

حساب

دسویں جماعت

WWW.Padasalai.Net

حساب

العلاقہ اور تفاضلات

مثال 1.1 اگر $B = \{2,3\}$, $A = \{1,3,5\}$ ہو تو

$B \times A$ اور $A \times B$ معلوم کجے؟ (i)

$A \times B = B \times A$ ہے؟ اگر نہیں تو کیوں؟ (ii)

- ٹابت کجے کہ $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$ (iii)

حل : (i) دیا گیا ہے کہ،
 $A = \{1,3,5\}$
 $B = \{2,3\}$

$$A \times B = \{1,3,5\} \times \{2,3\}$$

$$= \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\} \dots(1)$$

$$B \times A = \{2,3\} \times \{1,3,5\}$$

$$= \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\} \dots(2)$$

(1) اور (2) سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

$A \times B \neq B \times A$ کیوں کہ $(1,3) \neq (3,1)$ اور $(1,2) \neq (2,1)$ وغیرہ۔

$n(A \times B) = n(B \times A) = 6$ اور (2) سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ، اور (1) $n(B) = 2$, $n(A) = 3$ (iii)

$$n(B) \times n(A) = 2 \times 3 = 6$$

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B) = 6$$

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B) = 6$$

مثال 1.2 اگر $A \times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$ ہو تو $A \times B$ اور B معلوم کرو۔

حل : $A \times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

$$\begin{array}{l} A = \{3,5\} \\ B = \{2,4\} \end{array} \quad \begin{array}{l} A \left\{ \begin{matrix} 3 & 3 & 5 & 5 \end{matrix} \right\} \\ B \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 & 4 \end{matrix} \right\} \end{array}$$

$$B = \{2,4\} \text{ اور } A = \{3,5\}$$

PG-2

مثال 1.3 فرض کرو **ہو تو** $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$ اور $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ **(ii)** $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ **ذیل کی تصدیق کیجئے۔**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\} = \{2, 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\} = \{0, 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{1, 2\}$$

حل :

$$(i) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$B \cup C = \{0, 1\} \cup \{1, 2\}$$

$$= \{0, 1, 2\}$$

$$A \times (B \cup C) = \{2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$$

$$= \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\} \dots (1)$$

$$A \times B = \{2, 3\} \times \{0, 1\}$$

$$= \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$A \times C = \{2, 3\} \times \{1, 2\}$$

$$= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\} \cup \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$= \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\} \dots (2)$$

کی تصدیق ہوتی ہے۔ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \subset (2)$ اور (1)

$$(ii) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$B \cap C = \{0, 1\} \cap \{1, 2\}$$

$$= \{1\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{2, 3\} \times \{1\}$$

$$= \{(2, 1), (3, 1)\} \dots (1)$$

$$A \times B = \{2, 3\} \times \{0, 1\}$$

$$= \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$A \times C = \{2, 3\} \times \{1, 2\}$$

$$= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\} \cap \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$= \{(2, 1), (3, 1)\} \dots (2)$$

کی تصدیق ہوتی ہے۔ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \subset (2)$ اور (1)

مشق 1.1

PG-3

$A = B = \{p, q\}$ (ii) $B = \{1, -4\}$ اور $A = \{2, -2, 3\}$ (i) معلوم کر $B \times A$ اور $A \times A$ اور $A \times B$ - 1
 $A = \{m, n\}$; $B = \emptyset$ (iii)

$B = \{1, -4\}$ اور $A = \{2, -2, 3\}$ (i)

i) $A = \{2, -2, 3\}$ اور $B = \{1, -4\}$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{2, -2, 3\} \times \{1, -4\} \\ &= \{(2, 1)(2, -4)(-2, 1)(-2, -4)(3, 1)(3, -4)\} \\ A \times A &= \{2, -2, 3\} \times \{2, -2, 3\} \\ &= \{(2, 2)(2, -2)(2, 3)(-2, 2)(-2, -2)(-2, 3)(3, 2)(3, -2)(3, 3)\} \\ B \times A &= \{1, -4\} \times \{2, -2, 3\} \\ &= \{(1, 2)(1, -2)(1, 3)(-4, 2)(-4, -2)(-4, 3)\} \end{aligned}$$

$A = B = \{p, q\}$ (ii)

(ii) $A = \{p, q\}$: حل
 $B = \{p, q\}$
 $A \times B = \{p, q\} \times \{p, q\}$
 $= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$
 $A \times A = \{p, q\} \times \{p, q\}$
 $= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$
 $B \times A = \{p, q\} \times \{p, q\}$
 $= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$

$A = \{m, n\}$; $B = \emptyset$ (iii)

(iii) $A = \{m, n\}$: حل
 $B = \emptyset$
 $B = \emptyset$ or $\{\}$
 $A \times B = \{m, n\} \times \{\}$
 $= \{\}$
 $A \times A = \{m, n\} \times \{m, n\}$
 $= \{(m, m), (m, n), (n, m), (n, n)\}$
 $B \times A = \{\} \times \{m, n\}$
 $= \{\}$

PG-4

- فرض کرو $B \times A$ اور $A \times B$ ہو تو $B = \{x | x \leq 10 \text{ اور } x \in A\}$ اور $A = \{1, 2, 3\}$ ۔ 2 معلوم کرو۔

$$A = \{1, 2, 3\}$$

: حل

$$B = \{x | x \leq 10 \text{ اور } x \in A\} \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\} \\ B \times A &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\} \end{aligned}$$

- فرض کرو $B \times A$ ہو تو $A \times B = \{(-2, 3), (-2, 4), (0, 3), (0, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ ۔ 3 معلوم کرو۔

$$B \times A = \{(-2, 3), (-2, 4), (0, 3), (0, 4), (3, 3), (3, 4)\} : \text{حل}$$

$$\begin{matrix} B & \{-2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 3\} \\ A & \{3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4\} \end{matrix}$$

$$A = \{3, 4\}$$

$$B = \{-2, 0, 3\}$$

- 4 $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ ہو تو ثابت کچھ کر $C = \{5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A = \{5, 6\}$ ۔ 4

$$A = \{5, 6\}, \quad B = \{4, 5, 6\}, \quad C = \{5, 6, 7\} : \text{حل}$$

$$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$$

L.H.S

$$A \times A = \{5, 6\} \times \{5, 6\},$$

$$A \times A = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \dots\dots\dots (1)$$

R.H.S

$$B \times B = \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$$

$$B \times B = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$C \times C = \{5, 6, 7\} \times \{5, 6, 7\}$$

$$C \times C = \{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7)\}$$

$$(B \times B) \cap (C \times C) = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

L.H.S = R.H.S

$$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$$

- دیگیاں کرو $D = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ ۔ 5

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$$

$$D = \{1, 3, 5\}, C = \{3, 4\}, B = \{2, 3, 5\}, A = \{1, 2, 3\} : \text{حل}$$

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$$

L.H.S**PG-5**

$$A \cap C = \{1,2,3\} \cap \{3,4\}$$

$$A \cap C = \{3\}$$

$$B \cap D = \{2,3,5\} \cap \{1,3,5\}$$

$$B \cap D = \{3,5\}$$

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = \{3\} \times \{3,5\}$$

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = \{(3, 3)(3, 5)\} \dots\dots\dots(1)$$

R.H.S

$$A \times B = \{1,2,3\} \times \{2,3,5\}$$

$$= \{(1,2) (1,3) (1,5) (2,2) (2,3) (2,5) (3,2) (3,3) (3,5)\}$$

$$C \times D = \{3,4\} \times \{1,3,5\}$$

$$= \{(3,1) (3,3) (3,5) (4,1) (4,3) (4,5)\}$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1,2) (1,3) (1,5) (2,2) (2,3) (2,5) (3,2) (3,3) (3,5)\} \cap \\ \{(3,1) (3,3) (3,5) (4,1) (4,3) (4,5)\}$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(3, 3)(3, 5)\} \dots\dots\dots(2)$$

↔(2) ↔(1)

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$$

6- فرض کرو ہو تو تصدیق کرو کہ $C = \{3,5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$, $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\}$

$$(i) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (ii) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(iii) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

حل $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (i) :

$$A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\} \quad C = \{3,5\}$$

$$A = \{0,1\}$$

$$B = \{2,3,4\}$$

$$C = \{3,5\}$$

L.H.S

$$B \cup C = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 5\}$$

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A \times (B \cup C) = \{0,1\} \times \{2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\} \dots\dots\dots(1)$$

R.H.S

$$(A \times B) = \{0,1\} \times \{2,3,4\}$$

$$(A \times B) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

$$(A \times C) = \{0,1\} \times \{3,5\}$$

$$(A \times C) = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\} \cup \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$$

$$= \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (0, 5), (1, 5)\} \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) = (2),$$

LHS = RHS

A MOHAMED ASIF M.Sc.,B.Ed., $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

B.T.ASSISTANT., (MATHS)

GOVT.MUSLIM HR SEC SCHOOL,YELLORE

Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com

PG-6

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \text{ (ii)}$$

$$A = \{x \in W | x < 2\} \quad B = \{x \in N | 1 < x < 4\} \quad C = \{3, 5\}$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} (B \cap C) &= \{2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

$$A \times (B \cap C) = \{0, 1\} \times \{3\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{(0, 3), (1, 3)\} \dots \dots \dots (1)$$

R.H.S

$$(A \times B) = \{0, 1\} \times \{2, 3, 4\}$$

$$(A \times B) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

$$(A \times C) = \{0, 1\} \times \{3, 5\}$$

$$(A \times C) = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\} \cap \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(0, 3), (1, 3)\} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow LHS = RHS.$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \text{ (iii)}$$

$$A = \{x \in W | x < 2\} \quad B = \{x \in N | 1 < x < 4\} \quad C = \{3, 5\}$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

L.H.S

$$A \cup B = \{0, 1\} \cup \{2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(A \cup B) \times C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{3, 5\}$$

$$(A \cup B) \times C = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\} \dots \dots (1)$$

R.H.S

$$(A \times C) = \{0, 1\} \times \{3, 5\}$$

$$(A \times C) = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$$

$$(B \times C) = \{2, 3, 4\} \times \{3, 5\}$$

$$(B \times C) = \{(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\} \cup \{(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\} \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\therefore LHS = RHS$$

A MOHAMED ASIF M.Sc.,B.Ed.,**B.T.ASSISTANT., (MATHS)****GOVT.MUSLIM HR SEC SCHOOL,YELLORE****Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com**

7۔ فرض کرو کہ 8 کم تمام طبی اعداد کا مجموعہ ہے جنہی اعداد اولی کا مجموعہ ہے 8 سے کم اعداد اولی کا مجموعہ ہے , $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2\}$

(i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ ہو تو تصدیق کرو کہ

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ (i): } \text{حل}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{2\}$$

L.H.S

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$(A \cap B) \times C = \{2, 3, 5, 7\} \times \{2\}$$

$$(A \cap B) \times C = \{(2, 2) (3, 2) (5, 2) (7, 2)\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$A \times C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2\}$$

$$A \times C = \{(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2) (7, 2)\}$$

$$B \times C = \{2, 3, 5, 7\} \times \{2\}$$

$$B \times C = \{(2, 2) (3, 2) (5, 2) (7, 2)\}$$

R.H.S

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2) (7, 2)\} \cap \{(2, 2) (3, 2) (5, 2) (7, 2)\}$$

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(2, 2) (3, 2) (5, 2) (7, 2)\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\leftarrow (2), (1)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C) \text{ (ii)}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{2\}$$

L.H.S

$$B - C = \{2, 3, 5, 7\} - \{2\}$$

$$B - C = \{3, 5, 7\}$$

$$A \times (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{3, 5, 7\}$$

$$A \times (B - C) = \{(1, 3) (1, 5) (1, 7) (2, 3) (2, 5) (2, 7) (3, 3) (3, 5) (3, 7) (4, 3) (4, 5) (4, 7) (5, 3) (5, 5) (5, 7) (6, 3) (6, 5) (6, 7) (7, 3) (7, 5) (7, 7)\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

R.H.S

$$A \times B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A \times B = \{(1, 2) (1, 3) (1, 5) (1, 7) (2, 2) (2, 3) (2, 5) (2, 7) (3, 2) (3, 3) (3, 5) (3, 7) (4, 2) (4, 3) (4, 5) (4, 7) (5, 2) (5, 3) (5, 5) (5, 7) (6, 2) (6, 3) (6, 5) (6, 7) (7, 2) (7, 3) (7, 5) (7, 7)\}$$

$$A \times C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2\}$$

$$= \{(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2) (7, 2)\}$$

PG-8

$$(A \times B) - (A \times C) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (7, 2), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\} - \\ \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)\}$$

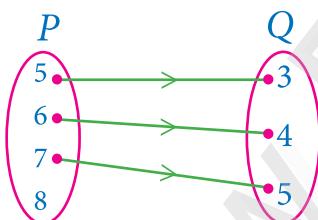
$$(A \times B) - (A \times C) = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\} - \\ \{(2\}_{.....(2)} \text{ اور } (1)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

مثال 1.4 فرض کرو کہ $B = \{1, 7, 10\}$ اور $A = \{3, 4, 7, 8\}$ ہیں۔ ذیل کے کوئی مجموعے A سے B کی جانب تعلقات ہیں؟

- (i) $\mathbb{R}_1 = \{(3, 7), (4, 7), (7, 10), (8, 1)\}$
- (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(3, 1), (4, 12)\}$
- (iii) $\mathbb{R}_3 = \{(3, 7), (4, 10), (7, 7), (7, 8), (8, 11), (8, 7), (8, 10)\}$
 $\{(3, 1), (3, 7), (3, 10), (4, 1), (4, 7), (4, 10), (7, 1), (7, 7), (7, 10), (8, 1), (8, 7), (8, 10)\}$

$A \times B = \{(3, 1), (3, 7), (3, 10), (4, 1), (4, 7), (4, 10), (7, 1), (7, 7), (7, 10), (8, 1), (8, 7), (8, 10)\}$: حل
(i) ہم مشاہدہ کیا کہ $\mathbb{R}_1 \subseteq A \times B$ ہے۔ لہذا، \mathbb{R}_1 کی جانب تعلق ہے۔
(ii) یہاں \mathbb{R}_2 کی روشنی نہیں ہے۔ لیکن $(4, 12) \notin A \times B$ اس لئے \mathbb{R}_2 کی جانب تعلق نہیں ہے۔
(iii) یہاں \mathbb{R}_3 کی روشنی نہیں ہے۔ لیکن $(7, 8) \in \mathbb{R}_3$ اس لئے \mathbb{R}_3 کی جانب تعلق نہیں ہے۔



مثال 1.5 تیر کا خاکہ مجموعے P اور Q کے درمیان کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے، اس تعلق کو

(i) سیٹ بلڈر کی شکل (ii) روسر شکل (iii) روسٹر شکل کا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟

$$\mathbb{R} = \{(x, y) | y = x - 2, x \in P, y \in Q\} \quad (i) \quad \text{حل} :$$

$$\mathbb{R} = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\} \quad (ii)$$

$$\mathbb{R} = \{5, 6, 7\} \quad (iii)$$

مشق 1.2

۔ فرض کرو کہ B کی جانب ذیل کے کوئی تعلق (Relation) ہوتا ہے تو $B = \{3, 0, -1, 7\}$ اور $A = \{1, 2, 3, 7\}$ ہیں؟

- | | |
|--|---|
| (i) $\mathbb{R}_1 = \{(2, 1), (7, 1)\}$ | (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-1, 1)\}$ |
| (iii) $\mathbb{R}_3 = \{(2, -1), (7, 7), (1, 3)\}$ | (iv) $\mathbb{R}_4 = \{(7, -1), (0, 3), (3, 3), (0, 7)\}$ |

PG-9

$$B = \{3, 0, -1, 7\} \quad A = \{1, 2, 3, 7\} : \text{ حل}$$

$$A \times B = \{1, 2, 3, 7\} \times \{3, 0, -1, 7\}$$

$$A \times B = \{(1, 3) (1, 0) (1, -1) (1, 7) (2, 3) (2, 0) (2, -1) (2, 7) (3, 3) (3, 0) (3, -1) (3, 7) (7, 3) (7, 0) (7, -1) (7, 7)\}$$

$$R_1 = \{(2, 1) (7, 1)\} \text{ (i)}$$

یہ تعلق نہیں ہے، کیونکہ (2, 1) اور (7, 1) کا کوئی عصر $B \times A$ میں نہیں ہے۔

$$R_2 = \{(-1, 1)\} \text{ (ii)}$$

یہ تعلق نہیں ہے، کیونکہ (-1, 1) کا کوئی عصر $B \times A$ میں نہیں ہے۔

$$R_3 = \{(2, -1) (7, 7) (1, 3)\} \text{ (iii)}$$

یہ تعلق ہے۔

$$R_4 = \{(7, -1) (0, 3) (3, 3) (0, 7)\} \text{ (iv)}$$

یہ تعلق نہیں ہے، کیونکہ (0, 7) اور (0, 3) کا کوئی عصر $B \times A$ میں نہیں ہے۔

2- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 45\}$ اور $A \times A$ ہر تعلق کی شرط "کسی عدد کا مردی" ہے سے کی گئی ہے۔ \mathbb{R} کے تین مجموعہ کے طور پر لکھو۔ \mathbb{R} کا علاقہ (Domain) اور وسعت (Range) معلوم کرو۔

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 45\}, : \text{ حل}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (45, 45)\}$$

کسی عدد کا مردی - R

$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$$

$R \subset (A \times A)$

$$\text{کا علاقہ } R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{کا وسعت } R = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

3- ایک تعلق \mathbb{R} مجموعہ سے دیا گیا ہے، اس کا علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔

$$x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} : \text{ حل}$$

$y = x + 3$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 3 = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 + 3 = 5$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 3 = 6$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 + 3 = 7$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 5 + 3 = 8$$

$$R = \{(0, 3) (1, 4) (2, 5) (3, 6) (4, 7) (5, 8)\}$$

$$\text{علاقہ } = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{وسعت } = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

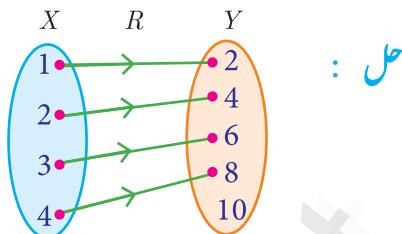
مثال 1.6 فرض کرو $\mathbb{R} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ اور $Y = \{2,4,6,8,10\}$, $X = \{1,2,3,4\}$ ثابت کرو کہ \mathbb{R} ایک تفاضل ہے۔ اس کا علاقہ، معاون علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔

PG-10

(Domain) علاقہ $X = \{1,2,3,4\}$

(Co-domain) معاون علاقہ $Y = \{2,4,6,8,10\}$

کی وسعت $f = \{2,4,6,8\}$



مثال 1.7 ایک تفاضل $f : X \rightarrow Y$ کی شرائط $f(x) = x^2 - 2$ سے کی گئی ہے۔ جہاں $x = \{-2, -1, 0, 3\}$ اور $y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (i) f کے عناصر کی فہرست بناؤ۔ (ii) کیا f ایک تفاضل ہے؟

حل : (i) $x = \{-2, -1, 0, 3\}$

$$f(x) = x^2 - 2 \quad (i)$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(0) = (0)^2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

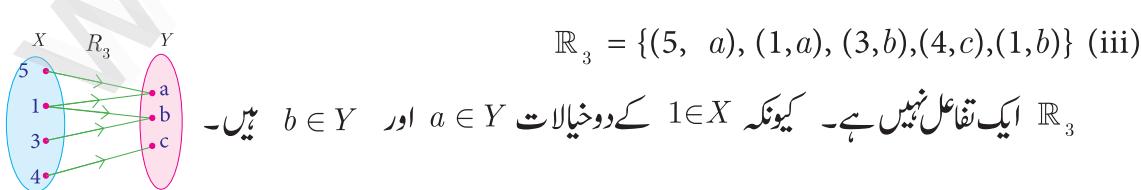
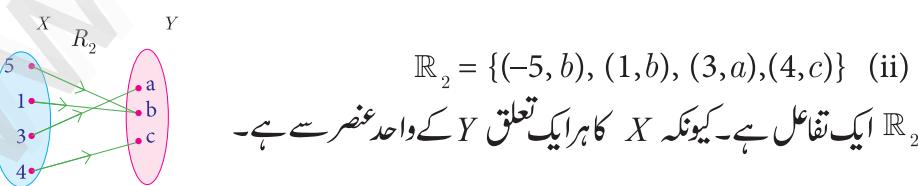
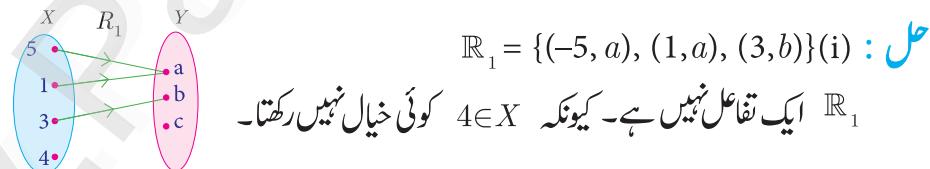
$$f(3) = (3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$f = \{(-2, 2), (-1, -1), (0, -2), (3, 7)\} \text{ لہذا،}$$

مثال 1.8 اگر $Y = \{a, b, c\}$ اور $X = \{-5, 1, 3, 4\}$ تو زیل کو نئے تعلقات X سے Y کی جانب تفاضلات ہیں؟

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5, a), (1, a), (3, b)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5, b), (1, b), (3, a), (4, c)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5, a), (1, a), (3, b), (4, c), (1, b)\}$



مثال 1.9**PG-11**

- (i)
- $f(1)$
- (ii)
- $f(x+1)$
- (iii)
- $f(x) + f(1)$

x کی جگہ 1 لکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ **حل :**

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

x کی جگہ $x + 1$ لکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1$$

$$f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1 \quad (\text{iii})$$

- 1. فرض کرو $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ اور } y = 2x\}$ اور N پر ایک تعلق رکھتا ہے۔ تو اس کا علاقہ، معاون علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔ کیا یہ تعلق ایک تفاضل ہے؟

حل : $X = \{1, 2, 3, \dots\}$

$Y = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$Y = 2X$$

$$Y = 2(1) = 2$$

$$Y = 2(2) = 4$$

$$Y = 2(3) = 6$$

$$Y = 2(4) = 8$$

⋮

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$$

$$\text{علاقہ} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\text{معاون علاقہ} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\text{ہاں، یہ تفاضل ہے۔} \quad \text{وسعت} = \{2, 4, 6, 8\}$$

- 2. فرض کرو $\{(x, f(x)) | x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ ہے تو تصدیق کرو کہ کیا تعلق $X = \{3, 4, 6, 8\}$ کی جانب ایک تفاضل ہے؟

حل : $X = \{3, 4, 6, 8\}$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$f(4) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$f(6) = 6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$$

$$f(8) = 8^2 + 1 = 64 + 1 = 65$$

\mathbb{N} سے \mathbb{R} کی جانب ایک تفاضل ہے

مثال 1.11 فرض کرو $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ اور $A = \{1, 2, 3, 4\}$ دو مجموعے ہیں۔

PG-12

فرض کرو $f : A \rightarrow B$ ایک تفاضل ہے۔ جس کی شرط $f(x) = 3x - 1$ ہے۔ اس تفاضل کی نمائندگی کرو۔

(i) تیرکا خاکہ (ii) جدولی شکل (iii) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ (iv) ترسیمی شکل

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{2, 5, 8, 11, 14\}; \quad : \text{ حل}$$

$$f(x) = 3x - 1$$

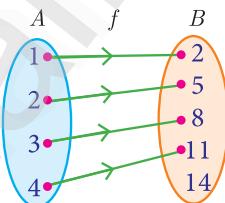
$$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$f(4) = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$$

(i) تیرکا خاکہ



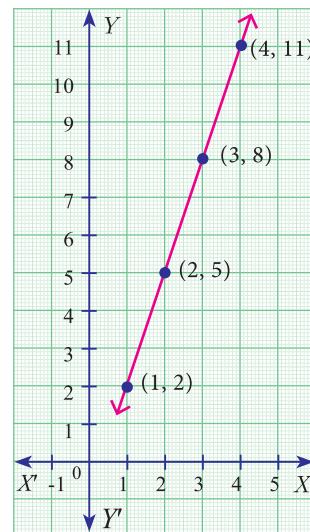
(ii) جدولی شکل

| | | | | |
|--------|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 2 | 5 | 8 | 11 |

(iii) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11)\}$$

Graphical form (iv) ترسیمی شکل



PG-13

مثال 1.14 اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ اور $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ایک بروں تفاضل ہے۔ جس کو $f: A \rightarrow B$ ایک معلوم کرو۔ واضح کیا گیا ہو تو B

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{حل :}$$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$f(0) = (0)^2 + (0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^2 + (1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = (2)^2 + (2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

چونکہ، f ایک بروں تفاضل ہے۔

f کامعاون علاقہ $= B$ کی وسعت

$$B = \{1, 3, 7\}$$

مثال 1.15 فرض کرو کہ f ایک تفاضل $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ہے۔ جس کی وضاحت $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{N}$ سے کی گئی ہو تو (i) کے خیالات معلوم کرو۔ (ii) 29, 53 کے پیش خیالات معلوم کرو۔ (iii) تفاضل کی قسم کو پہچانے۔

حل : تفاضل $f(x) = 3x + 2$ کی تشریح

$$\begin{array}{lll} f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5 & x = 1 & \text{اگر} \\ f(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8 & x = 2 & \text{اگر} \\ f(3) = 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11 & x = 3 & \text{اگر} \end{array} \quad \text{(i)}$$

3, 2, 1 کے خیالات باترتیب 8, 5 اور 11 ہیں۔

$$\text{(ii)} \quad \text{اگر } 29 \text{ کا پیش خیال } x \text{ ہو تو } f(x) = 29 \quad \text{لہذا، } 3x + 2 = 29 \quad 3x = 27 \Rightarrow x = 9.$$

$$\text{اس طرح، اگر } 53 \text{ کا پیش خیال } x \text{ ہو تو، } f(x) = 53 \quad 3x + 2 = 53 \quad 3x = 51 \Rightarrow x = 17. \quad \text{لہذا، .}$$

اس طرح، 29 اور 53 کے پیش خیالات باترتیب 9 اور 17 ہیں۔

(iii) چونکہ \mathbb{N} کے مختلف عناصر، معاون علاقہ میں مختلف خیالات رکھتے ہیں۔ یہ تفاضل ایک-ایک تفاضل ہے۔

f کامعاون علاقہ \mathbb{N} ہے۔ لیکن $\{5, 8, 11, 14, 17, \dots\} = f$ کا وسعت، \mathbb{N} کا تھی مجموعہ ہے۔

لہذا، f ایک بروں تفاضل نہیں ہے۔ یعنی f ایک دروں تفاضل ہے۔

اس طرح f ایک-ایک اور دروں تفاضل ہے۔

PG-14

مثال 1.18 اگر $f: R \rightarrow R$ کی وضاحت معلوم کرو۔

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \leq x < 3 \\ 3x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

- (i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \leq x < 3 \\ 3x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

| | | | | | |
|-------|----|----|-------|----|----|
| | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 |
| -1 | 0 | 1 | 2 | | |
| 4 | 5 | 6 | | | |

$f(x) = 3x - 2$; $f(4)$ (i)

$f(4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$

$f(4) = 10$

$f(x) = x^2 - 2$; $f(-2)$ (ii)

$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$f(-2) = 2$

$f(4) + 2f(1)$ (iii)
 $f(4) = 10$ ↪ (i)

$f(x) = x^2 - 2$

$\Rightarrow f(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

$f(4) + 2f(1) = 10 + 2(-1) = 10 - 2 = 8$

$f(4) + 2f(1) = 8$

$\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$ (iv)

$\leftarrow f(4) = 8$ اور $f(1) = -1$ میں معلوم ہے کہ

$f(x) = 2x + 7$ $f(-3)$

$f(-3) = 2(-3) + 7$

$f(-3) = -6 + 7$

$f(-3) = 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} &= \frac{-1 - 3(10)}{1} \\ &= \frac{-1 - 30}{1} \end{aligned}$$

$$\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = -31$$

PG-15

مشتق 1.4

2۔ درج کرو $f : A \rightarrow B$ ایک قابل ہے جس کی وضاحت $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ سے کی گئی ہے۔ جس میں $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$; $A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$ ہے۔ f کو ظاہر کرو۔

(i) ترتیب دار جوڑیوں کا مجموعہ سے (ii) ایک جدول (iii) تیرکا خاکہ (iv) ترسیم

$$A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1$$

$$f(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(4) = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(6) = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(10) = \frac{10}{2} - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$f(12) = \frac{12}{2} - 1 = 6 - 1 = 5$$

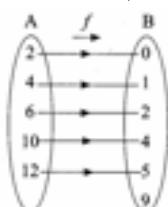
(i) ترتیب دار جوڑیوں کا مجموعہ سے

$$f = \{(2, 0), (4, 1), (6, 2), (10, 4), (12, 5)\}$$

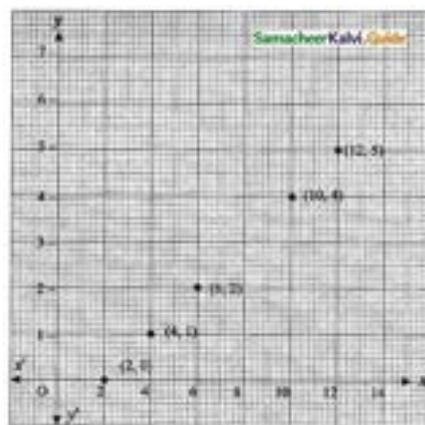
(ii) ایک جدول

| | | | | | |
|--------|---|---|---|----|----|
| X | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 |

(iii) تیرکا خاکہ



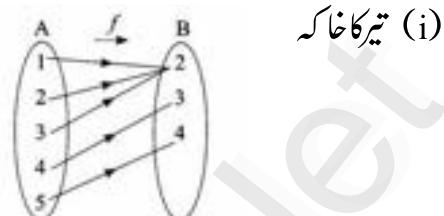
(iv) ترسیم



3۔ تفاضل کو ظاہر کرو بذریعہ (i) تیکا خاکہ (ii) جدولی شکل (iii) ترسیم

$$f = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\} : \text{حل}$$

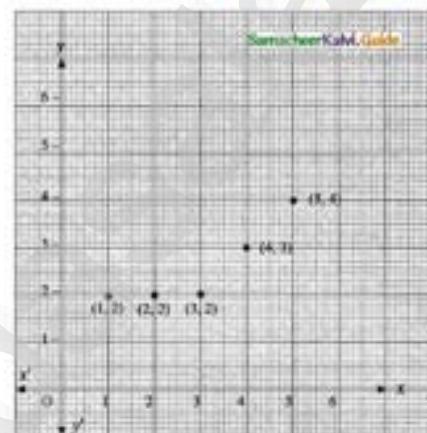
$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B &= \{2, 3, 4\} \end{aligned}$$



جدولی شکل (ii)

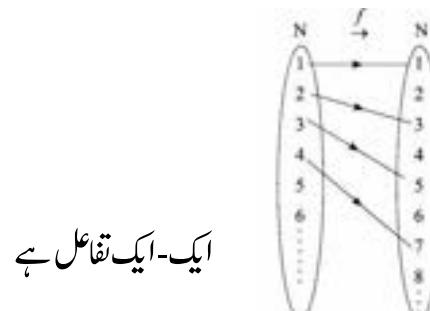
| | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| f(x) | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |

trsیم (iii)



4۔ بتاؤ کہ تفاضل $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جس کی وضاحت $f(x) = 2x - 1$ سے کی گئی ہے یہ ایک-ایک تفاضل ہے مگر بروں نہیں۔

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} : \text{حل} \\ N &= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \\ f(x) &= 2x - 1 \\ f(1) &= 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ f(2) &= 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3 \\ f(3) &= 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5 \\ f(4) &= 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7 \\ f(5) &= 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9 \\ f &= \{(1,1) (2, 3) (3, 5) (4, 7) (5, 9) \dots\} \end{aligned}$$



ایک-ایک تفاضل ہے

PG-17

6۔ فرض کرو کہ $f(x) = x^3$ جس کی وضاحت سے کی گئی ہو تو $f : A \rightarrow B$ اور $B = \mathbb{N}$ اور $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور f کی وسعت معلوم کرو۔ (ii) تقاضا کی قسم کیا ہے؟

$$A = \{1, 2, 3, 4\} : \text{ حل } \\ B = \mathbb{N}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(1) = 1^3 = 1$$

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$f(3) = 3^3 = 27$$

$$f(4) = 4^3 = 64$$

$$f = \{1, 8, 27, 64\} \quad f(i)$$

کی وسعت

(ii) ایک-ایک اور دروں تقاضا ہے۔

9۔ اگر f کی وضاحت سے کی گئی ہو تو معلوم کرو۔

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{اگر } x > 1 \\ 2 & \text{اگر } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{اگر } -3 < x < -1 \end{cases}$$

$$(i) f(3) \quad (ii) f(0) \quad (iii) f(-1.5) \quad (iv) f(2) + f(-2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{اگر } x > 1 & 2, 3, 4, \dots \\ 2 & \text{اگر } -1 \leq x \leq 1 & -1, 0, 1 \\ x - 1 & \text{اگر } -3 < x < -1 & -2 \end{cases}$$

f (3) (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ f(3) &= 3 + 2 \\ f(3) &= 5 \end{aligned}$$

f (0) (ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}$$

f (-1.5) (iii)

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 \\ f(-1.5) &= -1.5 - 1 \\ f(-1.5) &= -2.5 \end{aligned}$$

f(2) + f(-2) (iv)

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ f(2) &= 2 + 2 \\ f(2) &= 4 \end{aligned}$$

f(-2)

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 \\ f(-2) &= -2 - 1 \\ f(-2) &= -3 \end{aligned}$$

$$f(2) + f(-2) = 4 - 3$$

$$f(2) + f(-2) = 1$$

PG-18

10۔ ایک فاصلہ $f : [-5, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ کی وضاحت اس طرح کی گئی ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 1 & \text{if } -5 \leq x < 2 \\ 5x^2 - 1 & \text{if } 2 \leq x < 6 \\ 3x - 4 & \text{if } 6 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

(i) $f(-3) + f(2)$ (ii) $f(7) - f(1)$ (iii) $2f(4) + f(8)$ (iv) $\frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)}$ معلوم کرو۔

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 1 & \text{if } -5 \leq x < 2 \\ 5x^2 - 1 & \text{if } 2 \leq x < 6 \\ 3x - 4 & \text{if } 6 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

{-5,-4,-3,-2,-1,0,1} {2, 3, 4, 5} {6, 7, 8, 9}

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 4 \\ f(8) &= 3(8) - 4 \\ &= 24 - 4 \\ &= 20 \\ 2f(4) + f(8) &= 2(79) + 20 \\ 2f(4) + f(8) &= 158 + 20 \\ 2f(4) + f(8) &= 178 \end{aligned}$$

$$(iv) \frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 6x + 1 \\ f(-2) &= 6(-2) + 1 \\ &= -12 + 1 \\ &= -11 \\ f(6) &= 3x - 4 \\ f(6) &= 3(6) - 4 \\ &= 18 - 4 \\ &= 14 \\ f(4) &= 79 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)} &= \frac{2(-11) - 14}{79 - 11} \\ &= \frac{-22 - 14}{68} \\ &= \frac{-36}{68} = \frac{-9}{17} \end{aligned}$$

f(8)

f(-2)

f(6)

f(4)=79

$f(-3) + f(2)$ (i)
 $f(-3)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x + 1 \\ f(-3) &= 6(-3) + 1 \\ &= -18 + 1 \\ &= -17 \\ f(2) &= 5x^2 - 1 \\ f(2) &= 5(2)^2 - 1 \\ &= 5(4) - 1 \\ &= 20 - 1 \\ &= +19 \\ f(-3) + f(2) &= -17 + 19 \\ f(-3) + f(2) &= 2 \end{aligned}$$

$f(7) - f(1)$ (ii)
 $f(7)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 4 \\ f(7) &= 3(7) - 4 \\ &= 21 - 4 \\ &= 17 \end{aligned}$$

f(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x + 1 \\ f(1) &= 6(1) + 1 \\ &= 6 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(7) - f(1) &= 17 - 7 \\ f(7) - f(1) &= 10 \end{aligned}$$

$2f(4) + f(8)$ (iii)

$$\begin{aligned} f(4) &= 5x^2 - 1 \\ f(4) &= 5(4)^2 - 1 \\ &= 5(16) - 1 \\ &= 80 - 1 \\ &= 79 \end{aligned}$$

PG-19

مثال 1.19 معلوم کرو۔ اگر $f(x) = 2x + 1$ اور $g(x) = x^2 - 2$ فیکر $g \circ f$ اور $f \circ g$ معلوم کرو۔

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2 \\
 f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(x^2 - 2) \\
 &= 2(x^2 - 2) + 1 \\
 f \circ g(x) &= 2x^2 - 3 \\
 g \circ f(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(2x + 1) \\
 &= (2x + 1)^2 - 2 \\
 g \circ f(x) &= 4x^2 + 4x - 1 \\
 f \circ g &\neq g \circ f
 \end{aligned}$$

مثال جس میں $f \circ f(k) = 5$ اگر $f(k) = 2k - 1$ کے معلوم کرو۔

$$\begin{aligned}
 f \circ f(k) &= f(f(k)) \\
 &= 2(2k - 1) - 1 \\
 &= 4k - 3.
 \end{aligned}$$

$$f \circ f(k) = 4k - 3$$

دیا گیا ہے کہ $f \circ f(k) = 5$

$$\begin{aligned}
 4k - 3 &= 5 \\
 4k &= 8 \\
 k &= \frac{8}{4} \\
 \Rightarrow k &= 2.
 \end{aligned}$$

مثال اگر $g(x) = 2x + k$ اور $f(x) = 3x - 2$ کی قیمت معلوم کرو۔ اور $f \circ g = g \circ f$ کو تو k کی قیمت معلوم کرو۔

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x - 2, \quad g(x) = 2x + k \\
 f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(2x + k) \\
 &= 3(2x + k) - 2 \\
 f \circ g(x) &= 6x + 3k - 2. \\
 g \circ f(x) &= g(3x - 2) \\
 &= 2(3x - 2) + k \\
 g \circ f(x) &= 6x - 4 + k. \\
 f \circ g &= g \circ f \quad \text{دیا گیا ہے} \\
 \text{لہذا, } 6x + 3k - 2 &= 6x - 4 + k \\
 6x - 6x + 3k - k &= -4 + 2 \\
 2k &= -2 \\
 k &= \frac{-2}{2} \\
 \Rightarrow k &= -1
 \end{aligned}$$

مثال اگر $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ہو۔ ثابت کرو کہ $h(x) = 3x$ اور $g(x) = 1 - 2x$ ، $f(x) = 2x + 3$ اگر $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = 1 - 2x$ ، $h(x) = 3x$

PG-20

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(1 - 2x) \\
 &= 2(1 - 2x) + 3 \\
 &= 2 - 4x + 3 \\
 (f \circ g)(x) &= 5 - 4x \\
 (f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\
 &= (f \circ g)(3x) \\
 &= 5 - 4(3x) \\
 (f \circ g) \circ h(x) &= 5 - 12x \quad \dots \text{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\
 &= g(3x) \\
 &= 1 - 2(3x) \\
 (g \circ h)(x) &= 1 - 6x \\
 f \circ (g \circ h)(x) &= f(1 - 6x) \\
 &= 2(1 - 6x) + 3 \\
 &= 2 - 12x + 3 \\
 f \circ (g \circ h)(x) &= 5 - 12x \quad \dots \text{(2)}
 \end{aligned}$$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ اور (2) سے، ہمیں حاصل ہوا۔

$f \circ g = g \circ f$ کی قیمت معلوم کرو اس طرح کہ k

(i) $f(x) = 3x + 2, g(x) = 6x - k$

(i) $f(x) = 3x + 2,$
 $g(x) = 6x - k$

: حل

$$\begin{aligned}
 fog(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(6x - k) \\
 &= 3(6x - k) + 2 \\
 &= 18x - 3k + 2 \quad \dots \text{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 gof(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(3x + 2) \\
 &= 6(3x + 2) - k \\
 &= 18x + 12 - k \quad \dots \text{(2)}
 \end{aligned}$$

$(1) = (2)$

$\Rightarrow 18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$

$2k = -10$

$k = -5$

$f \circ g = g \circ f$ کی قیمت معلوم کرو اس طرح کہ k - 2

(ii) $f(x) = 2x - k, g(x) = 4x + 5$

$$\begin{aligned}
 fog(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(4x + 5) \\
 &= 2(4x + 5) - k \\
 &= 8x + 10 - k \quad \dots \text{(1)}
 \end{aligned}$$

$gof(x) = g(f(x))$

$$\begin{aligned}
 &= g(2x - k) \\
 &= 4(2x - k) + 5 \\
 &= 8x - 4k + 5 \quad \dots \text{(2)}
 \end{aligned}$$

$(1) = (2)$

$\Rightarrow 8x + 10 - k = 8x - 4k + 5$

$3k = -5$

$k = -5/3$

PG-21

$$g \circ f(a) = 1 \quad \text{معلوم کرو۔} \quad a \text{ ہو تو } g(x) = x - 2, f(x) = x^2 - 1 \quad \text{لیے جائیں۔} \quad -4$$

$$(i) f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2 \quad : \text{حل}$$

$$gof(a) = 1$$

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2 - 1)$$

$$= x^2 - 1 - 2$$

$$= x^2 - 3$$

$$gof(a) \Rightarrow a^2 - 3 = 1$$

$$= + a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

$$f(x) = x - 4, \quad g(x) = x^2 \quad \text{لیے} \quad h(x) = 3x - 5 \quad (\text{iii}) \quad -8 \quad f(x) = x - 1, \quad g(x) = 3x + 1 \quad \text{لیے} \quad h(x) = x^2 \quad (\text{i}) \quad -8$$

f o (g o h) = (f o g) o h ہوتا بت کر دو کہ

$$f(x) = x - 4, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 3x - 5 \quad : \text{حل}$$

$$(fog)oh = fo(goh)$$

$$\text{LHS} = (fog)oh$$

$$\text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2)$$

$$\text{fog}(x) = x^2 - 4$$

$$(fog)oh(x) = (fog) h(x)$$

$$= (fog)(3x - 5)$$

$$= (3x - 5)^2 - 4$$

$$= 9x^2 - 30x + 25 - 4$$

$$= 9x^2 - 30x + 21 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\text{RHS} = fo(goh)$$

$$(goh)(x) = g(h(x))$$

$$= g(3x - 5)$$

$$= (3x - 5)^2$$

$$(goh)(x) = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\text{fo}(goh)(x) = f(goh)(x)$$

$$= f(9x^2 - 30 x + 25)$$

$$= 9x^2 - 30x + 25 - 4$$

$$= 9x^2 - 30x + 21 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$$\therefore (fog)oh = fo(goh)$$

$$f(x) = x - 1 \quad \text{لیے جائیں۔} \quad -8$$

$$g(x) = 3x + 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$(fog)oh = fo(goh)$$

$$\text{LHS} = (fog)oh$$

$$\text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$= f(3x + 1)$$

$$= 3x + 1 - 1$$

$$\text{fog}(x) = 3x$$

$$(fog)oh = (fog)(h(x))$$

$$= (fog)(x^2)$$

$$= 3x^2 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\text{RHS} = fo(goh)$$

$$goh(x) = g(h(x))$$

$$= g(x^2)$$

$$goh(x) = 3x^2 + 1$$

$$\text{fo}(goh) = f(3x^2 + 1)$$

$$= 3x^2 + 1 - 1 = 3x^2 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

PG-22

مثال 1.24  **وہ دیا گیا ہے**

$gff(x) = fgg(x)$ تو x کو معلوم کرو۔ $g(x) = x + 3$ اور $f(x) = 3x + 1$

$$\begin{aligned} gff(x) &= g[f(f(x))] \\ &= g[f(3x + 1)] \\ &= g[3(3x + 1) + 1] \\ &= g(9x + 3 + 1) \\ &= g(9x + 4) \\ &= [(9x + 4) + 3] \end{aligned}$$

$$gff(x) = 9x + 7$$

$$\begin{aligned} fgg(x) &= f[g(g(x))] \\ &= f[g(x + 3)] \\ &= f[(x + 3) + 3] \\ &= f(x + 3 + 3) \\ &= f(x + 6) \\ &= [3(x + 6) + 1] \\ &= 3x + 18 + 1 \end{aligned}$$

$$fgg(x) = 3x + 19$$

$$gff(x) = fgg(x)$$

$$9x + 7 = 3x + 19$$

$$9x - 3x = 19 - 7$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x \quad \text{اور} \quad h(x) = x + 4 \quad \text{اک (ii) - 8}$$

ہوتے ہاتھ کرو کے

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = 2x,$$

$$h(x) = x + 4$$

$$(fog)oh = fo(goh)$$

$$\text{LHS} = (fog)oh$$

$$\text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$= f(2x)$$

$$= (2x)^2$$

$$\text{fog}(x) = 4x^2$$

$$(fog)oh(x) = (fog)h(x)$$

$$= (\text{fog})(x + 4)$$

$$= 4(x + 4)^2$$

$$= 4(x^2 + 8x + 16)$$

$$= 4x^2 + 32x + 64 \dots\dots (1)$$

$$\text{RHS} = \text{fo}(goh)$$

$$\text{goh}(x) = g(h(x))$$

$$= g(x + 4)$$

$$= 2(x + 4)$$

$$\text{goh}(x) = (2x + 8)$$

$$\text{fo}(goh)(x) = f(\text{goh})(x)$$

$$= f(2x + 8)$$

$$= (2x + 8)^2$$

$$= 4x^2 + 32x + 64 \dots (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$$\therefore (\text{fog})oh = \text{fo}(goh)$$

اگر اداور سلسیل

PG-23

مثال 2.10 : اور b دو ثابت سالم اعداد ہیں اس طرح کہ $a^b \times b^a = 800$ اور b معلوم کرو۔

| | |
|---|-----|
| 2 | 800 |
| 2 | 400 |
| 2 | 200 |
| 2 | 100 |
| 2 | 50 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| 5 | 1 |

حل :

$$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \\ = 2^5 \times 5^2$$

$$a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2 \text{ لہذا}$$

$$a=2 \text{ اور } b=5 \quad (\text{یا}) \quad a=5 \text{ اور } b=2$$

مثال 4 : اگر a ہو تو a اور b معلوم کرو۔ $13824 = 2^a \times 3^b$

| | |
|---|-------|
| 2 | 13824 |
| 2 | 6912 |
| 2 | 3456 |
| 2 | 1728 |
| 2 | 864 |
| 2 | 432 |
| 2 | 216 |
| 2 | 108 |
| 2 | 54 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

$$13824 = 2^9 \times 3^3$$

$$13824 = 2^a \times 3^b$$

$$a=9 \text{ اور } b=3$$

مثال 5 : اگر x_1, x_2, x_3, x_4 سعودی ترتیب میں اعداد اولی ہیں اور p_1, p_2, p_3, p_4 جہاں $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ سالم اعداد ہیں تو x_1, x_2, x_3, x_4 اور p_1, p_2, p_3, p_4 کی قیمت معلوم کرو۔

| | |
|---|--------|
| 2 | 113400 |
| 2 | 56700 |
| 2 | 28350 |
| 3 | 14175 |
| 3 | 4725 |
| 3 | 1575 |
| 3 | 525 |
| 5 | 175 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$113400 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1 \quad \text{حل :}$$

$$113400 = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4}$$

$$P_1 = 2, \quad x_1 = 3$$

$$P_2 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$P_3 = 5, \quad x_3 = 2$$

$$P_4 = 7, \quad x_4 = 1$$

PG-24

مثال 2.21 ایک تو اتر کی عام رسم کی شرط زیل میں دی گئی ہے۔

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); & n \in N \\ n^2 + 1; & n \in N \end{cases}$$

ٹاق ہے گیا رویں اور اٹھا رہویں رقم معلوم کرو۔ جفت ہے

حل : a_{11} معلوم کرنا۔

$$a_n = n(n+3)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 11(11+3) \\ &= 11(14) \\ &= 154. \end{aligned}$$

معلوم کرنا a_{18}

$$a_n = n^2 + 1$$

$$\begin{aligned} a_{18} &= 18^2 + 1 = 325. \\ &= 324 + 1 \\ &= 325. \end{aligned}$$

4۔ زیل کے تو اتر کی مطلوبہ قیمتیں معلوم کرو۔ جن کی n ویں رقمیں دی گئی ہیں۔

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 اور a_{13} (ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 اور a_{11}

حل :

$$a_n = \frac{5n}{n+2}; a_6 \text{ اور } a_{13} \quad (\text{i})$$

$$a_6 = \frac{5(6)}{6+2} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \quad a_6 = \frac{15}{4}$$

$$a_{13} = \frac{5(13)}{13+2} = \frac{65}{15} = \frac{13}{3} \quad a_{13} = \frac{13}{3}$$

$$a_n = -(n^2 - 4); a_4 \text{ اور } a_{11} \quad (\text{ii})$$

$$a_n = -(n^2 - 4)$$

$$a_4 = -(4^2 - 4)$$

$$= -(16 - 4)$$

$$= -12$$

$$a_{11} = -(11^2 - 4)$$

$$= -(121 - 4)$$

$$= -117$$

$$a_4 = -12 \text{ اور } a_{11} = -117$$

PG-25

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2 - 1}{n+3} & ; \quad \text{جھٹ} \leftarrow n, n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1} & ; \quad \text{طاں} \leftarrow n, n \in N \end{cases}$$

اور a_{15} کی n ویں رقم معلوم کرو جن کی a_8 - 5

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n+3}$$

$$a_8 = \frac{8^2 - 1}{8+3} = \frac{64-1}{11} = \frac{63}{11}$$

$$a_n = \frac{n^2}{2n+1}$$

$$a_{15} = \frac{15^2}{2(15)+1} = \frac{225}{31}$$

$$a_8 = \frac{63}{11} \text{ and } a_{15} = \frac{225}{31}$$

مثال 2.24 : A.P : 2.24 لکھو جس کی پہلی رقم 20 اور مشترک فرق 8 ہے۔

حل :

$a=20$ پہلی رقم
 $d=8$ مشترک فرق

حسابی سلسلہ ... ہے $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$

$20, 20+8, 20+2(8), 20+3(8),$
لہذا مطلوبہ $20, 28, 36, 44, \dots, A.P$

مثال 2.26 : A.P 3,6,9,12,.....111 رقوم کی تعداد معلوم کرو۔

حل :
 $a=3$ پہلی رقم

مشترک فرق $d = 6 - 3 = 3$

آخری رقم $l=111$

$$n = \left(\frac{l-a}{d} \right) + 1$$

$$n = \left(\frac{111-3}{3} \right) + 1$$

$$n = \left(\frac{108}{3} \right) + 1$$

$$n = 36 + 1$$

$$n = 37$$

PG-26

مثال 2.25 دی ہوئی رقم (عام رقم) معلوم کرو۔

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ d &= 15 - 3 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 12 \\ t_n &= a + (n-1)d \\ t_{15} &= a + (15-1)d \\ &= a + 14d \\ &= 3 + 14(12) \\ t_{15} &= 171 \end{aligned}$$

اس طرح ($a = 3$ اور $d = 12$)

$$\begin{aligned} t_{24} &= a + (24-1)d \\ &= a + 23d \\ &= 3 + 23(12) \\ t_{24} &= 279 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n-1)d \quad (\text{عام رقم دیں } n) \\ t_n &= 3 + (n-1)12 \\ t_n &= 12n - 9 \end{aligned}$$

مشق 2.5 کی 19 دیں رقم معلوم کرو۔ $-11, -15, -19, \dots, -4$

$$a = -11$$

$$d = -15 - (-11)$$

$$d = -15 + 11$$

$$d = -4$$

$$n = 19$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{19} = -11 + 18(-4)$$

$$t_{19} = -11 - 72$$

$$t_{19} = -83$$

? کی کوئی رقم 16, 11, 6, 1, ... -5

$$a = 16,$$

$$d = 11 - 16$$

$$d = -5$$

$$l = -54$$

$$n = \left[\frac{l-a}{d} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{-54 - 16}{-5} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{-70}{-5} \right] + 1$$

$$n = +14 + 1$$

مثال 2.36 300 اور 600 کے درمیان تمام طبی اعداد (natural numbers) کا حاصل جمع معلوم کرو جو 7 سے تقسیم پذیر ہیں۔

حل : 300 اور 600 کے درمیان 7 سے تقسیم ہونے والے طبی اعداد یہ ہیں 301, 308, 315, 595.

ان کا حاصل جمع یہ ہے 301 + 308 + 315 + ... + 595.

پہلی رقم $a = 301$

مشترک فرق $d = 7$

آخری رقم $l = 595$

$$n = \left(\frac{l-a}{d} \right) + 1$$

$$n = \left[\frac{595 - 301}{7} \right] + 1$$

$$n = \left[\frac{294}{7} \right] + 1$$

$$\therefore n = 42 + 1$$

$$n = 43$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$S_{43} = \frac{43}{2}[301 + 595]$$

$$S_{43} = \frac{43}{2}(896)$$

$$S_{43} = 43(448)$$

$$S_{43} = 19264$$

مثال 2.51 n سلسلہ کی رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل :

$$5 + 55 + 555 + \dots + n \text{ terms} =$$

$$= 5[1 + 11 + 111 + \dots + n \text{ رقمیں}]$$

$$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \dots + n \text{ رقمیں}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + n \text{ رقمیں}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 + 100 + 1000 + \dots + n \text{ رقمیں}) - n]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + n \text{ رقمیں}) - n]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{(10 - 1)} - n \right]$$

$$= \frac{50(10^n - 1)}{81} - \frac{5n}{9}$$

سلسلہ کی n رکوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔ 6

PG-28

$$S_n = 3 + 33 + 333 + \dots n \text{ قیس } : \text{ حل}$$

$$S_n = 3[1 + 11 + 111 + \dots n \text{ قیس }]$$

$$S_n = \frac{3}{9} [9 + 99 + 999 + \dots n \text{ قیس}]$$

$$S_n = \frac{1}{3} [(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots n \text{ قیس}]$$

$$S_n = \frac{1}{3} [(10 + 100 + 1000 + \dots n \text{ قیس}) - n]$$

$$S_n = \frac{1}{3} [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots n \text{ قیس}) - n]$$

$$\begin{aligned} & (a = 10, r = 10, S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}) \\ &= \frac{1}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{10}{9} \cdot (10^n - 1) - n \right] \\ & S_n = \frac{10}{27} (10^n - 1) - \frac{n}{3} \end{aligned}$$

مثال 2.54 قیمت معلوم کرو۔

(i) $1 + 2 + 3 + \dots + 50$: حل

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + 50 &= \frac{50 \times (50+1)}{2} \\ &= \frac{50 \times (51)}{2} = \frac{2550}{2} \\ &= 1275 \end{aligned}$$

$$(ii) 16 + 17 + 18 + \dots + 75 = (1 + 2 + 3 + \dots + 75) - (1 + 2 + 3 + \dots + 15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{75(75 + 1)}{2} - \frac{15(15 + 1)}{2} \\ &= \frac{75(76)}{2} - \frac{15(16)}{2} \\ &= 75 \times 38 - 15 \times 8 \end{aligned}$$

$$= 2850 - 120$$

$$= 2730$$

PG-29

مثال 2.56 حاصل جمع معلوم کرو۔

$$\begin{aligned}
 15^2 + 16^2 + 17^2 + \dots + 28^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 28^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 14^2) \quad : \text{حل} \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{28 \times 29 \times 57}{6} - \frac{14 \times 15 \times 29}{6} \\
 &= 7714 - 1015 \\
 15^2 + 16^2 + 17^2 + \dots + 28^2 &= 6699
 \end{aligned}$$

6 - سمیہ کے پاس 15 مرلچ رنگین کاغذات (Colour papers) یہیں جن کے سائز 10cm, 11cm, 12cm, 24cm (Colour papers) کا ہے۔ ان رنگین کاغذات سے کتنے رقبہ کو مزین کیا جا سکتا ہے؟

$$\begin{aligned}
 &= 10^2 + 11^2 + 12^2 + \dots + 24^2 \quad : \text{حل} \\
 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{24 \times (24+1) \times (2 \times 24+1)}{6} - \frac{9 \times (9+1) \times (2 \times 9+1)}{6} \\
 &= \frac{24 \times 25 \times 49}{6} - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\
 &= 4 \times 25 \times 49 - 3 \times 5 \times 19 \\
 &= 4900 - 285 \\
 10^2 + 11^2 + 12^2 + \dots + 24^2 &= 4615
 \end{aligned}$$

مثال 3.19 ذیل کے جملوں کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$

(ii) $\frac{144 a^8 b^{12} c^{16}}{81 f^{12} g^4 h^{14}}$

$$\sqrt{256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}} \quad (i) \quad \text{حل}$$

$$= 16 \left| (x-a)^4 (x-b)^2 (x-c)^8 (x-d)^{10} \right|$$

$$\sqrt{\frac{144 a^8 b^{12} c^{16}}{81 f^{12} g^4 h^{14}}} \quad (ii)$$

$$= \frac{4}{3} \left| \frac{a^4 b^6 c^8}{f^6 g^2 h^7} \right|$$

مشق 3.7

PG-30

1۔ زیل کے ناطق جملوں کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$

(ii) $\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

$$\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4} \text{ (i): حل}$$

$$\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4} = \frac{20}{10} \left| \frac{x^2y^6z^8}{x^4y^2z^2} \right|$$

$$= 2 \left| \frac{y^4z^6}{x^2} \right|$$

$$\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4} \text{ (ii)}$$

$$\sqrt{\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}} = \frac{11}{9} \left| \frac{(a+b)^4(x+y)^4(b-c)^4}{(b-c)^2(a-b)^6(b-c)^2} \right|$$

2۔ زیل کے جذر المربع معلوم کیجئے۔ 25

$$4x^2 + 20x + 25 \text{ (i): حل}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 20x + 25} &= \sqrt{(2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2} \\ &= \sqrt{(2x+5)^2} \\ &= |2x+5| \end{aligned}$$

مثال 3.21 $64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1$ کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 8x^2 - x + 1 \\ \hline 64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1 \\ 64x^4 \\ \hline (-) \end{array} \\
 \begin{array}{c} 16x^2 - x \\ \hline 16x^2 - 2x + 1 \\ 16x^2 - 2x + 1 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}
 \text{ حل: }$$

$$\sqrt{64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = |8x^2 - x + 1|$$

PG-31

مثال 3.22 اگر $9x^4 + 12x^3 + 28x^2 + ax + b$ ایک کامل مربع ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 3x^2 \\ | \\ 9x^4 + 12x^3 + 28x^2 + ax + b \\ -9x^4 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 6x^2 + 2x \\ | \\ 12x^3 + 28x^2 \\ -(12x^3 + 4x^2) \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 6x^2 + 4x + 4 \\ | \\ 24x^2 + ax + b \\ -(24x^2 + 16x + 16) \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

$a = 16$
 $b = 16$

- تہسیلی طریقے سے ذیل کے کشیر قیمتیات کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

$$x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9 \text{ (i)}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} x^2 - 6x + 3 \\ | \\ x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9 \\ -x^4 \\ \hline (-) \\ 2x^2 - 6x \\ | \\ -12x^3 + 42x^2 \\ -(-12x^3 + 36x^2) \\ \hline (+) (-) \\ 2x^2 - 12x + 3 \\ | \\ 6x^2 - 36x + 9 \\ -6x^2 + 36x + 9 \\ \hline (-) (+) (0) \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$\frac{-12x^3}{2x^2} = -6x$
 $\frac{6x^2}{2x^2} = 3$

$$\sqrt{x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9} = |x^2 - 6x + 3|$$

$$37x^2 - 28x^3 + 4x^4 + 42x + 9 \text{ (ii)}$$

$$4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 2x^2 - 7x - 3 \\ | \\ 4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9 \\ -4x^4 \\ \hline (-) \\ 4x^2 - 7x \\ | \\ -28x^3 + 37x^2 \\ -(-28x^3 + 49x^2) \\ \hline (+) (-) \\ 4x^2 - 14x - 3 \\ | \\ -12x^2 + 42x + 9 \\ -(-12x^2 + 42x + 9) \\ \hline (+) (-) (-) \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$\frac{-28x^3}{4x^2} = -7x$
 $\frac{-12x^2}{4x^2} = -3$

A MOHAMED ASIF M.Sc.,B.E $\sqrt{4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9} = |2x^2 - 7x - 3|$

B.T.ASSISTANT., (MATHS)

GOVT.MUSLIM Hr SEC SCHOOL,YELORE

Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com

PG-32 $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$ (iv)

$$16x^4 + 8x^2 + 1 \text{ (iii)}$$

$$\begin{array}{r} 11x^2 \\ 121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144 \\ 121x^4 \\ (-) \\ \hline -198x^3 - 183x^2 \\ -198x^3 + 81x^2 \\ (+) (-) \\ \hline -264x^2 + 216x + 144 \\ -264x^2 + 216x + 144 \\ (+) (-) (-) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144} = |11x^2 - 9x - 12|$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 \\ 16x^4 + 8x^2 + 1 \\ 16x^4 \\ (-) \\ \hline 8x^2 + 1 \\ 8x^2 + 0x + 1 \\ 8x^2 + 0 + 1 \\ (-) (-) (-) \\ \hline 0 \end{array} \frac{8x^2}{8x^2} = 1$$

$$\sqrt{16x^4 + 8x^2 + 1} = |4x^2 + 1|$$

a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے اگر زیل کے کشیر قیمتیات کامل مرتع ہیں۔ -2

$$4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + bx + a \text{ (i)}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ 4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + bx + a \\ 4x^4 \\ (-) \\ \hline -12x^3 + 37x^2 \\ -12x^3 + 9x^2 \\ (+) (-) \\ \hline 28x^2 + bx + a \\ 28x^2 - 42x + 49 \\ (-) (+) (-) \\ \hline 0 \end{array} \frac{28x^2}{4x^2} = 7$$

$$\begin{aligned} b + 42 &= 0 & b &= -42 \\ a - 49 &= 0 & a &= 49 \end{aligned}$$

$$ax^4 + bx^3 + 361x^2 + 220x + 100 \text{ (ii)}$$

$$\begin{array}{r} 100 + 220x + 361x^2 + bx^3 + ax^4 \\ 10 + 11x + 12x^2 \\ 100 + 220x + 361x^2 + bx^3 + ax^4 \\ 100 \\ (-) \\ \hline 220x + 361x^2 \\ 220x + 121x^2 \\ (-) (-) \\ \hline 240x^2 + bx^3 + ax^4 \\ 240x^2 + 264x^3 + 144x^4 \\ (-) (-) (-) \\ \hline 0 \end{array} \frac{220x}{20} = 11x \quad \frac{240x^2}{20} = 12x^2$$

$$\begin{aligned} b - 264 &= 0 & b &= 264 \\ a - 144 &= 0 & a &= 144 \end{aligned}$$

3۔ m اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے اگر زمیل کے کثیر قمیات کا مل مربع ہیں۔

PG-33

$$36x^4 - 60x^3 + 61x^2 + mx + n \quad (\text{i})$$

| | |
|-------------------|---|
| | $6x^2 - 5x + 3$ |
| $6x^2$ | $36x^4 - 60x^3 + 61x^2 - mx + n$ |
| | $36x^4$ |
| $12x^2 - 5x$ | $***** - 60x^3 + 61x^2$ |
| | $***** - 60x^3 + 25x^2$ |
| $12x^2 - 10x + 3$ | $***** * * * * 36x^2 - mx + n$ |
| | $***** * * * * 36x^2 - 30x + n$ |
| | $m=30$ |
| | $n=9$ |
| | $***** * * * * * * * * * * * * * * * 0 * * * *$ |

$$x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 16 \quad (\text{ii})$$

| | |
|-----------------|-------------------------------|
| | $x^2 - 4x + 4$ |
| x^2 | $x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 16$ |
| | x^4 |
| | (-) |
| $2x^2 - 4x$ | $- 8x^3 + mx^2$ |
| | $- 8x^3 + 16x^2$ |
| | (+) (-) |
| $2x^2 - 8x + 4$ | $\frac{- 8x^3}{2x^2} = - 4x$ |
| | $x^2(m - 16) + nx + 16$ |
| | $8x^2 - 32x + 16$ |
| | (-) (+) (-) |
| | $\underline{0}$ |
| | $m - 16 - 8 = 0$ |
| | $m - 24 = 0$ |
| | $m = 24$ |
| | $n + 32 = 0$ |
| | $n = - 32$ |

مثال 3 \times 3 میٹرکس ترتیب دیجئے، جس کے عناصر $a_{ij} = i^2 j^2$ ہیں۔

حل: عام 3×3 میٹرکس اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

PG-34

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1^2 \times 1^2 = 1 \times 1 = 1; & a_{12} = 1^2 \times 2^2 = 1 \times 4 = 4; & a_{13} = 1^2 \times 3^2 = 1 \times 9 = 9; \\ a_{21} = 2^2 \times 1^2 = 4 \times 1 = 4; & a_{22} = 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16; & a_{23} = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 \\ a_{31} = 3^2 \times 1^2 = 9 \times 1 = 9; & a_{32} = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36; & a_{33} = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix} \quad \text{لہذا، درکار میٹرکس}$$

مشق 3.17

(i) عناصر کی تعداد (ii) میٹرکس کا درجہ لکھئے۔ (iii) عناصر میں $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$ میٹرکس

(i) عناصر کا تعداد 16 ہے
(ii) میٹرکس کا درجہ 4×4 ہے
(iii)

$$a_{22} = \sqrt{7}; a_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_{24} = 5$$

$$a_{44} = 0; \quad a_{41} = -11, \quad a_{42} = 1$$

2۔ اگر ایک میٹرکس میں 18 عناصر ہوں تو اس میٹرکس کے ممکن درجے کیا ہو سکتے ہیں؟ اگر 6 عناصر ہوں تو درجے کیا ہو سکتے ہیں؟

حل : 18 عناصر کے ممکن درجے $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1$

6 عناصر کے ممکن درجے $1 \times 6, 2 \times 3, 3 \times 2, 6 \times 1$

3۔ 3×3 درجہ کا ایک میٹرکس ترتیب دیجئے۔ جس کے عناصر اس طرح دئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_{11} &= |1 - 2(1)| = |1 - 2| = |-1| = 1 \\ a_{12} &= |1 - 2(2)| = |1 - 4| = |-3| = 3 \\ a_{13} &= |1 - 2(3)| = |1 - 6| = |-5| = 5 \\ a_{21} &= |2 - 2(1)| = |2 - 2| = 0 = 0 \\ a_{22} &= |2 - 2(2)| = |2 - 4| = |-2| = 2 \\ a_{23} &= |2 - 2(3)| = |2 - 6| = |-4| = 4 \\ a_{31} &= |3 - 2(1)| = |3 - 2| = |1| = 1 \\ a_{32} &= |3 - 2(2)| = |3 - 4| = |-1| = 1 \\ a_{33} &= |3 - 2(3)| = |3 - 6| = |-3| = 3 \end{aligned}$$

$$a_{ij} = |i - 2j| \quad (i) : \text{حل}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PG-35

$$a_{ij} = \frac{(i+j)^3}{3} \quad (\text{ii}): \text{ حل}$$

$$a_{11} = \frac{(1+1)^3}{3} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}; \quad a_{12} = \frac{(1+2)^3}{3} = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3} = 9; \quad a_{13} = \frac{(1+3)^3}{3} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}$$

$$a_{21} = \frac{(2+1)^3}{3} = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3} = 9; \quad a_{22} = \frac{(2+2)^3}{3} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}; \quad a_{23} = \frac{(2+3)^3}{3} = \frac{5^3}{3} = \frac{125}{3}$$

$$a_{31} = \frac{(3+1)^3}{3} = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}; \quad a_{32} = \frac{(3+2)^3}{3} = \frac{5^3}{3} = \frac{125}{3}; \quad a_{33} = \frac{(3+3)^3}{3} = \frac{6^3}{3} = \frac{216}{3} = 72$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 9 & \frac{64}{3} \\ 9 & \frac{64}{3} & \frac{125}{3} \\ \frac{64}{3} & \frac{125}{3} & 72 \end{pmatrix}$$

اگر $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ہو تو A کا متریک معلوم کیجئے۔

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad : \text{ حل}$$

اگر $A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ ہو تو $-A$ کا متریک معلوم کیجئے۔

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} \quad : \text{ حل}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 3 \\ \sqrt{5} & -2 \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

$$-A = (-A^T) = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{5} & -\sqrt{3} \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

PG-36

کی تصدیق کجئے۔

$$(A^T)^T = A \text{ ہوں} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{اگر } -6$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad : \text{ حل}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{17} & 8 \\ 2 & 0.7 & 3 \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

- ذیل کے مساوات سے x, y, z کی قیمتیں معلوم کجئے۔

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{i})$$

$$x = 3$$

$$y = 12$$

$$z = 3$$

معلوم کجئے۔

$$A + B \text{ ہوں} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{اگر } 3.60 \quad \text{مثال}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+7 & 3+0 \\ 4+1 & 5+3 & 6+1 \\ 7+2 & 8+4 & 9+0 \end{pmatrix} \quad : \text{ حل}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

PG-37

معلوم کیجئے۔ $A + B$ ہوتا ہے اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ مثال 3.62

حل: A اور B کا جم ممکن نہیں ہے کیونکہ ان کے درجے مختلف ہیں۔

$2A + B$ ہوتا ہے $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ اگر مثال 3.63

$$2A+B = 2 \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A+B = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 12 \\ 2 & 6 & 18 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A+B = \begin{pmatrix} 18 & 27 & 9 \\ 1 & 8 & 22 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال 3.66 اگر

(i) $3A + 2B - C$

$$(i) 3A + 2B - C = 3 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

حل:

$$3A + 2B - C = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 9 \\ 91 & 5 & 0 \\ 24 & 21 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -12 & -8 \\ 4 & 22 & -6 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B - C = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 1 \\ 14 & 44 & -8 \\ 23 & 19 & 25 \end{pmatrix}$$

PG-38

ہو تو تمدین کیجئے۔

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = B + A \text{ (i)}$$

$$(i) \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 6 & 7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots \text{ (1)}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 9 & 7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots \text{ (2)}$$

$$A + B = B + A \quad \therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

$$A + (-A) = (-A) + A = 0. \text{ (ii)}$$

$$(ii) \quad A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + (-) \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} : \text{L.H.S.}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \dots \text{ (1)}$$

$$(-A) + A = - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + (-A) = (-A) + A = 0 \quad \dots \text{ (2)}$$

PG-39

ہوتی تصریح کیجئے۔

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ لکھیں 2}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

لکھیں 2

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ A + (B + C) &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \dots (1) \\ (A + B) &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 3 & 12 & -6 \\ -6 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\ (A + B) + C &= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 3 & 12 & -6 \\ -6 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{لکھیں 1}$$

PG-40 (i) $B - 5A$ (ii) $3A - 9B$ - معلوم کیجئے۔ $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ - 4

$B - 5A$ (i): حل

$$\begin{aligned} B - 5A &= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 20 & 45 \\ 40 & 15 & 35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -20 & -45 \\ -40 & -15 & -35 \end{pmatrix} \\ B - 5A &= \begin{pmatrix} 7 & -17 & -37 \\ -39 & -11 & -26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$3A - 9B$ (ii)

$$\begin{aligned} 3A - 9B &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 12 & 27 \\ 24 & 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 63 & 27 & 72 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 12 & 27 \\ 24 & 9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -63 & -27 & -72 \\ -9 & -36 & -81 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -63 & -15 & -45 \\ 15 & -27 & -60 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- معلوم کیجئے۔ AB - $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, **3.67** مثال

: حل
- کیا، $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (8+4+0) & (3+8+0) & (1+2+0) \\ (24+2+25) & (9+4+15) & (3+1+5) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 51 & 28 & 9 \end{pmatrix}$$

PG-41 $AB = BA$ ۾ جانچ کیجئے۔ جانچ کیجئے۔ BA اور AB ، جو ۽ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ۾ 3.68 مثال حل:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+0 & 2+0 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 0+3 \\ 2+3 & 0+9 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$ اور

$(AB)C = A(BC)$ کی تبیین کرو ٿا جو $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ اور $A = (1 \ -1 \ 2)$ ۾ 3.71 مثال حل:

LHS $(AB)C$

$$AB = (1 \ -1 \ 2) \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1-2+2 \ -1-1+6)$$

$$= (1 \ 4)$$

$$(AB)C = (1 \ 4) \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1+8 \ 2-4)$$

$$(AB)C = [9 \ -2] \quad \text{----- (1)}$$

RHS $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1 \\ 2+2 & 4-1 \\ 1+6 & 2-3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

PG-42

$$A(BC) = (1 \ -1 \ 2) \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = ((-1 - 4 + 14) \ (3 - 3 - 2))$$

$$A(BC) = (9 \ -2) \quad \text{--- (2)}$$

$$(AB)C = A(BC). \quad \text{--- (2) ,& (1)}$$

$A(B+C) = AB + AC.$ تصدیق کیجئے $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ میں 3.72 جل

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{LHS } A(B+C) : \text{ جل}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 - 1 & 8 + 4 \\ 6 - 3 & -8 + 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

RHS $AB + AC$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 4 & 2 + 2 \\ -1 - 12 & -2 + 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 + 3 & 6 + 2 \\ 7 + 9 & -6 + 6 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

A MOHAMED ASIF M.Sc.,B.Ed.,

B.T.ASSISTANT., (MATHS)

GOVT.MUSLIM Hr SEC SCHOOL,YELLORE

Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com

PG-43

$$\text{اہنہ} \quad AB + AC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{_____} \quad (2)$$

- چنانچہ، ثابت ہوتا ہے $A(B + C) = AB + AC$ سے (2) اور (1)

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ کو تو ثابت کیجئے کہ } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ اور } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ کی } 3.73 \text{ مثال} \\ \text{LHS } (AB)^T : \text{ حل}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2 + 0 & -1 + 8 + 2 \\ 4 + 1 + 0 & -2 - 4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

RHS ($B^T A^T$)

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2 + 0 & 4 + 1 + 0 \\ -1 + 8 + 2 & -2 - 4 + 2 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- چنانچہ، ثابت ہوتا ہے $(AB)^T = B^T A^T$. سے (2) اور (1)

PG-44 $? AB = BA$ اگر معلوم کیجئے اور جائز کیجئے۔ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ اسکا -4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} : \text{حل}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+10 & -6+25 \\ 4+6 & -12+15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-12 & 5-9 \\ 4+20 & 10+15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 25 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5- دیا گیا ہے کہ

$$A(B + C) = AB + AC.$$
 تصدیق کیجئے کہ

LHS $A(B + C)$: حل

$$B + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 2+18 & 4+15 \\ 10+1 & 10-6 & 20-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}(1)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+9 & -1+15 & 2+6 \\ 5-3 & -5-5 & 10-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

PG-45

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-12 & 3+3 & 2+9 \\ 5+4 & 15-1 & 10-3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{bmatrix} \\
 AB + AC &= \begin{bmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

- چنانچہ، ثابت ہوتا ہے۔ $A(B + C) = AB + AC$ $\Leftarrow (2)$ اور (1)

6۔ ثابت کیجئے کہ میریس شرط پوری کرتے ہیں۔ $AB = BA$ تبادلی ناصیت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad : \text{حل} \\
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-6 & -2+2 \\ 3-3 & -6+1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \dots(1) \\
 BA &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-6 & 2-2 \\ -3+3 & -6+1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

$$AB = BA$$

(i) $A(BC) = (AB)C$ کے جو تکمیل
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ فرض کریں - 7

(ii) $(A - B)C = AC - BC$ (iii) $(A - B)^T = A^T - B^T$ $A(BC) = (AB)C$ (i)

حل :

$(AB)C = A(BC)$. اور (1)

$$(A - B)C = AC - BC \quad (\text{ii})$$

: ↗

www.Padasalai.Net

$$(A - B) C = AC - BC$$

↔ (2) , (1)

PG-48

(iii) $(A - B)^T = A^T - B^T$

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} && \text{حل} \\
 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 (A - B)^T &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots (1) \\
 A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 B^T &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 A^T - B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$(A - B)^T = A^T - B^T \quad \leftarrow (2) \text{ اور } (1)$$

$$A^2 = I \text{ ہو تو تصدیق کیجئے کہ } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ مگر } -10$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} && \text{حل} \\
 A^2 &= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 25 - 24 & -20 + 20 \\ 30 - 30 & -24 + 25 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \\
 A^2 &= I
 \end{aligned}$$

PG-49

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ ہر قدر ایق کیجئے کہ } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ اگر } -12$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+2+45 & 35+4-9 \\ 1+2+40 & 7+4-8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 52 & 30 \\ 43 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \\ B^T A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+2+45 & 1+2+40 \\ 35+4-9 & 7+4-8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{bmatrix} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$(AB)^T = B^T A^T . \text{ اور } (2) \text{ اور } (1)$$

PG-50

$$A^2 - 5A + 7I_2 = 0 \quad \text{கீழ்க்கண்ட வினாவுக்குத் தீர்வு:} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{அது } -13$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5A = 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$7I_2 = 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 7I_2 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -5 \\ +5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

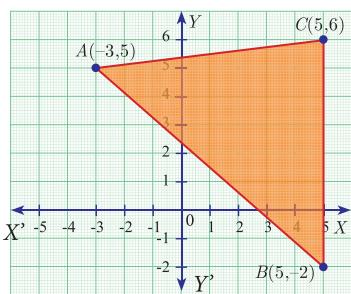
$$= \begin{pmatrix} 8-15+0 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PG-51

مثال 5.1 مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راسیں $(5,6)$, $(-3,5)$ اور $(5,-2)$ ہیں۔

حل :



فرض کرو کہ راسیں
 $A(-3,5)$, $B(5,-2)$, $C(5,6)$
 (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -3 & 5 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{61 + 3\} \\ &= \frac{1}{2} (64) \\ &= 32 \text{ مربع اکائیاں} \end{aligned}$$

مثال 5.2 ثابت کیجئے کہ نقطے $R(-3,4)$, $P(-1.5,3)$ اور $Q(6,-2)$ ایک خط پر ہیں۔

حل : نقطے $R(-3,4)$, $P(-1.5,3)$ اور $Q(6,-2)$ ایک خط پر ہیں۔

$$\begin{aligned} \Delta PQR &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1.5 & 6 & -3 & -1.5 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{18 - 18\} = 0 \text{ مربع اکائیاں} \end{aligned}$$

لہذا دوسرے گئے نقطے ہم خط پر ہیں۔

مثال 5.3 اگر مثلث کا رقبہ 22 مربع اکائیاں ہوں اور اس کے راسیں $B(k,-2)$, $A(-1,2)$ اور $C(7,4)$ ترتیب وار ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : راسیں $C(7,4)$, $B(k,-2)$, $A(-1,2)$ اور $(k,-2)$ میں سے $C(7,4)$ مثلث ABC کا رقبہ 22 مربع اکائیاں ہیں۔

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) \right\} = 22 \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1 & k & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

PG-52

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \{(2 + 4k + 14) - (2k - 14 - 4)\} = 22 \\
 & = (16 + 4k) - (2k - 18) = 44 \\
 & = 16 + 4k - 2k + 18 = 44 \\
 & 2k + 34 = 44 \\
 & \Rightarrow 2k = 10 \\
 & k = 5
 \end{aligned}$$

مثال 5.5 ایک حال کا فرش ملٹ نامماں ٹائلز (Tiles) سے سجا ہوا ہے۔ ان میں سے ہر ایک ملٹ کے راسیں (1,2)، (-1,-1) اور (-3,2) کی طرح ہیں۔ اگر اس حال کا فرش 110 ٹائلز سے مکمل طور پر سجا ہوا ہے تو فرش کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : ایک ملٹ نما ٹائل کی راسیں (2, -1, 1)، (-3, 2)، (-1, -1) اور (1, 2) ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \text{ملٹ } ABC \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -3 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مربع اکائیاں} &= \frac{1}{2} \{(3 - 2 + 2) - (-2 - 1 - 6)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{3 - (-9)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{3 + 9\} \\
 &= \frac{1}{2} (12) = 6
 \end{aligned}$$

چونکہ ، فرش 110 ملٹ نامماں ٹائلز سے سجا ہوا ہے۔

$$\text{مربع اکائیاں} = 110 \times 6 = 660$$

مثال 5.6 نقط (8,6)، (5,11)، (5,12) اور (-4,3) سے بننے والے چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ راسیں (8,6)، (5,11)، (5,12) اور (-4,3) اور C(-5,12)، B(5,11)، A(8,6) ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \text{چار ضلعی کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 8 & 5 & -5 & -4 & 8 \\ 6 & 11 & 12 & 3 & 6 \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \{(88 + 60 - 15 - 24) - (30 - 55 - 48 + 24)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{109 - (-49)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{109 + 49\} \\
 &= \frac{1}{2} \{158\}
 \end{aligned}$$

$$\text{مربع اکائیاں} = 79$$

مشق 5.1

PG-53

1۔ ذیل کے نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ محسوس کیجئے۔

- (I) $(1, -1), (-4, 6)$ اور $(-3, -5)$

$A(1, -1), B(-4, 6), C(-3, -5)$: حل

$$\text{مثلث } ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & -5 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{(6+20+3)-(4-18-5)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{(29)-(-19)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{29+19\}$$

$$= \frac{1}{2} \{48\}$$

مربع اکائیاں = 24 مثلث ABC کا رقبہ

- (ii) $(-10, -4), (-8, -1)$ اور $(-3, -5)$

$A(-10, -4), B(-3, -5), C(-8, -1)$, حل

$$\text{مثلث } ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -10 & -3 & -8 & -10 \\ -4 & -5 & -1 & -4 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{(50+3+32)-(12+40+10)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{(85)-(62)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{85-62\}$$

$$= \frac{1}{2} \{23\}$$

مربع اکائیاں = 11.5 مثلث ABC کا رقبہ

| شمارہ | راسیں | رقبہ (مربع اکائیاں) |
|-------|---------------------------|---------------------|
| (i) | $(0, 0), (p, 8), (6, 2)$ | 20 |
| (ii) | $(p, p), (5, 6), (5, -2)$ | 32 |

3۔ مثلث کے راسیں ترتیب وار ہیں اور ان کے رقبے دئے گئے ہیں۔ ہر ایک میں 'p' کی قیمت معلوم کیجئے۔

PG-54

(i) $(0, 0), (p, 8), (6, 2)$: حل

$$\begin{aligned}
 \text{مثلاٹ } ABC \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 & P & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{Bmatrix} = 20 \\
 &= \frac{1}{2} \{(0+2P+0)-(0+48+0)\} = 20 \\
 &= 2P - 48 = 40 \\
 &= 2P = 40 + 48 \\
 &= 2P = 88 \\
 &P = 44
 \end{aligned}$$

(ii) $(p, p), (5, 6), (5, -2)$

A(P, P), B(5, 6), C(5, -2), حل

$$\begin{aligned}
 \text{مثلاٹ } ABC \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} P & 5 & 5 & P \\ P & 6 & -2 & P \end{Bmatrix} = 32 \\
 &= \frac{1}{2} \{(6P-10+5P)-(5P+30-2P)\} = 32 \\
 &= (11P-10)-(3P+30) = 64 \\
 &= 11P-10-3P-30 = 64 \\
 &8P-40 = 64 \\
 &8P = 64+40 \\
 &8P = 104 \\
 &P = \frac{104}{8} \\
 &P = 13
 \end{aligned}$$

4۔ ذیل کے نقاط ہم خط ہیں۔ 'a' کی قیمت معلوم کیجئے۔

A(2, 3), B(4, a), C(6, -3), (6, -3) اور (4, a), (2, 3) (i)

$$\begin{aligned}
 \text{مثلاٹ } ABC \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & a & -3 & 3 \end{Bmatrix} = 0 \\
 &= \frac{1}{2} \{(2a-12+18)-(12+6a-6)\} = 0 \\
 &= (2a+6)-(6+6a) = 0 \\
 &= 2a+6-6-6a = 0 \\
 &-4a = 0 \\
 &a = 0
 \end{aligned}$$

A MOHAMED ASIF M.Sc., B.Ed., -4a = 0

B.T.ASSISTANT., (MATHS) a = 0

GOVT.MUSLIM Hr SEC SCHOOL YELLORE
Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com

5۔ چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے جن کے راسیں درج ذیل ہیں۔

(1, -3) , (2, 2) , (-8, -4) , (-9, -2) (i)

حل : $A(-9, -2), B(-8, -4), C(2, 2), D(1, -3)$

$$\text{چار ضلعی کا رقبہ} = \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -9 & -8 & 1 & 2 & -9 \\ -2 & -4 & -3 & 2 & -2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (36 + 24 + 2 - 4) - (16 - 4 - 6 - 18) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (58) - (-12) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 58 + 12 \}$$

$$= \frac{1}{2} \times 70$$

مرجع اکائیاں = چار ضلعی کا رقبہ 35

(-6, -3) اور (-1, -2) , (-8, 6) , (-9, 0) (ii)

حل : $A(-9, -2), B(-8, -4), C(2, 2), D(1, -3)$

$$\text{چار ضلعی کا رقبہ} = \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -9 & -6 & -1 & -8 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 6 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (27 + 12 - 6 - 0) - (0 + 3 + 16 - 54) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (33) - (-35) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 33 + 35 \}$$

$$= \frac{1}{2} \times 68$$

مرجع اکائیاں = چار ضلعی کا رقبہ 34

PG-50

6۔ اگر ایک چارضلعی کا رقبہ 28 مربع اکا یاں ہے جس کے راسیں بالترتیب $(-4, -2)$, $(3, -2)$, $(-3, k)$, $(-4, -2)$ اور $(2, 3)$ ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{aligned}
 \text{چارضلعی کا رقبہ} &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & k & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \\
 &= \frac{1}{2} \{(-4k + 6 + 9 - 4) - (6 + 3k - 4 - 12)\} = 28 \\
 &= \frac{1}{2} \{(-4k + 11) - (3k - 10)\} = 28 \\
 &= -4k + 11 - 3k + 10 = 56 \\
 &= -7k + 21 = 56 \\
 &-7k = 56 - 21 \\
 &-7k = 35 \\
 k &= -\frac{35}{7} \\
 k &= -5
 \end{aligned}$$

شماریات اور امکان

مثال 8.1 درجہ ذیل معطیات 25، 26، 47، 48، 53، 18، 39، 44 کی وسعت اور وسعت کا ضریب معلوم کیجئے۔

حل :

$$\text{سب سے بڑی قیمت } L = 67$$

$$\text{سب سے چھوٹی قیمت } S = 18$$

$$\text{وسعت } R = L - S$$

$$= 67 - 18$$

$$= 49$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L - S}{L + S}$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{67 - 18}{67 + 18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

مثال 8.2 ذیل کی جدول کے لئے وسعت معلوم کیجئے

| عمر(سالوں میں) | 16-18 | 18-20 | 20-22 | 22-24 | 24-26 | 26-28 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| طلباًء کی تعداد | 0 | 4 | 6 | 8 | 2 | 2 |

حل : یہاں، سب سے بڑی قیمت $L = 28$
 سب سے چھوٹی قیمت $S = 18$
 وسعت $R = L - S$
 $R = 28 - 18 = 10$ سال

مثال 8.3 معطیات کے ایک سٹ (Set) کی وسعت 13.67 ہے اور سب سے بڑی قیمت 70.08 ہو تو سب سے چھوٹی قیمت معلوم کیجئے

حل : وسعت $R = 13.67$
 سب سے بڑی قیمت $L = 70.08$
 وسعت $R = L - S$
 $13.67 = 70.08 - S$
 $S = 70.08 - 13.67$
 $= 56.41$
 لہذا، سب سے چھوٹی قیمت 56.41 ہے۔

- ذیل کے معطیات کے لئے وسعت اور وسعت کا ضریب معلوم کیجئے۔
 (ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8 (i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68

| | |
|--|---|
| $L = 61.4$ $S = 13.6$ وسعت $R = L - S$ $R = 61.4 - 13.6$ $R = 47.8$ $\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L - S}{L + S}$ $= \frac{61.4 - 13.6}{61.4 + 13.6}$ $= \frac{47.8}{75}$ $= 0.64$ | $L = 125$ $S = 63$ وسعت $R = L - S$ $= 125 - 63$ $R = 62$ $\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L - S}{L + S}$ $= \frac{125 - 63}{125 + 63}$ $= \frac{62}{188}$ $= 0.33$ |
|--|---|

2۔ اگر وسعت اور معطیات کے مجموع کی سب سے چھوٹی قیمت بالترتیب 36.8 اور 13.4 ہو تو سب سے بڑی قیمت دریافت کیجئے PG-58

$$R = 36.8 \quad \text{حل :}$$

$$S = 13.4$$

$$L = ?$$

$$\text{وسعت} \quad R = L - S$$

$$36.8 = L - 13.4$$

$$36.8 + 13.4 = L$$

$$L = 50.2$$

3۔ ذیل کے معطیات کے لئے وسعت کیجئے۔

| آمدنی | 400-450 | 450-500 | 500-550 | 550-600 | 600-650 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| مزدوروں کی تعداد | 8 | 12 | 30 | 21 | 6 |

$$S = 400 \quad \text{حل :}$$

$$L = 650$$

$$\text{وسعت} \quad R = L - S$$

$$R = 650 - 400$$

$$R = 250$$

7۔ پہلے 21 طبعی اعداد کا معياری انحراف معلوم کیجئے۔

$$n = 21 \quad \text{حل :}$$

$$\begin{aligned} \text{معیاری انحراف} \quad \sigma &= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{21^2 - 1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{441 - 1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{440}{12}} \\ &= \sqrt{30.666} \\ &= 6.06 \end{aligned}$$

PG-59

مثال 8.15 معطیات کا اوسط 25.6 ہے اور اس کا اختلاف کا ضریب 18.75 ہے معياری انحراف دریافت کیجئے۔

$$\text{حل :} \quad \text{اختلاف کا ضریب،} \quad C.V. = 18.75$$

$$\text{او سط} \quad \bar{x} = 25.6,$$

$$\text{اختلاف کا ضریب} \quad C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100$$

$$\frac{18.75 \times 25.6}{100} = \sigma$$

$$\sigma = \frac{480}{100}$$

$$\sigma = 4.8$$

مثال 8.16 ذیل کے جدول میں ایک اسکول کے دسویں جماعت کے طلباء کی اونچائیاں اور وزن کا اوسط اور اختلاف دیا گیا ہے۔

| | او نچائی | وزن |
|--------|-----------------------|----------|
| او سط | 155 cm | 46.50 kg |
| اختلاف | 72.25 cm ² | 28.09 kg |

حل :

$$\text{اختلاف} \quad \sigma_1^2 = 72.25 \text{ cm}^2$$

$$\text{او سط} \quad \bar{x}_1 = 155 \text{ cm},$$

$$\sigma_1 = 8.5 \quad \text{معیاری انحراف} \quad \text{چنانچہ،}$$

$$C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$$

$$\text{اختلاف کا ضریب} \quad C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\%$$

$$C.V_1 = \frac{850}{155}$$

$$= 5.48\% \quad (\text{او نچائی کے لئے})$$

$$\sigma_2^2 = 28.09 \text{ kg}^2 \quad \text{اختلاف،}$$

$$\text{او سط} \quad \bar{x}_2 = 46.50 \text{ kg,}$$

$$\sigma_2 = 5.3 \text{ kg} \quad \text{معیاری انحراف}$$

$$C.V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$$

$$\text{اختلاف کا ضریب} \quad C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\%$$

$$C.V_2 = \frac{530}{46.50}$$

$$= 11.40\% \quad (\text{وزن کے لئے})$$

او نچائی زیادہ مستقل ہے۔ $C.V_1 = 5.48\%$ اور $C.V_2 = 11.40\%$ B.T.ASSISTANT., (MATHS)

GOVT.MUSLIM Hr SEC SCHOOL YELLOPET
Kindly Send me your Answer Keys to email id - Padasalai.net@gmail.com

PG-60 2۔ معطیات کا معیاری انحراف اور اختلاف کا ضریب
با ترتیب 1.2 اور 25.6 ہے۔ اوسط کی قیمت معلوم کیجئے۔

$$\sigma = 1.2$$

$$C.V = 25.6$$

$$\bar{x} = ?$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$25.6 = \frac{1.2}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$\bar{x} = \frac{1200}{25.6}$$

$$\bar{x} = \frac{120 \times 10}{25.6 \times 10}$$

$$= \frac{1200}{256}$$

$$= \frac{75}{16}$$

$$\bar{x} = 4.69$$

حل :

$$\sigma = 6.5$$

$$\bar{x} = 12.5$$

$$C.V = ?$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$= \frac{6.5}{12.5} \times 100\%$$

$$= \frac{6.5 \times 10}{12.5 \times 10} \times 100\%$$

$$= \frac{65}{125} \times 100\%$$

$$= \frac{13}{25} \times 100\%$$

$$= \frac{1300}{25}$$

$$= 52\%$$

3۔ اگر ایک معطیات کی اوسط اور اختلاف کا ضریب بالترتیب 15 اور 48 ہوں تو معیاری انحراف کی قیمت معلوم کیجئے۔

$$\bar{x} = 15$$

حل :

$$C.V = 48$$

$$\sigma = ?$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$48 = \frac{\sigma}{15} \times 100\%$$

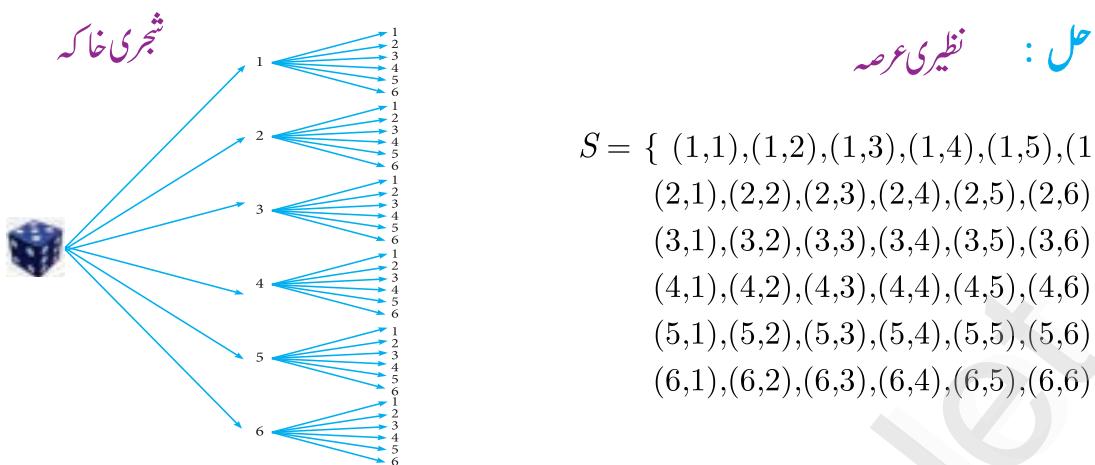
$$48 \times 15 \times \frac{1}{100} = \sigma$$

$$\sigma = \frac{720}{100}$$

$$\sigma = 7.2$$

مثال 8.17 دو پانسوں کو لڑکا یا جانے پر اس کا نظیری عرصہ کو شجری خاکہ کے استعمال سے ظاہر کیجئے۔

PG-61



حل : نظیری عرصہ

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \};$$

مثال 8.18 ایک تھیلی میں 5 نیلی گیندیں اور 4 ہری گیندیں ہیں۔ سریعی طور پر ایک گیند کو تھیلی سے نکالا جاتا ہے تو نکالے گئے گیند کا امکان معلوم کیجئے۔ (i) نیلی (ii) نیلی نہ ہو

$$n(S) = 5 + 4 = 9 \quad \text{حل :}$$

(ii) موقع \bar{A} نیلی گیند نہ اٹھانے کا امکان ہوگا۔

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

(i) نیلی گیند اٹھانے کا امکان A ہے۔

$$n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

مثال 8.19 دو پانسے لڑکائے جاتے ہیں۔ ذیل کے نتائج کے حاصل جمع کا امکان معلوم کیجئے۔

(i) 4 کے مساوی ہو (ii) 10 سے زیادہ ہو (iii) 13 سے کم

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \};$$

$$n(S) = 36$$

(i) حاصل جمع 4 کے مساوی ہونے کا موقع A ہے۔

$$A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\};$$

$$n(A) = 3.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(ii) حاصل جمع 10 سے زیادہ ہونے کا موقع B ہے۔

$$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\};$$

$$n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

مثال 8.20 بیک وقت دو سکے اچھا لے جاتے ہیں۔ سکے پر مختلف چہرے حاصل ہونے کا امکان کیا ہے؟

PG-62

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

حل :

$$n(S) = 4$$

سکوں پر مختلف چہرے حاصل ہونے کا موقع A ہے۔

$$A = \{HT, TH\}$$

$$n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال 8.22 سرینگی طور پر منتخب شدہ یہ سال میں 53 ہفتے (سینچر) ہونے کا امکان کیا ہوگا۔ (اشارہ : $366 = 52 \times 7 + 2$)

$$S = \{(mon, tue), (tue, wed), (wed, thu), (thu, fri), (fri, sat), (sat, sun), (sun, mon)\}$$

$$n(S) = 7$$

53 وال ہفتہ (سینچر) حاصل ہونے کا موقع A ہے تو

$$A = \{(sat, sun), (sun, mon)\}$$

$$n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{2}{7}$$

مثال 8.23 بیک وقت ایک پانسہ کو لڑکا کیا اور ایک سکہ کو اچھا لاجاتا ہے۔ پانسہ میں طاق عدد اور سکہ میں سر حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے

$$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\};$$

$$n(S) = 12$$

فرض کیجئے کہ طاق عدد اور سر حاصل ہونے کا موقع A ہے۔

$$A = \{1H, 3H, 5H\};$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

مثال 8.24 کسی تھیلی میں 6 ہری گیندوں، چند سیاہ اور سرخ گیندوں ہیں۔ سیاہ گیندوں کی تعداد سرخ گیندوں کی تعداد سے دگنی ہے۔ سرخ گینداٹھانے کے امکان سے ہری گینداٹھانے کا امکان تنگنا ہے، تو معلوم کیجئے کہ۔ (i) سیاہ گیندوں کی تعداد (ii) کل گیندوں کی تعداد

حل : فرض کیجئے کہ ہری گیندوں کی تعداد $n(G) = 6$

سرخ گیندوں کی تعداد $n(R) = x$

سیاہ گیندوں کی تعداد $n(B) = 2x$

کل گیندوں کی تعداد $n(S) = 6 + x + 2x$

$$n(S) = 6 + 3x$$

PG-63

یہ دیا گیا ہے کہ $P(G) = 3 \times P(R)$

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

$$3x = 6$$

$$\Rightarrow x=2$$

(i) سیاہ گیندوں کی تعداد $= 2 \times 2 = 4$

(ii) کل گیندوں کی تعداد $= 6 + (3 \times 2) = 12$

تیر آزمائی کے کھیل میں، چکری کے درمیان ایک تیر کو نصب کیا گیا ہے۔ جب چکری کو کھمائی جاتی ہے۔ چکری رکنے پر تیر کا نشان ان اعداد 12, 1, 2, 3, ... میں کسی ایک عدد کی طرف اشارہ کرتا ہے۔ ذیل کے ان اعداد کی طرف اشارہ کرنے کا امکان کیا ہے۔

(iii) (i) اعداد اولی 7 (ii) مخلوط اعداد

حل :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\};$$

$$n(S) = 12$$

(i) فرض کیجئے کہ 7 پر رکنے کا موقع A ہے۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

(ii) فرض کیجئے کہ تیر اعداد اولی پر رکنے کا موقع B ہے۔

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11\};$$

$$n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) فرض کیجئے کہ تیر مخلوط اعداد پر رکنے کا موقع C ہے۔

$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12\};$$

$$n(C) = 6$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

1۔ شجری خاکہ کو استعمال کر کے تین سکوں اُچھالنے کا نظیری عرصہ لکھئے۔

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \quad \text{حل :}$$

$$n(S) = 8$$

2۔ ایک تھیلی میں 1 سے 6 اعداد رکھنے والی گیندوں ہیں۔ ان میں سے ایک ہی وقت پر کوئی دو گیندوں کو انتخاب کرنے کا نظیری عرصہ لکھئے۔ (شجری خاکہ کے استعمال سے)

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}; \quad \text{حل :}$$

7۔ دوغیر جانب دار پانسے بیک وقت ایک مرتبہ لڑھکایا جائے، ذیل کے حاصل ہونے کا امکان محسوب کیجئے۔

(i) جڑواں عدد (دونوں پانسوں پر مساوی اعداد) (ii) حاصل ضرب اعداد اولی ہو (iii) حاصل جمع اعداد اولی ہو (iv) حاصل جمع 1 ہو۔

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} ;$$

$$n(S) = 36$$

(iii) حاصل جمع اعداد اولی ہو حاصل ہونے کا امکان

i) جڑواں عدد حاصل ہونے کا امکان

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$C = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)\}$$

$$n(A) = 6$$

$$n(C) = 15$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$P(C) = \frac{15}{36}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{5}{12}$$

ii) حاصل ضرب اعداد اولی حاصل ہونے کا امکان

(iv) حاصل جمع 1 حاصل ہونے کا امکان

$$B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (3,1), (5,1)\}$$

$$n(B) = 6$$

$$n(D) = 0$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(D) = \frac{0}{36}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(D) = 0$$

8۔ تین سکوں کو بیک وقت اچھا لے جائے۔ ذیل کے حاصل ہونے کا امکان محسوب کیجئے۔

(i) تمام سر (ii) کم از کم ایک پشت (iii) زیادہ سے ایک سر ہو (iv) زیادہ سے زیادہ دو پشت ہو

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} ;$$

$$n(S) = 8$$

(iv) زیادہ سے زیادہ دو پشت ہو

$$D = \{HHH, THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT\}$$

$$n(D) = 7$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)}$$

$$P(D) = \frac{7}{8}$$

(iii) زیادہ سے ایک سر ہو

$$C = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$n(C) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$$

$$P(C) = \frac{4}{8}$$

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

(ii) کم از کم ایک پشت

$$B = \{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$n(B) = 7$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{7}{8}$$

(i) تمام سر

$$A = \{HHH\}$$

$$n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

10۔ ایک ڈبے میں 20 غیر ناقص بلپ (Bulb) اور چند ناقص بلپ ہیں۔ اگر سریعی طور پر ڈبے میں ایک بلپ نکالا جائے تو ناقص ہونے کا امکان $\frac{3}{8}$ ہے۔ ناقص بلپ کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل : X - ناقص بلپ ہے

$$\text{غیر ناقص بلپ} \quad n(S) = 20$$

$$\text{ناقص ہونے کا امکان} \quad n(A) = x$$

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{x}{20+x}$$

$$3(20+x) = 8x$$

$$60 + 3x = 8x$$

$$60 = 8x - 3x$$

$$60 = 5x$$

$$\frac{60}{5} = x$$

$$12 = x$$

مثال 8.25 اگر $P(A \cup B)$ معلوم کیجئے۔ $P(A) = 0.37$, $P(B) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$

$$P(A) = 0.37, P(B) = 0.42, P(A \cap B) = 0.09$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$$

مثال 8.27 دو پانے بیک وقت لڑھکائے جائے، جڑواں عدد (Doublet) یا چہروں کا حاصل جمع 4 حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\};$$

$$n(S) = 36$$

جڑواں عدد حاصل ہونے کا موقع A ہے

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

چہروں کا حاصل جمع 4 حاصل ہونے کا موقع B

$$B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$$n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$A \cap B = \{(2,2)\}$$

$$n(A \cap B) = 1.$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

لہذا، مطلوبہ امکان ہے

مثال 8.28 اگر A اور B دو موقع ہوں اس طرح کہ $P(A) = \frac{1}{4}$ اور $P(B) = \frac{1}{2}$ اور $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ہو تو معلوم کیجئے۔
 (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(\text{نہ } A \text{ اور } B)$

| | |
|--|---|
| $P(\text{نہ } A \text{ اور } B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (ii) | $P(A \cup B) = P(A \cup B)$ (i) |
| $= P(\overline{A \cup B})$ | $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |
| $= 1 - P(A \cup B)$ | $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ |
| $P(\text{نہ } A \text{ اور } B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ | |

مثال 8.30 ایک کلاس کے 50 طلباء میں 28 نے NCC کا انتخاب کیا اور 30 نے NSS کا انتخاب کیا اور 18 طلباء نے دونوں NCC اور NSS کا انتخاب کیا۔ سریعی طور پر ایک طالب علم کو انتخاب کیا جائے تو، ان کا امکان معلوم کیجئے۔
 (i) طالب علم NCC کا انتخاب کیا ہے لیکن NSS کا نہیں کیا۔ (ii) طالب علم NSS کا انتخاب کیا ہے لیکن NCC کا نہیں کیا۔
 (iii) طالب علم ان میں سے ٹھیک ایک کا انتخاب کیا۔

$$\text{کل طلباء کی تعداد } n(S) = 50 \quad : \text{ حل}$$

فرض کیجئے NCC کا انتخاب موقع A ہے

NSS کا انتخاب موقع B ہے

$$n(A) = 28 ,$$

$$n(B) = 30 ,$$

$$n(A \cap B) = 18$$

PG-67

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

NCC کا انتخاب کرنے والے طلباء میں NSS کا نہیں کرنے والے کا امکان

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{28}{50} - \frac{18}{50}$$

$$= \frac{10}{50}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{5}$$

NSS کا انتخاب کرنے والے طلباء میں NSS کا نہیں کرنے والے کا امکان

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{30}{50} - \frac{18}{50}$$

$$= \frac{12}{50}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{6}{25}$$

(iii) ٹھیک ان میں ایک کا انتخاب کرنے والے طلباء کا امکان

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{6}{25}$$

$$= \frac{1 \times 5}{5 \times 5} + \frac{6}{25}$$

$$= \frac{11}{25}$$

مثال 8.31 IIT میں داخلہ کی درخواست کے لئے دوامیدوار A اور B ہیں، A اور B دوامیدوار IIT میں داخلہ کی درخواست دیتے ہیں۔ A انتخاب ہونے کا امکان 0.5 ہے اور A اور B دونوں انتخاب ہونے کا امکان 0.3 ہے۔ ثابت کیجئے کہ B کا انتخاب ہونے کا امکان زیادہ سے زیادہ (almost) 0.8 ہے۔

$$P(A) = 0.5, \quad P(A \cap B) = 0.3$$

حل :

$$P(A \cup B) \leq 1$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

$$P(A \cap B) \text{ ہوتے معلوم کیجئے۔} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A) = \frac{2}{3} \text{ اگر } -1$$

PG-68

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A) = \frac{2}{3} : \text{ حل}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{1 \times 5}{3 \times 5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{15} + \frac{6}{15} - \frac{5}{15}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10 + 6 - 5}{15}$$

$$P(A \cap B) = \frac{11}{15}$$

-2. اگر A اور B دو مواقع ہوں اس طرح یہیں کہ $P(A \cap B) = 0.16$, $P(B) = 0.48$, $P(A) = 0.42$ ہوتے معلوم کیجئے۔

$$P(A \downarrow B) \text{ (iii)} \quad P(\neg B) \text{ (ii)} \quad P(\neg A) \text{ (i)}$$

$$P(A \uparrow B) \text{ (iii)} \quad P(\neg B) \text{ (ii)} \quad P(\neg \neg A) \text{ (i)} : \text{ حل}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) & P(\bar{B}) &= 1 - P(B) & P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 0.42 + 0.48 - 0.16 & &= 1 - 0.48 & &= 1 - 0.42 \\ &= 0.74 & &= 0.52 & &= 0.58 \end{aligned}$$

-3. اگر سری ہی تجربہ میں A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں اور A اور B کم از کم ایک مرتبہ واقع ہونے کا امکان 0.6 ہے۔ اگر A اور B بیک وقت واقع ہونے کا امکان 0.2 ہوتے ہو تو $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ معلوم کیجئے۔

$$P(A \cup B) = 0.6 : \text{ حل}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 0.2 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0.6 &= P(A) + P(B) - 0.2 \\ P(A) + P(B) &= 0.6 + 0.2 \\ P(A) + P(B) &= 0.8 \\ 1 - P(A) + 1 - P(\bar{B}) &= 0.8 \\ 2 - 0.8 &= P(A) + P(\bar{B}) \\ 1.2 &= P(A) + P(\bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 0.65, P(\neg A) = 0.45, P(\neg B) = 0.45 \text{ ہوتے } P(B) \text{ معلوم کیجئے۔} \\ P(\bar{A}) &= 0.45 \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ 0.45 &= 1 - P(A) \\ P(A) &= 1 - 0.45 \\ P(A) &= 0.55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ 0.65 &= 0.55 + P(B) \\ 0.65 - 0.55 &= P(B) \\ 0.10 &= P(B) \end{aligned}$$

6۔ دو پانسہ ایک مرتبہ لڑھ کا یا جائے۔ پہلے پانسہ میں ایک جفت عدد یا چہروں کا حاصل جمع 8 حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

PG-69

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

$$n(S) = 36$$

پہلے پانسہ ہونے کا موقع A ہے

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$n(A) = 18$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{18}{36}$$

حاصل جمع 8 حاصل ہونے کا موقع B

$$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

$$A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{5}{36} - \frac{3}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{18 + 5 - 3}{15}$$

$$P(A \cup B) = \frac{20}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{9}$$

13۔ اگر A, B, C کوئی تین موقع اس طرح ہیں کہ B امکان دگنا ہے A کے امکان سے اور C کا امکان تکنا ہے A کے امکان سے اور $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$ اور $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$ ، $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$ ، $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ اگر ہوتا ہے $P(C)$ اور $P(B)$ ، $P(A)$ معلوم کیجئے۔

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15} \text{ , } P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10} \text{ , } P(A \cap C) = \frac{1}{8} \text{ , } P(B \cap C) = \frac{1}{4} \text{ , } P(A \cap B) = \frac{1}{6} : \text{J}$$

PG-70

$$P(B) = 2P(A)$$

$$P(C) = 3P(A)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\frac{9}{10} = P(A) + 2P(A) + 3P(A) - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{9}{10} = 6P(A) - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{9}{10} = 6P(A) - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{9}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} = 6P(A)$$

$$L.C.M = 120$$

$$\frac{9 \times 12}{10 \times 12} + \frac{1 \times 20}{6 \times 20} + \frac{1 \times 30}{4 \times 30} + \frac{1 \times 15}{8 \times 15} - \frac{1 \times 8}{15 \times 8} = 6P(A)$$

$$\frac{108}{120} + \frac{20}{120} + \frac{30}{120} + \frac{15}{120} - \frac{8}{120} = 6P(A)$$

$$\frac{108 + 20 + 30 + 15 - 8}{120} = 6P(A)$$

$$\frac{173 - 8}{120} = 6P(A)$$

$$\frac{165}{120} = 6P(A)$$

$$\frac{33}{24} = 6P(A)$$

$$\frac{11}{8} = 6P(A)$$

$$\frac{11}{8 \times 6} = P(A)$$

$$\boxed{\frac{11}{48} = P(A)}$$

$$P(B) = 2P(A)$$

$$P(B) = 2 \times \frac{11}{48}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{11}{24}}$$

$$P(C) = 3P(A)$$

$$P(C) = 3 \times \frac{11}{48}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{11}{16}}$$

$$P(A) = \frac{11}{48}, \quad P(B) = \frac{11}{24}, \quad P(C) = \frac{11}{16}$$