a = -2$எனில், (1) ஆனது

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = -2^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + \cancel{4} = \cancel{4}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

ஆகையால் வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

அல்லது $\quad x^2 + y^2 + 20x + 20y + 100 = 0$

4. மையம் $(2, 3)$ உடையதும் $3x - 2y - 1 = 0$ மற்றும் $4x + y - 27 = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட மையம் $(2, 3)$

தீர்க்க $\quad 3x - 2y = 1 \qquad ...(1)$

மற்றும் $\quad 4x + y = 27 \qquad ...(2)$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow \quad & 3x - \cancel{2y} = 1 \\ (2) \times 2 \rightarrow \quad & 8x + \cancel{2y} = 54 \\ & 11x = 55 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$x = 5$ ஐ சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} \therefore 3(5) - 2y &= 1 \\ \Rightarrow 15 - 2y &= 1 \\ \Rightarrow 15 - 1 &= 2y \\ \Rightarrow 14 &= 2y \\ \Rightarrow y &= 7 \end{aligned}$$

வட்டமானது (5, 7) வழிச் செல்கிறது.

[$\because$ (5, 7) மற்றும் (2, 3) க்கு இடைப்பட்ட தூரம்]

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 5^2 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 25 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 25 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

5. (3, 4) மற்றும் (2, –7) என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. [பிடிஏ - 3]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட விட்டத்தின் முனைகள் (3, 4)(2, –7)

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) &= 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-2) + (y-4)(y+7) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 + y^2 + 7y - 4y - 28 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 3y - 22 &= 0 \end{aligned}$$

6. (1, 0), (–1, 0) மற்றும் (0, 1) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு : வட்டத்தின் சமன்பாடானது [பிடிஏ - 5; SRT - 2022]

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (1)$$

(1, 0) புள்ளி 0 வழிச் செல்கிறது

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + 0 + 2g(1) + 2f(0) + c &= 0 \\ \Rightarrow 2g + c &= -1 \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

(–1, 0) புள்ளி 0 வழிச் செல்கிறது

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-1)^2 + 0 + 2g(-1) + 2f(0) + c &= 0 \\ \Rightarrow -2g + c &= -1 \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

மேலும் (0, 1) புள்ளி வழிச் செல்கிறது

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 + 1^2 + 2g(0) + 2f(1) + c &= 0 \\ \Rightarrow 2f + c &= -1 \quad \ldots(4) \\ (2) + (3) \Rightarrow 2c &= -2 \\ \Rightarrow c &= -1 \end{aligned}$$

$c = -1$ என (2)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$\begin{aligned} 2g - 1 &= -1 \\ \Rightarrow 2g &= 0 \\ \Rightarrow g &= 0 \end{aligned}$$

$c = -1$ என (4)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$\begin{aligned} 2f - 1 &= -1 \\ \Rightarrow 2f &= 0 \\ \Rightarrow f &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ (1) லிருந்து

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 0 + 0 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

7. 9π சதுர அலகுகள் பரப்பு கொண்ட வட்டத்தின் விட்டங்கள், $x + y = 5$ மற்றும் $x - y = 1$ என்ற நேர்கோடுகள் மீது அமைந்துள்ளன எனில் அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. [செப். - 2020]

தீர்வு : வட்டத்தின் பரப்பு = 9π சதுர அலகுகள்

$\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

விட்டங்கள் $x + y = 5$ (1) மற்றும் $x - y = 1$ (2)

விட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி மையம் என அறிவோம்.

$\therefore$ மையத்தை காண (1) மற்றும் (2) ஐ தீர்க்க.

$$\begin{aligned} (1) + (2) \Rightarrow \quad x + \cancel{y} &= 5 \\ x - \cancel{y} &= 1 \\ 2x &= 6 \\ \Rightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

$x = 3$ ஐ சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \therefore (1) \Rightarrow 3 + y &= 5 \\ \Rightarrow y &= 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

$\therefore$ மையம் (3, 2)

ஆகையால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 3^2 \\ \Rightarrow x^2 - 6x + \cancel{9} + y^2 - 4y + 4 &= \cancel{9} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

8. $y = 2\sqrt{2}x + c$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = 16$, என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில், c-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ \Rightarrow a^2 &= 16 \end{aligned}$$

மற்றும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 2\sqrt{2}x + c$$

$\Rightarrow m = 2\sqrt{2}$ மற்றும் $c = c$

[தொடுகோடானது $y = mx + c$]

$y = mx + c$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை

$$c^2 = a^2(1+m^2)$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = 16(1+(2\sqrt{2})^2)$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = 16(1+8)$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = 16(9)$$
$$\Rightarrow \quad c = \pm 4(3)$$
$$\Rightarrow \quad c = \pm 12$$

9. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 8 = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளை (2, 2) என்ற புள்ளியில் காண்க.

தீர்வு : வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 8 = 0$.

$\therefore (x_1, y_1)$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 - \frac{6}{2}(x+x_1) + \frac{6}{2}(y+y_1) - 8 = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட $(x_1, y_1), (2, 2)$

(2, 2) -ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$x(2) + y(2) - 3(x+2) + 3(y+2) - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x + 2y - 3x - \cancel{6} + 3y + \cancel{6} - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -x + 5y - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 5y + 8 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$yx_1 - xy_1 + g(y-y_1) - f(x-x_1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y(2) - x(2) - 3(y-2) - 3(x-2) = 0$$
$$[\because 2g = -6 \Rightarrow g = -3;\ 2f = 6 \Rightarrow f = 3]$$
$$\Rightarrow \quad 2y - 2x - 3y + 6 - 3x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -5x - y + 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 5x + y - 12 = 0$$

10. (–2, 1), (0, 0) மற்றும் (–4, –3) என்ற புள்ளிகள் $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மீது அல்லது உள்ளே இவற்றில் எங்கே உள்ளன எனத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$$

நிலை 1 : (–2, 1)ல், (1) ஆனது

$$(-2)^2 + 1^2 - 5(-2) + 2(1) - 5$$
$$= 4 + 1 + 10 + 2 - 5$$
$$= 17 - 5 = 12 > 0.$$

$\therefore$ (–2, 1) வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ளது

நிலை 2 : (0, 0)-ல், (1) ஆனது $-5 < 0$

$\therefore$ (0, 0) வட்டத்தின் உள் அமைந்துள்ளது.

நிலை 3 : (–4, –3)ல், (1) லிருந்து

$$(-4)^2 + (-3)^2 - 5(-4) + 2(-3) - 5$$
$$= 16 + 9 + 20 - 6 - 5$$
$$= 45 - 11 = 34 > 0$$

$\therefore$ (–4, –3) வட்டத்தின் வெளியே அமைந்துள்ளது.

11. பின்வரும் வட்டங்களுக்கு மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

(i) $x^2 + (y+2)^2 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ [ஜூலை - 2022]

(iii) $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$

(iv) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$ [பிடீஏ - 6; SRT - 2022]

தீர்வு : (i) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + (y+2)^2 = 0$

மையம் (0, –2) மற்றும் ஆரம் 0.

(ii) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0.$$

இங்கு $2g = 6 \Rightarrow g = 3$

$$2f = -4$$
$$\Rightarrow \quad f = -2 \text{ மற்றும் } c = 4$$

மற்றும் $(-g, -f) \Rightarrow (-3, 2)$

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 - 4}$$
$$= \sqrt{9 + 4 - 4}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3 \text{ அலகுகள்}$$

(iii) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$

இங்கு $2g = -1 \Rightarrow g = \frac{-1}{2}$

$$2f = 2$$
$$\Rightarrow \quad f = 1 \text{ மற்றும் } c = -3$$

மையம் $(-g, -f) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

மற்றும் $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 3}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \sqrt{\frac{1+16}{4}}$$
$$r = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ அலகுகள்.}$$

(iv) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$$

2 ஆல் வகுக்க, கிடைப்பது

$$x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{இங்கு } 2g = -3 \Rightarrow g = \frac{-3}{2}$$
$$2f = 2 \Rightarrow f = 1$$
$$\text{மற்றும் } c = 1$$
$$\therefore \text{ மையம் } (-g, -f) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$$
$$\text{மற்றும் } r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ அலகுகள்}$$

12. $3x^2 + (3-p)xy + qy^2 - 2px = 8pq$ என்ற சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனில் p மற்றும் q–ன் மதிப்பு காண்க. மேலும் அந்த வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு [பிடிஏ - 1]

$$3x^2 + (3-p)xy + qy^2 - 2px = 8pq$$

வட்டத்திற்கு xy-ன் கெழு $= 0$

$$\Rightarrow 3 - p = 0 \Rightarrow p = 3$$

மேலும், x^2 –ன் கெழு $=$ y^2–ன் கெழு

$$\Rightarrow 3 = q$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$3x^2 + 3y^2 - 6x = 8(3)(3)$$
$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 72 = 0$$

3 ஆல் வகுக்க, கிடைப்பது

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$$
$$\text{இங்கு } 2g = -2 \Rightarrow g = -1$$
$$f = 0 \text{ மற்றும் } c = -24$$
$$\text{மையம் } (-g, -f) = (1, 0)$$
$$\text{மற்றும் } r = \sqrt{g^2+f^2-c}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 0 + 24}$$
$$= \sqrt{25} = 5 \text{ அலகுகள்}$$

பயிற்சி 5.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்கும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க:

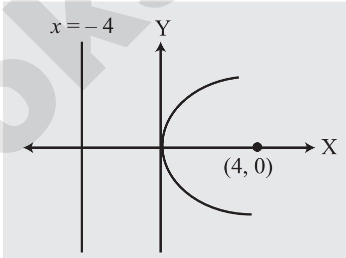
(i) குவியம் (4, 0) மற்றும் இயக்குவரை $x = -4$. [ஆகஸ்ட் - 2021]

(ii) y-அச்சுக்கு சமச்சீரானது மற்றும் (2, –3) வழிச்செல்வது.

(iii) முனை (1, –2) மற்றும் குவியம் (4, –2).

(iv) செவ்வகலத்தின் முனைகள் (4,–8) மற்றும் (4, 8).

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட குவியம் (4, 0) மற்றும் இயக்குவரை $x = -4$. (4, 0) குவியம் மற்றும் இயக்குவரை $x = -4$, ஆதலால் பரவளையத்தின் வடிவம் $y^2 = 4ax$.

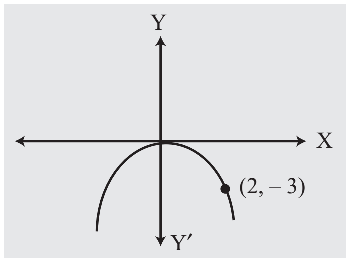


$$\text{மேலும் } a = 4$$

$\therefore$ பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4(4)x$

$$\Rightarrow y^2 = 16x$$

(ii) பரவளையம் (2, –3) வழி செல்கிறது மற்றும் சமச்சீர் அச்சு y- அச்சு ஆகும்.



பரவளையம் (2, –3) வழிச் செல்வதன் காரணமாக அது கீழ்நோக்கி திறப்புடையது.

$\therefore$ அதனுடைய சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ ...(1)

(2, –3) என்ற புள்ளியை பிரதியிட கிடைப்பது,

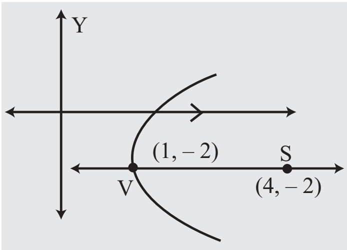
$$2^2 = -4a(-3)$$
$$\Rightarrow 4 = 12a$$
$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{4}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{1}{3}$$

(1) லிருந்து $\therefore x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y$

$\Rightarrow \quad 3x^2 = -4y$

(iii) முனை $(1, -2)$ மற்றும் குவியம் $(4, -2)$.

பரவளையம் வலது புறம் திறப்புடையது.



$a =$ $(1, -2)$ மற்றும் $(4, -2)$க்கு இடைபட்ட தூரம்

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{(1-4)^2+(-2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{(-3)^2} = 3$$

பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

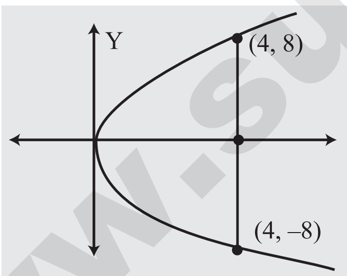
$$(y+2)^2 = 4(3)(x-1)$$

$[\because (h, k)\ (1, -2)]$

$$\Rightarrow \quad (y+2)^2 = 12(x-1)$$

(iv) செவ்வகலத்தின் முனை புள்ளிகள் $(4, -8)$ மற்றும் $(4, 8)$.

குவியம் $(4, -8)$ மற்றும் $(4, 8)$ன் மையப்புள்ளி



$\therefore$ குவியம் $= \left(\frac{4+4}{2}, \frac{-8+8}{2}\right) = (4, 0)$

$\therefore a = 4$ மற்றும் உச்சிப்புள்ளி $(0, 0)$

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4(4)x$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 16x$$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்குமான நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க :

(i) குவியங்கள் $(\pm 3, 0)$, மற்றும் $e = \frac{1}{2}$

(ii) குவியங்கள் $(0, \pm 4)$ மற்றும் நெட்டச்சின் முனைகள் $(0, \pm 5)$.

(iii) செவ்வகல நீளம் 8, $e = \frac{3}{5}$ மையம் $(0,0)$ மற்றும் நெட்டச்சு x-அச்சு.

(iv) செவ்வகல நீளம் 4, குவியங்களுக் கிடையேயான தூரம் $4\sqrt{2}$ மையம் $(0,0)$ மற்றும் நெட்டச்சு y- அச்சு.

தீர்வு : (i) குவியங்கள் $(\pm 3, 0)$, $e = \frac{1}{2}$

ஆதலால் $(\pm ae, 0)$ குவியங்கள்

$$\Rightarrow \quad ae = 3 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

மையம் $(0, 0)$

மற்றும் $b^2 = a^2(1-e^2)$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 36\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 36\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow b^2 = 27$$

$\therefore$ நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27} = 1$$

(ii) குவியங்கள் $(0, \pm 4)$ மற்றும் நெட்டச்சின் முனைப்புள்ளிகள் $(0, \pm 5)$

குவியங்கள் $(0, \pm be) \Rightarrow be = 4$

நெட்டச்சின் முனை புள்ளிகள் $(0, \pm 5)$

$$\Rightarrow \quad b = 5$$

$$\therefore 5(e) = 4$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{4}{5}$$

மேலும், $a^2 = b^2(1-e^2)$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 25\left(1-\frac{16}{25}\right) = 25\left(\frac{25-16}{25}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 9$$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25} = 1$$

அத்தியாயம்

7

வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- ஒரு தளத்தில் உள்ள வளைவரைக்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோடு என்பது வளைவரையில் அப்புள்ளியை தொட்டுக் கொண்டு செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.
- வளைவரை மீதுள்ள புள்ளியில் வளைவரைக்கு செங்கோடு என்பது அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு அப்புள்ளியில் செங்குத்தாக உள்ள நேர்க்கோடு ஆகும்.

இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம் :

- $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது எனவும் $f(a)$ மற்றும் $f(b)$-க்கு இடையில் ($f(a)$ மற்றும் $f(b)$ உள்ளடங்கியது) c என்ற ஏதேனும் ஒரு எண் உள்ளது எனில், $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் குறைந்தபட்சம் x என்ற ஒரு எண்ணையாவது $f(x) = c$ என்று காணலாம்.

ரோலின் தேற்றம் :

- $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கிறது. மேலும் $f(a) = f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ஆனது $f'(c) = 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் :

- $f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் ($f(a), f(b)$ ஆகியவை சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை). உள்ளது என்க. அப்போது குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ -யினை $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ எனுமாறு காணலாம்.
- $f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$ ஆகவும் இருந்தால், $x_1, x_2 \in [a, b]$ -க்கு $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) < f(x_2)$ ஆகும்.
- $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ காணத்தக்கது மற்றும் இதன் மதிப்பு L என்க. மேலும் $f(x)$ ஆனது $x = \mathrm{L}$-ல் தொடர்ச்சியானது என்க. ஆகவே $\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\right)$
- $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு தேக்கநிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ ஆகும்.
- $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு நிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ அல்லது $f'(x_0)$ காணத்தக்கது அல்ல.
- $f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால், f ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரு மீப்பெரு பெரும மதிப்பையும் மற்றும் ஒரு மீச்சிறு சிறும மதிப்பையும் பெறும்.

ஃபெர்மாட் :

- $f(x)$-க்கு $x = c$-ல் இடம் சார்ந்த அறுதி உள்ளது எனில் c ஒரு நிலை எண் ஆகும். இந்த நிலை எண்ணினை $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை த் தீர்ப்பதன் மூலமாகவும், $f(x)$ காணத்தக்கதாக உள்ள x-ன் மதிப்புகளை காண்பதன் மூலமாகவும் பெறலாம்.

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- **ஒரு வளைவரையின் சாய்வு அல்லது சாய்வு விகிதம் :** $y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை என்க. $(x, f(x))$ மற்றும் $(x+h, f(x+h))$ என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு

  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (நியூட்டனின் ஈவு) ... (1)

  $h \to 0$ எனும் போது எல்லையானது

  $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ [நியூட்டனின் ஈவின் எல்லை] ... (2)

  என்பது (x,y) அல்லது $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வாகும்.

- இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$
- இரண்டு கோடுகள் இணை எனில் $m_1 = m_2$.
- இரண்டு கோடுகள் செங்குத்து எனில் $m_1\, m_2 = -1$
- **டெய்லரின் தொடர் :**

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots\ldots$$

- **மெக்லாரனின் தொடர் :**

  $a = 0$ எனில் மேற்கண்ட விரிவின் வடிவம்

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

- **லோபிதாலின் விதி :**

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, எனில் $\lim\limits_{x\to a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, எனில் $\lim\limits_{x\to a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

- $f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \le f(b)\ \forall\ a, b \in$ I என இருந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் ஏறும்.
- $f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \ge f(b)\ \forall\ a, b \in$ I என இருந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் இறங்கும்.
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) \ge 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில் (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். ... (1)
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) > 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில் (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். ... (2)
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) \le 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இறங்கும். ... (3)

- $\frac{d}{dx}(f(x)) < 0 \; \forall \; x \in (a,b)$ எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும். ... (4)

- **முதல் வகைக்கெழு சோதனை**

  (i) $f'(x)$ ஆனது c-ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால் , $f(x)$ -க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.

  (ii) $f'(x)$ ஆனது c-ல் மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால் , $f(x)$ -க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.

  (iii) $f'(x)$ -ன் குறியானது c-ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c-ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால் $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.

- **குழிவு தன்மை சோதனை :**

  (i) திறந்த இடைவெளி I -ல் $f''(x) > 0$ எனில், I -ல் $f(x)$ மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

  (ii) திறந்த இடைவெளி I -ல் $f''(x) > 0$ எனில், I -ல் $f(x)$ கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும்.

- **வளைவு மாற்றுப்புள்ளி சோதனை :**

  (i) $f''(c)$ காணத்தக்கது மற்றும் $f''(c)$ -ன் குறி ஆனது $x = c$ -ஐ கடக்கும் போது மாறுகிறது, எனில் $(c, f(c))$ ஆனது f -ன் வளைவு மாற்றுப் புள்ளி ஆகும்.

  (ii) வளைவு மாற்றுப்புள்ளி c-ல் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனில், $f''(c) = 0$ ஆகும்.

- **இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை :**

  c எனும் நிலைப்புள்ளியில் $f'(c) = 0$, எனவும் c-ன் அன்மையில் $f'(x)$ காணத்தக்கது எனவும் கொண்டால் $f''(c) < 0$ எனில் c-யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும்.

- மேலும் $f'(c)$ எனில் இந்த சோதனையில் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவல் இல்லை என்கிறோம்.
- y - அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(-x, y) \; \forall \; x, y$
- x - அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(x, -y) \; \forall \; x, y$
- ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(-x, -y) \; \forall \; x, y$
- **கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு :**

  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ அல்லது $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ எனில் $y = L$ என்ற கோடு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

- **நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு :**

  $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ அல்லது $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ எனில் $x = a$ என்ற கோடு நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

- **சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு :**

  சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு, ஒரு சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு தொகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசைப் பகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசையை விட அதிகமாக இருந்தால் வரும்.

பயிற்சி 7.1

1. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து t வினாடிகளுக்குப் பிறகு ஒரு துகள் உள்ள தூரத்தின் அளவு $s = 2t^2 + 3t$ மீட்டர் எனும்படி நேர்க்கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

(i) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி திசைவேகம் என்ன?

(ii) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன?

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட $s = 2t^2 + 3t$

$s(3) = 2 \times 3^2 + 3(3)$
$= 2 \times 9 + 9$
$= 27$ மீ ... (1)

$s(6) = 2 \times 6^2 + 3(6)$
$= 72 + 18 = 90$ மீ ... (2)

சராசரி திசைவேகம் $= \dfrac{s(6)-s(3)}{6-3} = \dfrac{90-27}{3}$
$= \dfrac{63}{3} = 21$ மீ/வினாடி

(ii) கணப்பொழுது திசைவேகம்

$V(t) = \dfrac{ds}{dt} = 4t + 3$

$t = 3$ இல் கணப்பொழுது திசைவேகம்

$\Rightarrow 4t + 3 = 4(3) + 3 = 15$ மீ/வினாடி [(1) இலிருந்து]

$t = 6$ இல் கணப்பொழுது திசைவேகம்

$\Rightarrow 4t + 3 = 4(6) + 3$
$= 24 + 3 = 27$ மீ/வினாடி [(2) இலிருந்து]

2. 400 அடி உயர மலை உச்சி முகட்டிலிருந்து தவறுதலாக ஒரு புகைப்படக் கருவி விழுகிறது. t வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவி விழும் தூரம் $s = 16t^2$ ஆகும்.

(i) தரையைத் தொடும் முன்னர் புகைப்படக் கருவி விழ எடுத்துக்கொண்ட நேரம் என்ன?

(ii) கீழே விழுந்த இறுதி 2 வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவியின் சராசரி திசைவேகம் என்ன ?

(iii) தரையைத் தொடும் போது புகைப்படக் கருவியின் கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன ?

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட $s(t) = 16t^2$,

உயரம் $= 400$ அடி

$16t^2 = 400$

$\Rightarrow t^2 = \dfrac{400}{16} = \dfrac{100}{4}$

$t^2 = 25$

$t = 5$ வினாடி

(ii) சராசரி திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32t$

இங்கு $t = 2$ வினாடி எனில்

இறுதி 2 வினாடிகளில் சராசரி

$= \dfrac{V \text{ at } t=3 + V \text{ at } t=5}{2}$

$= \dfrac{32(3)+32(5)}{2}$

$= \dfrac{96+160}{2} = \dfrac{256}{2}$

$= 128$ அடி/வினாடி

(iii) கணப்பொழுது திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32t$

இங்கு $t = 5$ வினாடி

திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32(5)$

$= 160$ அடி/வினாடி

3. $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$, இங்கு $t \geq 0$ எனும் விதிப்படி ஒரு கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

(i) எந்நேரங்களில் துகளின் திசை மாறுகின்றது?

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம் என்ன ?

(iii) திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் நேரங்களில் எல்லாம் துகளின் முடுக்கம் காண்க ? [SRT - 2022]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4, t \geq 0$.

(i) வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$V(t) = 6t^2 - 18t + 12$ ... (1)
$= 6(t^2 - 3t + 2)$
$= 6(t-1)(t-2)$

இங்கு $V(t) = 0$

$\Rightarrow 6(t-1)(t-2) = 0$

$\Rightarrow t = 1, 2$

$V(t)$ யின் குறி மாறும் பொழுது துகளின் திசை மாறுகின்றது.

$0 \le t < 1$ எனில், $(t-1)$ மற்றும் $(t-2)$ இரண்டும் < 0

$\Rightarrow \quad V(t) > 0$

$1 < t < 2$ எனில், $(t-1) > 0$ மற்றும் $(t-2) < 0$

$\Rightarrow \quad V(t) < 0$

$t > 2$ எனில், $(t-1)$ மற்றும் $(t-2)$ இரண்டும் > 0

$\Rightarrow \quad V(t) > 0$

$\therefore$ $t = 1$ மற்றும் $t = 2$ வினாடிகளில் துகளின் திசை மாறுகின்றது.

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம்

$|s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)|$

$$s(0) = -4$$
$$s(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4 = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$$
$$s(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4 = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$$
$$s(4) = 2(4)^3 - 9(4)^2 + 12(4) - 4 = 128 - 144 + 48 - 4 = 28$$

$\therefore |s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)|$
$= |-4-1| + |1-0| + |0-28|$
$= |-5| + |1| + |-28|$
$= 5 + 1 + 28 = 34$ மீ

(iii) முடுக்கம் $A = 12t - 18$ $\left[\text{முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt}\right]$

$t = 1$ எனில்,

முடுக்கம் $= 12(1) - 18 = -6$ மீ/வினாடி^{2}

$t = 2$ எனில்,

முடுக்கம் $= 12(2) - 18 = 6$ மீ/வினாடி^{2}

4. x பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு $v = x^3$ எனில் $x = 5$ அலகுகள் எனும் போது x -ஐப் பொறுத்து கன அளவு மாறுவீதம் காண்க .

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $v = x^3$

x ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2$$
$$x = 5 \text{ எனில் } \frac{dv}{dx} = 3(5^2) = 75$$
$$\therefore x = 5 \text{ ல் } \frac{dv}{dx} = 75 \text{ அலகுகள்.}$$

5. x நீளமுள்ள (மீட்டரில்) ஒரு மெல்லிய கோலின் நிறை $m(x)$ (கிலோகிராமில்), $m(x) = \sqrt{3x}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $x = 3$ மற்றும் $x = 27$ மீட்டர் எனும் போது நீளத்தைப் பொறுத்து நிறையின் மாறுபாட்டு வீதத்தை காண்க. [அ.மா.வி - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $m(x) = \sqrt{3x} = \sqrt{3}.x^{\frac{1}{2}}$

x ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{dm}{dx} = \sqrt{3}.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$
$$x = 3 \text{ இல் } \frac{dm}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ கிகி/மீ}$$
$$x = 27 \text{இல் } \frac{dm}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{27}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2(3)\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6} \text{ கிகி/மீ}$$

6. ஒரு குளத்தில் விழுந்த கல்லினால் பொது மைய வட்டங்களின் வடிவத்தில் சிற்றலைகள் ஏற்படுகின்றது. வெளிப்புற சிற்றலையின் ஆரம் r வினாடிக்கு 2 செ .மீ வீதம் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் 5 செ.மீ. எனும் போது கலங்கும் நீரின் பரப்பளவு மாறுவீதம் என்ன ?

தீர்வு : சிற்றலையின் ஆரம் r மற்றும் பரப்பு A என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\frac{dr}{dt} = 2$ செ.மீ/ வினாடி மற்றும்

$$r = 5 \text{ செ.மீ} \qquad \dots (1)$$
$$A = \pi r^2 \text{ என்பது}$$

't' ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

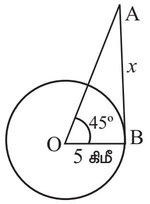
$$\frac{dA}{dt} = \pi(2r).\frac{dr}{dt} = \pi(2)(5)(2)$$

[(1)-ஐ பயன்படுத்தி]

$$\frac{dA}{dt} = 20\pi \text{ சதுர செ.மீ / வினாடி}$$

7. கப்பலின் மீதுள்ள சுழலொளி விளக்கு ஒவ்வொரு 10 வினாடிகளுக்கு ஒரு முறை சுற்றுகிறது. கடற்கரையிலிருந்து 5 கி.மீ தூரத்தில் கப்பல் நங்கூரமிடப்பட்டுள்ளது. அவ்விளக்கின் ஒளிக்கற்றை கடற்கரையுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுத்தும் போது கடற்கரையில் ஒளிக்கற்றை எவ்வளவு வேகமாக நகரும்?

தீர்வு : கலங்கரை விளக்கத்தின் ஒரு விளக்கு ஒவ்வொரு 10 வினாடிக்கு (360°) இல் சுற்றுவதால்



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ ஆரம் / வினாடி}$$

$$AB = x \text{ என்க}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{x}{5}$$

$$x = 5\tan\theta \quad \ldots (1)$$

$$\text{திசைவேகம்} = \frac{dx}{dt} \text{ என அறிவோம்.}$$

't' யைப் பொறுத்து (1) ஐ வகையிட கிடைப்பது

$$\frac{dx}{dt} = 5 \text{ வினாடி}^2\,\theta . \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 5\,(\text{வினாடி}^2)\,(45^\circ)\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= 5\,\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\frac{\pi}{5}\right) = 5\,(2) \times \left(\frac{\pi}{5}\right)$$

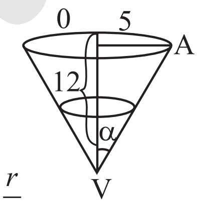
$$= 2\pi \text{ கிமீ/ வினாடி}$$

8. தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர்வட்ட கூம்பின் வடிவில் உள்ள ஒரு நீர்நிலைத் தொட்டியின் ஆழம் 12 மீட்டர் மற்றும் மேலுள்ள வட்டத்தின் ஆரம் 5 மீட்டர் என்க . நிமிடத்திற்கு 10 கன மீட்டர் வேகத்தில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது எனில், 8 மீட்டர் ஆழத்தில் நீர் இருக்கும் போது நீரின் ஆழம் அதிகரிக்கும் வேகம் என்ன ?

[Hy - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $h = 12$ மீ

$r = 5$ மீ



V என்பது கூம்பின் கன அளவு

பாதி உச்சிக் கோணம் α

$$\therefore \tan\alpha = \frac{OA}{VO} = \frac{5}{12} = \frac{r}{h}$$

$$\Rightarrow 12r = 5h \Rightarrow r = \frac{5h}{12} \quad \ldots (1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ என அறிவோம்}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5h}{12}\right)^2 . h \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^3}{144}\right) = \frac{25\pi h^3}{3\times 144}$$

't' யை பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது

$$\frac{dv}{dt} = \frac{25\pi}{3\times 144}3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{25\pi}{144}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{25\pi}{144}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left[\because \text{கொடுக்கப்பட்ட } h = 8, \frac{dv}{dt} = 10\text{மீ}^3/\text{ வினாடி}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{10\times 144}{25\pi\times 64} = \frac{dh}{dt}$$

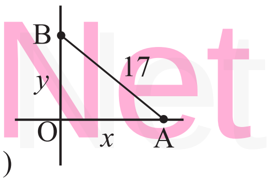
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{9}{10\pi} \text{ மீ / நிமிடம்}$$

9. 17 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ஏணி செங்குத்தான சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து விலகிச் செல்லும் வீதம் வினாடிக்கு 5 மீட்டர் எனில் ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 8 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் போது,

(i) அதன் உச்சி என்ன வீதத்தில் கீழ்நோக்கி இறங்கும் என்பதைக் காண்க .

(ii) எந்த வீதத்தில், ஏணி, சுவர் மற்றும் தரை ஆகியவற்றால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறது?

தீர்வு : (i) படத்தில் AB என்பது ஏணி. $x + y$ என்பன முறையே கிடைமட்ட செங்குத்து நகர்வுகள் என்க.



பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 17^2 \quad \ldots (1)$$

$$\text{கொடுக்கப்பட்ட } \frac{dx}{dt} = 5 \text{ மற்றும் } x = 8$$

$$x = 8 \text{ எனில், } 8^2 + y^2 = 17^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 289 - 64 = 225$$

$$\Rightarrow y = 15$$

't' யை பொறுத்து (1) யை வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 8\,(5) + 15\frac{dy}{dt} = 0 \quad \left[\because x = 8, \frac{dx}{dt} = 15, y = 15\right]$$

$$\Rightarrow 40 + 15\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-40}{15} = \frac{-8}{3} \text{ மீ/ வினாடி}$$

$\therefore$ ஏணியின் உச்சி கீழ் நோக்கி இறங்கும் விகிதம் $\frac{-8}{3}$ மீ/வினாடி.

(ii) ஏணி, சுவர் மற்றும் தரை ஆகியவற்றால் உருவாகும் செங்கோண முக்கோணம்

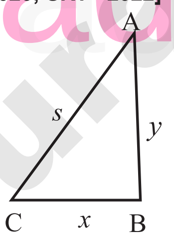
$$\therefore \text{பரப்பு} = \frac{1}{2}xy$$

't' யை பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[8\left(-\frac{8}{3}\right)+15(5)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-64}{3}+75\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-64+225}{3}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{161}{3}\right)$$
$$\frac{dA}{dt} = 26.83 \text{ சதுர மீ /வினாடி}$$

10. வடதிசையிலிருந்து ஒரு செங்கோண சந்திப்பை அணுகும் ஒரு காவல்துறை வாகனம் வேகமாகச் சென்று திரும்பி கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒரு மகிழுந்தை துரத்துகிறது. சாலை சந்திப்பின் வடக்கே 0.6 கி.மீ தொலைவில் காவல்துறையின் வாகனமும் கிழக்கே 0.8 கி.மீ தொலைவில் மகிழுந்தும் உள்ள பொழுது, மின்காந்த அலைக் கருவியின் துணைகொண்டு காவல்துறை தங்களது வாகனத்திற்கும் மகிழுந்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் மணிக்கு 20 கி.மீ வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது எனத் தீர்மானிக்கின்றனர். காவல்துறை வாகனம் மணிக்கு 60 கி.மீ வேகத்தில் நகர்கிறது எனில் மகிழுந்தின் வேகம் என்ன? **[மார்ச் - 2020; SRT - 2022]**

தீர்வு : x குறிப்பது மகிழுந்து கடந்த தூரம், y குறிப்பது காவல்துறை கடந்த வாகனம் மற்றும் s குறிப்பது வாகனம் மற்றும் மகிழுந்து இடையேயான தூரம் ஆகும்.



$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட $= x = 0.8$ கி.மீ, $y = 0.6$ கி.மீ,

$$\frac{dy}{dt} = -60 \text{ கி.மீ / மணி,}$$
$$\frac{ds}{dt} = 20 \text{ கி.மீ / மணி,}$$

$$\Delta\, ABC\text{-ல் } s^2 = x^2+y^2 \qquad \ldots (1)$$
$$\Rightarrow \quad s^2 = (0.8)^2+(0.6)^2$$
$$= 0.64+0.36$$
$$s^2 = 1$$
$$\Rightarrow \quad s = 1 \qquad \ldots (2)$$

't' யை பொறுத்து (1) யை வகையிட கிடைப்பது,

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt} \qquad \text{[2 ஆல் வகுக்க]}$$
$$\Rightarrow \quad 1\left(\frac{ds}{dt}\right) = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right)+(0.6)(-60)$$
$$\Rightarrow \quad 1(20) = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right)+(0.6)(-60)$$
$$\Rightarrow \quad 20 = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right)-36$$
$$\Rightarrow \quad 20+36 = (0.8)\frac{dx}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{56}{0.8} = 70 \text{ கி.மீ / மணி}$$

$\therefore$ மகிழுந்தின் வேகம் 70 கி.மீ / மணி

பயிற்சி 7.2

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பின்வரும் வளைவரைகளுக்கும் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க .

(i) $y = x^4+2x^2-x,\ x=1$

(ii) $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ t = \frac{\pi}{2}$.

தீர்வு : (i) $y = x^4+2x^2-x,\ x=1$

கொடுக்கப்பட்ட $y = x^4+2x^2-x$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3+4x-1$$

$x = 1$ ல் தொடுகோட்டின் சாய்வு

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)}$$
$$= 4(1)^3+4(1)-1$$
$$= 4+4-1 = 7$$
$$\therefore m = 7$$

(ii) $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$ **at** $t = \frac{\pi}{2}$.

கொடுக்கப்பட்ட $x = a\cos^3 t\ ;\ y = b\sin^3 t$

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t\ ;$$
$$\frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cot t$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{-b}{a}\tan t$$

$t = \frac{\pi}{2}$ என்பது தொடுகோட்டின் சாய்வு

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{-b}{a}\tan\frac{\pi}{2} = \frac{-b}{a}\times\infty = \infty$$
$$\therefore m = \infty$$

அத்தியாயம்
8

வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

முக்கிய வரையறைகள்

✦ **நேரியல் தோராய மதிப்பு :**
$f:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும் $x_0 \in (a,b)$ எனவும் கொள்க. x_0 என்ற புள்ளியில் f-ன் தோராய மதிப்பு L-ன் வரையறை

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall\, x \in (a,b) \text{ ஆகும்.}$$

✦ $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

✦ $df = f'(x)\,\Delta x$

✦ **தொடர்ச்சி தன்மை :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $F(u, v)$ இல் தொடர்ச்சியானது எனில் பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(1) (u, v) இல் F வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y) = L$ இருக்கிறது.

(3) $L = F(u, v)$

✦ **கிளெய்ராட்டின் தேற்றம் :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b,\ c < y < d\} \subset R^2$, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ என்ற சார்பு A இல் f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்பெற்று அவை தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$ என்பதாக இருக்கும்.

✦ **இலாபிலாஸின் சமன்பாடு :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ என்க. $u: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ என்பது $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \ \forall\ (x, y) \in A$ எனுமாறு இருக்குமானால் u ஆனது A-ல் சீரானது எனலாம். இது இலாபிலாஸின் சமன்பாடு எனப்படும்.

✦ பொருத்தமாக வரையறுக்கப்பட்ட λ, x, y- க்கு $(\lambda x, \lambda y) \in A$ எனில் $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x, y)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ எனுமாறு p என்ற மாறிலி இருக்குமானால் சார்பு F என்பது A-ன் மீதான சமபடித்தான சார்பாக இருக்கும். இந்த மாறிலி p, சார்பு F -ன் படி எனப்படும்.

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- தனி பிழை = மெய்மதிப்பு − தோராய மதிப்பு
- சார்பிழை $= \dfrac{\text{மெய் மதிப்பு} - \text{தோராய மதிப்பு}}{\text{மெய் மதிப்பு}}$
- சதவீதப்பிழை = சார்பிழை × 100
- $df = f'(x)\,\Delta x$
- $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}$ என்ற புள்ளியில் F-ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

  $$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} (z - z_0)$$

- F -ன் வகையீடு

  $$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\,dz$$

  இங்கு $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ மற்றும் $dz = \Delta z$.

- $w(x, y)$ என்பது x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு எனில் $\dfrac{\partial w}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx}$
- $W(x, y)$ என்பது x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த $\dfrac{\partial W}{\partial x}, \dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்ட சார்பு என்க. $x = x(s, t)$ மற்றும் $y = y(s, t),\ s, t \in \mathbb{R}$ என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s மற்றும் t-ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு எனில், $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial s},\ \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{\partial W}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial W}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$
- **ஆய்லரின் தேற்றம் :** F என்ற சார்பு B-ன் மீது தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தான சார்பாகவும் இருக்குமானால்

  $$x.\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = p\,F(x, y, z)\ \forall\ (x, y, z) \in A.$$

பயிற்சி 8.1

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ என்க. $x = 27$ இல் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க. நேரியல் தோராய மதிப்பை பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{27.2}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \sqrt[3]{x}$ மற்றும்

$x_0 = 27$ என்க.

$\Delta x = 0.2$ என அறிவோம்.

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in (a,b)$

$\therefore \sqrt[3]{27.2} = f(27) + f'(27)(0.2)$ ...(1)

இங்கு $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$\therefore f'(27) = \dfrac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3(3^3)^{\frac{2}{3}}} \dfrac{1}{3(3^2)} = \dfrac{1}{27}$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$\sqrt[3]{27.2} = 3 + \dfrac{1}{27}(0.2)$

$= 3 + .0074 = 3.0074$

$\therefore \sqrt[3]{27.2} = 3.0074$

2. நேரியல் தோராய மதிப்பீட்டு முறையில் பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் காண்க .

(i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ **(ii)** $\sqrt[4]{15}$ **(iii)** $\sqrt[3]{26}$

தீர்வு :(i) $(123)^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}},\ x_0 = 125,\ \Delta x = -2$ என்க.

$$\therefore (123)^{\frac{2}{3}} = f(125) + f'(125)(-2) \quad \dots (1)$$

$$f(125) = (125)^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(125) = \frac{2}{3(125)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3(5^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3(5)} = \frac{2}{15}$$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$$(123)^{\frac{2}{3}} = 25 + \frac{2}{15}(-2)$$

$$= 25 - \frac{4}{15} = 25 - 0.27$$

$$(123)^{\frac{2}{3}} = 24.73$$

(ii) $\sqrt[4]{15}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}}, x_0 = 16, \Delta x = -1 \text{ என்க}$$

$$\therefore \sqrt[4]{15} = f(16) + f'(16)(-1) \quad \dots (1)$$

$$f(16) = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$$

$$f'(16) = \frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(2^3)} = \frac{1}{4(8)} = \frac{1}{32}$$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$$\sqrt[4]{15} = 2 + \frac{1}{32}(-1)$$

$$= 2 - \frac{1}{32} = 2 - 0.0312$$

$$\sqrt[4]{15} = 1.9688$$

(iii) $\sqrt[3]{26}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x_0 = 27, \Delta x = -1$$

$$\therefore \sqrt[3]{26} = f(27) + f'(27)(-1) \quad \dots (1)$$

$$f(27) = (27)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore f'(27) = \frac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(3^2)} = \frac{1}{27}$$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$$\sqrt[3]{26} = 3 + \frac{1}{27}(-1)$$

$$= 3 - \frac{1}{27} = 3 - 0.037$$

$$\sqrt[3]{26} = 2.963$$

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க .

(i) $f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$ **[அ.மா.வி - 2019]**

(ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

(iii) $h(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = 1$

தீர்வு :(i) $f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$

$$f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 2^3 - 5(2) + 12$$

$$= 8 - 10 + 12 = 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 3(2^2) - 5 = 7$$

$$\therefore L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 10 + 7(x - 2)$$

$$= 10 + 7x - 14$$

$$L(x) = 7x - 4$$

(ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

கொடுக்கப்பட்ட $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

$$g(x_0) = \sqrt{(-4)^2 + 9} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\therefore g'(x_0) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+9}} = \frac{-4}{5}$$

$$\therefore L(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 5 - \frac{4}{5}(x+4) = \frac{25 - 4x - 16}{5}$$

$$L(x) = \frac{9 - 4x}{5}$$

(iii) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$

$$h(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_0) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore L(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{2+x-1}{4} = \frac{x+1}{4}$$

$$\therefore L(x) = \frac{x+1}{4}$$

4. ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செ.மீ-க்குப் பதிலாக 12.5 செ.மீ என அளக்கப்படுகின்றது எனில் அதன் பரப்பு கணக்கிடுவதில் பின்வருவனவற்றை காண்க :

(i) தனிப்பிழை

(ii) சார் பிழை

(iii) சதவீதப் பிழை

தீர்வு : (i) தனிப்பிழை

ஆரம் $r = 12.65$

$\Delta r = 12.5 - 12.65$

$dr = \Delta r = -0.15$

வட்ட தகட்டின் பரப்பு $A = \pi r^2$

r ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi \times 12.65 \times (-0.15)$$

$$= -3.795\,\pi \text{ செ.மீ}^2$$

தோராயப்பிழை $= -3.795\,\pi$ செ.மீ^{2}

மெய்ப்பிழை $= A(12.5) - A(12.65)$

$= \pi(12.5)^2 - \pi(12.65)$

$= \pi(156.25 - 160.0225)$

$= -3.7725\,\pi$ செ.மீ^{2}

தனிப்பிழை = மெய்ப்பிழை = தோராயப்பிழை

$= -3.7725\,\pi + 3.795\,\pi$

$= 0.0225\,\pi$ செ.மீ^{2}

(ii) சார் பிழை $= \dfrac{\text{தனிப்பிழை}}{\text{மெய்ப்பிழை}}$

$$= \frac{0.0225\,\cancel{\pi}}{-3.7725\,\cancel{\pi}} = -0.00596$$

$$\simeq -0.006$$

(iii) சதவீதப் பிழை = சார்பிழை $\times 100$

$= -0.006 \times 100 = -0.6\%$

5. பனிக்கட்டியிலான ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ. அதன் ஆரம் 10 செ.மீலிருந்து 9.8 செ.மீ -ஆக குறைகின்றது. பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்பினைக் காண்க :

(i) கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம்

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் [SRT - 2022]

தீர்வு : கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

கொடுக்கப்பட்ட $r = 10$ செ.மீ

$\dfrac{dr}{dt} = -0.2$ செ.மீ

(i) கன அளவு

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம்

$$= \frac{4}{\cancel{3}}\pi . \cancel{3} r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(10)^2(-0.2)$$

$$= 400\,\pi(-0.2) = -80\,\pi \text{ செ.மீ}^3$$

$\therefore$ கன அளவு $80\,\pi$ செ.மீ^{3} குறைகிறது.

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்

கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\,\pi\, r^2$

வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் $= 4\,\pi\,.2r.\dfrac{dr}{dt}$

$= 8\pi(10)(-0.2)$

$= -\dfrac{80\pi \times 2}{10} = -16\,\pi$ செ.மீ^{2}

$\therefore$ வளைப்பரப்பு $16\,\pi$ செ.மீ^{2} குறைகிறது.

6. l நீளம் உள்ள ஒரு தனி ஊசலின் முழு அலைவு நேரம் T என்பது $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு g ஒரு மாறிலி l-ல் ஏற்படும் 2 சதவீதப் பிழைக்கு ஏற்ப T-ன் கணக்கீட்டில் ஏற்படும் தோராய சதவீதப் பிழையைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தனி பிழை = 2%

$$\Rightarrow \quad \frac{dl}{l} = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

கொடுக்கப்பட்ட $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க கிடைப்பது,

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{1}{T}dT = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}(.02)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = 0.01$$

தோராய சதவீத பிழை $= \frac{\Delta T}{T}\times 100 = 0.01\times 100 = 1\%$

7. ஓர் எண்ணின் n -ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும் எனக்காட்டுக. **[SRT - 2022]**

தீர்வு : அந்த எண் x என்க.

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

பிறகு $\log y = \frac{1}{n}\log x$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க கிடைப்பது

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{n}\times\frac{1}{x}dx$$

அதாவது $\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dx}{x}$

சதவீத பிழை $= \frac{\Delta y}{y}\times 100 \simeq \frac{1}{n}\left(\frac{dx}{x}\times 100\right)$

அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\simeq \frac{1}{n}$ மடங்கு

எனவே ஒரு எண்ணின் nஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும்.

பயிற்சி 8.2

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு dy காண்க :

(i) $y = \dfrac{(1-2x)^3}{3-4x}$ **[Hy - 2019]**

(ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$

(iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

தீர்வு : (i) $y = \dfrac{(1-2x)^3}{3-4x}$

கொடுக்கப்பட்ட $y = \dfrac{(1-2x)^3}{3-4x}$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = \frac{(3-4x)\left[3(1-2x)^2(-2)\right]-(1-2x)^3(-4)}{(3-4x)^2}dx$$

$$= \frac{2(1-2x)^2\left[-3(3-4x)+2(1-2x)\right]}{(3-4x)^2}dx$$

$$= \frac{2(1-2x)^2[-9+12x+2-4x]}{(3-4x)^2}dx$$

$$dy = \frac{2(1-2x)^2[8x-7]}{(3-4x)^2}dx$$

(ii) $y = (3+\sin(2x))^{\frac{2}{3}}$

கொடுக்கப்பட்ட $y = (3+\sin(2x))^{\frac{2}{3}}$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = \frac{2}{3}(3+\sin 2x)^{\frac{2}{3}-1}(\cos 2x)(2)dx$$

$$dy = \frac{4}{3}\cdot\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$$

(iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

கொடுக்கப்பட்ட $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = (e^{x^2-5x+7}(-\sin(x^2-1)(2x)) + \cos(x^2-1)\,e^{x^2-5x+7}(2x-5))dx$$

$$= e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1) - 2x\sin(x^2-1)]dx$$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ என்ற சார்பிற்கு df காண்க மற்றும்

(i) $x = 2, dx = 0.1$ **[மார்ச் - 2020; மே - 2022]**

(ii) $x = 3$ மற்றும் $dx = 0.02$ எனும் போது df -ஐ மதிப்பிடுக. **[ஜூலை - 2022]**

தீர்வு :(i) $x = 2, dx = 0.1$

வகையீடு எடுக்க

$$\begin{aligned} df &= (2x+3)\,dx \\ x &= 2 \text{ எனில், } dx = 0.1 \\ df &= (2(2)+3)(0.1) \\ &= 7(0.1) = 0.7 \end{aligned}$$

(ii) $x = 3$ **மற்றும்** $dx = 0.02$

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ எனில் } dx = 0.02, \\ df &= (2x+3)dx = [2(3)+3)\,0.02, \\ df &= (6+3)(0.02) = 9(0.02) \\ &= 0.18 \end{aligned}$$

3. f **என்ற சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட** x, Δx **மதிப்புகளுக்கு** Δf **மற்றும்** df **காண்க. மேலும் அவற்றை ஒப்பிடுக.**

(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 ; x = 2, \Delta x = dx = 0.5$

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3; x = -0.5, \Delta x = dx = 0.1$

தீர்வு :(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 ; x = 2, \Delta x = dx = 0.5$

$$\begin{aligned} \text{கொடுக்கப்பட்ட } f(x) &= x^3 - 2x^2 ; x = 2, \Delta x = dx = 0.5 \\ df &= f'(x).\Delta x = (3x^2 - 4x)\,\Delta x \\ &= [3(2)^2 - 4(2)]\,(0.5) \\ &= 4(0.5) = 2.0 \\ \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= f(2.5) - f(2) \\ &= [(2.5)^3 - 2\,(2.5)^2] \\ &\qquad -[2^3 - 2(2^2)] \\ &= 15.625 - 12.5 - 0 = 3.125 \\ \therefore \Delta f &= 3.125, df = 2.0 \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3; x = -0.5, \Delta x = dx = 0.1$

$$\begin{aligned} df &= f'(x)\,\Delta x = (2x+2)\,(\Delta x) \\ x &= -0.5, \Delta x = dx = 0.1 \\ df &= (2(-0.5)+2) = 0.1 \\ \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= f(-0.5+0.1) - f(-0.5) \\ &= f(-0.4) - f(-0.5) \\ &= [(-0.4)^2 + 2\,(-0.4) + 3] - \\ &\qquad [(-0.5)^2 + 2\,(-0.5) + 3] \\ &= (0.16 - 0.8 + 3) - (0.25 - 1 + 3) \\ &= 2.36 - 2.25 = 0.11 \\ \therefore \Delta f &= 0.11, df = 0.1 \end{aligned}$$

4. $\log_{10}e = 0.4343$ **எனக்கொண்டு** $\log_{10}1003$**-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\log_{10}e = 0.4343$

கண்டுபிடிக்க வேண்டியது $\log_{10}1003$

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10}x, x_0 = 1000, dx = 3 \\ f(1000) &= \log_{10}{}^{1000} \\ &= \log_{10}{}^{10^3} = 3\log_{10}{}^{10} \\ &= 3(1) = 3 \\ f'(x) &= \frac{1}{x}.\log_{10}{}^{e} \\ f'(1000) &= \frac{1}{1000}\log_{10}{}^{e} \\ &= \frac{1}{1000}(0.4343) \\ \therefore L(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 3 + \frac{1}{1000}(0.4343)(3) \\ &= 3 + \frac{1.3029}{1000} \\ &= 3 + 0.0013029 \\ \log_{10}{}^{1003} &= 3.0013029 \end{aligned}$$

5. ஒரு மரத்தின் அடிப்பகுதியின் விட்டம் 30 செ.மீ. அடுத்த ஆண்டு அதன் சுற்றளவு 6 செ.மீ அதிகரிக்கின்றது எனில்

(i) தோராயமாக மரத்தின் விட்டம் எவ்வளவு வளர்ந்துள்ளது?

(ii) அதன் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பானது எவ்வளவு சதவீதம் அதிகரித்திருக்கும்?

தீர்வு : (i)

$$\begin{aligned} \text{மூலை விட்டம்} &= 30 \text{ செ.மீ} \\ \text{ஆரம்} &= 15 \text{ செ.மீ} \\ \text{சுற்றளவு } (c) &= 2\pi r \\ \frac{dc}{dr} &= 2\pi(3) = 6\pi \text{ செ.மீ} \\ dc &= 2\pi dr \\ 6 \text{ செ.மீ} &= 2\pi dr \\ \frac{6}{2\pi} \text{ செ.மீ} &= dr \\ \frac{3}{\pi} \text{ செ.மீ} &= dr \end{aligned}$$

மூலைவிட்டத்தின் தோராயமான வளர்ச்சி

$$\begin{aligned} &= 2dr = 2 \times \frac{3}{\pi} \text{ செ.மீ} \\ &= \frac{6}{\pi} \text{ செ.மீ} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ dA &= \pi 2r\,dr \\ dA &= \cancel{\pi}\,2(15)\frac{3}{\cancel{\pi}} \text{ செ.மீ}^2 \end{aligned}$$

5 மதிப்பெண்கள்

1. $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ **எனில்** $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ **என நிரூபிக்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)$

$$\Rightarrow \quad \tan u = \frac{x^3+y^3}{x-y} \text{ மற்றும்}$$

$$f = \tan u \text{ என்க}$$

$$\therefore f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x-y}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^3x^3+t^3y^3}{tx-ty} = \frac{t^3\left(x^3+y^3\right)}{t\left(x-y\right)}$$

$$= t^2 f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ ஆனது படி 2 உடைய சமபடித்தான சார்பு.

$\therefore$ ஆய்லரின் தேற்றப்படி,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f \Rightarrow x.\frac{\partial}{\partial x}(\tan u) + y.\frac{\partial}{\partial y}(\tan u)$$

$$= 2\tan u \qquad [\because f = \tan u]$$

$$\Rightarrow x.\sec^2 u\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2 u\,\frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan u$$

$\sec^2 u$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\sin u}{\sec^2 u} = \frac{2\sin u}{\dfrac{1}{\cos^2 u}}$$

$$= 2\sin u\cos u = \sin 2u$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

2. $V = \log r$ **மற்றும்** $r^2 = x^2+y^2+z^2$ **, எனில்** $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ **என நிரூபிக்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $r^2 = x^2+y^2+z^2$

$$\log r^2 = \log(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow \quad 2\log r = \log(x^2+y^2+z^2)$$

$$\therefore 2V = \log(x^2+y^2+z^2) [\because V = \log r]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)(1) - x(2x)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$= \frac{y^2+z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$|||^{ly} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{z^2+x^2-y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$\frac{y^2+z^2-x^2+z^2+x^2-y^2+x^2+y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

❁❁❁❁❁

12 ஆம் வகுப்பு

உடனடித்தேர்வு - ஜூலை 2022

PART - III

கணிதம் (விடைகளுடன்)

கால அளவு : 3.00 மணி நேரம்] [மொத்த மதிப்பெண்: 90

அறிவுரைகள்: (1) அனைத்து வினாக்களும் சரியாகப் பதிவாகி உள்ளதா என்பதனைச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின், அறைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.

(2) **நீலம்** அல்லது **கருப்பு** மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும், அடிக்கோடிடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

பகுதி - I (20 × 1 = 20)

குறிப்பு: (i) **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள நான்கு விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதவும்.

1. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^T = A^{-1}$ எனில், x -ன் மதிப்பு :

(அ) $\frac{-4}{5}$ (ஆ) $\frac{-3}{5}$ (இ) $\frac{3}{5}$ (ஈ) $\frac{4}{5}$

2. A என்பது பூஜ்ஜியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ எனில் $(A^T)^{-1} =$

(அ) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ஈ) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $|z+2| = |z-2|$ எனில், z -ன் நியமப்பாதை :

(அ) மெய் அச்சு (ஆ) கற்பனை அச்சு

(இ) நீள்வட்டம் (ஈ) வட்டம்

4. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ -ன் மதிப்பு

(அ) 0 (ஆ) 1 (இ) -1 (ஈ) i

5. $x^3 + 64$ -ன் ஒரு பூச்சியமாக்கி :

(அ) 0 (ஆ) 4 (இ) $4i$ (ஈ) -4

6. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$ -ன் முதன்மை மதிப்பு :

(அ) $\frac{\pi}{6}$ (ஆ) $\frac{5\pi}{6}$ (இ) $\frac{-\pi}{6}$ (ஈ) $\frac{\pi}{3}$

7. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் வழியாகவும் $(0, 3)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு :

(அ) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

(ஆ) $x^2 + y^2 - 6y + 7 = 0$

(இ) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$

(ஈ) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

8. $\frac{x^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின், மையத் தொலைத் தகவு :

(அ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ஆ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (இ) $\sqrt{5}$ (ஈ) $\frac{1}{2}$

9. $\vec{\beta}$ மற்றும் $\vec{\gamma}$ ஆகியவை அமைக்கும் தளத்தில் $\vec{\alpha}$ அமைந்துள்ளது எனில் :

(அ) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 1$ (ஆ) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = -1$

(இ) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 0$ (ஈ) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 2$

10. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $3x - 6y + 2z + 7 = 0$ என்ற தளத்திற்கு உள்ள தொலைவு :

(அ) 0 (ஆ) 1 (இ) 2 (ஈ) 3

11. ஒரு கல்லானது செங்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. t நேரத்தில் அது அடைந்த உயரம் $x = 80t - 16t^2$. கல் அதிகபட்ச உயரத்தை t வினாடி நேரத்தில் அடைந்தால் t ஆனது

(அ) 2 (ஆ) 2.5 (இ) 3 (ஈ) 3.5

12. $y^2 = x$ மற்றும் $x^2 = y$ என்ற பரவளையங்களுக்கிடையே ஆதியில் அமையும் கோணம் :

(அ) $\frac{\pi}{4}$ (ஆ) $\frac{\pi}{6}$ (இ) $\frac{\pi}{2}$ (ஈ) 0

13. 31-ன் 5 ஆம் படி மூல சதவீதப் பிழை தோராயமாக, 31-ன் சதவீதப் பிழையைப் போல் எத்தனை மடங்காகும்?

(அ) $\frac{1}{31}$ (ஆ) $\frac{1}{5}$ (இ) 5 (ஈ) 31

14. $\int_{-1}^{2} |x|dx$ -ன் மதிப்பு :

(அ) $\frac{1}{2}$ (ஆ) $\frac{3}{2}$ (இ) $\frac{5}{2}$ (ஈ) $\frac{7}{2}$

15. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையேயான பரப்பானது :

(அ) $\frac{2}{3}$ (ஆ) $\frac{4}{3}$ (இ) $\frac{8}{3}$ (ஈ) $\frac{5}{3}$

16. மையம் (h, k) மற்றும் ஆரம் 'a' கொண்ட எல்லா வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை _____. இங்கு h, k என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் (மாறத்தக்க மாறிலிகள்)

(அ) 2 (ஆ) 3 (இ) 4 (ஈ) 1

17. $y = A \cos (x + B)$, இங்கு A, B என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைவரை குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு :

(அ) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (ஆ) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(இ) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (ஈ) $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$

18. சீரான ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும் போது பகா எண்கள் கிடைக்க நிகழ்தகவு :

(அ) 0 (ஆ) $\frac{1}{2}$ (இ) $\frac{1}{4}$ (ஈ) $\frac{1}{6}$

19. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு பின்வருமாறு :

X	-2	3	1
$P(X = x)$	$\frac{\lambda}{6}$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{12}$

எனில் λ -ன் மதிப்பு :

(அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 4

20. பின்வருபவைகளில் எது N -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்?

(அ) கழித்தல் (ஆ) பெருக்கல்

(இ) வகுத்தல்

(ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

பகுதி - II

குறிப்பு : எவையேனும் **ஏழு** வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். வினா எண் **30** -க்கு **கட்டாயம்** விடையளிக்கவும். **7 × 2 = 14**

21. $f(x) = x^2 + 3x$ என்ற சார்பிற்கு df காண்க. மேலும் $x = 3$ மற்றும் $dx = 0.02$ எனும் போது df- ஐ மதிப்பிடுக.

22. α மற்றும் β ஆகியன $x^2 + 5x + 6 = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\alpha^2 + \beta^2 = 13$ என நிறுவுக.

23. மதிப்பு காண்க. $\sin^{-1}(1) + \cos^{-1}(1)$.

24. $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ மற்றும் $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{2}$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் காண்க.

25. $y = x^2 - x^4$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டை $(1, 0)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

26. $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$ மற்றும் $z_3 = 5 + 4i$ எனில் $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ என்பதனை நிறுவுக.

27. $y = ae^x + be^{-x}$ என்பது $y'' - y = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு எனக் காட்டுக.

28. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது எனில்,

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

k-ன் மதிப்பு $\frac{1}{6}$ என நிறுவுக.

29. ஒரு பால் விற்பனையகத்தில் வினியோகிக்கப்படும் பாலின் அளவு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. குறைந்தபட்சம் 200 லிட்டர்கள் மற்றும் அதிகபட்சம் 600 லிட்டர்களுடன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k, & 200 \le x \le 600 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனில் k-ன் மதிப்பு காண்க.

30. $y = ax^2 + bx + c$ என்ற வளைவரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a, b மற்றும் c என்பன எதேச்சை மாறிலிகள்.

பகுதி - III

குறிப்பு : (i) எவையேனும் ஏழு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.
(ii) வினா எண் **40** -க்கு **கண்டிப்பாக** விடையளிக்கவும்.

7 × 3 = 21

31. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ எனக் கொண்டு $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

32. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

33. $6 - 8i$ -ன் வர்க்கமூலம் $\pm\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$ என நிறுவுக.

34. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm 2, \pm i$ என நிறுவுக.

35. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ எனும் வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

36. ஒரு துகள் $(1, 2, 3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(5, 4, 1)$ எனும் புள்ளிக்கு $8\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ என்ற மாறாத விசைகளின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப்பட்டால், அவ்விசைகள் செய்த மொத்த வேலையைக் காண்க.

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x$ -ன் மதிப்பு 0 என நிறுவுக.

38. ஒரு வட்ட வடிவத் தகடு வெப்பத்தினால் சீராக விரிவடைகின்றது என்க. அதன் ஆரம் 10.5 செ.மீ– இலிருந்து 10.75 செ.மீ – ஆக அதிகரிக்கும் போது அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தோராய அதிகரிப்பை காண்க.

39. கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும் செயலியானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு ஆகியவைகளைக் கொண்டுள்ளதா எனச் சரிபார்க்கவும்.

$(a * b) = a^b, \forall\ a, b$ N (அடுக்குக்குறி பண்பு).

40. $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$ என நிறுவுக.

பகுதி -IV

குறிப்பு : அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

7 × 5 = 35

41. (அ) பின்வரும் நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்கவும். $3x + 3y - z = 11$, $2x - y + 2z = 9$. $4x + 3y + 2z = 25$.

அல்லது

(ஆ) தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி சுடப்படும் ஒரு துகள் s அடி உயரத்தை t வினாடிகளில் சென்று அடைகிறது. இங்கு $s(t) = 128t - 16t^2$.

(i) துகள் அடையும் அதிகபட்ச உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

(ii) தரையைத் தொடும் போது அதன் திசைவேகம் என்ன?

42. (அ) $(2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை என நிறுவுக.

அல்லது

(ஆ) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தினால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி காண்க.

43. (அ) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9}\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$ -ன் மதிப்பு $\dfrac{\pi}{3}$ என் நிறுவுக.

அல்லது

(ஆ) ஒரு பரவளையத் தொலைத்தொடர்பு அலை வாங்கியின் குவியம் அதன் முனையிலிருந்து 2 மீ தூரத்தில் உள்ளது. முனையிலிருந்து 3 மீ தூரத்தில் அலைவாங்கியின் அகலம் $4\sqrt{6}$ மீ என நிறுவுக.

44. (அ) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \sin x$ என்ற நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

அல்லது

(ஆ) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$ என்ற கூற்று மெய்மமா, அல்லது முரண்பாடா அல்லது நிச்சயமின்மையா என ஆராய்க.

45. (அ) வெக்டர் முறையில் $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ என நிறுவுக.

அல்லது

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவுள்ள செவ்வகங்களுள் சதுரம் மட்டுமே பெரும பரப்பைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

46. (அ) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையத் தொலைத்தகவு, குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் மையம் காண்க. மேலும் தோராய வரைபடம் வரைக.

அல்லது

(ஆ)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{5} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{5} & , \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10} & , \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & , \quad 4 \le x < \infty \end{cases}$$

என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பு எனில்

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

(ii) $P(x < 3)$ மற்றும்

(iii) $P(x \ge 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

47. (அ) $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு $\frac{128}{3}$ என்பதை தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

அல்லது

(ஆ) $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ மற்றும் $(0, 0, c)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ என நிறுவுக.

❁ ❁ ❁ ❁ ❁

விடைகள்

பகுதி - I

1. (ஈ) $\frac{4}{5}$
2. (ஈ) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
3. (ஆ) கற்பனை அச்சு
4. (அ) 0
5. (ஈ) – 4
6. (அ) $\frac{\pi}{6}$
7. (அ) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$
8. (ஆ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
9. (இ) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 0$
10. (ஆ) 1
11. (ஆ) 2.5
12. (இ) $\frac{\pi}{2}$
13. (ஆ) $\frac{1}{5}$
14. (இ) $\frac{5}{2}$
15. (இ) $\frac{8}{3}$
16. (ஈ) 1
17. (ஆ) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
18. (ஆ) $\frac{1}{2}$
19. (ஆ) 2
20. (ஆ) பெருக்கல்

பகுதி - II

21.
$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ இங்கு } dx = 0.02, \\ df &= (2x + 3)dx \\ &= [2(3) + 3]\,(0.02) \\ df &= (6 + 3)\,(0.02) \\ &= 9(0.02) = 0.18 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -5; \alpha\beta = 6 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-5)^2 - 2(6) = 25 - 12 = 13 \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

23. $\sin^{-1}(1) + \cos^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

24. கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{x - x_2}{d_1} = \frac{y - y_2}{d_2} = \frac{z - z_3}{d_3}$$