

12

ஆம் வகுப்பு

உடனடித் தேர்வு, ஜூன் - 2023

PART - III

பதிவு எண்

--	--	--	--	--

கால அளவு : 3.00 மணி நேரம் ]

கணிதம் (விடைகளுடன்)

[ மொத்த மதிப்பெண்கள்: 90

- அறிவுரைகள்:** (1) அனைத்து வினாக்களும் சரியாகப் பதிவாசி உள்ளதா என்பதனைச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின், அரைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.
- (2) நீலம் அல்லது கருப்பு மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும், அடிக்கோடிடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

**பகுதி - I**

**குறிப்பு:** (i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

**20 × 1 = 20**

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற்று விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதவும்.

1.  $A^T \cdot A^{-1}$  ஆனது சமச்சீர் எனில்,  $A^2$  என்பது :

(அ)  $A^{-1}$  (ஆ)  $(A^T)^2$  (இ)  $A^T$  (ஈ)  $(A^{-1})^2$

2.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  -ன் அணித் தரம் :

(அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 4 (ஈ) 3

3.  $|z - 2 + i| \leq 2$ , எனில்  $|z|$ -ன் மீப்பெரு மதிப்பு :

(அ)  $\sqrt{3} - 2$  (ஆ)  $\sqrt{3} + 2$   
(இ)  $\sqrt{5} - 2$  (ஈ)  $\sqrt{5} + 2$

4.  $|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$  மற்றும்  $|9z_1z_2 + 4z_1z_3 + z_2z_3| = 12$  எனில்,  $|z_1 + z_2 + z_3|$  -ன் மதிப்பு :

(அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 4

5.  $x^3 + 64$  -ன் ஒரு பூச்சியமாக்கி :

(அ) 0 (ஆ) 4 (இ)  $4i$  (ஈ)  $-4$

6.  $\sum_{r=0}^n {}^nC_r (-1)^r x^r$  எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை :

(அ) 0 (ஆ)  $n$  (இ)  $< n$  (ஈ)  $r$

7. சில  $x \in \mathbb{R}$ -க்கு  $\cot^{-1} x = \frac{2\pi}{5}$  எனில்  $\tan^{-1} x$ -ன் மதிப்பு :

(அ)  $-\frac{\pi}{10}$  (ஆ)  $\frac{\pi}{5}$  (இ)  $\frac{\pi}{10}$  (ஈ)  $-\frac{\pi}{5}$

8.  $3x^2 + by^2 + 4bx - 6by + b^2 = 0$  என்ற வட்டத்தின் ஆரம் :

(அ) 1 (ஆ) 3 (இ)  $\sqrt{10}$  (ஈ)  $\sqrt{11}$

9.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ , எனில்  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  -ன் மதிப்பு :

(அ)  $|\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$  (ஆ)  $\frac{1}{3} |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$   
(இ) 1 (ஈ)  $-1$

10.  $\sin^{-1} x + \cot^{-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$  எனில்  $x$  -ன் மதிப்பு :

(அ)  $\frac{1}{2}$  (ஆ)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (இ)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  (ஈ)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11.  $\frac{1}{x}, x \in [1, 9]$  என்ற சார்பிற்கு சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண் :

(அ) 2 (ஆ) 2.5 (இ) 3 (ஈ) 3.5

12.  $y = ax^4 + bx^2, ab > 0$  என்ற வளைவரை :

(அ) கிடைமட்டத் தொடுகோடு பெறவில்லை  
(ஆ) மேற்புறமாக குழிவு  
(இ) கீழ்புறமாக குழிவு  
(ஈ) வளைவு மாற்றப்படுள்ளியை பெறவில்லை

13.  $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$  எனில்  $\frac{\partial u}{\partial x}$  -ன் மதிப்பு :

(அ)  $e^{x^2+y^2}$  (ஆ)  $2xu$  (இ)  $x^2u$  (ஈ)  $y^2u$

14.  $\int_{-1}^2 |x| dx$  -இன் மதிப்பு :

(அ)  $\frac{1}{2}$  (ஆ)  $\frac{3}{2}$  (இ)  $\frac{5}{2}$  (ஈ)  $\frac{7}{2}$

15. சார்பு  $g(x) = \cos x$  -ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு  $x = \frac{\pi}{2}$  -இல் :

- (அ)  $x + \frac{\pi}{2}$  (ஆ)  $-x + \frac{\pi}{2}$   
 (இ)  $x - \frac{\pi}{2}$  (ஈ)  $-x - \frac{\pi}{2}$

16.  $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$  -இன் மதிப்பு :

- (அ)  $\frac{3\pi}{10}$  (ஆ)  $\frac{3\pi}{8}$  (இ)  $\frac{3\pi}{4}$  (ஈ)  $\frac{3\pi}{2}$

17.  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு :

- (அ)  $y = Ce^{x^2}$  (ஆ)  $y = 2x^2 + C$   
 (இ)  $y = Ce^{-x^2}$  (ஈ)  $y = x^2 + C$

18. ஏதேனும் ஒரு வருடம்  $t$  -ல் உள்ள  $P$ -ன் பெருக்க வீதமானது மக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமையும் எனில்,

- (அ)  $P = Ce^{kt}$  (ஆ)  $P = Ce^{-kt}$   
 (இ)  $P = Ckt$  (ஈ)  $P = C$

19.  $n = 25$  மற்றும்  $p = 0.8$  என்று உள்ள ஈருறுப்பு பரவல் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி  $X$  எனில்,  $X$ -ன் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு :

- (அ) 6 (ஆ) 4 (இ) 3 (ஈ) 2

20. ஒரு கூட்டுக் கூற்றில் 3 தனிக் கூற்றுகள் உட்படுத்தப்பட்டிருந்தால் அம்மெய்மை அட்டவணையின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை :

- (அ) 9 (ஆ) 8 (இ) 6 (ஈ) 3

### பகுதி - II

குறிப்பு: எவையேனும் ஏழு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். வினா எண் 30 -க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்கவும்.  $7 \times 2 = 14$

21.  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  எனில்  $A^{-1}$  ஐக் காண்க.

22.  $z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$  எனில் முதன்மை வீச்சு  $\text{Arg } z$  -ஐக் காண்க.

23. முனைகள்  $(0, \pm 4)$  மற்றும் குவியங்கள்  $(0, \pm 6)$  உள்ள அபிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

24.  $(2, 5, -3)$  என்ற புள்ளியிலிருந்து  $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 5$  என்ற தளத்திற்குள்ள தொலைவைக் காண்க.

25.  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  என்ற சார்பு  $(2, \infty)$  என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும் என நிறுவுக.

26. ஓர் எண்ணின்  $n$  -ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின்  $\frac{1}{n}$  மடங்கு ஆகும் எனக்காட்டுக

27. மதிப்பிடுக :  $\int_0^{\infty} x^5 e^{-3x} \, dx$ .

28. ஒரு கோள வடிவ மழைத்துளியானது அதன் வளைபரப்பின் மாறுவீதத்திற்கு நேர்விகிதத்தில், ஆவியாகிறது மழைத்துளியின் ஆரத்தின் மாறுவீதத்தை உள்ளடக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

29. இரு சீரான பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படும் பொழுது எண் நான்கு பெறுவதற்காக நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு காண்க.

30.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ஆகிய இரண்டும் ஒரே வகையான டூலியன் அணிகள் எனில்  $A \vee B$  மற்றும்  $A \wedge B$  ஆகியவற்றை காண்க.

### பகுதி - III

குறிப்பு: எவையேனும் ஏழு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். வினா எண் 40 -க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்கவும்.  $7 \times 3 = 21$

31.  $2x + 5y = -2$ ,  $x + 2y = -3$  என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க,

32. முக்கோண சமனிலியை வரையறுத்து நிறுவுக.

33. மதிப்பு காண்க:  $\sin^{-1} \left( \sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} \right)$

34. வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC-ல் வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  என நிறுவுக.

35. இரண்டு மிகை எண்களின் கூட்டுத் தொகை 12, மேலும் அதன் பெருக்குத் தொகை பெருமம் எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.

36.  $U(x, y, z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$ , எனில்  $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}$  -ஐக் காண்க.

37.  $y^2 = 4ax$  என்ற பரவளையத்திற்கு ' $t_1$ ' மற்றும் ' $t_2$ ' ஆகிய புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள்  $[at_1^2, a(t_1 + t_2)]$  என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

38. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை வளர்ச்சிவீதம்  $t$  நேரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் விகிதமாக அமைந்துள்ளது. மேலும் நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40 ஆண்டுகளில் 3,00,000லிருந்து 4,00,000 ஆக அதிகரித்துள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,  $t$  நேரத்தில் அந்நகரத்தின் மக்கள் தொகையைக் காண்க.

39. இரு நிபந்தனைக் கூற்றை நிபந்தனைக் கூற்றுடன் இணைத்து  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  என்ற சமனமானவை பண்பை நிரூபிக்க.

40.  $9x^9 + 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2 = 0$  எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் ஆறு மெய்யற்ற மூலங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

**பகுதி - IV**

குறிப்பு: அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

**$7 \times 5 = 35$**

41. (அ)  $x_1 - x_2 = 3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, x_2 + 2x_3 = 7$  என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்க.

அல்லது

(ஆ) தீர்க்க :  $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

42. (அ)  $z = x + iy$  மற்றும்  $\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$  எனில்,  $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$  எனக் காட்டுக.

அல்லது

(ஆ)  $u = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$  எனில்,  
 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$  என நிறுவுக.

43. (அ) மதிப்பீடுக :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

அல்லது

(ஆ)  $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  
 எனில்,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$   
 என்பதை சரிபார்க்க.

44. (அ)  $2x^3 + 11x^2 - 9x - 18 = 0$  என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

அல்லது

(ஆ) தீர்க்க :  $(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2$

45. (அ)  $(1, 0), (-1, 0)$  மற்றும்  $(0, 1)$  என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

அல்லது

(ஆ) ஓர் ஈருறுப்பு மாறி  $X$ -ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே 2 மற்றும் 1.5 ஆகும். (i)  $P(X = 0)$ , (ii)  $P(X = 1)$ , (iii)  $P(X \geq 1)$  ஆகியவற்றைக் காண்க.

46. (அ)  $(5, 4, 2)$  என்ற புள்ளியிலிருந்து  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$  என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் காண்க. மேலும், இச்செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அல்லது

(ஆ) கோடுகள்  $5x - 2y = 15, x + y + 4 = 0$  மற்றும்  $x -$  அச்ச ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை தொகையிடம் மூலம் காண்க.

47. (அ)  $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ , இங்கு  $t \geq 0$  எனும் விதிப்படி ஒரு கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

- (i) எந்நேரங்களில் துகளின் திசை மாறுகின்றது?
- (ii) முதல் நான்கு வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம் என்ன?
- (iii) திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் நேரங்களில், எல்லாத் துகளின் முடுக்கம் காண்க.

அல்லது

(ஆ)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{10\} \right\}$  என்க. \* என்பது

அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க \* ஆனது  $M$ -ன் மீது அடைவுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு, சமனிப் பண்பு, எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவற்றை நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.



**விடைகள்**

**பகுதி - I**

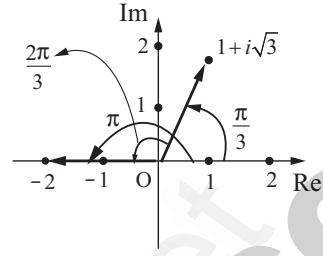
- 1. (ஆ)  $(A^T)^2$
- 2. (அ) 1
- 3. (ஈ)  $\sqrt{5} + 2$
- 4. (ஆ) 2
- 5. (ஈ) -4
- 6. (ஆ)  $n$

7. (இ)  $\frac{\pi}{10}$
8. (இ)  $\sqrt{10}$
9. (அ)  $|\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$
10. (ஆ)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$
11. (இ) 3
12. (ஈ) வளைவு மாற்றப்பள்ளியை பெறவில்லை
13. (ஆ)  $2xu$
14. (இ)  $\frac{5}{2}$
15. (ஆ)  $-x + \frac{\pi}{2}$
16. (ஆ)  $\frac{3\pi}{8}$
17. (அ)  $y = Ce^{x^2}$
18. (அ)  $P = Ce^{kt}$
19. (ஈ) 2
20. (ஆ) 8

**பகுதி - II**

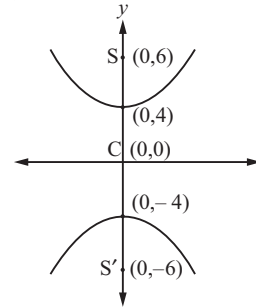
21. கொடுக்கப்பட்ட  $\text{adj } (A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$   
 $A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}} (\text{adj } A)$  என அறிவோம். ... (1)  
 $|\text{adj } A| = 0 + 2 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0$   
 $[R_1 \text{ மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது}]$   
 $= 2(36 - 18) = 2(18) = 36$   
 $\therefore A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{36}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$   
 $= \pm \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
22.  $\arg z = \arg \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$   
 $= \arg(-2) - \arg(1+i\sqrt{3})$   
 $(\because \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2)$

$$= \left( \pi - \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) \right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



இதிலிருந்து  $\frac{2\pi}{3}$  என்பது  $\arg z$  -ன் மதிப்புகளில் ஒன்று.  $\frac{2\pi}{3}$  ஆனது  $-\pi$  மற்றும்  $\pi$  -க்கு இடையில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு  $\text{Arg } z = \frac{2\pi}{3}$  ஆகும்.

23. குவியங்களின் நடுப்புள்ளி மையம்  $C(0,0)$   
 குறுக்கச்சு  $y$ - அச்சு



$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8$$

$$SS' = 2c = 12, c = 6$$

$$a = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$$

எனவே தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$

24. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை  $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$  உடன் ஒப்பிட்டுப் போது  $\vec{n} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  எனக் கிடைக்கிறது.  
 $\vec{u}$  என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து  $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$  என்ற தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு  $\delta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$  ஆகும். எனவே,  
 $\vec{u} = (2, 5, -3) = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$  மற்றும்  $\vec{n} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  என  $\delta$  - ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது  
 $\delta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|} = \frac{|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 5|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|}$   
 $= 2$  அலகுகள்.

25.  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $f'(x) = 2x - 2 > 0 \forall x \in (2, \infty)$   
என்பதால்,  $f(x)$  ஆனது  $(2, \infty)$  என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும்.

26. அந்த எண்  $x$  என்க.  
 $y = f(x) = x^n$

$$\text{பிறகு } \log y = \frac{1}{n} \log x$$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\text{அதாவது } \frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\text{சதவீத பிழை} = \frac{\Delta y}{y} \times 100 \simeq \frac{1}{n} \left( \frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின்  $\simeq \frac{1}{n}$  மடங்கு எனவே ஒரு எண்ணின்  $n$ ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின்  $\frac{1}{n}$  மடங்கு ஆகும்.

$$27. = \frac{5!}{3^6} \left[ \because \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \text{ இங்கு } n=5, a=3 \right]$$

28.  $V$  கோள மழை துளியின் கன அளவு மற்றும்  $A$  வளைபரப்பு மற்றும்  $r$  ஆரம் என்க.

$$\therefore V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ மற்றும்}$$

$$A = 4\pi r^2$$

கொடுக்கப்பட்டது

$$\frac{dV}{dt} = -kA$$

[ $\because$  மழைத்துளி ஆவியாகிறது]

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = -k (4\pi r^2)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{d}{dt} (r^3) = -4k\pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = -4k\pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -k$$

என்பது தேவையான வகைக்கெழு சமன்பாடு.

29. நான்குகளின் எண்ணிக்கையை  $x$  -இன் மதிப்புகளாகக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி  $X$  என்க.

கூறுவெளி  $S$  அட்டவணையாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

(1, 1),	(1, 2),	(1, 3),	(1, 4),	(1, 5),	(1, 6)
(2, 1),	(2, 2),	(2, 3),	(2, 4),	(2, 5),	(2, 6)
(3, 1),	(3, 2),	(3, 3),	(3, 4),	(3, 5),	(3, 6)
(4, 1),	(4, 2),	(4, 3),	(4, 4),	(4, 5),	(4, 6)
(5, 1),	(5, 2),	(5, 3),	(5, 4),	(5, 5),	(5, 6)
(6, 1),	(6, 2),	(6, 3),	(6, 4),	(6, 5),	(6, 6)

இதனை

$S = \{(i, j)\}$ , எனவும் எழுதலாம், இங்கு  $i = 1, 2, 3, 6, \dots$  மற்றும்  $j = 1, 2, 3, \dots, 6$  ஆகும்.

எனவே,  $X$  ஆனது 0, 1, மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

- (i)  $X = 0, \forall (i, j), i \neq 4, j \neq 4$  எனில்
- (ii)  $X = 1, (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6)$  என்பவற்றில்
- (iii)  $X = 2, (4, 4)$  -இல்

எனவே,

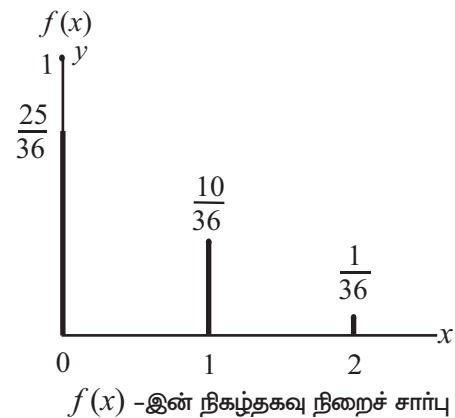
சமவாய்ப்பு மாறி $X$ -இன் மதிப்பு	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	25	10	1	36

நிகழ்தகவுகள்

$$f(0) = P(X=0) = \frac{25}{36}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{10}{36}$$

$$\text{மற்றும் } f(2) = P(X=2) = \frac{1}{36} \text{ ஆகும்.}$$



இங்கு சார்பு  $f(x)$  கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்கின்றது.

(i)  $f(x) \geq 0, x = 0, 1, 2$  மற்றும்

$$(ii) \sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = 0 + f(1) + f(2) = 1$$

$$= \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு கீழ்க்காணுமாறு வழங்கப்படுகிறது.

$x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

(அல்லது)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{25}{36}, & x=0 \\ \frac{10}{36}, & x=1 \\ \frac{1}{36}, & x=2 \end{cases}$$

30.

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**பகுதி - III**

31. தொகுப்பின் அணி வடிவம்  $= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AX = B$  இங்கு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0.$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 15 \\ -2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = -11, y = 4.$

32.  $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$  ( $\because |z|^2 = z\bar{z}$ )

$\Rightarrow = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

( $\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ )

$= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2) + z_2\bar{z}_2$

( $\because \bar{\bar{z}} = z$ )

$= |z_1|^2 + 2 \text{Re}(\bar{z}_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

( $\because \text{Re}(z) \leq |z|$ )

$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

( $\because |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$  மற்றும்  $|z| = |z|$ )

$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

33.  $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{\pi}{9}\right)\right)$

( $\because \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A + B)$ )

$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{6\pi}{9}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$  [ $\because \frac{2\pi}{3} \notin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ]

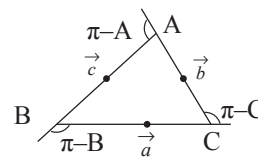
$= \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$  ( $\because \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ )

$= \frac{\pi}{3}$  [ $\because \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ]

34. வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC-ல் வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி

$\vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}$

மற்றும்  $\vec{AB} = \vec{c}$  என்க.



எனவே,  $\Delta ABC$  -ல்

$$\begin{aligned} \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} &= \vec{0}, \text{ என்பதால்} \\ \vec{BC} \times (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) &= \vec{0}. \\ \vec{BC} \times \vec{CA} &= \vec{AB} \times \vec{BC} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{CA} \times (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) &= \vec{0} \\ \vec{BC} \times \vec{CA} &= \vec{CA} \times \vec{AB} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) விருந்து

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{BC} &= \vec{CA} \times \vec{AB} = \vec{BC} \times \vec{CA}. \\ \text{ஆகவே, } |\vec{AB} \times \vec{BC}| &= |\vec{CA} \times \vec{AB}| = |\vec{BC} \times \vec{CA}|. \\ ca \sin(\pi - B) &= bc \sin(\pi - A) = ab \sin(\pi - C). \end{aligned}$$

அதாவது,

$$ca \sin B = bc \sin A = ab \sin C.$$

இதனை  $abc$ - ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (\text{அ}) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

35. இரு எண்களை  $x, y$  என்க.

$$\begin{aligned} x + y &= 12 \\ y &= 12 - x \end{aligned} \quad \dots (1)$$

பெருக்குத்தொகை =  $xy$

$$P = x(12 - x)$$

$$P(x) = 12x - x^2$$

$$P'(x) = 12 - 2x; P'(x) = 0$$

$$12 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

$$P''(x) = -2$$

$x = 6$  என பிரதியிட

$$P''(x) = -2 < 0$$

$x = 6$  ல்  $P(x)$  இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அடைகிறது.

$x = 6$  ல் பெருக்கு தொகை பெருமம் ஆகிறது.

$$(1) \Rightarrow y = 12 - 6 = 6$$

அந்த இரு எண்கள் 6, 6.

36. கொடுக்கப்பட்ட  $U(x, y, z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3} (3x^2);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3} \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$+ \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^3 + y^3 + z^3)}$$

37.  $y^2 = 4ax$  என்ற பரவளையத்திற்கு ' $t_1$ ' -ல் தொடுகோட்டிற்கான துணையலகுச் சமன்பாடு  $yt_1 = x + at_1^2$  ... (1)

மேலும்,  $y^2 = 4ax$  என்ற பரவளையத்திற்கு ' $t_2$ ' -ல் தொடுகோட்டிற்கான துணையலகுச் சமன்பாடு  $yt_2 = x + at_2^2$  ... (2)

$$(1) \rightarrow yt_1 = x + at_1^2$$

$$(2) \rightarrow yt_2 = x + at_2^2$$

$$(1) - (2) \quad y(t_1 - t_2) = a(t_1^2 - t_2^2)$$

$$\Rightarrow y(t_1 - t_2) = a(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)$$

$$\Rightarrow y = a(t_1 + t_2)$$

$y = a(t_1 + t_2)$  என (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$a(t_1 + t_2)t_1 = x + at_1^2$$

$$\Rightarrow at_1^2 + at_1t_2 = x + at_1^2 \Rightarrow x = at_1t_2$$

இரண்டு நீளங்களின் வெட்டும் புள்ளி

$$[at_1t_2, a(t_1 + t_2)] \text{ என நிறுவப்பட்டது.}$$

38. நகரத்தின் மக்கள் தொகை  $P$  என்க.

$$\text{கொடுக்கப்பட்டது } \frac{dP}{dt} \propto P$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = kdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P} = k \int dt$$

$$\Rightarrow \log P = kt + \log c$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{P}{c}\right) = kt$$

$$\Rightarrow \frac{P}{c} = e^{kt}$$

$$\Rightarrow P = c.e^{kt} \quad \dots (1)$$

கொடுக்கப்பட்டது  $t = 0$  எனில்  $P = 3,00,000$

$$\therefore (1) \rightarrow 3,00,000 = ce^0 \Rightarrow c = 3,00,000$$

$$\therefore P = 3,00,000 e^{kt} \quad \dots (2)$$

மீண்டும்  $t = 40$  எனில்  $P = 4,00,000$

$$\therefore (2) \Rightarrow 4,00,000 = 3,00,000 e^{40k}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = e^{40k} \Rightarrow \log\left(\frac{4}{3}\right) = 40k$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{40} \log\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k = \log\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{40}} \quad \dots (3)$$

$$\therefore (2) \text{ விருந்து, } P = 3,00,000 e^{\log\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{40}} t}$$

$$\Rightarrow P = 3,00,000 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$$

39.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

மெய்மை அட்டவணையில்  $p \rightarrow q$  மற்றும்  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  ஆகியவற்றிற்கான நிரல்கள் முழுவதும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. எனவே அவை சமானமானவை.

40.

கொடுக்கப்பட்ட  $P(x)$  எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு தெளிவாகவே 2 முறை குறிமாற்றங்கள் இருப்பதால்  $P(-x) = -9x^9 - 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2$ -ல்  $P(-x)$ க்கு ஒரே ஒரு முறை குறிமாற்றம் இருப்பதால் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு இல்லை. தெளிவாகவே 0 ஒரு மூலம் இல்லை. எனவே மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை அதிகபட்சம் 3 ஆகும். எனவே குறைந்தபட்சம் ஆறு மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் உண்டு.

### பகுதி - IV

41. (அ) பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பை முதலில் காண்போம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 24$$

கிராமரின் விதிப்படி

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{6} = 4.$$

எனவே தீர்வானது  $(x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 4)$ .

அல்லது

(ஆ) இங்கு,  $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}}\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{எனவே, } \frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2}} = 1,$$

என்பதை சுருக்கினால்  $2x^2 - 4 = -3$  எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{எனவே, } x^2 = \frac{1}{2} \text{ என்பதிலிருந்து } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ எனப்}$$

பெறுகிறோம்.

42. (அ) கொடுக்கப்பட்ட  $z = x + iy$  மற்றும்

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(z-i) - \arg(z+2) = \frac{\pi}{4}$$



$$\Rightarrow \arg(x + iy - i) - \arg(x + iy + 2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(x + i(y - 1)) - \arg((x + 2) + iy) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{y-1}{x} - \frac{y}{x+2}}{1 + \frac{y-1}{x} \cdot \frac{y}{x+2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left[ \because \tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{(x+2)(y-1) - xy}{x(x+2)}\right)}{\left(\frac{x(x+2) + y(y-1)}{x(x+2)}\right)} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(y-1) - xy}{x(x+2) + y(y-1)} = 1$$

$$\Rightarrow -x + 2y - 2 = x^2 + 2x + y^2 - y$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - y + x - 2y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

அல்லது

(ஆ) இங்கு கொடுக்கப்பட்ட சார்பு  $u$  சமபடித்தானது அல்ல. எனவே ஆய்லரின் தேற்றம் சார்பு  $u$  -க்கு பயன்படுத்த முடியாது. இருப்பினும்

$$f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sin u \text{ என்பது}$$

சமபடித்தானது. ஏனெனில்

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{\sqrt{tx} + \sqrt{ty}} = \frac{1}{t^2} f(x, y), \forall x, y, t \geq 0.$$

இங்கு  $f$  படி  $\frac{1}{2}$ , உடைய சமபடித்தான சார்பாகும்.

எனவே, ஆய்லரின் தேற்றப்படி

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} f(x, y)$$

தற்போது  $f = \sin u$  எனப் பிரதியிட,

$$x \frac{\partial(\sin u)}{\partial x} + y \frac{\partial(\sin u)}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u$$

$$x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u$$

இருபுறமும்  $\cos u$  ஆல் வகுக்க

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u.$$

**குறிப்பு :** இந்தக் கணக்கை நேரிடையான கணக்கீடுகள் மூலமும் காணலாம்; ஆனால் அந்தக் கணக்கீடு நீளமானதாக இருக்கும்.

43. (அ)  $1^\infty$  இது தேரப்பெறா வடிவம்

$$g(x) = (\sin x)^{\tan x} \text{ என்க}$$

மடக்கை எடுக்க கிடைப்பது,

$$\log(g(x)) = \log(\sin x)^{\tan x}$$

$$= \tan x \cdot \log(\sin x)$$

$$= \frac{\log(\sin x)}{\cot x}$$

$$\text{இங்கு } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log(g(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cot x} = \left(\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \times \cos x = \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

[லோபிதாலின் விதிப்படி]

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\cos x \sin x = 0$$

$$\text{ஆனால் } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log(g(x)) = \log\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)\right)$$

$$\therefore \log\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{\log\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)\right)} = e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

அல்லது

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட  $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ,  
 $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$  மற்றும்  $\vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$   
 LHS =  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\begin{aligned} \text{கருதுக } (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(6+5) - \hat{j}(4+3) + \hat{k}(10-9) = 11\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k} \end{aligned}$$

∴ LHS =  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 11 & -7 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 11 & -7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(-21+2) - \hat{j}(33+1) + \hat{k}(-22-7) \\ &= -19\hat{i} - 34\hat{j} - 29\hat{k} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

RHS க்கு  $\vec{a} \cdot \vec{c} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$   
 $= -2 - 6 - 3 = -11$   
 $\vec{b} \cdot \vec{c} = (3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = -3 - 10 + 6 = -7$   
 ∴ RHS =  $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$   
 $= -11(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) + 7(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$   
 $= -33\hat{i} - 55\hat{j} - 22\hat{k} + 14\hat{i} + 21\hat{j} - 7\hat{k}$   
 $= -19\hat{i} - 34\hat{j} - 29\hat{k} \quad \dots(2)$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து, LHS = RHS

எனவே  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

44. (அ) இங்கு ஒற்றைப் படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் இரட்டைப் படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் சமமாக இருக்கின்றது. எனவே, -1 என்பது இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும். இனி பிற மூலங்களைக் கண்டறிய

$$2x^3 + 11x^2 - 9x - 18 - \text{ஐ } x + 1 \text{ ஆல் வகுத்து}$$

$$2x^2 + 9x - 18 \text{ என்பதை ஈவாகப் பெறுகிறோம்.}$$

இதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம்,  $\frac{3}{2}$  மற்றும் -6 ஆகியவற்றை மூலங்களாக பெறுகிறோம்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு -6, -1,  $\frac{3}{2}$ , ஆகியவை தீர்வுகளாக அமையும்.

அல்லது

$$(ஆ) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2 \quad \dots (1)$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மாறிகளைப் பிரித்து

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \text{ என எழுதலாம்.} \quad \dots (2)$$

$$\text{சமன்பாடு (2)-ன் இருபக்கமும் தொகையிடக் கிடைப்பது } \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C \quad \dots (3)$$

$$\text{ஆனால், } \tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1} \left( \frac{y-x}{1+xy} \right). \quad \dots (4)$$

சமன்பாடு (4) ஐ (3) -ல் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\tan^{-1} \left( \frac{y-x}{1+xy} \right) = C \Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = \tan C = a \text{ (என்க).}$$

ஆகவே,  $y-x = a(1+xy)$ , இதுவே தேவையான தீர்வு ஆகும்.

45. (அ) வட்டத்தின் சமன்பாடானது

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

(1, 0) புள்ளி 0 வழிச் செல்கிறது

$$\Rightarrow 1 + 0 + 2g(1) + 2f(0) + c = 0$$

$$\Rightarrow 2g + c = -1 \quad \dots (2)$$

(-1, 0) புள்ளி 0 வழிச் செல்கிறது

$$\Rightarrow (-1)^2 + 0 + 2g(-1) + 2f(0) + c = 0$$

$$\Rightarrow -2g + c = -1 \quad \dots (3)$$

மேலும் (0, 1) புள்ளி வழிச் செல்கிறது

$$\Rightarrow 0 + 1^2 + 2g(0) + 2f(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow 2f + c = -1 \quad \dots (4)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 2c = -2$$

$$\Rightarrow c = -1$$

$c = -1$  என (2)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$2g - 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2g = 0$$

$$\Rightarrow g = 0$$

$c = -1$  என (4)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$2f - 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2f = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

$\therefore$  (1) லிருந்து

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 0 + 0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

அல்லது

(ஆ) நிகழ்தகவு கண்டறிய  $n$  மற்றும்  $p$  ஆகிய பண்பளவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறிய வேண்டும். தரப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து,

$$\begin{aligned} \text{சராசரி} &= np = 2 \text{ மற்றும் பரவற்படி} = npq = 1.5 \\ \text{இதிலிருந்து பெறுவது} \quad \frac{npq}{np} &= \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4} \\ q &= \frac{3}{4} \text{ மற்றும் } p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ np &= 2, \text{ என்பதன் மூலம் } n = \frac{2}{p} = 8 \\ \text{எனவே } X &\sim B\left(8, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

எனவே நிகழ்தகவு பரவலானது

$$P(X = x) = f(x) = \binom{8}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$(i) \quad P(X = 0) = f(0) = \binom{8}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{8-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

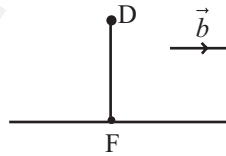
$$(ii) \quad P(X = 1) = f(1) = \binom{8}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{8-1} = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$(iii) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

46. (அ) கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சமன்பாடு  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow A$  என்பது  $(-1, 3, 1)$  மற்றும்

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} = t \text{ என்க.}$$



D யிலிருந்து நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோட்டின் அடி F எனில் அதனுடைய வடிவம்  $(2t - 1, 3t + 3, -t + 1)$  ... (1)

$$\Rightarrow \quad \overline{OF} = (2t - 1)\hat{i} + (3t + 3)\hat{j} + (-t + 1)\hat{k}$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி  $D(5, 4, 2)$

$$\Rightarrow \quad \overline{OD} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{DF} &= \overline{OF} - \overline{OD} \\ &= (2t - 1 - 5)\hat{i} + (3t + 3 - 4)\hat{j} + (-t + 1 - 2)\hat{k} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\vec{b} \perp \overline{DF} \text{ ஆதலால் நம்மிடம் } \vec{b} \cdot \overline{DF} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(2t - 6) + 3(3t - 1) - 1(-t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4t - 12 + 9t - 3 + t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 14t - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 14t = 14$$

$$\Rightarrow t = 1$$

(1) விருந்து F ஆனது  $(2(1) - 1, 3(1) + 3, -1 + 1) = (1, 6, 0)$

∴ செங்குத்தின் அடிப்பகுதி  $(1, 6, 0)$

∴ செங்குத்து DF ன் சமன்பாடு என்பது  $(5, 4, 2)$  மற்றும்  $(1, 6, 0)$  புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின்

சமன்பாடு. அதனுடைய கார்டிசியன் சமன்பாடு என்பது  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{1-5} = \frac{y-4}{6-4} = \frac{z-2}{0-2}$$

[∵  $(x_1, y_1, z_1), (5, 4, 2)$   $(x_2, y_2, z_2)$  என்பது  $(1, 6, 0)$ ]

$$\Rightarrow \frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-2} \text{ தேவையான செங்குத்து கோட்டின் சமன்பாடாகும்.}$$

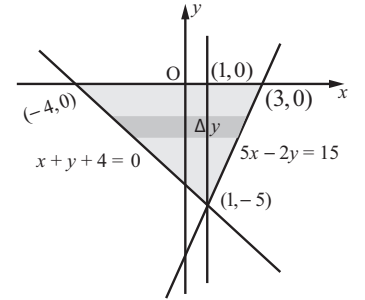
அல்லது

(ஆ) கோடுகள்  $5x - 2y = 15$ ,  $x + y + 4 = 0$  வெட்டும் புள்ளி  $(1, -5)$ .  $5x - 2y = 15$  என்ற கோடு  $x$ -அச்சை சந்திக்கும் புள்ளி  $(3, 0)$ . கோடு  $x + y + 4 = 0$ ,  $x$ -அச்சை  $(-4, 0)$ -ல் சந்திக்கிறது. தேவையான பரப்பு நிறுவப்பட்டுள்ளது. இப்பரப்பானது  $x$ -அச்சின் மேல் பகுதியில் உள்ளது. இப்பரப்பை செங்குத்துப் பட்டைகள் அல்லது கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்.

செங்குத்துப் பட்டைகளைப் பயன்படுத்தி அரங்கத்தின் பரப்பு காண அரங்கத்தை  $x = 1$  கோடு வழியாக இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

எனவே நமக்கு கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-4}^1 y dx \right| + \left| \int_1^3 y dx \right| = \left| \int_{-4}^1 (-4-x) dx \right| + \left| \int_1^3 \left( \frac{5x-15}{2} \right) dx \right| \\ &= \left| \left( -4x - \frac{x^2}{2} \right)_{-4}^1 \right| + \left| \left( \frac{5x^2}{4} - \frac{15x}{2} \right)_{1}^3 \right| \\ &= \left| \left( -\frac{9}{2} \right) - (8) \right| + \left| \left( -\frac{45}{4} \right) - \left( -\frac{25}{4} \right) \right| = \frac{25}{2} + 5 = \frac{35}{2} \end{aligned}$$



கிடைமட்டப் பட்டைகளைப் கொண்டு பரப்பு காணும் போது அரங்கத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கத் தேவையில்லை. இம்முறையில் பரப்பின் வலது பக்க எல்லை  $5x - 2y = 15$  என்ற கோடு மற்றும் இடது பக்க எல்லை  $x + y + 4 = 0$  என்ற கோடு ஆகும். எனவே நமக்கு கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-5}^0 [x_R - x_L] dy = \int_{-5}^0 \left[ \frac{15+2y}{5} - (-4-y) \right] dy \\ &= \int_{-5}^0 \left[ 7 + \frac{7y}{5} \right] dy = \left[ 7y + \frac{7y^2}{10} \right]_{-5}^0 = 0 - \left[ -35 + \frac{35}{2} \right] = \frac{35}{2} \end{aligned}$$

குறிப்பு : முக்கோண வடிவத்தில் உள்ள அரங்கத்தின் அடிப்பக்கம் 7 அலகுகளாகும் மற்றும் உயரம் 5 அலகுகளாகவும் உள்ளது. எனவே தொகையிடலை பயன்படுத்தாமலே அதன் பரப்பானது  $\frac{35}{2}$  என காணலாம்.

47. (அ) கொடுக்கப்பட்ட  $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ ,  $t \geq 0$ .

(i) வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$V(t) = 6t^2 - 18t + 12 \quad \dots (1)$$

$$= 6(t^2 - 3t + 2) = 6(t - 1)(t - 2)$$

இங்கு  $V(t) = 0$

$$\Rightarrow 6(t - 1)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 1, 2$$

$V(t)$  யின் குறி மாறும் பொழுது துகளின் திசை மாறுகின்றது.

$0 \leq t < 1$  எனில்,  $(t - 1)$  மற்றும்  $(t - 2)$  இரண்டும்  $< 0$

$$\Rightarrow V(t) > 0$$

$1 < t < 2$  எனில்,  $(t - 1) > 0$  மற்றும்  $(t - 2) < 0$

$$\Rightarrow V(t) < 0$$

$t > 2$  எனில்,  $(t - 1)$  மற்றும்  $(t - 2)$  இரண்டும்  $> 0$

$$\Rightarrow V(t) > 0$$

$\therefore t = 1$  மற்றும்  $t = 2$  வினாடிகளில் துகளின் திசை மாறுகின்றது.

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம்

$$|s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)|$$

$$s(0) = -4$$

$$s(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4 = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$$

$$s(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4 = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$$

$$s(4) = 2(4)^3 - 9(4)^2 + 12(4) - 4 = 128 - 144 + 48 - 4 = 28$$

$$\therefore |s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)| = |-4 - 1| + |1 - 0| + |0 - 28|$$

$$= |-5| + |1| + |-28| = 5 + 1 + 28 = 34 \text{ மீ}$$

(iii) முடுக்கம்  $A = 12t - 18$

$t = 1$  எனில்,

$$\text{முடுக்கம்} = 12(1) - 18 = -6 \text{ மீ/வினாடி}^2$$

$t = 2$  எனில்,

$$\text{முடுக்கம்} = 12(2) - 18 = 6 \text{ மீ/வினாடி}^2$$

$$\left[ \text{முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt} \right]$$

அல்லது

(ஆ) அடைவுப்பண்பு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$  மற்றும் \* என்பது அணி பெருக்கல்

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \text{ மற்றும்}$$

$$B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in M \text{ என்க.}$$

இங்கு  $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in M$$

$$[\because 2xy \in \mathbb{R} - \{0\}]$$

$\therefore M$  இல் \* ஆனது அடைவுப் பண்புடையது.

பரிமாற்று பண்பு

$$A * B = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \text{ என அறிவோம்} \quad \dots(1)$$

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$  என்க.

$$\text{இங்கு } B * A = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + xy & xy + xy \\ xy + xy & xy + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix}$$

(1) மற்றும் (2) விருந்து,  $A * B = B * A$

∴ M-ல் \*க்கு பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

**சேர்ப்புப் பண்பு**

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } C = \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

இங்கு  $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$(A * B) * C = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz + 2xyz & 2xyz + 2xyz \\ 2xyz + 2xyz & 2xyz + 2xyz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4xyz & 4xyz \\ 4xyz & 4xyz \end{pmatrix} \quad \dots(1)$$

$$\text{இங்கு } A * (B * C) = A * \begin{pmatrix} 2yz & 2yz \\ 2yz & 2yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2yz & 2yz \\ 2yz & 2yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xyz & 4xyz \\ 4xyz & 4xyz \end{pmatrix} \dots(2)$$

(1) மற்றும் (2) விருந்து,  $(A * B) * C = A * (B * C)$

∴ M இல் \*க்கு சேர்ப்பு பண்பு உண்டு.

(ii) **அடைவுப் பண்பு**

$$A, B \in M \quad A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in M.$$

$A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$

\* ஆனது அடைவு பெற்றுள்ளது.

**சமனிப் பண்பு**

$$\Sigma = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} \text{ என்பது } M \text{ன் சமனி உறுப்பு என்க.}$$

$A \in M$  க்கு

$$A \Sigma = A$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$2xe = x$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2} \neq (0)$$

$$M \text{ன் சமனி உறுப்பு } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M$$

இதே போன்று  $E A = \forall A \in M$  எனவும் காணவும்.  $M$  ஆனது சமனி உறுப்பை பெற்றுள்ளது. சமனிவிதியை நிறைவு செய்யும்.

**எதிர்மறைப் பண்பு :**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} \text{ என்பது } A \text{ ன் எதிர்மறை என்க.}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in M$$

$$A A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \\ 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2xx^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{4x}, \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in M \text{ என்பது } A \text{ ன் எதிர்மறை இதே போன்று } A^{-1} A = E \quad \forall A \in M \text{ எனவும்}$$

காணலாம்.

\* ஆனது எதிர்மறை பண்பை நிறைவு செய்யும்.

