தமிழ்நாடு அரசு

## பத்தாம் வகுப்பு

# கணக்கு



தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

## பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனித நேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு - 2019

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

**விற்பனைக்கு அன்று**

**பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்**

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்


**நூல் அச்சாக்கம்**

கற்க கசடற

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

# குறியீடுகள்

| | | | |
|---|---|---|---|
| $=$ | சமம் (equal to) | $P(A)$ | $A$ இன் நிகழ்தகவு (probability of $A$) |
| $\neq$ | சமமில்லை (not equal to) | $\vert\vert\vert^{ly}$ | இதேபோன்று (similarly) |
| $<$ | விடக் குறைவு (less than) | $\triangle$ | சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference) |
| $\leq$ | குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to) | $\mathbb{N}$ | இயல் எண்கள் (Natural numbers) |
| $>$ | விட அதிகம் (greater than) | $\mathbb{W}$ | முழு எண்கள் (Whole numbers) |
| $\geq$ | அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to) | $\mathbb{Z}$ | முழுக்கள் (integers) |
| $\approx$ | சமானமான (equivalent to) | $\mathbb{R}$ | மெய்யெண்கள் (Real numbers) |
| $\cup$ | சேர்ப்பு (union) | $\Delta$ | முக்கோணம் (Triangle) |
| $\cap$ | வெட்டு (intersection) | $\angle$ | கோணம் (Angle) |
| $\mathbb{U}$ | அனைத்துக் கணம் (universal set) | $\perp$ | செங்குத்து (perpendicular to) |
| $\in$ | உறுப்பு (belongs to) | $\parallel$ | இணை (parallel to) |
| $\notin$ | உறுப்பல்ல (does not belong to) | $\Rightarrow$ | உணர்த்துகிறது (implies) |
| $\subset$ | தகு உட்கணம் (proper subset of) | $\therefore$ | எனவே (therefore) |
| $\subseteq$ | உட்கணம் (subset of or is contained in) | $\because$ | ஏனெனில் (since (or) because) |
| $\not\subset$ | தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of) | $\vert\ \vert$ | தனிமதிப்பு (absolute value) |
| $\not\subseteq$ | உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in) | $\simeq$ | தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to) |
| $A'$ (or) $A^c$ | A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of $A$) | $\cong$ (or) $\equiv$ | சர்வ சமம் (congruent) |
| $\emptyset$ (or) $\{\ \}$ | வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக் கணம் (empty set or null set or void set) | $\equiv$ | முற்றொருமை (identically equal to) |
| $n(A)$ | A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set $A$) | $\pi$ | பை (pi) |
| $\sum$ | கூடுதல் (summation) | $\pm$ | மிகை அல்லது குறை (plus or minus) |

## பாடநூல் பயன்பாட்டுத் தலைப்புகள்

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

Numbers and letters, they are known as
eyes to humans. - Kural 392

### கற்றல் விளைவுகள்
வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளை அளவீடுகளுடன் கூடிய கற்றல் மைய முறையாக மாற்றி அமைத்தல்

### குறிப்பு
பாடப்பொருளில் மாணவர்களுக்கான கூடுதல் தகவல்களை அளித்தல்

### சிந்தனைக் களம்
மாணவர்கள் கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ளும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுதல். மாணவர்களை பரந்த சிந்தனை கொண்டவர்களாக ஆக்குதல்

### முன்னேற்றத்தை சோதித்தல்
கற்போரின் முன்னேற்றத்தை சுய மதிப்பீடு செய்தல்

### செயல்பாடு
கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ள மாணவர்களை குறிப்பிட்ட செயல்பாடுகளில் ஈடுபட ஊக்குவித்தல்

### பயிற்சி
பாடப்பொருளில் கற்போருக்கு உள்ள புரிதலை மதிப்பிடுதல்

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்
பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

### அலகு பயிற்சி
ஒவ்வொரு அலகிலும் வழங்கப்பட்டுள்ள பல்வேறு கருத்துகளை இணைத்து கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளை முயற்சி தீர்க்க

### நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்
பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

### இணையச் செயல்பாடு
கற்போரின் பாடப்பொருள் புரிதலை தொழில்நுட்பப் பயன்பாட்டின் மூலம் மேம்படுத்துதல்

QR GUIDE

**பாடநூலில் உள்ள விரைவுக் குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?**

- உங்கள் திறன் பேசியில் கூகுள் playstore கொண்டு DIKSHA செயலியை பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியை திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீடுகளை ஸ்கேன் செய்யவும்.
- திரையில் தோன்றும் கேமராவை பாடநூலின் QR Code அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம். அந்த QR Code உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் பாட பகுதிகளை பயன்படுத்தலாம்.

**குறிப்பு:** இணையச்செயல்பாடுகள் மற்றும் இணைய வளங்களுக்கான QR code களை Scan செய்ய DIKSHA அல்லாத ஏதேனும் ஓர் QR code Scanner ஐ பயன்படுத்தவும்.

# பொருளடக்கம்

GVBGVK
மின் நூல்

S33SGT
மதிப்பீடு

B371_10_MATHS_TM
இணைய வளங்கள்

# 1 உறவுகளும் சார்புகளும்

*கணிதவியலாளர்கள் பொருட்களைப் பற்றி அறிய விரும்புவதில்லை, ஆனால் அவற்றிற்கு இடையே அமைந்த தொடர்பை வெளிப்படுத்துவார்கள்... பொருள்களின் அளவு முக்கயமில்லை, ஆனால் அவற்றின் வடிவத்தை புரிந்துக் கொள்ளவே விரும்புவர்.*
**–ஹென்றி பாயின்கேரே**

காட்ஃபிரெய்ட் வில்ஹெல்ம் லீபிநிட்ஸ்
(1646 – 1716)

காட்ஃபிரெய்ட் வில்ஹெல்ம் லீபிநிட்ஸ் (வான் லீபிநிட்ஸ் என்றும் கூறலாம்) முக்கிய ஜெர்மன் கணிதமேதை, தத்துவவாதி இயற்கையாளர் மற்றும் கண்டுபிடிப்பாளராவார். இவர் புவியியல், மருத்துவம், உயிரியல், நோய் தொற்றியல், புதைபடிமவியல், பொறியியல், மொழி நூல், சமூகவியல் நெறிமுறைகள், வரலாறு, அரசியல், சட்டம் மற்றும் இசைக் கோட்பாடு போன்ற 26 தலைப்புகளில் விரிவாகத் தனது பங்களிப்பை வழங்கியுள்ளார். லீபிநிட்ஸ் பயன்படுத்திய வார்த்தை 'சார்பு' ஆனது ஒரு வளைவின் எந்த அளவும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு மாறுபடும் என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது.

ஒரு வளைவரையில் காணப்படும் புள்ளிக்கு ஏற்றவாறு மாறும் தன்மையைக் குறிக்க லீபிநிட்ஸ் "சார்பு" என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தினார்.

பூலியன் இயற்கணிதம் மற்றும் தர்க்கச் சிந்தனைகளின் அடிப்படைகளை வழங்கினார். இவை இன்றைய நவீனக் கணினிகள் செயல்பாட்டிற்கு அடித்தளமாக அமைந்தன. பல்வேறு துறைகளில் சாதனை புரிந்ததற்காக "பயன்பாட்டு அறிவியலின் தந்தை" என அறிவியல் உலகம் இவரைப் போற்றுகிறது.

## கற்றல் விளைவுகள்

6NJ6AC

- கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கலை வரையறுத்தல் மற்றும் கணக்கிடுதல்.
- உறவுகளை, கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாக அறிந்து கொள்ளுதல்.
- சார்பை ஒரு சிறப்பு உறவாகப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- அம்புக்குறி, வரிசைச் சோடிகள், அட்டவணை மற்றும் வரைபடம் மூலமாகச் சார்பைக் குறிப்பிடுதல்.
- சார்புகளை ஒன்றுக்கொன்று, பலவிற்கொன்று, மேல் சார்பு, உட்சார்பு மற்றும் இருபுறச் சார்பு என வகைப்படுத்துதல்.
- பல சார்புகளின் இணைத்தலை சேர்ப்புச் செயல்பாடுகள் மூலம் அறிதல்.
- நேரிய, இருபடி, கன, தலைகீழ்ச் சார்பு வரைபடங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.

## 1.1 அறிமுகம் (Introduction)

கணிதத்தில், அதிகமான கோட்பாடுகளைப் படிப்பதற்கு, கணங்களின் கருத்து தேவைப்படுகிறது. கணமானது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட, பொருள்களின் தொகுப்பு ஆகும். அதாவது ஒரு கணமானது, தெரிந்த பொருள்களினால் ஆன தொகுப்பு ஆகும். இந்த அத்தியாயத்தில், கணங்கள் 'உறவுகள்' மற்றும் 'சார்புகள்' ஆகியவற்றை எவ்வாறு அமைக்கின்றன எனக் கற்க முற்படுகிறோம். இதற்காக, நாம் இரண்டு வெற்றில்லாத கணங்களின், கார்டீசியன் பெருக்கலைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் பெரும்பாலான செய்திகளை உறவுகள் அல்லது சார்புகளைப் பயன்படுத்திப் புரிந்து கொள்ளலாம். வாகனத்தில் குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட தொலைவைக் கடப்பதைச் சார்பின் மூலம் குறிப்பிடலாம். ஒரு பொருளின் விலையை, தேவையின் அடிப்படையில்





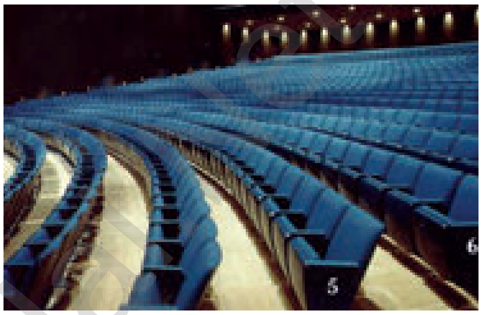
X_Ch 1 TM.indd 1 16-04-2019 09:04:29

சார்பின் மூலமாக வெளிப்படுத்தலாம். பலகோணங்களின் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு, வட்டம், நேர்வட்டக் கூம்பு, நேர்வட்ட உருளை, கோளம் ஆகியவற்றின் கன அளவுகளை ஒன்று அல்லது பல மாறிகளை உடைய சார்பாகக் குறிப்பிடலாம்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் நாம் கணங்களைப் பற்றி படித்தோம். மேலும் நாம் கொடுக்கப்பட்ட கணங்களிலிருந்து புதிய கணங்களைச் சேர்ப்பு, வெட்டு, நிரப்பி ஆகியவற்றைக் கொண்டு எவ்வாறு உருவாக்கலாம் என்பதையும் பார்த்தோம்.

நாம் தற்போது கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்கள் $A$ மற்றும் $B$-யிலிருந்து கார்டீசியன் பெருக்கல் வாயிலாகப் புதிய கணம் உருவாக்கும் முறையைப் பற்றி படிக்கலாம்.

## 1.2 வரிசைச் சோடி (Ordered Pair)



படம் 1.1

கொடுக்கப்பட்ட அரங்கில் (படம் 1.1) அமர்வதற்காக உள்ள இருக்கைகளை உற்று நோக்கவும். ஒருவர் அவரது இருக்கையில் அமரும் இடத்தைக் கண்டறிய உதவும்படி, (1,5), (7,16), (3,4), (10,12) ... என இருக்கை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒருவருக்கு (4,10) எனக் கிடைத்தால் அவர் 4-வது வரிசையில் 10–வது இருக்கையில் அமர வேண்டும். எனவே, முதல் எண் வரிசையையும், இரண்டாவது எண், இருக்கை எண்ணையும் குறிப்பிடுகின்றன. (5,9) என்ற இருக்கை எண்ணைப் பெறும் பார்வையாளர் எந்த இடத்தில் அமர்வார்? அவர் 9-வது வரிசையில் 5-வது இருக்கைக்குச் செல்லலாமா? (9,5) மற்றும் (5,9) இரண்டும் ஒரே இருக்கையைக் குறிக்கின்றனவா? கண்டிப்பாக இல்லை. (2,3), (6,3) மற்றும் (10,3) என்ற இருக்கை எண்களைப் பற்றி என்ன கூறுகிறீர்கள்?

இருப்பிடத்தைத் துல்லியமாகக் குறிக்கின்ற எண்களின் சோடிக்கு இது ஓர் எடுத்துக்காட்டு. இத்தகைய சோடிகளை எண்களின் "வரிசை சோடி" என்கிறோம். கணிதத்தில் காணும் "உறவுகள்" என்ற கோட்பாட்டைக் கற்க வரிசைச் சோடிகள் பயன்படுகின்றன.

A388HM

## 1.3 கார்டீசியன் பெருக்கல் (Cartesian Product)

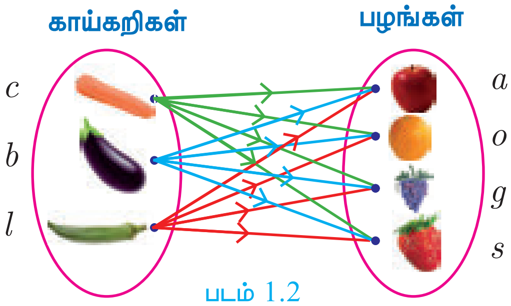
### விளக்கம் 1

நாம் பின்வரும் இரண்டு கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

கணம் $A$–ல் மூன்று காய்கறிகளும் மற்றும் கணம் $B$-ல் நான்கு பழங்களும் உள்ளன. அதாவது, $A$={கேரட், கத்திரிக்காய், வெண்டைக்காய்} மற்றும் $B$={ஆப்பிள், ஆரஞ்சு, திராட்சை, செம்புற்றுப்பழம்}

ஒரு காயும், ஒரு பழமும் தேர்ந்தெடுப்பதற்குச் சாத்தியமான வழிகள் யாவை?

| காய்கறிகள் (A) | பழங்கள் (B) |
|---|---|
| கேரட் ($c$) | ஆப்பிள் ($a$) |
| கத்திரிக்காய் ($b$) | ஆரஞ்சு ($o$) |
| வெண்டைக்காய் ($l$) | திராட்சை ($g$) |
| | செம்புற்றுப்பழம் ($s$) |




படம் 1.2

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 12 விதமான சோடிகளின் மூலம் நாம் தேர்வு செய்யலாம்.

$\{(c, a), (c, o), (c, g), (c, s), (b, a), (b, o), (b, g), (b, s), (l, a), (l, o), (l, g), (l, s)\}$

காய்கறிகள் மற்றும் பழங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கலை மேற்கண்ட சேகரிப்பு குறிக்கிறது.

**வரையறை**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், இவற்றின் வரிசைச் சோடிகளின் கணமானது $(a, b)$ $a \in A$, $b \in B$ என இருக்கும். இதை A மற்றும் B–யின் **கார்டீசியன் பெருக்கல்** என்கிறோம். எனவே, $A \times B = \{(a,b)\,|\,a \in A, b \in B\}$. $A \times B$ என்பதை $(A$ கிராஸ் $B)$ எனப் படிக்கவும்.

**குறிப்பு**

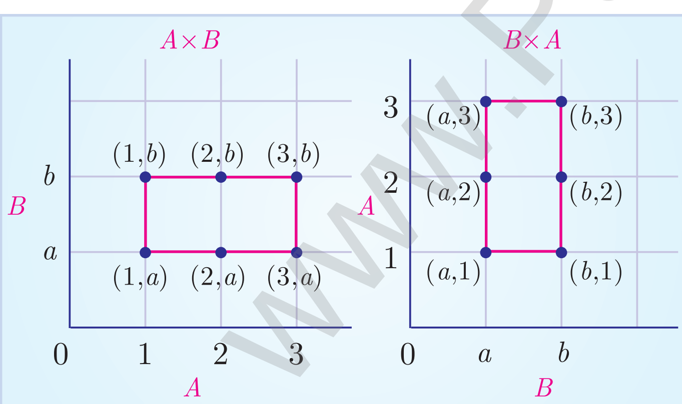
- $A \times B$ ஆனது, $A$ மற்றும் $B$ என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், அதன் முதல் உறுப்பு $A$-யின் உறுப்பாகவும், இரண்டாவது உறுப்பு $B$-யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- $B \times A$ ஆனது, $A$ மற்றும் $B$ என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், முதல் உறுப்பு $B$-யின் உறுப்பாகவும் இரண்டாவது உறுப்பு A–யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- பொதுவாக $(a, b) \neq (b, a)$. குறிப்பாக, $a = b$ எனில், $(a, b) = (b, a)$
- கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறுக்கு பெருக்கல் (cross product) எனவும் குறிப்பிடலாம்.

### விளக்கம் 2

$A = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் B = {a, b} எனில், $A \times B$ மற்றும் $B \times A$-ஐ எழுதுக.

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ (படம் 1.3 –ல் காட்டியுள்ளபடி)

$B \times A = \{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ (படம் 1.3 –ல் காட்டியுள்ளபடி)




படம் 1.3

**சிந்தனைக் களம்**

எப்பொழுது $A \times B$ ஆனது $B \times A$ விற்கு சமம்?

**குறிப்பு**

- பொதுவாக $A \times B \neq B \times A$, ஆனால் $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $A \times B = \phi$ எனில், $A = \phi$ அல்லது $B = \phi$
- $n(A) = p$ மற்றும் $n(B) = q$ எனில், $n(A \times B) = pq$

### நிலையான முடிவற்ற கணங்களுக்கான மீள் பார்வை

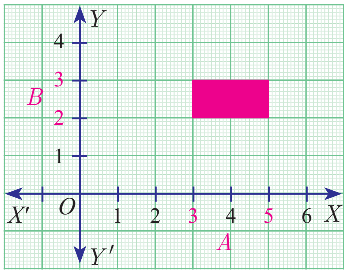
இயல் எண்கள் $\mathbb{N} = \{1,2,3,4\ldots\}$; முழு எண்கள் $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$;

முழுக்கள் $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ; விகிதமுறு எண்கள் $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$;

மெய் எண்கள் $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, இங்கு $\mathbb{Q}'$ -ஆனது விகிதமுறா எண்களின் கணமாகும்.

**விளக்கம் 3**

$A$ என்ற கணமானது, $[3,\ 5]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் மற்றும் $B$ என்ற கணமானது, $[2,\ 3]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் எனில், $A \times B$-யின் கார்டீசியன் பெருக்கல் ஆனது படம் 1.4 –ல் காண்பது போலச் செவ்வகப் பகுதியைக் குறிக்கும். $A \times B$ என்ற கணத்தின் $(x,\ y)$ என்ற புள்ளிகள் செவ்வகப் பகுதியில் அமைந்திருக்கும்.



படம் 1.4

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. $A$ மற்றும் $B$ ஆகியன ஏதேனும் இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், $A \times B$-ஐ ______ எனலாம்.
2. $n(A \times B) = 20$ மற்றும் $n(A) = 5$ எனில், $n(B)$ ஆனது ______
3. $A = \{-1,1\}$ மற்றும் $B = \{-1,1\}$ எனில், வடிவியல் முறையில் $A \times B$ கணத்தின் புள்ளிகள் யாவை?
4. $A, B$ என்பவை முறையே $[-4, 3]$ மற்றும் $[-2, 3]$-க்கு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் எனில், $A$ மற்றும் $B$-ன் கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறிப்பிடுக.

**குறிப்பு**

➢ கார்டீசியன் தளத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணத்தை $(x,\ y)$ என்ற வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக அறியலாம். இதில் $x,\ y$ ஆகியவை மெய்யெண்கள். $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்ற கணத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் நாம் கார்டீசியன் தளம் என அழைக்கிறோம்.

### செயல்பாடு 1

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 4\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y < 3\}$ எனில் $A \times B$ மற்றும் $B \times A$-ஐ வரைபடத்தாளில் குறிக்க $A \times B$ மற்றும் $B \times A$-க்கு உள்ள வேறுபாட்டை உங்களால் காணமுடிகிறதா?

**எடுத்துக்காட்டு 1.1** $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$ எனில் (i) $A \times B$ மற்றும் $B \times A$-ஐ காண்க. (ii) $A \times B = B \times A$ ஆகுமா? இல்லையெனில் ஏன்? (iii) $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A)\times n(B)$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $A\times B = \{1,3,5\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\}$ ...(1)

$B \times A = \{2,3\} \times \{1,3,5\} = \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$ ...(2)

(ii) (1) மற்றும் (2)-ன் மூலமாக $A \times B \neq B \times A$ ஏனெனில் $(1,2) \neq (2,1)$, $(1,3) \neq (3,1)$...

(iii) $n(A)=3$; $n(B) = 2$.

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நாம் காண்பது, $n(A\times B) = n(B\times A) = 6$;

$n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$ மற்றும் $n(B) \times n(A) = 2\times 3 = 6$

எனவே, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A) \times n(B) = 6$.

ஆகவே, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A) \times n(B)$.

**எடுத்துக்காட்டு 1.2** If $A\times B = \{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$ எனில் $A$ மற்றும் $B$ -ஐ காண்க.

**தீர்வு** $A\times B = \{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$A = \{A\times B$ -யின் முதல் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$. எனவே, $A = \{3,5\}$

$B = \{A\times B$ -யின் இரண்டாம் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$. எனவே, $B = \{2,4\}$

எனவே $A = \{3,5\}$ மற்றும் $B = \{2,4\}$.

**எடுத்துக்காட்டு 1.3** $A = \{x\in\mathbb{N} \mid 1<x<4\}$, $B = \{x\in\mathbb{W} \mid 0\le x<2\}$ மற்றும் $C = \{x\in\mathbb{N} \mid x<3\}$. என்க. (i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ என்பனவற்றைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு** $A = \{x\in\mathbb{N} \mid 1<x<4\} = \{2, 3\}$, $B = \{x\in\mathbb{W} \mid 0\le x<2\} = \{0,1\}$,

$C = \{x\in\mathbb{N} \mid x<3\} = \{1,2\}$

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$$B\cup C = \{0,1\}\cup\{1,2\} = \{0,1,2\}$$

$$A\times(B\cup C) = \{2,3\}\times\{0,1,2\} = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad ...(1)$$

$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cup\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$= \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து, $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$$B\cap C = \{0,1\}\cap\{1,2\} = \{1\}$$

$$A\times(B\cap C) = \{2,3\}\times\{1\} = \{(2,1),(3,1)\} \quad ...(3)$$

$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cap\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$= \{(2,1),(3,1)\} \quad ...(4)$$

(3) மற்றும் (4), $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

**குறிப்பு**

- மேலே, சரிபார்க்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் முறையே கார்டீசியன் பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுகளின் மீதான பங்கீட்டு பண்புகளாகும். $A$, $B$ மற்றும் $C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  (i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

### 1.3.1 மூன்று கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் (Cartesian Product of three Sets)

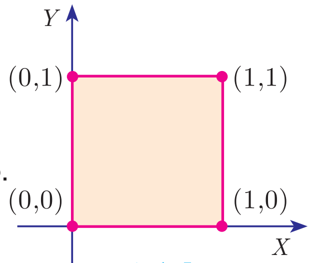
$A$, $B$, $C$ ஆகியவை வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், அதன் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலனின் கணமானது அனைத்து சாத்தியமான வரிசையில் அமைந்த மூன்றின் தொகுதிகளின் கணமாகும்.

$A\times B\times C = \{(a,b,c)$ அனைத்து $a\in A, b\in B, c\in C\}$

### இரண்டு மற்றும் மூன்று கணங்களுக்கான கார்டீசியன் பெருக்கலின் வடிவியல் விளக்கம்.

$A=\{0,1\},\ B=\{0,1\},\ C=\{0,1\}$ என்க

$A\times B = \{0,1\}\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$



படம் 1.5

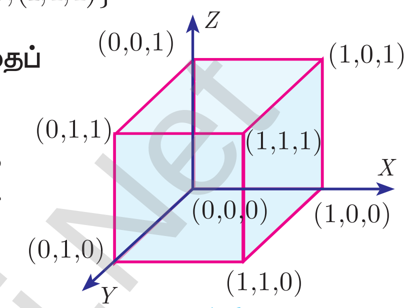
$A\times B$ ஆனது $xy$ - தளத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளதைப் படம் 1.5–ல் காணலாம்.

$(A\times B)\times C=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\times\{0,1\}$

$=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0),(1,1,1)\}$

$A\times B\times C$ ஆனது $xyz$ - என்ற வெளியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளதைப் படம் 1.6 ல் காணலாம்.

$A\times B$ என்பது இரு பரிமாணத்தில் சதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது. $A\times B\times C$ என்பது முப்பரிமாணத்தில் கனசதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.



படம். 1.6

**குறிப்பு**

- பொதுவாக, இரண்டு வெற்றில்லா கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் இரு பரிமாணங்களைக் கொண்ட வடிவத்தை ஏற்படுத்தும். அதேபோல் மூன்று வெற்றில்லா கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் மூன்று பரிமாணங்களைக் கொண்ட முப்பரிமாணப் பொருளை ஏற்படுத்தும்.

## பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றிற்கு $A\times B$, $A\times A$ மற்றும் $B\times A$ ஐக் காண்க.
   (i) $A=\{2,-2,3\}$ மற்றும் $B=\{1,-4\}$ (ii) $A=B=\{p,q\}$ (iii) $A=\{m,n\}$; $B=\phi$
2. $A=\{1,2,3\}$ மற்றும் $B=\{x\mid x$ என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்$\}$ எனில், $A\times B$ மற்றும் $B\times A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
3. $B\times A=\{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}$ எனில், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
4. $A=\{5,6\}$, $B=\{4,5,6\}$, $C=\{5,6,7\}$ எனில், $A\times A=(B\times B)\cap(C\times C)$ எனக் காட்டுக.
5. A={1,2,3}, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{3,4\}$ மற்றும் $D=\{1,3,5\}$ எனில்
   $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)$ என்பது உண்மையா என சோதிக்கவும்..
6. $A=\{x\in\mathbb{W}\mid x<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid 1<x\le 4\}$ மற்றும் $C=\{3,5\}$ எனில், கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.
   (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   (iii) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
7. $A$ என்பது 8-ஐ விடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், $B$ என்பது 8 -ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் $C$ என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.
   (i) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ (ii) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

## 1.4 உறவுகள் (Relations)

நம் அன்றாட வாழ்வில் இரு பொருள்கள் சில விதிகளுக்குட்பட்டு ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில் இருப்பதை நாம் காண்கிறோம். அந்த இரண்டு பொருள்களும் ஒரு சில விதிகளுக்குட்பட்டு அத்தொடர்பை ஏற்படுத்துகின்றன. அவ்வாறெனில், அத்தொடர்பை எப்படி வெளிப்படுத்தலாம்? இங்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| உறவு முறைகள் | உறவை R குறியீட்டின் மூலமாக வெளிப்படுத்துதல் | வரிசைச் சோடிகளின் மூலமாக வெளிப்படுத்துதல் |
|---|---|---|
| புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம். | புதுதில்லி R இந்தியா | (புதுதில்லி, இந்தியா) |
| $AB$ ஆனது $XY$ -யின் குத்துக்கோடு | கோடு $AB$, R, கோடு $XY$ | (கோடு $AB$, கோடு $XY$) |
| $-1$ ஆனது $-5$ -ஐ விடப்பெரியது | $-1$ R$-5$ | $(-1, -5)$ |
| $\ell$ ஆனது $\Delta PQR$ -ன் சமச்சீர்கோடு. | $\ell$ R $\Delta PQR$ | $(\ell, \Delta PQR)$ |

எப்படிப் புதுதில்லியும் இந்தியாவும் தொடர்புடையன? நாம் பதிலை எதிர்நோக்குகிறோம். புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம். ஆனால் புதுதில்லியையும் இந்தியாவையும் பல வழிகளில் தொடர்புபடுத்தலாம். ஒரு சில வழிகள் பின்வருமாறு.

- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் தலைநகரம்.
- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் வடபகுதியில் உள்ளது.
- புதுதில்லியானது இந்தியாவின் மிகப்பெரிய நகரங்களில் ஒன்று.

நாம் உறவுகளை மிகச் சரியாகக் குறிப்பிட வேண்டுமெனில், ஒரே ஓர் வரிசைச்சோடி (புதுதில்லி, இந்தியா) மட்டும் கொடுத்தால் போதுமானதாக இருக்காது. மேற்கண்ட மூன்று குறிப்புகளும் அதற்குப் பொருந்தும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வரிசைச் சோடிகளில் எந்த உறவுமுறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என நாம் கேட்க நினைத்தால், உறவைக் குறிப்பிடுவது எளிதாக இருக்கும்.

{(புதுதில்லி, இந்தியா), (வாஷிங்டன், அமெரிக்க ஐக்கிய நாடுகள்), (பெய்சிங், சீனா), (லண்டன், இங்கிலாந்து), (காத்மாண்டு, நேபாளம்)} என்ற வரிசைச் சோடிகளில் காணப்படும் உறவை எளிதாக வெளிப்படுத்த முடியும் அல்லவா?

### முன்னேற்றச் சோதனை

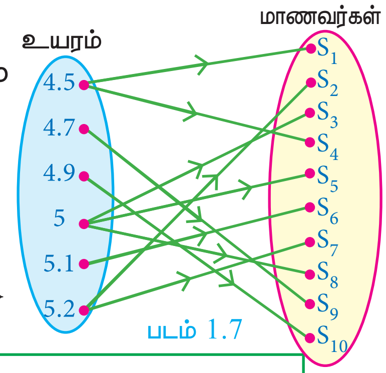
A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c} எனில்

| 1. பின்வருவனவற்றில் எவை $A$ -யிலிருந்து $B$ -க்கான உறவாகும்? | 2. பின்வருவனவற்றில் எவை $B$ -யிலிருந்து $A$ -க்கான உறவாகும்? |
|---|---|
| (i) { (1, b), (1, c), (3, a), (4, b) } | (i) { (c, a), (c, b), (c, 1) } |
| (ii) { (1, a), (b, 4), ( c, 3) } | (ii) { (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) } |
| (iii) { (1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2) } | (iii) { (a, 4), (b, 3), (c, 2) } |

**விளக்கம் 4**

| ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ | $S_8$ | $S_9$ | $S_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| உயரம் (அடிகளில்) | 4.5 | 5.2 | 5 | 4.5 | 5 | 5.1 | 5.2 | 5 | 4.7 | 4.9 |

உயரத்திற்கும் மாணவருக்கும் இடையிலான உறவை நாம் வரையறுக்கலாம். (படம்.1.7)



படம் 1.7

$R$ = {(உயரம், மாணவர்)}

$$R=\{(4.5,S_1),\ (4.5,S_4),\ (4.7,S_9),\ (4.9,S_{10}),\ (5,S_3),\ (5,S_5),(5,S_8),\ (5.1,S_6),\ (5.2,S_2),\ (5.2,S_7)\}$$

**வரையறை**

$A$ மற்றும் $B$ என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் என்க. $A$ -யிலிருந்து $B$-க்கு உள்ள **உறவு** $R$ ஆனது சில விதிமுறைகளை நிறைவு செய்து, $A\times B$ -யின் உட்கணமாக இருக்கும். $x\in A$ -விற்கும் $y\in B$ -க்குமான உறவு $R$ -யின் வழியாக இருந்தால் $x\mathrm{R}y$ என எழுதலாம். $x\mathrm{R}y$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டும் $(x,y)\in \mathrm{R}$ .

உறவு $R$-யின் **மதிப்பகம்** $=\{x\in A \mid x\mathrm{R}y$, ஏதேனும் ஒரு $y\in B\}$

உறவு $R$-ன் **துணை மதிப்பகம்** $=B$ ஆகும்.

உறவு $R$–ன் **வீச்சகம்**$=\{y\in B \mid x\mathrm{R}y$, ஏதேனும் ஒரு $x\in A\}$

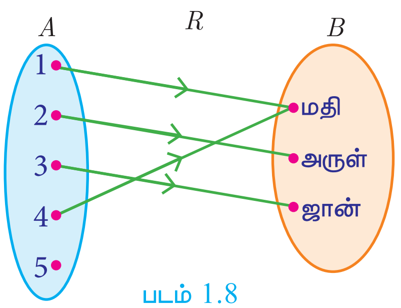
இந்த வரையறைகளிலிருந்து, $R$–யின் மதிப்பகமானது $\subseteq A$, $R$-ன் துணை மதிப்பகம் $=B$ மற்றும் $R$ –யின் வீச்சகம் $\subseteq B$ என்பதைக் காணலாம்.

VGRUP4

**விளக்கம் 5**

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B$ = {மதி, அருள், ஜான்} என்க.

மேற்கண்ட $A$ மற்றும் $B$ கணங்களின் உறவு $R$–ஐ அம்புக்குறிப் படத்தில் குறிக்கலாம். (படம் 1.8)



படம் 1.8

எனவே $R$–யின் மதிப்பகம் $=\{1,2,3,4\}$

$R$–யின் வீச்சகம் = {மதி, அருள், ஜான்}

$R$–யின் மதிப்பகமானது, $A$–யின் தகு உட்கணமாவதைக் காண்க

**செயல்பாடு 2**

$A$ மற்றும் $B$ ஆனது $xy$ –தளத்திலுள்ள கோடுகளின் கணங்கள் என்க. $A$–யில் $x$– அச்சுக்கு இணையான கோடுகள் உள்ளன. $x\in A$, $y\in B$ என்க. மேலும், $x\mathrm{R}y$ எனில், $x$ ஆனது $y$ –க்கு செங்குத்துக் கோடு எனக் கருதுக. வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி $B$–யின் உறுப்புகளைக் காண்க..

**விளக்கம் 6**

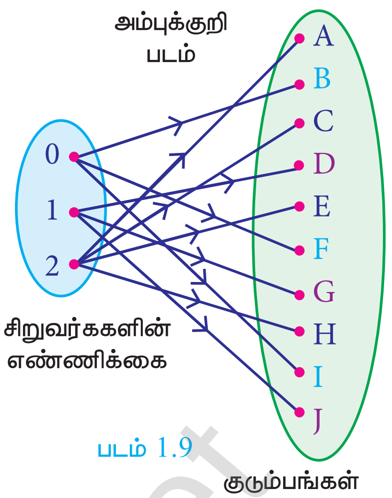
$A=\{1,3,5,7\}$ மற்றும் $B=\{4,8\}$ என்க. $A$–லிருந்து $B$–க்கு $R$ என்ற உறவானது 'குறைவாக உள்ளது' என வரையறுக்கப்பட்டால், $1R4$ என எழுதலாம். (1 ஆனது 4–ஐ விடக் குறைவானது). அதைப்போலவே, 1R8, 3R4, 3R8, 5R8, 7R8

அதாவது, R= {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)}

**குறிப்பு**

- மேற்கண்ட விளக்கத்தில், $A\times B$ = {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,4), (5,8), (7,4),(7,8)} R = {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)} R ஆனது $A\times B$ –ன் உட்கணமாக இருப்பதைக் காணலாம்..

**விளக்கம் 7**




படம் 1.9

ஒரு நகரத்தில் குறிப்பிட்ட பகுதியில் இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள பத்துக் குடும்பங்கள் $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$ மற்றும் $J$ எனக் கருதிக் கொள்வோம். இவற்றில் $B$, $F$, $I$ குடும்பங்களில் இரண்டு சிறுமிகளும் $D$, $G$, $J$ –யில் ஒரு சிறுவன் மற்றும் ஒரு சிறுமியும், மீதமுள்ள குடும்பங்களில் இரண்டு சிறுவர்களும் உள்ளனர். நாம் உறவு R–ஐ, $x\mathrm{R}y$ என வரையறுக்கலாம். இங்கு $x$-ஆனது சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையையும், மற்றும் $y$ –ஆனது $x$ எண்ணிக்கையை கொண்ட சிறுவர்கள் உள்ள குடும்பத்தையும் குறிக்கின்றது. இந்த நிலைமையை ஓர் உறவாகக் கொண்டு வரிசைச்சோடிகள் மற்றும் அம்புக்குறி படங்கள் வழியாகக் குறிப்பிடுக.

உறவு $R$–யின் மதிப்பகம் இரு குழந்தைகள் கொண்ட சிறுவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. எனவே, $R$–யின் மதிப்பகம் $=\{0,1,2\}$ ஆகிய மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும். இங்கு $0$ சிறுவர் உள்ள குடும்பங்களே, இரண்டு சிறுமிகளைக் கொண்ட குடும்பங்களாகும். $1$ சிறுவர் கொண்ட குடும்பங்களில் $1$ சிறுவனும், $1$ சிறுமியும் இருப்பார்கள். எனவே, $R$ என்ற உறவானது பின்வருமாறு:

$$\mathrm{R}=\{(0,B),(0,F),(0,I),(1,D),(1,G),(1,J),(2,A),(2,C),(2,E),(2,H)\}$$

இந்த உறவு அம்புக்குறி படத்தில் (படம் $1.9$) காட்டப்பட்டுள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.4** $A=\{3,4,7,8\}$ மற்றும் $B=\{1,7,10\}$ எனில் கீழ் உள்ள கணங்களில் எவை $A$–லிருந்து $B$–க்கு ஆன உறவைக் குறிக்கின்றது?

(i) $\mathrm{R}_1=\{(3,7),(4,7),(7,10),(8,1)\}$ (ii) $\mathrm{R}_2=\{(3,1),(4,12)\}$

(iii) $\mathrm{R}_3=\{(3,7),(4,10),(7,7),(7,8),(8,11),(8,7),(8,10)\}$

**தீர்வு** $A\times B=\{(3,1),(3,7),(3,10),(4,1),(4,7),(4,10),(7,1),(7,7),(7,10),(8,1),(8,7),(8,10)\}$

(i) $\mathrm{R}_1\subseteq A\times B$ என்பதைக் காணலாம். எனவே, $\mathrm{R}_1$ என்பது $A$–லிருந்து $B$–க்கு ஆன உறவு ஆகும்.

(ii) இங்கு, $(4,12)\in\mathrm{R}_2$, ஆனால் $(4,12)\notin A\times B$. எனவே, $\mathrm{R}_2$ ஆனது $A$–லிருந்து $B$–க்கு ஆன உறவு இல்லை.

(iii) இங்கு, $(7,8)\in\mathrm{R}_3$, ஆனால் $(7,8)\notin A\times B$. எனவே, $\mathrm{R}_3$ ஆனது $A$–லிருந்து $B$–க்கு ஆன உறவு இல்லை.

**குறிப்பு**

- ஓர் உறவை, பட்டியல் முறையிலோ அல்லது கணக் கட்டமைப்பு முறையிலோ குறிக்கலாம்.
- உறவைக் காட்சிப்படுத்தி அறிய அம்புக்குறி படத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

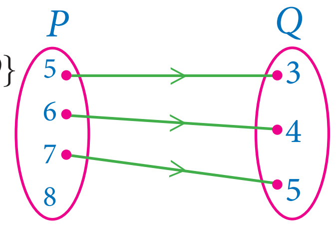
**எடுத்துக்காட்டு 1.5** படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள (படம் $1.10$) அம்புக்குறி படமானது $P$ மற்றும் $Q$ கணங்களுக்கான உறவைக் குறிக்கின்றது. இந்த உறவை (i) கணகட்டமைப்பு முறை, (ii) பட்டியல் முறைகளில் எழுதுக. (iii) $R$ -ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

**தீர்வு**

(i) $R$ யின் கணகட்டமைப்பு முறை $\{(x,y) \mid y = x-2,\ x \in P, y \in Q\}$

(ii) $R$ யின் பட்டியல் முறை $= \{(5,3),(6,4),(7,5)\}$

(iii) $R$ யின் மதிப்பகம் $= \{5,6,7\}$; $R$ யின் வீச்சகம் $= \{3,4,5\}$




படம் 1.10

**'இன்மை உறவு' (Null relation)**

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டைக் கருதுவோம்.

$A = \{-3, -2, -1\}$ மற்றும் $B = \{1,2,3,4\}$ எனில், $A$–லிருந்து $B$–க்கான உறவை $a-b = 8$, $a \in A$, $b \in B$, என வரையறுத்தால், $a-b = 8$ என்றவாறு எந்தவொரு $(a,b)$ சோடியும் இல்லை. எனவே, $R$ –ல் எந்த உறுப்பும் இல்லை. அப்படியானால் $\mathrm{R} = \phi$,

ஓர் உறவில் உறுப்புகள் இல்லை என்றால் அது **இன்மை உறவு** எனப்படும்..

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

$n(A) = p$, $n(B) = q$, எனில், $A$ மற்றும் $B$ –க்கு இடையே கிடைக்கும் மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கையானது $2^{pq}$ ஆகும்.

## பயிற்சி 1.2

1. $A = \{1,2,3,7\}$ மற்றும் $B = \{3,0,-1,7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை $A$-லிருந்து $B$-க்கான உறவுகளாகும்?

   (i) $\mathrm{R}_1 = \{(2,1), (7,1)\}$ (ii) $\mathrm{R}_2 = \{(-1,1)\}$

   (iii) $\mathrm{R}_3 = \{(2,-1), (7,7), (1,3)\}$ (iv) $\mathrm{R}_4 = \{(7,-1), (0,3), (3,3), (0,7)\}$

2. $A = \{1,2,3,4,\ldots,45\}$ மற்றும் $R$ என்ற உறவு "A -யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கப்பட்டால், $R$–ஐ $A \times A$–யின் உட்கணமாக எழுதுக. மேலும் $R$–க்கான மதிப்பகத்தையும், வீச்சகத்தையும் காண்க.

3. $R$ என்ற ஒரு உறவு $\{(x,y) / y = x+3,\ x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக.

4. கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும் (1) அம்புக்குறி படம் (2) வரைபடம் (3) பட்டியல் முறையில் குறிக்க.

   (i) $\{(x,y) \mid x = 2y,\ x \in \{2,3,4,5\},\ y \in \{1,2,3,4\}$

   (ii) $\{(x,y) \mid y = x+3,\ x,\ y$ ஆகியவை இயல் எண்கள் $< 10\}$

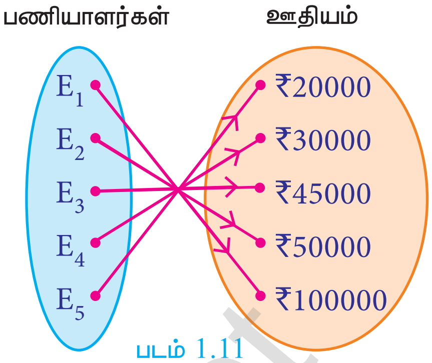
5. ஒரு நிறுவனத்தில் உதவியாளர்கள் $(A)$ எழுத்தர்கள் $(C)$, மேலாளர்கள் $(M)$ மற்றும் நிர்வாகிகள் $(E)$ ஆகிய நான்கு பிரிவுகளில் பணியாளர்கள் உள்ளனர். $A$, $C$, $M$ மற்றும் $E$ பிரிவு பணியாளர்களுக்கு ஊதியங்கள் முறையே ₹10,000, ₹25,000, ₹50,000 மற்றும் ₹1,00,000 ஆகும். $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ மற்றும் $A_5$ ஆகியோர் உதவியாளர்கள். $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ ஆகியோர் எழுத்தர்கள். $M_1$, $M_2$, $M_3$ ஆகியோர்கள் மேலாளர்கள். மற்றும் $E_1$, $E_2$ ஆகியோர் நிர்வாகிகள் ஆவர். $x\mathbb{R}y$ என்ற உறவில் $x$ என்பது $y$ என்பவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம் எனில் $R$–என்ற உறவை, வரிசைச் சோடிகள் மூலமாகவும் அம்புக்குறி படம் மூலமாகவும் குறிப்பிடுக.

## 1.5 சார்புகள் (Functions)

இரண்டு வெற்றில்லா கணங்களுக்கு இடையேயான பல உறவுகளில் சில குறிப்பிட்ட உறவுகளைச் சார்புகள் என்கிறோம்.

**விளக்கம் 8**

ஒரு நிறுவனத்தில் 5 பணியாளர்கள் வெவ்வேறு பிரிவுகளில் உள்ளனர். அவர்களது மாத ஊதிய விநியோகத்தை படம் 1.11 மூலம் நாம் காணலாம். இங்கு ஒரு பணியாளருக்கு ஒரு ஊதியம் மட்டுமே தொடர்புடையதாக இருப்பதைக் காண முடிகிறது.




படம் 1.11

குறிப்பிட்ட சிறப்பு உறவுகளைக் கீழ்க்காணும் வாழ்வியல் சூழல் மூலம் காணலாம்.

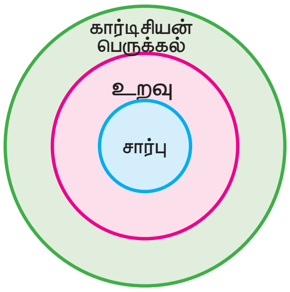
1. உன் வகுப்பு மாணவர்களின் கணத்தை $A$ எனக் கொள்க. ஒவ்வொரு மாணவருக்கும் ஒரே ஒரு வயதுதான் இருக்க முடியும்.
2. நீ கடைக்குச் சென்று ஒரு புத்தகம் வாங்கு. அப்படி வாங்கும் புத்தகத்திற்கு ஒரே ஒரு விலை மட்டுமே இருக்கும். ஒரே புத்தகத்திற்கு இரண்டு விலைகள் இருக்காது. (பல புத்தகங்களுக்கு ஒரே விலை இருக்கலாம்).
3. உங்களுக்குப் பாயிலின் விதி பற்றி தெரிந்திருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வோர் அழுத்தம் P –க்கு ஒரே ஒரு கனஅளவு $V$ மட்டுமே இருக்கும்.
4. பொருளாதாரத்தில், தேவையான பொருளின் எண்ணிக்கையை $Q = 360 - 4P$, எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு $P$ என்பது பொருளின் விலை. $P$–யின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், ஒரே ஒரு $Q$ – மதிப்பு மட்டுமே கிடைக்கும்.

நாம் இதைப்போன்ற உறவுகளை அடிக்கடி கடந்து வருகின்றோம். இங்கு $A$– என்ற கணத்தில் கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பிற்கு $B$-ல் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுமே தொடர்புடையதாக உள்ளது. இத்தகைய உறவுகளையே "சார்புகள்" என்கிறோம். நாம் சார்பை $f$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

**வரையறை**

$X$ மற்றும் $Y$ என்ற வெற்றில்லா கணங்களுக்கிடையேயான ஒரு உறவு $f$–ல் ஒவ்வொரு $x \in X$ –க்கும் ஒரே ஒரு $y \in Y$ கிடைக்கிறது எனில், '$f$' ஐ நாம் "சார்பு" என்கிறோம்.

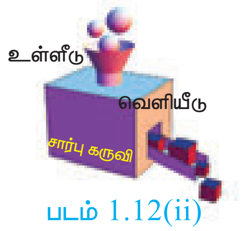
அதாவது, $f = \{(x,y) |$ ஒவ்வொரு $x \in X$-க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$ இருக்கும்$\}$.




படம் 1.12(i)

$X$ –லிருந்து $Y$–க்கான சார்பை, $f : X \to Y$ என எழுதலாம்.

உறவு மற்றும் சார்பு ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது ஒவ்வொரு சார்பும் உறவே. எனவே, சார்புகள் உறவின் உட்கணமாகும். உறவுகள் கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாகும். (படம் 1.12(i))




படம் 1.12(ii)

ஒரு சார்பு $f$ ஐ இயந்திரமாகக் கருதினால் (படம் 1.12(ii)) ஒவ்வொரு உள்ளீடு $x$ –ம் ஒரே ஒரு தனிப்பட்ட வெளியீடு $f(x)$ –ஐ கொடுக்கின்றது.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

ஒரு சார்பை, தொடர்புபடுத்துதல் அல்லது உருமாற்றம் செய்தல் என கருதலாம்.

**குறிப்பு**

$f : X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,

- கணம் $X$ ஐ, சார்பு $f$–ன் மதிப்பகம் என்கிறோம் மற்றும் கணம் $Y$ ஐ, அதன் துணைமதிப்பகம் என்கிறோம்
- $f(a) = b$ –ஆக இருந்தால் சார்பு $f$–ல் $b$ –ஆனது, $a$–யின் "நிழல் உரு" எனவும் மற்றும் $a$ ஆனது, $b$–யின் "முன் உரு" எனவும் அழைக்கிறோம்.
- $X$–யின் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணத்தை $f$–யின் வீச்சகம் என்கிறோம்.
- $f : X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,
  (i) மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
  (ii) ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் இருக்கும்.
- முடிவுறு கணங்கள் $A$ மற்றும் $B$-யில் $n(A) = p$, $n(B) = q$ எனில், $A$ மற்றும் $B$-க்கு இடையேயான மொத்தச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை $q^p$ ஆகும்.
- இந்தப் பாடப்பகுதியில் $f$ என்ற சார்பின் வீச்சகத்தை மெய்யெண்களின் உட்கணமாக நாம் கருதிக்கொள்ளலாம்.
- சார்பின் மதிப்பகத்தை விளக்கும்போது

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ –யில் $x = -1$ எனில் $f(-1)$ வரையறுக்க முடியாது. எனவே $f$ ஆனது $x = -1$ தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகின்றது. ஆகையால், $f$ –ன் மதிப்பகமானது $\mathbb{R} - \{-1\}$.

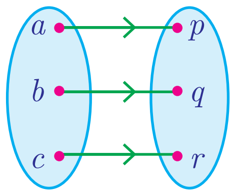
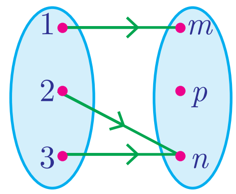
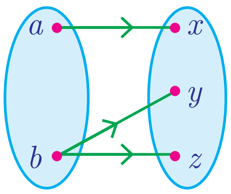
(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ –ல் $x = 2, 3$ ஆக இருந்தால், $f(2)$ மற்றும் $f(3)$ –ஐ வரையறுக்க முடியாது. எனவே, $f$ ஐ $x = 2$ மற்றும் $3$ தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கு வரையறுக்கலாம். ஆகையால், $f$-யின் மதிப்பகம் $= \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. உறவுகள் ______ ன் உட்கணமாகும். சார்புகள் _____ன் உட்கணமாகும்.
2. சரியா அல்லது தவறா: ஓர் உறவின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
3. சரியா அல்லது தவறா: ஒரு சார்பின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
4. சரியா அல்லது தவறா: $\mathrm{R} : A \to B$ ஆனது ஒரு உறவு எனில், $R$ –ன் மதிப்பகம் $A$ ஆகும்.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x) = x^2$ –ல் $1$ மற்றும் $2$ முன் உரு(க்கள்) _________ மற்றும் _________
6. உறவிற்கும் சார்பிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?
7. $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை இரண்டு வெற்றில்லா முடிவுற்ற கணங்கள் என்க. பின்வருவனவற்றுள் எந்தத் தொகுப்பு பெரியதாக இருக்கும்?
   (i) $A$ மற்றும் $B$ –க்கு இடையேயான உறவுகளின் எண்ணிக்கை
   (ii) $A$ மற்றும் $B$ –க்கு இடையேயான சார்புகளின் எண்ணிக்கை

## விளக்கம் 9 - சார்புகளுக்கான சோதனை

### அம்புக்குறி படத்தில் காணுதல்

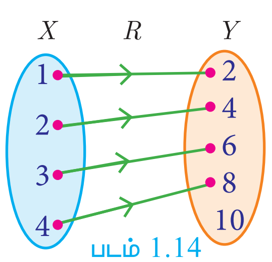
| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| இது ஒரு சார்பைக் குறிக்கிறது. ஒவ்வோர் உள்ளீடுக்கும் அது தொடர்பான ஒரே ஒரு வெளியீடு உள்ளது. | இது ஒரு சார்பைக் குறிக்கிறது. ஒவ்வோர் உள்ளீடுக்கும் அது தொடர்பான ஒரே ஒரு வெளியீடு உள்ளது | இது ஒரு சார்பாகாது. காரணம், உள்ளீடு b–க்கு இரண்டு வெளியீடுகள் உள்ளன |
| படம் 1.13(i) | படம் 1.13(ii) | படம் 1.13(iii) |

கணிதத்தில் உயரிய கோட்பாடுகளைப் புரிந்து கொள்வதில், சார்புகள் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. சார்புகள் ஒரு வடிவிலிருந்து மற்றொரு வடிவிற்கு மற்றும் அடிப்படைக் கருவியாகிறது. இதனால், பொறியியல் அறிவியலில் சார்புகள் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

> **குறிப்பு**
>
> ஒரு சார்பின் வீச்சகமானது அதன் துணை மதிப்பகத்தின் உட்கணமாகும்

**எடுத்துக்காட்டு 1.6** $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{2,4,6,8,10\}$ மற்றும் R $=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ எனில், $R$ ஆனது ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க

**தீர்வு** படம் 1.14–ல் $R$ குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு $x \in X$ -க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$ உறுப்பு மட்டும் கிடைக்கிறது. எனவே $X$-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் $Y$-ல் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே $R$-ஆனது ஒரு சார்பு ஆகும்.



படம் 1.14

மதிப்பகம் $X=\{1,2,3,4\}$; துணை மதிப்பகம் $Y=\{2,4,6,8,10\}$; வீச்சகம் $f=\{2,4,6,8\}$.

**எடுத்துக்காட்டு 1.7** '$f$' என்ற உறவானது $f(x)=x^2-2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $x\in\{-2,-1,0,3\}$ எனக் கொண்டால் (i) $f$-யின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக. (ii) $f$ -ஒரு சார்பாகுமா?

**தீர்வு** $f(x)=x^2-2$ இங்கு $x\in\{-2,-1,0,3\}$

(i) $f(-2) = (-2)^2-2=2$; $f(-1)=(-1)^2-2=-1$

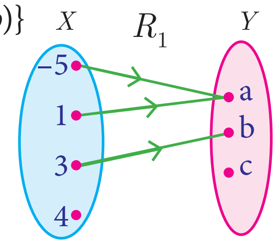
$f(0) = (0)^2-2=-2$; $f(3) = (3)^2-2=7$

ஆகையினால், $f = \{(-2,2),(-1,-1),(0,-2),(3,7)\}$

(ii) $f$-யின் ஒவ்வொரு மதிப்பக உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளதைக் காணலாம். எனவே $f$ -ஆனது ஒரு சார்பாகும்.

> **சிந்தனைக் களம்**
>
> கோள்களுக்கும் அதன் துணைக்கோள்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு சார்பாகுமா?

**எடுத்துக்காட்டு 1.8** $X = \{-5,1,3,4\}$ மற்றும் $Y = \{a,b,c\}$ எனில், $X$-லிருந்து $Y$-க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்? (i) $R_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$
(ii) $R_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$ (iii) $R_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$



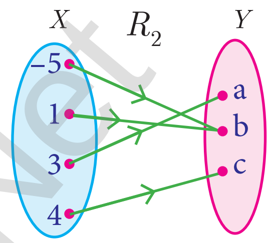
படம் 1.15(i)

**தீர்வு**

(i) $R_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$

$R_1$-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15(i)).

$R_1$ சார்பாகாது. காரணம் $4 \in X$ -க்கு $Y$-ல் நிழல் உரு இல்லை.

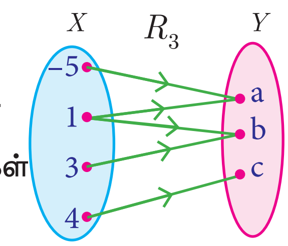


படம் 1.15(ii)

(ii) $R_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

$R_2$-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15(ii)).

$R_2$ ஒரு சார்பாகும்.காரணம் $X$-யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு $Y$-ல் உள்ளது.



படம் 1.15(iii)

(iii) $R_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$

$R_3$-க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம் (படம் 1.15 (iii)).

$R_3$ ஒரு சார்பாகாது. காரணம் $1 \in X$ -க்கு இரண்டு நிழல் உருக்கள் $a \in Y$ மற்றும் $b \in Y$ என உள்ளன.

இவற்றின் மூலம், ஓர் உறுப்பிற்கு, ஒரே ஒரு நிழல் உரு இருந்தால் மட்டுமே அந்த உறவு சார்பாகும் என அறியலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.9** $f(x) = 2x - x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,
(i) $f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு** (i) $x$ -க்கு, 1 -ஐ பிரதியிட்டால்,

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

(ii) $x$ -க்கு, $x+1$-ஐ பிரதியிட்டால்,

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[ $f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ என்பதைக் காணலாம். பொதுவாக, $f(a+b)$ ஆனது $f(a)+f(b)$ -க்கு சமமாக இருப்பதில்லை]

## பயிற்சி 1.3

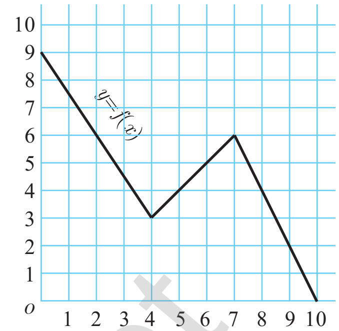
1. $f = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $y = 2x\}$ ஆனது $\mathbb{N}$ –ன் மீதான ஓர் உறவு என்க. மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. இந்த உறவு சார்பாகுமா?

2. $X = \{3, 4, 6, 8\}$ என்க. $R = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ என்ற உறவானது $X$ –லிருந்து $\mathbb{N}$-க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f : x \to x^2 - 5x + 6$, எனில்,

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$ (iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

4. படம் 1.16 -ல் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் $f(x)$-யின் மூலமாக, $f(9) = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.



படம் 1.16

(i) பின்வரும் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க

(அ) $f(0)$ (ஆ) $f(7)$ (இ) $f(2)$ (ஈ) $f(10)$

(ii) $x$-யின் எம்மதிப்பிற்கு $f(x) = 1$ ஆக இருக்கும்?

(iii) $f(x)$ -யின் (1) மதிப்பகம் (2) வீச்சகம் காண்க..

(iv) $f$ என்ற சார்பில் 6-ன் நிழல் உரு என்ன?

5. $f(x) = 2x+5$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $\dfrac{f(x+2)-f(2)}{x}$ -ஐக் காண்க.

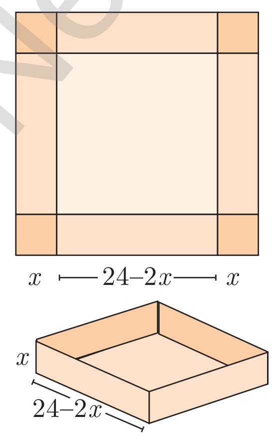
6. ஒரு சார்பு $f$ ஆனது $f(x) = 2x - 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ -ஐக் காண்க.

(ii) $f(x) = 0$ எனும்பொழுது, $x$ ஐக் காண்க.

(iii) $f(x) = x$ எனில் $x$ ஐக் காண்க.

(iv) $f(x) = f(1-x)$ எனில் $x$ ஐக் காண்க.



படம் 1.17

7. 24 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவத் துண்டிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்களை வெட்டி படம் 1.17-ல் உள்ளவாறு மேல்புறம் திறந்த ஒரு பெட்டி செய்யப்படுகிறது. இந்தப் பெட்டியின் கன அளவு $V$ எனில், $V$ ஐ $x$-யின் சார்பாகக் குறிப்பிடுக.

8. $f$ என்ற சார்பு $f(x) = 3 - 2x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $f(x^2) = (f(x))^2$ எனில் $x$-ஐக் காண்க.

9. ஒரு விமானம் 500 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. விமானம் '$d$' தொலைவு செல்வதற்கு ஆகும் காலத்தை $t$ (மணியில்) –ன் சார்பாக வெளிப்படுத்துக.

10. அருகில் உள்ள அட்டவணையில் பெண்களின் முன்னங்கைகளின் நீளம் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய உயரங்களின் தகவல்கள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர், உயரம் $(y)$ மற்றும் முன்னங்கை நீளம் $(x)$-க்கான உறவை $y = ax + b$ எனக் கண்டுபிடித்தார். இங்கு $a$ மற்றும் $b$ ஆகியவை மாறிலிகள்.

| முன்னங்கைகளின் நீளம் (செ.மீ) '$x$' | உயரம் (அங்குலம்) '$y$' |
|---|---|
| 35 | 56 |
| 45 | 65 |
| 50 | 69.5 |
| 55 | 74 |

(i) இந்த உறவானது சார்பாகுமா என ஆராய்க.

(ii) $a$ மற்றும் $b$-ஐக் காண்க.

(iii) முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்தப் பெண்ணின் உயரத்தைக் காண்க.

(iv) உயரம் 53.3 அங்குலம் எனில் அந்தப் பெண்ணின், முன்னங்கையின் நீளத்தைக் காண்க.

## 1.6 சார்புகளைக் குறிக்கும் முறை (Representation of Functions)

ஒரு சார்பை

(i) வரிசைச் சோடிகளின் ஒரு கணம் (ii) அட்டவணை முறை

(iii) ஓர் அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபட முறை

ஆகியவற்றின் மூலமாகக் குறிப்பிடலாம்

$f : A \to B$ ஒரு சார்பு என்க.

**(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்**

$f = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in A\}$ என்றவாறு அமையும் அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கனமாக சார்பு $f$ -ஐ குறிக்கலாம்

**(ii) அட்டவணை முறை**

$x$-ன் மதிப்புகள் மற்றும் $f$ -ஆல் பெறப்படும் நிழல் உருக்கள் ஆகியவற்றைகொண்டு ஒரு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

**(iii) அம்புக்குறி படம்**

$f$-யின் மதிப்பகத்தையும் முறையே அதன் நிழல் உருக்களையும் அம்புக்குறி மூலம் தொடர்புபடுத்திக் காட்டலாம்..

**(iv) வரைபடம்**

$f = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in A\}$ -ல் உள்ள அனைத்து வரிசைச் சோடிகளை $XY$ தளத்தில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் இணைக்கும் படம் $f$ -ன் வரைபடமாகும்.

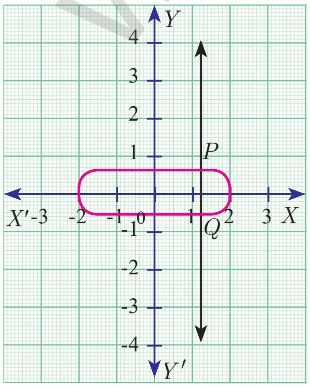
ஒவ்வொரு சார்பையும், ஒரு வளைவரையாக (curve) வரைபடத்தில் குறிப்பிடலாம். ஆனால் வரைபடத்தில் வரையப்படும் அனைத்து வளைவரைகளும் சார்பாகாது.

ஒரு வளைவரை சார்பாகுமா என்பதைத் தீர்மானிக்க, பின்வரும் சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம்.

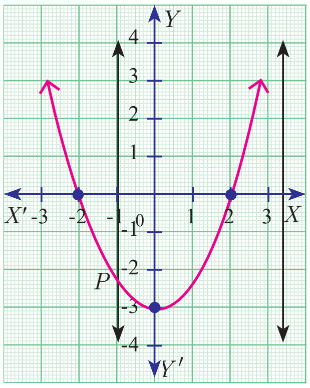
### 1.6.1 குத்துக்கோட்டுச் சோதனை (Vertical line test)

"வளைவரையை, ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால், அவ்வளைவரை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்".

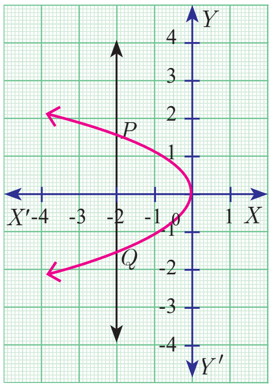
**எடுத்துக்காட்டு 1.10** குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும். (படம்.1.18(i), 1.18(ii), 1.18(iii), 1.18(iv))



படம் 1.18(i)



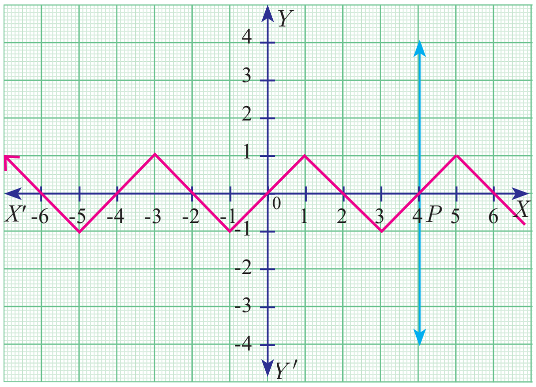
படம் 1.18(ii)



படம் 1.18(iii)

**தீர்வு** படம்.1.18 (i) மற்றும் படம் 1.18 (iii) வரைபடங்களில், ஒரு குத்துக்கோடு, வரைபடத்தை $P$ மற்றும் $Q$ ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால் இவை ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

1.18(ii) மற்றும் படம்.1.18(iv) வரைபடங்களில் அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இவை சார்பினைக் குறிக்கும்.



படம் 1.18(iv)

**குறிப்பு**

ஒரு சமன்பாடு வரைபடத்தில் குறிக்கப்படும்போது அதை வளைவரை எனலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.11** $A=\{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B=\{2,5,8,11,14\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f: A \to B$ எனும் சார்பு $f(x)=3x-1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினை

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை

(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றால் குறிக்க

**தீர்வு**

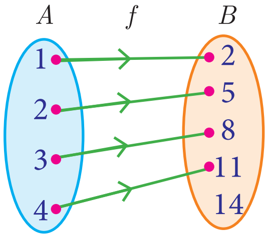
$A=\{1,2,3,4\}$ ; $B=\{2,5,8,11,14\}$ ; $f(x)=3x-1$

$f(1)=3(1)-1=3-1=2$ ; $f(2)=3(2)-1=6-1=5$

$f(3)=3(3)-1=9-1=8$ ; $f(4)=4(3)-1=12-1=11$

**(i) அம்புக்குறி படம்**

சார்பு $f: A \to B$ - ஐ ஒரு அம்புக்குறி படத்தால் குறிப்போம் (படம்.1.19).



படம் 1.19

**(ii) அட்டவணை அமைப்பு**

சார்பு $f$-ஐ கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையால் குறிப்போம்

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 8 | 11 |

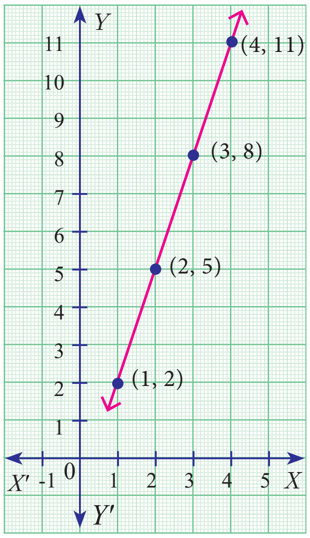
**(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்**

சார்பு $f$ –ஐ வரிசை சோடிகளின் கணமாக எழுதலாம்.

$f=\{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$

**(iv) வரைபடம்**

படம் 1.20 உள்ள $XY$- தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டில் (1,2), (2,5), (3,8), (4,11) ஆகிய புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 1.20

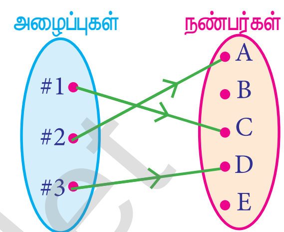
## 1.7 சார்புகளின் வகைகள் (Types of Functions)

இந்தப் பகுதியில். கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் வகைகளைப் பற்றி தகுந்த எடுத்துக்காட்டுடன் காணலாம்.

(i) ஒன்றுக்கு – ஒன்றான (one – one) (ii) பலவற்றிற்கு – ஒன்று (many – one)

(iii) மேல் (onto) (iv) உள்நோக்கிய (into)

### 1.7.1 ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (One – one function)



படம் 1.21

நம்மிடம் நன்கு வேலை செய்யும் அலைபேசி ஒன்று உள்ளது எனக் கொள்க. உங்கள் நண்பனுக்கு ஒரு சாதாரணத் தொடர்பின் மூலம் பேசுவதற்கு ஒரு நேரத்தில், ஒரு முறை தான் தொடர்பு கொள்ள முடியும். (படம் 1.21)

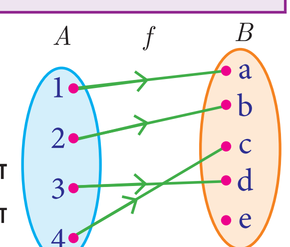
நாம் பேசுவதற்குத் தொடர்பு கொள்ளும் எண்ணை ஒரு சார்பாகக் கொண்டால், அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் கூறலாம்.

| |
|---|
| $f : A \to B$ என்பது ஒரு சார்பு என்க. $A$ -யின் வெவ்வேறான உறுப்புகளை $B$ -ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் $f$ ஆனது தொடர்புபடுத்துமானால், $f$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். |

ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு என்பது ஒருபுறச் சார்பு (Injective function) எனவும் அழைக்கப்படும். இதற்குச் சமமாக,

| |
|---|
| $f(a_1) = f(a_2)$ என்றவாறு அமைந்த ஒவ்வொரு $a_1, a_2 \in A$ -க்கும் $a_1 = a_2$ எனக் கிடைத்தால், $f$ என்பது ஒன்றொக்கான்றான சார்பாகும். |

**விளக்கம் 10**

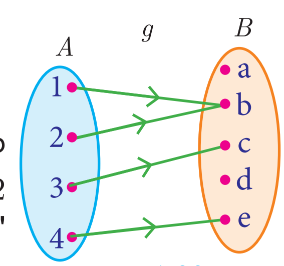


படம் 1.22

$A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{a,b,c,d,e\}$

(i) $f = \{(1,a),\ (2,b),\ (3,d),\ (4,c)\}$ எனில், படம் 1.22–ல் $A$-யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B–ல் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன.

எனவே $f$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

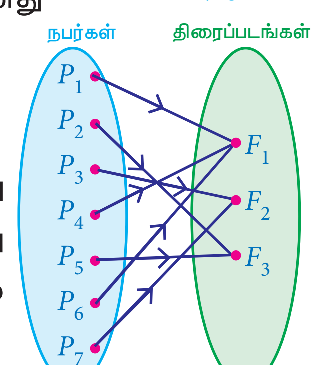


படம் 1.23

(ii) $g = \{(1,b), (2,b), (3,c), (4,e)\}$

படம் 1.23 –ல் $g$ ஆனது $A$-விலிருந்து $B$ -க்கு ஒரு சார்பு. மேலும் $g(1) = g(2) = b$, ஆனால் $1 \neq 2$. எனவே, கணம் $A$-ல் 1 மற்றும் 2 ஆகிய இரண்டு வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்குக் கணம் $B$-ல் '$b$' என்ற ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் உள்ளது. எனவே $g$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.

### 1.7.2 பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு (Many – one function)



படம் 1.24

ஒரு திரையரங்க வளாகத்தில் $F_1$, $F_2$, $F_3$ என்ற மூன்று திரைப்படங்கள் திரையிடப்படுகின்றன. ஏழு நபர்கள் ($P_1$ –லிருந்து $P_7$ வரை) திரையரங்கிற்கு வந்து காட்சி சீட்டு வாங்கும் விதம் (படம்.1.24)–ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

நாம் திரைப்படத்தைத் தேர்வு செய்வதை ஓர் உறவாகக் கொண்டால் அது பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பாக விளங்கும். காரணம் ஒருவருக்கு ஒரு காட்சிச் சீட்டு மட்டுமே கொடுக்கப்படும், ஆனால் ஒரே படத்தைப் பார்க்க பலர் தேர்வு செய்யலாம்.

சார்பு $f: A \to B$ -ஐ பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு எனில், அச்சார்பில் $A$-யின் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு, $B$-ல் ஒரே நிழல் உரு இருக்கும்.

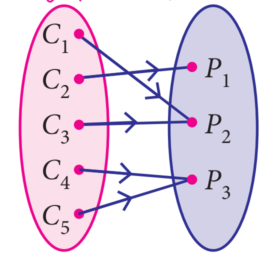
$f: A \to B$ எனும் சார்பில், f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றாக இல்லையெனில், அது பலவற்றிக்கு ஒன்று எனக் கூறலாம்.

**விளக்கம் 11**

$A = \{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B = \{a,b,c\}$ என்க, சார்பு $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c)\}$ என்க.

$f$ என்ற சார்பில் $1$ மற்றும் $2$ என்ற, $A$-யில் உள்ள உறுப்புகளுக்கு $B$-யில் ஒரே நிழல் உரு '$a$' ஆக இருப்பதால், சார்பு $f$ ஆனது பலவற்றிற்கு–ஒன்றான சார்பாகும்.

### 1.7.3 மேல் சார்பு (Onto function)



படம் 1.25

ஒரு கைபேசியில் மூன்று நபர்களின் பெயர்கள் பதிவில் உள்ளன எனக் கொள்க. பதிவில் உள்ள மூவருக்கும் அழைப்புகள் செல்கின்றன எனில் அந்த அழைப்புகளை குறிக்கும் சார்பு மேல் சார்பு (படம் 1.25) ஆகும்.

$f: A \to B$ என்ற ஒரு சார்பு, மேல் சார்பு எனில், $f$-யின் வீச்சகமானது, $f$-யின் துணை மதிப்பகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது, $f(A)=B$

துணை மதிப்பகம் $B$-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் மதிப்பகம் $A$-ல் முன் உரு இருக்கும் எனவும் கூறலாம்.

இதை மேல்புறச் சார்பு (Surjective function) எனவும் அழைக்கலாம்.

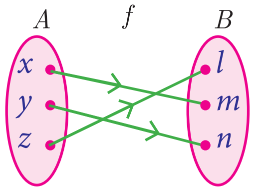
**குறிப்பு**

➢ $f: A \to B$ ஆனது மேல் சார்பு எனில், $f$-யின் வீச்சகம்$=B$. அதாவது, $f(A) = B$.

**விளக்கம் 12**

$A = \{x,y,z\}, B = \{l,m,n\}$ என்க.

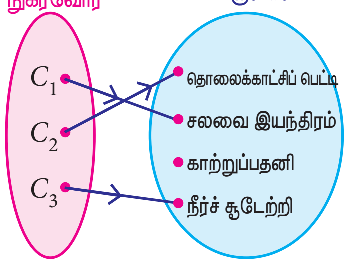
$f$ -ன் வீச்சகம் $= \{l,m,n\} = B$ (படம்.1.26) எனவே, $f$ ஆனது ஒரு மேல்சார்பாகும்.



படம் 1.26

### 1.7.4 உட்சார்பு (Into function)

ஒரு வீட்டு உபயோகப் பொருள்கள் விற்பனையகத்தில். புது வருட விற்பனைக்காக, தொலைக்காட்சிப் பெட்டி, காற்று பதனி (Air Conditioner), சலவை இயந்திரம் (Washing machine) மற்றும் நீர்ச் சூடேற்றி (Water heater) ஆகியவற்றிற்கு $20\%$ தள்ளுபடி செய்து சலுகை வழங்கியுள்ளது. மேற்கண்ட பொருள்களை $C_1$, $C_2$, $C_3$ என்ற மூன்று நுகர்வோர் தேர்வு செய்வதாக எடுத்துக்கொண்டால், அதை ஒரு சார்பாகக் கொள்ளலாம். படம் 1.27 மேலும், இது உட்சார்பைக் குறிக்கின்றது.



படம் 1.27

சாதாரணமாக, குளிர் காலத்தில் நுகர்வோர் காற்று பதனியை தேர்வு செய்யமாட்டார்கள். எனவே, இது உட்சார்புக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

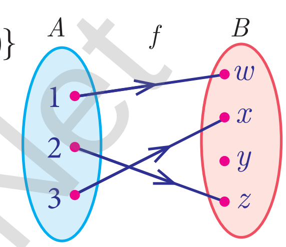
> ஒரு சார்பு $f : A \rightarrow B$ ஆனது உட்சார்பு எனில், B–ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பிற்காவது, A–ல் முன்உரு இருக்காது.

$f$-ன் வீச்சகமானது துணை மதிப்பகத்தின் தகு உட்கணமாகும்.

வேறுவிதமாக, $f : A \rightarrow B$ ஆனது மேல்சார்பு இல்லையெனில் அது உட்சார்பாகும்.

**விளக்கம் 13**

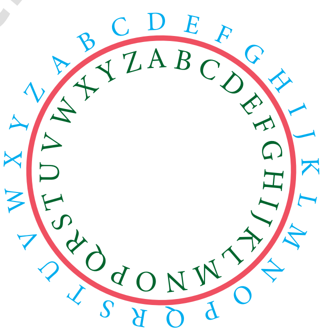
$A = \{1,2,3,\}$ மற்றும் $B = \{w, x, y, z\}$ என்க; சார்பு $f = \{(1,w),(2,z),(3,x)\}$ என்க.



படம் 1.28

இங்கு, $f$ -யின் வீச்சகம் $f = \{w, x, z\} \subset B$ (படம்.1.28) என்பதால், $f$ ஆனது உட்சார்பு ஆகும். $y \in B$ -க்கு முன் உரு $A$-ல் இல்லை என்பதை நோக்குக.

### 1.7.5 இருபுறச் சார்பு (Bijection)

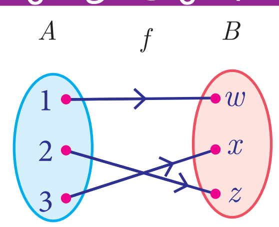

குறியீட்டு வட்டம்

படம் 1.29

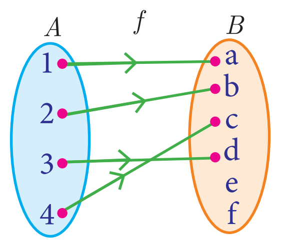
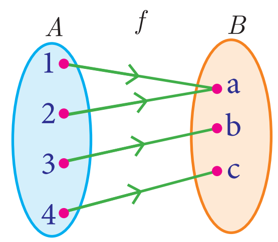
ஒரு வட்டத்தைப் படம் 1.29–ல் உள்ளபடி எடுத்துக்கொண்டால், வட்டத்தின் உட்பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு ஆங்கில எழுத்திற்கும் மற்றொரு ஆங்கில எழுத்து அதன் வெளிப்புறத்தில் மாற்றி அமைக்கப்பட்டுள்ளதைக் காணலாம். எனவே $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$, ... $Z \rightarrow C$. இந்த வட்டத்தைக் குறியீட்டு வட்டம் (Cipher circle) என்கிறோம். இதை வைத்து, நாம் 'HELLO' என்ற வார்த்தையை 'KHOOR' என மாற்றம் செய்கிறோம். இதே வட்டத்தைப் பயன்படுத்தி வெளியே உள்ள எழுத்திற்குப் பதிலாகத் திரும்பவும் உள்ளே உள்ள எழுத்தை மாற்றுகின்றோம் எனில், 'KHOOR' என்ற வார்த்தை மீண்டும் 'HELLO'–வாக கிடைத்துவிடும். இத்தகைய நிகழ்ச்சியைத் தான் இருபுறச் சார்பு என்கிறோம். இவ்விதமான இரகசியக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவதற்கான முறையை "குழுக் குறியியல்" (Cryptography) என்கிறோம்

> $f : A \rightarrow B$ என்ற சார்பு, ஒன்றுக்கு ஒன்றாகவும் மற்றும் மேல்சார்பாகவும் இருந்தால் $f$ –ஐ $A$-லிருந்து $B$-க்கான இருபுறச் சார்பு என்கிறோம்.

**விளக்கம் 14**

| ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல்சார்பு (இருபுறச் சார்பு) | |
|---|---|
|   படம் 1.30 | $A$ -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு $B$-ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது மற்றும் $B$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் $A$-ல் முன் உரு உள்ளது. |

**விளக்கம் 15**

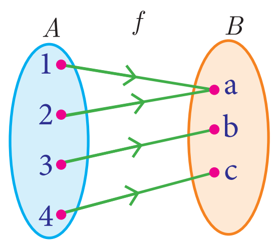
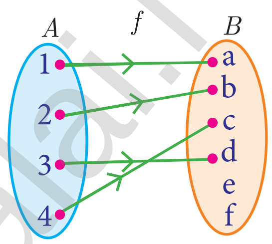
| ஒன்றுக்கு ஒன்றான | பலவற்றிற்கு ஒன்றான |
|---|---|
|  படம் 1.31 |  படம் 1.32 |
| $A$ -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு $B$-ல் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. | $A$ -யின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு ஒரே நிழல் உரு $B$-ல் உள்ளது. |

**குறிப்பு**

ஒரு சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாக இருந்தால் நாம் அதை ஒன்றுக்கு ஒன்றான தொடர்பு எனவும் கூறலாம்.

**சிந்தனைக்களம்**

ஒன்றிற்குப் பல என்ற சார்பு இருக்க முடியுமா?

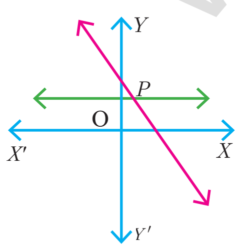
| மேல்சார்பு | உட்சார்பு |
|---|---|
|  படம் 1.33 |  படம் 1.34 |
| $A$ -யின் வீச்சகம் =துணை மதிப்பகம் ($B$-யின் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் $A$-ல் முன் உரு உள்ளது). | $A$ -யின் வீச்சகமானது துணை மதிப்பகத்தின் தகு உட்கணமாகும். ($B$-யின் ஓர் உறுப்பாவது $A$-யில் முன் உருவை பெற்றிருக்கவில்லை) |

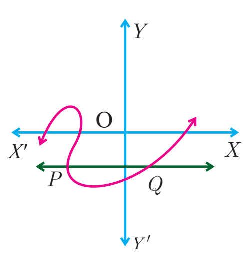
கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றா அல்லது இல்லையா என அறிவதற்குக் கீழ்க்காணும் சோதனை நமக்குப் பயன்படும்.

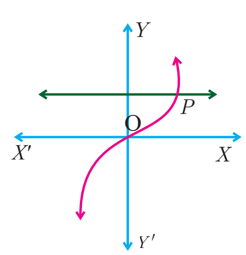
### 1.7.6 கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனை (Horizontal Line Test)

இதற்கு முன்னர் நாம் குத்துக் கோட்டுச் சோதனையைப் பார்த்தோம். தற்போது கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனையைப் பார்க்கலாம். "வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றான சார்பைக் குறித்தால், வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை அதிகபட்சமாக ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும்".

**எடுத்துக்காட்டு 1.12** கிடைமட்டக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி (படம் 1.35(i), (1.35(ii), 1.35(iii)), கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் எவை ஒன்றுக்கொன்றானவை எனக் காண்க.


படம் 1.35(i)


படம் 1.35(ii)

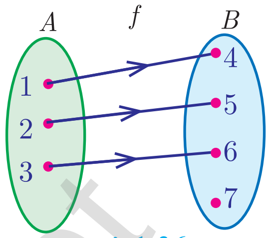

படம் 1.35 (iii)

**தீர்வு** ஒரு கிடைமட்டக்கோடு, வரைபடம் 1.35(i) மற்றும் படம் 1.35(iii) ஆகியவற்றை அதிகபட்சமாக ஒரே ஒரு புள்ளியில் ($P$) வெட்டுவதால் இவை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பினைக் குறிக்கும்.

வரைபடம் (1.35(ii))–ல் வரையப்பட்ட ஒரு கிடைமட்டக்கோடு $P$ மற்றும் $Q$ ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பைக் குறிக்காது.

**எடுத்துக்காட்டு 1.13** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ மற்றும் $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ ஆனது $A$-லிருந்து $B$ -க்கான சார்பு $f$ ஆகும். $f$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$; $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$



படம் 1.36

$A$-லிருந்து $B$-க்கு ஆன சார்பு $f$-ல், $A$-யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு, $B$-ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே, $f$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும். துணை மதிப்பகத்தில் உள்ள உறுப்பு 7-க்கு, மதிப்பகத்தில் முன் உரு இல்லை. எனவே, f ஆனது, மேல்சார்பு இல்லை. (படம்.1.36)

எனவே, $f$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானது, ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 1.14** $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ மற்றும் $f:A\to B$ என்ற சார்பானது $f(x)=x^2+x+1$ மேல் சார்பு எனில், $B$-ஐ காண்க.

**தீர்வு** $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ மற்றும் $f(x)=x^2+x+1$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3;\quad f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$$
$$f(0)=0^2+0+1=1;\quad f(1)=1^2+1+1=3$$
$$f(2)=2^2+2+1=7$$

எனவே, $f$ –ன் வீச்சகம் $B=\{1,\ 3,\ 7\}$.

**எடுத்துக்காட்டு 1.15** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x)=3x+2,\ x\in\mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) 1, 2, 3 –யின் நிழல் உருக்களைக் காண்க (ii) 29 மற்றும் 53-யின் முன் உருக்களைக் காண்க. (iii) சார்பின் வகையைக் காண்க.

**தீர்வு** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x)=3x+2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $x=1$ எனில், $f(1)=3(1)+2=5$

$x=2$ எனில், $f(2)=3(2)+2=8$

$x=3$ எனில், $f(3)=3(3)+2=11$

1, 2, 3 –யின் நிழல் உருக்கள் முறையே 5, 8, 11 ஆகும்.

(ii) 29-யின் முன் உரு $x$ எனில், $f(x)=29$. எனவே $3x+2=29$

$3x=27\Rightarrow x=9$.

இதைப்போலவே, 53-யின் முன் உரு $x$ எனில், $f(x)=53$. எனவே, $3x+2=53$

$3x=51\Rightarrow x=17$.

எனவே, 29 மற்றும் 53-யின் முன் உருக்கள் முறையே 9 மற்றும் 17 ஆகும்.

(iii) $\mathbb{N}$ -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்குத் துணை மதிப்பகத்தில் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. எனவே, $f$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

$f$ -யின் துணை மதிப்பகமானது $\mathbb{N}$.

வீச்சகம் $f=\{5, 8, 11, 14, 17, ...\}$ ஆனது $\mathbb{N}$-ன் தகு உட்கணமாகும்.

எனவே, $f$ ஆனது மேல்சார்பு இல்லை.

அதாவது, $f$ உட்சார்பு ஆகும்.

எனவே, $f$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் உட்சார்பு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.16** தடயவியல் விஞ்ஞானிகள், தொடை எலும்புகளைக் கொண்டு ஒருவருடைய உயரத்தை (செ.மீட்டரில்) கணக்கிடுகிறார்கள். அவர்கள் பொதுவாக, $h(b) = 2\cdot47b + 54\cdot10$ என்ற சார்பை இதற்குப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இங்கு, $b$ ஆனது தொடை எலும்பின் நீளமாகும்.

(i) $h$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் $50$ செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.

(iii) நபரின் உயரம் $147.96$ செ.மீ எனில், அவர் தொடை எலும்பின் நீளத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** (i) $h$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க $h(b_1) = h(b_2)$ எனக் கருதுக.

எனவே, நமக்குக் கிடைப்பது,, $2\cdot47b_1 + 54\cdot10 = 2\cdot47b_2 + 54\cdot10$

$2\cdot47b_1 = 2\cdot47b_2$ -லிருந்து $b_1 = b_2$

எனவே, $h(b_1) = h(b_2)$ எனில், $b_1 = b_2$ ஆகையால், இந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் $b = 50$ செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரமானது $h(50) = (2\cdot47\times50) + 54\cdot10 = 177\cdot6$ செ.மீ ஆகும்.

(iii) நபரின் உயரம் $147.96$ செ.மீ எனில், $h(b) = 147\cdot96$ தொடை எலும்பின் நீளமானது

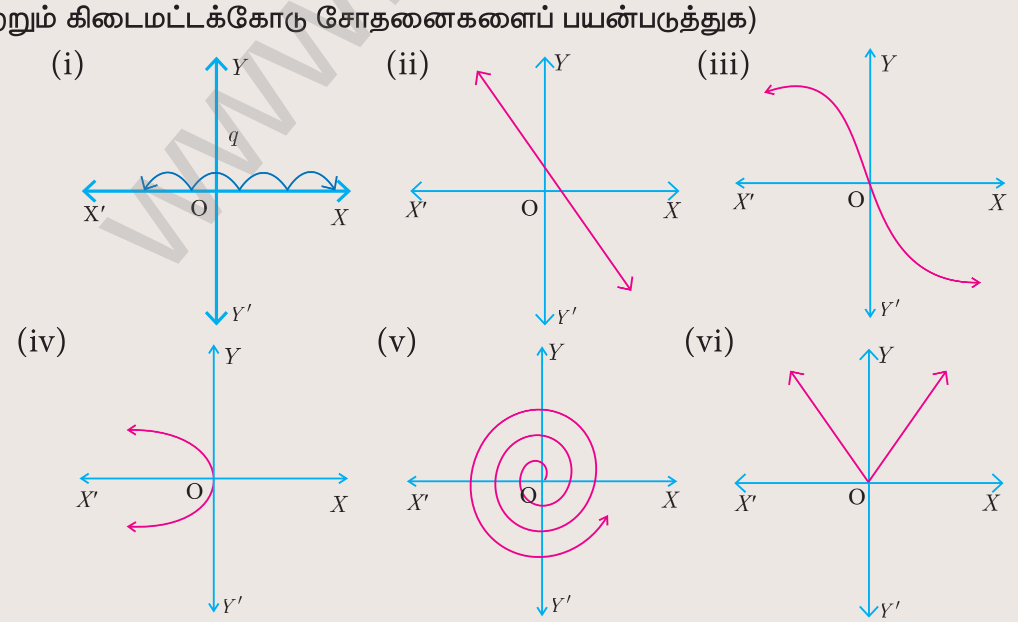
$2\cdot47b + 54\cdot10 = 147\cdot96$

$$b = \frac{93\cdot86}{2\cdot47} = 38$$

ஆகையால், தொடை எலும்பின் நீளமானது 38 செ.மீ ஆகும்.

## செயல்பாடு 3

பின்வரும் வளைவரைகளில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனச் சோதிக்க. சார்பாக இருந்தால் அந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனப் பரிசோதிக்க. (குறிப்பு குத்துக்கோடு, மற்றும் கிடைமட்டக்கோடு சோதனைகளைப் பயன்படுத்துக)



## 1.8 சார்புகளின் சிறப்பு வகைகள் (Special cases of function)

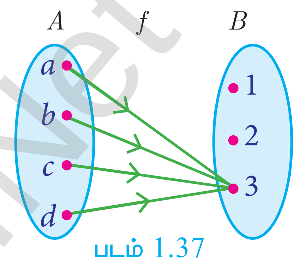
சில சிறப்பு வகையான சார்புகள் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். அவற்றுள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) மாறிலிச் சார்பு (ii) சமனிச் சார்பு (iii) மெய் மதிப்புச் சார்பு

### (i) மாறிலிச் சார்பு

சார்பு $f : A \to B$ ஆனது மாறிலிச் சார்பு எனில், $f$ -ன் வீச்சகமானது ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்டதாகும். அதாவது, $f\left(x\right) = c$, அனைத்து $x \in A$ மற்றும் ஏதேனும் ஒரு நிலையான $c \in B$ .

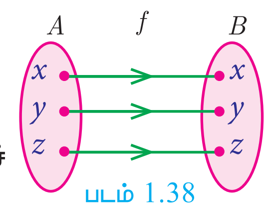
**விளக்கம் 16**



படம் 1.37

படம் 1.37-லிருந்து, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் $f = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$ இதை, $f(x) = 3$ எல்லா $x \in A$ என எழுதலாம். மேலும், $f$-யின் வீச்சகம் $f = \{3\}$. எனவே $f$-ஆனது மாறிலிச் சார்பு ஆகும்.

### (ii) சமனிச் சார்பு



படம் 1.38

$A$ ஒரு வெற்றில்லா கணம் என்க. சார்பு $f : A \to A$ ஆனது $f(x) = x$ அனைத்து $x \in A$, என வரையறுக்கப்பட்டால், அந்தச் சார்பு $A$-யின் சமனிச் சார்பு எனப்படும். இதை $I_A$ எனக் குறிக்கலாம்.

**விளக்கம் 17**

$A = \left\{a, b, c\right\}$ எனில் $f = I_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ ஆனது $A$-யின் மீதான சமனிச் சார்பாகும்

**சிந்தனைக் களம்**

சமனிச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா?

### (iii) மெய் மதிப்புச் சார்பு

சார்பு $f : A \to B$ ஆனது மெய் மதிப்புச் சார்பு எனில், $f$-யின் வீச்சகமானது, R எனும் மெய்யெண்களின் உட்கணமாக இருக்கும். அதாவது, $f(A) \subseteq \mathbb{R}$.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

**சரியா அல்லது தவறா?**

1. எல்லா ஒன்றுக்கு ஒன்று சார்புகளும் மேல் சார்பாகும்.
2. $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ ஆக இருக்கும்பொழுது $A$-லிருந்து $B$ க்கு அமையும் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்காது.
3. எல்லா மேல்சார்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்புகளாகும்.
4. $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ ஆக இருக்கும்போது $A$-யிலிருந்து $B$-க்கான சார்பு மேல் சார்பாக இருக்க முடியாது.
5. $A$-லிருந்து $B$-க்கான சார்பு $f$ ஆனது, ஓர் இருபுறச் சார்பு எனில், $n(A) = n(B)$
6. $n(A) = n(B)$ எனில் $f$ ஆனது, $A$-யிலிருந்து $B$-க்கு ஓர் இருபுறச்சார்பு.
7. எல்லா மாறிலிச் சார்புகளும் இருபுறச் சார்புகளாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.17** $f$ ஆனது $\mathbb{R}$-லிருந்து $\mathbb{R}$-க்கு ஆன சார்பு. மேலும் அது $f(x) = 3x - 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $(a,\ 4)$ மற்றும் $(1,\ b)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $a$ மற்றும் $b$ -யின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** $f(x) = 3x - 5$, $f = \left\{(x,\ 3x-5) \mid x \in R\right\}$ என எழுதலாம்.

$(a, 4)$ எனில், $a$-யின் நிழல் உரு $4$. அதாவது, $f(a) = 4$

$3a - 5 = 4$ -லிருந்து $a = 3$

$(1, b)$ எனில், $1$ -யின் நிழல் உரு $b$. அதாவது, $f(1) = b$ -லிருந்து $b = -2$

$3(1) - 5 = b$ எனவே, $b = -2$

**எடுத்துக்காட்டு 1.18** ஒரு துகள் '$t$' (மணியில்) கால அளவில் கடந்த தூரமானது (கி.மீட்டரில்) $S(t) = \dfrac{t^2 + t}{2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துகள்.

(i) மூன்றரை மணி (ii) $8$ மணி மற்றும் $15$ நிமிடங்கள் கால அளவிற்குப் பின் கடந்த தொலைவுகளைக் கண்டறிக.

**தீர்வு** துகள் கடந்த தூரமானது $S(t) = \dfrac{t^2 + t}{2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $t = 3.5$ மணி. அப்படியானால், $S(3.5) = \dfrac{(3.5)^2 + 3.5}{2} = \dfrac{15.75}{2} = 7.875$

மூன்றரை மணி நேரத்தில் கடந்த தூரம் $7.875$ கி.மீ ஆகும்.

(ii) $t = 8.25$ மணி (0.25 மணி = $15$ நிமிடங்கள்).

அப்படியானால், $S(8.25) = \dfrac{(8.25)^2 + 8.25}{2} = \dfrac{76.3125}{2} = 38.15625$

$8.25$ மணி நேரத்தில் தோராயமாகக் கடந்த தூரம் $38.16$ கி.மீ ஆகும்.

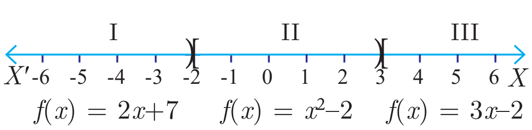
**எடுத்துக்காட்டு 1.19** சார்பு $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \le x < 3 \\ 3x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$ ,

என வரையறுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு**



படம் 1.39

அருகில் காட்டியுள்ளபடி சார்பு $f$ ஆனது I, II, III என்ற இடைவெளிகளில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = a$, என்ற கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு $a$-இருக்கும் இடைவெளியைக் கண்டுபிடித்து, அந்த இடைவெளியில் $f(a)$ -ஐக் காண வேண்டும்.

(i) $x = 4$ ஆனது மூன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதை நாம் காணலாம்.

இங்கு, $f(x) = 3x - 2$; $f(4) = 3(4) - 2 = 10$

(ii) $x=-2$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.

எனவே, $f(x)=x^2-2\,;\ f(-2)=(-2)^2-2=2$

(iii) (i) -லிருந்து, $f(4)=10$.

$f(1)$, –ன் மதிப்பைக் காண, $x=1$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.

ஆகையினால், $f(x)=x^2-2$ -லிருந்து, $f(1)=1^2-2=-1$

எனவே, $f(4)+2f(1)\ =10+2(-1)=8$

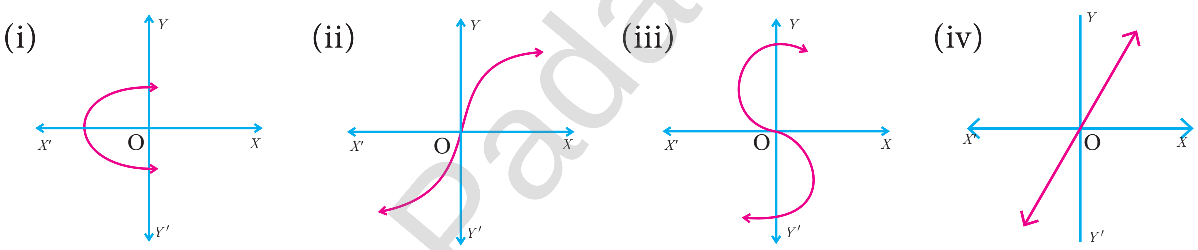
(iv) $f(1)=-1$, $f(4)=10$ எனக் கண்டோம். $f(-3)$-யைக் காண $x=-3$ ஆனது ஒன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதைக் காணலாம்.

ஆகையினால், $f(x)=2x+7$ ; எனவே, $f(-3)=2(-3)+7=1$

எனவே, $\dfrac{f(1)-3f(4)}{f(-3)}=\dfrac{-1-3(10)}{1}=-31$

## பயிற்சி 1.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும்..




2. $f:A\to B$ என்ற சார்பானது $f(x)=\dfrac{x}{2}-1$, என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $A=\{2,4,6,10,12\}$, $B=\{0,1,2,4,5,9\}$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு $f$-ஐ பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபடம்
3. $f=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ என்ற சார்பினை
(i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை (iii) வரைபடம் மூலமாகக் குறிக்கவும்.
4. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x)=2x-1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.
5. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m)=m^2+m+3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.
6. $A=\{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B=\mathbb{N}$ என்க. மேலும் $f:A\to B$ ஆனது, $f(x)=x^3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், (i) f–யின் வீச்சகத்தைக் காண்க. (ii) $f$ எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சார்பும் இருபுறச் சார்பா, இல்லையா? உன் விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

   (i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=2x+1$ (ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=3-4x^2$

8. $A=\{-1,1\}$ மற்றும் $B=\{0,2\}$ என்க. மேலும், $f:A\to B$ ஆனது $f(x)=ax+b$ என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு எனில், $a$ மற்றும் $b$ -ஐக் காண்க.

9. $f$ என்ற சார்பானது $f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x>1 \\ 2 & ; \quad -1\le x\le 1 \\ x-1 & ; \quad -3<x<-1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

   (i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1\cdot 5)$ (iv) $f(2)+f(-2)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

10. $f:[-5,9]\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

    $f(x)=\begin{cases} 6x+1 & -5\le x<2 \\ 5x^2-1 & 2\le x<6 \\ 3x-4 & 6\le x\le 9 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $f(-3)+f(2)$ (ii) $f(7)-f(1)$ (iii) $2f(4)+f(8)$ (iv) $\dfrac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$

11. புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக $t$ வினாடிகளில் ஒரு பொருள் கடக்கும் தூரமானது $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $a$, $b$ ஆகியவை மாறிலிகள் ($g$ ஆனது புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம்). $S(t)$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா என ஆராய்க.

12. $t$ என்ற சார்பானது செல்சியஸில் ($C$) உள்ள வெப்பநிலையையும், பாரன்ஹீட்டில் ($F$) உள்ள வெப்பநிலையையும் இணைக்கும் சார்பாகும். மேலும் அது $t(C)=F$ என வரையறுக்கப்பட்டால், (இங்கு, $F=\frac{9}{5}C+32$).

    (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$

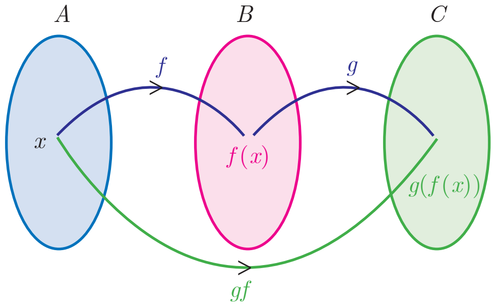
    (iv) $t(C)=212$ ஆக இருக்கும்போது $C$ -ன் மதிப்பு

    (v) செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலை

    ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

## 1.9 சார்புகளின் சேர்ப்பு (Composition of Functions)

ஓர் ஓட்டுநர், மகிழுந்தின் வேகத்தை கட்டுப்படுத்தும் பொழுது எரிபொருள் பாயும் அளவு குறைந்து மகிழுந்தின் வேகத்தில் மாற்றம் ஏற்படுகின்றது. இதைப்போலவே இரண்டு சார்புகளின் சேர்ப்பு ஒரு தொடர் விளைவை ஏற்படுத்தும் செயலாகும். அதாவது இங்குச் சார்புகள் ஒன்றிற்குப் பிறகு ஒன்றாகச் செயல்படுத்தப்படுகிறது. (படம் 1.40)



படம் 1.40

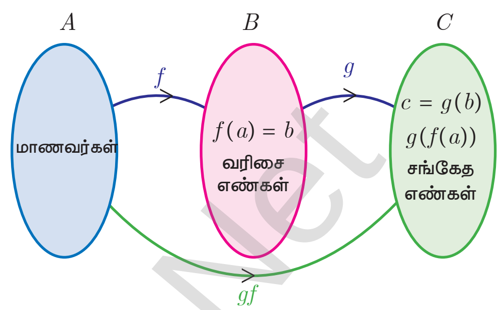
இதை மேலும் விவரிக்க வேண்டுமென்றால், சார்பானது ஒரு நிகழ்வாகும். $f$ மற்றும் $g$ ஆனது இரண்டு சார்புகள் எனில், சார்புகளின் சேர்ப்பு $g(f(x))$ பின்வருமாறு இருநிலைகள் மூலம் காணலாம்.

(i) $f$-க்கு $x$ என்ற உள்ளீட்டை வழங்குக.;

(ii) $f(x)$ என்ற $f$-யின் வெளியீட்டை, $g$ -யின் உள்ளீடாகச் செலுத்துக. வெளியீடை $g(f(x))$ என அழைக்கிறோம்

## விளக்கம்

10-ஆம் வகுப்பு பொதுத் தேர்வு எழுதிய மாணவர்களைக் கொண்ட கணம் $A$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். பொதுத்தேர்வு எழுதும் ஒவ்வொரு மாணவருக்கும் வரிசை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தேர்வுத் துறை ரகசியமாக, அந்த வரிசை எண்ணிற்குப் பதிலாகச் சங்கேத எண்ணைக் கொடுத்துள்ளது.



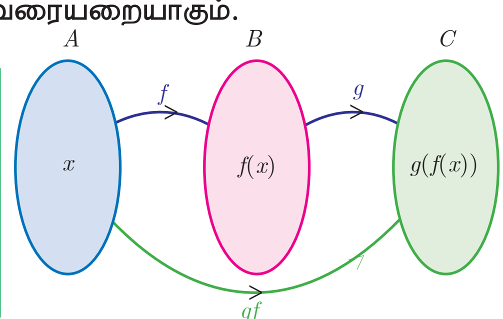
படம் 1.41

$A$ என்ற கணமானது பொதுத்தேர்வு எழுதும் மாணவர்களின் கணமாகும். $B \subseteq \mathbb{N}$ என்பது வரிசை எண்களின் கணம். மற்றும் $C \subseteq \mathbb{N}$ என்பது சங்கேத எண்களின் கணம் என்க. (படம் 1.41–ன் இதன் மூலம் இரண்டு சார்புகள் $f : A \to B$ மற்றும் $g : B \to C$ கிடைக்கப்பெறுகின்றன. $b = f(a)$ ஆனது மாணவர் $a$-க்கு கொடுக்கப்பட்ட வரிசை எண் ஆகும். $c = g(b)$ ஆனது வரிசை எண்ணிற்குக் கொடுக்கப்பட்ட சங்கேத எண் எனவும் கொள்க. இங்கு , $a \in A$, $b \in B$ மற்றும் $c \in C$. இதை $c = g(b) = g(f(a))$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே, $f$, $g$ ஆகிய இரண்டு சார்புகளின் சேர்ப்பினால் மாணவர் சங்கேத எண்ணுடன் இணைக்கப்படுகிறார். இதிலிருந்து கிடைப்பதே பின்வரும் வரையறையாகும்.

### வரையறை

$f : A \to B$ மற்றும் $g : B \to C$ ஆகியன இரண்டு சார்புகள் எனில், (படம் 1.42) $f$ மற்றும் g –ன் சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f$ -ஐ $g \circ f(x) = g(f(x))$ அனைத்து $x \in A$ என வரையறுக்கலாம்.



படம் 1.42

**எடுத்துக்காட்டு 1.20** $f(x) = 2x + 1$ மற்றும் $g(x) = x^2 - 2$ எனில், $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –ஐ காண்க.

**தீர்வு** $f(x) = 2x + 1$ , $g(x) = x^2 - 2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

எனவே $f \circ g = 2x^2 - 3$, $g \circ f = 4x^2 + 4x - 1$. மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $f \circ g \neq g \circ f$. என அறிகிறோம்.

**சிந்தனைக் களம்**

$f(x) = x^m$ மற்றும் $g(x) = x^n$ எனில், $f \circ g = g \circ f$ ?

**குறிப்பு**

பொதுவாக, ஏதேனும் இரு சார்புகள் $f$ மற்றும் $g$-க்கு, $f \circ g \neq g \circ f$ ஆகும். எனவே சார்புகளின் சேர்ப்புச் செயலி பரிமாற்று விதியைப் பூர்த்தி செய்வதில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 1.21** $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}$ –ஐ இரு சார்புகளின் சேர்ப்பாகக் குறிக்க.

**தீர்வு** $f_2(x)=2x^2-5x+3$ மற்றும் $f_1(x)=\sqrt{x}$ என வரையறுப்போம்.

எனவே,
$$f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{f_2(x)}$$
$$=f_1\left[f_2(x)\right]=f_1 f_2(x)$$

**எடுத்துக்காட்டு 1.22** If $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+k$ மற்றும் $f \circ g = g \circ f$ எனில், $k$ யின் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+k$
$$f \circ g(x)=f(g(x))=f(2x+k)=3(2x+k)-2=6x+3k-2$$

எனவே, $f \circ g(x)=6x+3k-2$.

$$g \circ f(x)=g(3x-2)=2(3x-2)+k$$

எனவே, $g \circ f(x)=6x-4+k$.

$f \circ g = g \circ f$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையினால், $6x+3k-2=6x-4+k$

$6x-6x+3k-k=-4+2$ –லிருந்து $k=-1$

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?** மதிப்பகம் $g$ –யின் உட்கணமாக, $g$ –யின் வீச்சகம் $f$ ஆக இருந்தால் மட்டுமே சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f(x)$ இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1.23** $f \circ f(k)=5$, $f(k)=2k-1$ எனில், $k$ -யின் மதிப்பைக் காண்க.

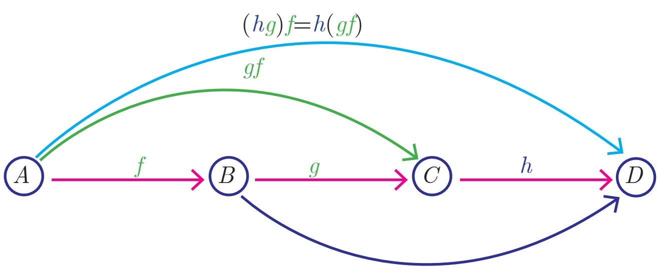
**தீர்வு**
$$f \circ f(k)=f(f(k))$$
$$=2(2k-1)-1=4k-3.$$

எனவே, $f \circ f(k)=4k-3$

ஆனால் $f \circ f(k)=5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையினால் $4k-3=5$ –லிருந்து $k=2$

## 1.9.1 மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பு (Composition of three functions)



படம் 1.43

$A, B, C, D$ ஆகியவை நான்கு கணங்கள் மற்றும் $f: A \to B$, $g: B \to C$ மற்றும் $h: C \to D$ ஆகியவை மூன்று சார்புகள் என்க. சார்புகளின் சேர்ப்பு (படம் 1.43) $f \circ g$ மற்றும் $g \circ h$, ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி இரண்டு புதுச் சார்புகள் $(f \circ g) \circ h$ மற்றும் $f \circ (g \circ h)$ ஆகியவை கிடைக்கப் பெறலாம். சார்புகளின் சேர்ப்பு பரிமாற்று விதியைப் பூர்த்தி செய்வதில்லை என்பதை நாம் அறிவோம். தற்பொழுது சேர்ப்பு விதியைப் பூர்த்தி செய்யுமா?

**குறிப்பு**

மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியைப் பூர்த்தி செய்யும். அதாவது, $f \circ (g \circ h)=(f \circ g) \circ h$

**எடுத்துக்காட்டு 1.24** $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 1-2x$ மற்றும் $h(x) = 3x$ எனில், $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 1-2x$, $h(x) = 3x$

இப்பொழுது, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-2x) = 2(1-2x)+3 = 5-4x$

மேலும், $(f\circ g)\circ h(x) = (f\circ g)(h(x)) = (f\circ g)(3x) = 5-4(3x) = 5-12x$ ....(1)

$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = 1-2(3x) = 1-6x$

மேலும், $f\circ(g\circ h)(x) = f(1-6x) = 2(1-6x)+3 = 5-12x$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது, $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

**எடுத்துக்காட்டு 1.25** $f(x) = 3x+1$ , $g(x) = x+3$ ஆகியவை இரு சார்புகள். மேலும் $gff(x) = fgg(x)$ எனில் $x$ –ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $gff(x) = g\,[f\{f(x)\}]$

$= g\,[f(3x+1)] = g\,[3(3x+1)+1] = g\,(9x+4)$

$g\,(9x+4) = [(9x+4)+3] = 9x+7$

$fgg(x) = f\,[g\,\{g\,(x)\}]$

$= f\,[g\,(x+3)] = f\,[(x+3)+3] = f\,(x+6)$

$f\,(x+6) = [3(x+6)+1] = 3x+19$

$gff(x) = fgg(x)$ எனவே, $9x+7 = 3x+19$. இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்பொழுது நமக்குக் கிடைப்பது $x = 2$.

## முன்னேற்றச் சோதனை

பின்வரும் வினாக்களுக்குச் சரியானவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலமாக விடை கூறுக.

1. சார்புகளின் சேர்ப்பானது பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டது.
(அ) எப்பொழுதும் உண்மையே (ஆ) ஒருபொழுதும் உண்மையில்லை (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

2. சார்புகளின் சேர்ப்பானது சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.
(அ) எப்பொழுதும் உண்மையே (ஆ) ஒருபொழுதும் உண்மையில்லை (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

## செயல்பாடு 4

$h(x) = f\circ g(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் அட்டவணையில் $h(x)$-ஐ பூர்த்தி செய்க.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | - |
| 3 | - |
| 4 | - |

$h(1)$–ஐ எவ்வாறு கண்டறிவது?

$h(x) = f\circ g(x)$

$h(1) = f\circ g(1)$

$= f(2) = 3$

ஆகையினால்,

$h(1) = 3$

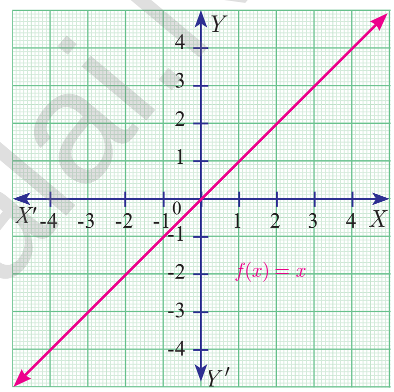
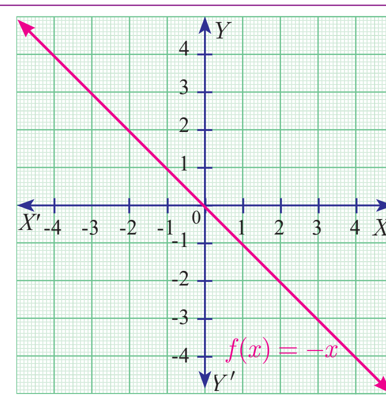
## 1.10 நேரிய, இருபடி, முப்படி மற்றும் தலைகீழ்ச் சார்புகளுக்கான வரைபடங்களைப் அடையாளம் காணுதல் (Identifying the graphs of Linear, Quadratic, Cubic and Reciprocal functions)

வளைவரைகள் மற்றும் சார்புகளை வரைபடங்களில் காட்சிப்படுத்தலாம். எனவே கருத்துகளை நன்றாகப் புரிந்துகொள்ள வரைபடங்கள் மிகுந்த உதவியாக உள்ளன. இந்தப் பிரிவில், நாம் சில சார்புகளை, வரைபடங்கள் மூலமாக விவாதிக்க உள்ளோம். குறிப்பாக, நேரிய, இருபடி, முப்படி மற்றும் தலைகீழ்ச் சார்புகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.

### 1.10.1 நேரிய சார்புகள் (Linear Function)

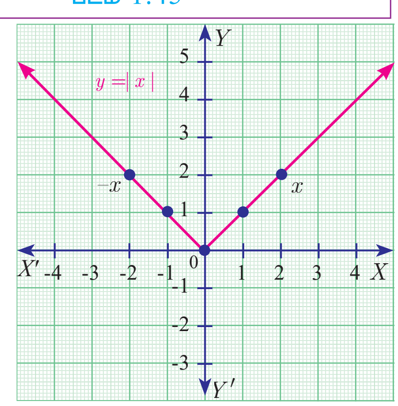
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ என்ற சார்பானது, $f(x)=mx+c$, $m\neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது நேரிய சார்பாகும். இதை, வடிவியல் முறையில் வரைபடத்தில் நேர்கோடாகக் குறிப்பிடலாம்.

ஒரு சில குறிப்பிட்ட நேரிய சார்புகளும் அதன் வரைபடங்களும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| எண் | சார்புகள் | மதிப்பகம் மற்றும் வரையறை | வரைபடம் |
|---|---|---|---|
| 1 | சமனிச் சார்பு | $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. |  படம் 1.44 |
| 2 | கூட்டல் தலைகீழிச் சார்பு | $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=-x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது |  படம் 1.45 |

### 1.10.2 மட்டு அல்லது மிகை மதிப்புச் சார்பு (Modulus or Absolute valued Function)

$f:\mathbb{R}\rightarrow[0,\infty)$ ஆனது $f(x)=|x|=\begin{cases}x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதன் வரைபடத்தைக் காண்க.



படம் 1.46

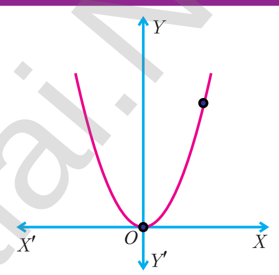
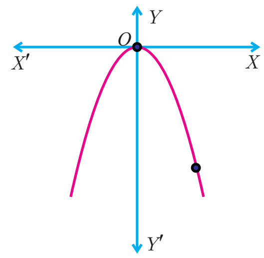
**குறிப்பு**

- மட்டுச்சார்பானது ஒரு நேரிய சார்பு இல்லை. ஆனால் அது இரு நேரியச் சார்புகள் $x$ மற்றும் $-x$ கலந்த கலவையாகும்.
- நேரிய சமன்பாடுகள் எப்பொழுதும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்புகள் மற்றும் அவை குழுக் குறியியல் (Cryptography) பயன்பாடுகளுக்கும், அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்பத்தில் சில உட்பிரிவுகளிலும் பயன்படுகின்றன.

### 1.10.3 இருபடிச் சார்பு (Quadratic Function)

ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதை இருபடிச் சார்பு என்கிறோம்.

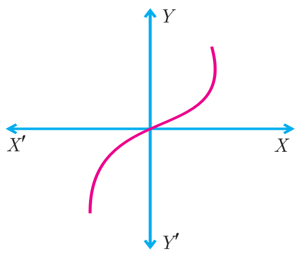
சில குறிப்பிட்ட இருபடிச் சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள்

| சார்பு, மதிப்பகம், வீச்சகம் மற்றும் வரையறை | வரைபடம் |
|---|---|
| $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in[0,\infty)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. |   படம் 1.47(i) |
| $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=-x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in(-\infty,0]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. |   படம் 1.47(ii) |

ஒரு பொருள் புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாகக் கடந்து செல்லும் பாதை இருபடிச் சார்பாக அமையும். இது ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல. ஏன்?

### 1.10.4 முப்படிச் சார்பு (Cubic Function)

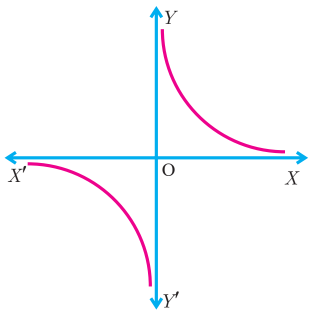
ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, (a\neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதைக் கனச் சார்பு அல்லது முப்படிச் சார்பு என அழைக்கிறோம். $f(x)=x^3$ -ன் வரைபடமானது (படம் 1.48)–ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 1.48

### 1.10.5 தலைகீழ்ச் சார்பு (Reciprocal Function)

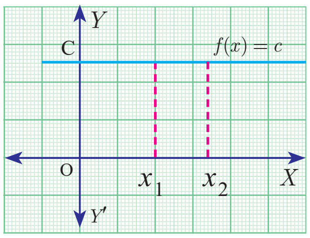
ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ , $f(x)=\dfrac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது தலைகீழ்ச் சார்பு எனப்படும் (படம் 1.49).



படம் 1.49

### 1.10.6 மாறிலிச் சார்பு (Constant Function)

ஒரு சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஐ $f(x)=c$, அனைத்து $x\in\mathbb{R}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது மாறிலிச்சார்பு எனப்படும். (படம் 1.50).



படம் 1.50

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு மாறிலிச் சார்பு நேரிய சார்பாகுமா?
2. இருபடிச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
3. கனச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
4. தலைகீழ்ச் சார்பு இருபுறச்சார்பாகுமா?
5. $f:A\to B$ ஆனது மாறிலிச் சார்பு எனில் $f$ –யின் வீச்சகத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

## பயிற்சி 1.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள $f$ மற்றும் $g$ எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$ –ஐக் காண்க. $f\circ g=g\circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க.

   (i) $f(x)=x-6,\ g(x)=x^2$ (ii) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ g(x)=2x^2-1$

   (iii) $f(x)=\dfrac{x+6}{3},\ g(x)=3-x$ (iv) $f(x)=3+x,\ g(x)=x-4$

   (v) $f(x)=4x^2-1,\ g(x)=1+x$

2. $f\circ g=g\circ f$ எனில் $k$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $f(x)=3x+2,\ g(x)=6x-k$ (ii) $f(x)=2x-k,\ g(x)=4x+5$

3. $f(x)=2x-1,\ g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ எனில், $f\circ g=g\circ f=x$ எனக் காட்டுக.

4. (i) $f(x)=x^2-1,\ g(x)=x-2$ மற்றும் $g\circ f(a)=1$ எனில், $a$-ஐக் காண்க.

   (ii) $f(k)=2k-1$ மற்றும் $f\circ f(k)=5$ எனில், $k$-ஐக் காண்க.

5. $A,B,C\subseteq\mathbb{N}$ மற்றும் $f:A\to B$ என்ற சார்பு $f(x)=2x+1$ எனவும் மற்றும் $g:B\to C$ ஆனது $g(x)=x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்பட்டால், $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$.-யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

6. $f(x)=x^2-1$ எனில் (i) $f\circ f$ (ii) $f\circ f\circ f$ –ஐக் காண்க.

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ மற்றும் $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது முறையே, $f(x)=x^5$, $g(x)=x^4$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f$, $g$ ஆகியவை ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா மற்றும் $f\circ g$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா என்று ஆராய்க.

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ஆகியவற்றைக் கொண்டு $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ எனக் காட்டுக.

   (i) $f(x) = x - 1,\ g(x) = 3x + 1$ மற்றும் $h(x) = x^2$

   (ii) $f(x) = x^2,\ g(x) = 2x$ மற்றும் $h(x) = x + 4$

   (iii) $f(x) = x - 4,\ g(x) = x^2$ மற்றும் $h(x) = 3x - 5$

9. $f = \{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது $\mathbb{Z}$ –லிருந்து $\mathbb{Z}$ –க்கான ஒரு நேரிய சார்பு எனில், $f(x)$ -ஐக் காண்க.

10. ஒரு மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின்படி, $C(t)$ என்ற ஒரு நேரிய சுற்று, $C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$ -ஐ பூர்த்தி செய்கிறது. மேலும் இங்கு $a, b$ ஆகியவை மாறிலிகள் எனில், $C(t) = 3t$ ஆனது ஒரு நேரிய சுற்று எனக் காட்டுக.

K9ZJ3V

## பயிற்சி 1.6

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $n(A \times B) = 6$ மற்றும் $A = \{1,3\}$ எனில், $n(B)$ ஆனது

   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 6

2. $A = \{a,b,p\},\ B = \{2,3\},\ C = \{p,q,r,s\}$ எனில், $n[(A \cup C) \times B]$ ஆனது

   (1) 8 (2) 20 (3) 12 (4) 16

3. $A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}, C = \{5,6\}$ மற்றும் $D = \{5, 6, 7, 8\}$ எனில் கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது சரியான கூற்று?

   (1) $(A \times C) \subset (B \times D)$ (2) $(B \times D) \subset (A \times C)$

   (3) $(A \times B) \subset (A \times D)$ (4) $(D \times A) \subset (B \times A)$

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ -லிருந்து, $B$ என்ற கணத்திற்கு 1024 உறவுகள் உள்ளது எனில் $B$ -ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

   (1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 8

5. $R = \{(x, x^2) \mid x$ ஆனது 13-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்கள்$\}$ என்ற உறவின் வீச்சகமானது

   (1) {2,3,5,7} (2) {2,3,5,7,11}

   (3) {4,9,25,49,121} (4) {1,4,9,25,49,121}

6. $(a + 2, 4)$ மற்றும் $(5, 2a + b)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், $(a, b)$ என்பது

   (1) (2, –2) (2) (5,1) (3) (2,3) (4) (3, –2)

7. $n(A) = m$ மற்றும் $n(B) = n$ என்க. $A$ –லிருந்து $B$-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட வெற்று கணமில்லாத உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

   (1) $m^n$ (2) $n^m$ (3) $2^{mn} - 1$ (4) $2^{mn}$

8. $\{(a,8),(6,b)\}$ ஆனது ஒரு சமனிச் சார்பு எனில், $a$ மற்றும் $b$ மதிப்புகளாவன முறையே

   (1) (8,6) (2) (8,8) (3) (6,8) (4) (6,6)

9. Let $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{4,8,9,10\}$ என்க. சார்பு $f:A\rightarrow B$ ஆனது $f=\{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $f$ -என்பது

(1) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு (2) சமனிச் சார்பு
(3) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு (4) உட்சார்பு

10. $f(x)=2x^2$ மற்றும் $g(x)=\dfrac{1}{3x}$ எனில் $f\circ g$ ஆனது

(1) $\dfrac{3}{2x^2}$ (2) $\dfrac{2}{3x^2}$ (3) $\dfrac{2}{9x^2}$ (4) $\dfrac{1}{6x^2}$

11. $f:A\rightarrow B$ ஆனது இருபுறச் சார்பு மற்றும் $n(B)=7$ எனில் $n(A)$ ஆனது

(1) 7 (2) 49 (3) 1 (4) 14

12. $f$ மற்றும் $g$ என்ற இரண்டு சார்புகளும்

$f=\{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$

$g=\{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $f\circ g$ -ன் வீச்சகமானது

(1) {0,2,3,4,5} (2) {–4,1,0,2,7} (3) {1,2,3,4,5} (4) {0,1,2}

13. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ எனில்

(1) $f(xy)=f(x).f(y)$ (2) $f(xy)\geq f(x).f(y)$
(3) $f(xy)\leq f(x).f(y)$ (4) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை

14. $g=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ என்ற சார்பானது $g(x)=\alpha x+\beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ -வின் மதிப்பானது

(1) (–1,2) (2)(2, –1) (3) (–1, –2) (4) (1,2)

15. $f(x)=(x+1)^3-(x-1)^3$ குறிப்பிடும் சார்பானது

(1) நேரிய சார்பு (2) ஒரு கனச் சார்பு (3) தலைகீழ்ச் சார்பு (4) இருபடிச் சார்பு

## அலகுப் பயிற்சி - 1

1. $(x^2-3x,\ y^2+4y)$ மற்றும் $(-2,5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், $x$ மற்றும் $y$ -ஐக் காண்க.

2. $A\times A$ கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனின், 9 உறுப்புகளில், உறுப்புகள் (–1, 0) மற்றும் $(0,1)$ –யும் இருக்கிறது எனில், $A$ -யில் உள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. மற்றும் A ×A –ன் மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ 4 & x<1\end{cases}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a+1)$ ($a\geq 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) ஆகியவற்றை காண்க.

4. $A=\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ என்க. மற்றும் $f:A\rightarrow N$ ஆனது $f(n)=n$ -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி ($n\in A$) என வரையறுக்கப்பட்டால் $f$ -ன் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதுக மற்றும் $f$ –ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

5. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ என்ற சார்பின் மதிப்பகத்தைக் காண்க.

6. $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ மற்றும் $h(x)=x-2$ எனில், $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ என நிறுவுக.

7. $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{5,6\}$ மற்றும் $D=\{5,6,7,8\}$ எனில், A×C ஆனது B×D உட்கணமா எனச் சரிபார்க்க.

8. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$ என்க. $x\neq 0$ எனில், $f(f(x))=-\dfrac{1}{x}$ எனக் காட்டுக.

9. சார்பு $f$ மற்றும் $g$ ஆகியவை $f(x)=6x+8$; $g(x)=\dfrac{x-2}{3}$ எனில்,
   (i) $gg\left(\dfrac{1}{2}\right)$ -யின் மதிப்பைக் காண்க. (ii) $gf(x)$ -ஐ எளிய வடிவில் எழுதுக.

10. பின்வருவற்றின் மதிப்பகங்களை எழுதுக.
   (i) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-9}$ (ii) $p(x)=\dfrac{-5}{4x^2+1}$ (iii) $g(x)=\sqrt{x-2}$ (iv) $h(x)=x+6$

## நினைவில் கொள்ளவேண்டியவை

- $A$ உடன் $B$ -க்கான கார்டீசியன் பெருக்கலை $A\times B=\{(a,b)$ அனைத்து $a\in A,\ b\in B\}$ என வரையறுக்கலாம்.
- $A$-லிருந்து $B$-க்கான உறவு $R$ ஆனது, $A\times B$ -யின் உட்கணமாகும். அதாவது, $R\subseteq A\times B$.
- $X$ லிருந்து $Y$ க்கான உறவு $f$-ல் ஒவ்வொரு $x\in X$ க்கும் ஒரே ஒரு $y\in Y$ உண்டு எனில், அதை சார்பு என்கிறோம்.
- ஒரு சார்பைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்
  (i) அம்புக் குறி படம்
  (ii) அட்டவணை முறை
  (iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்
  (iv) வரைபட முறை
- சில வகையான சார்புகளாவன
  (i) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு
  (ii) மேல் சார்பு
  (iii) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு
  (iv) உட்சார்பு
- சமனிச் சார்பு $f(x)=x$.
- தலைகீழ்ச் சார்பு $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
- மாறிலிச் சார்பு $f(x)=c$.
- நேரியச் சார்பு $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$.
- இருப்படிச் சார்பு $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.
- முப்படிச் சார்பு (கனச்சார்பு) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$.

- $A$, $B$ மற்றும் $C$ ஆகியவை மூன்று வெற்றில்லா கணங்கள், $f : A \to B$, $g : B \to C$ ஆகியவை இரண்டு சார்புகள் எனில், $g \circ f : A \to C$ என்ற $f$ மற்றும் $g$ சார்புகளின் சேர்ப்பை $g \circ f(x) = g(f(x))$ (அனைத்து $x \in A$) என வரையறுக்கலாம்.
- $f$, $g$ ஆகியவை ஏதேனும் இரு சார்புகள் எனில், பொதுவாக $f \circ g \neq g \circ f$.
- $f$, $g$ மற்றும் $h$ ஏதேனும் மூன்று சார்புகள் எனில் $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

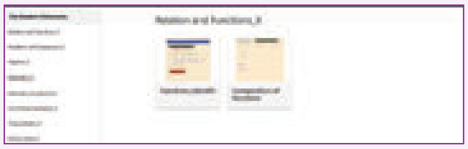
## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

### ICT 1.1

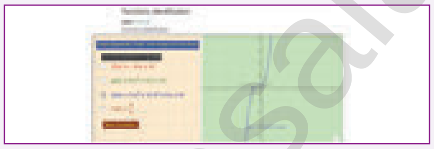
**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Geogebra –வின் Relations and Functions பக்கத்திற்குச் செல்க. பணித்தாளின் இடப்புறம் பல செயல்பாடுகள் உறவுகளும் சார்புகளும் என்ற தலைப்பிற்கு தொடர்புடையதாக இருக்கும். அவற்றில் Functions Identification என்ற பணித்தாளை தேர்வு செய்யவும்.

**படி 2:** இடப்புறம் கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் ஒவ்வொரு சார்பிற்கும் உரிய பெட்டியைத் தேர்ந்தெடுக்க. அதற்கான வரைபடம் வலப்புறம் இருப்பதைக் காணலாம். ஒவ்வொரு வரைபடத்தையும் புரிந்து கொண்டபின் New functions கிளிக் செய்க. தொடர்க.

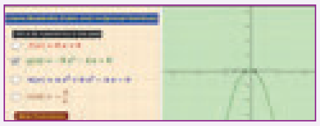
படி 1



படி 2



முடிவுகள்

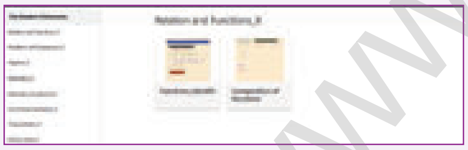


### ICT 1.2

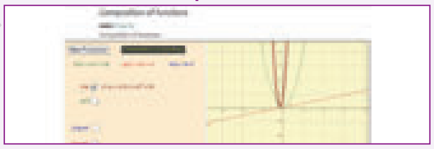
**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Geogebra –வின் Relations and Functions பக்கத்திற்குச் செல்க. பணித்தாளின் இடப்புறம் பல செயல்பாடுகள் உறவுகளும் சார்புகளும் என்ற தலைப்பிற்கு தொடர்புடையதாக இருக்கும். அவற்றில் Compositions of functions என்ற பணித்தாளை தேர்வு செய்யவும்.

**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் New problem என்பதை சொடுக்குவதன் மூலம் பணித்தாளின் கேள்வியை மாற்ற முடியும். பின்னர் வலை நகர்த்தி கணக்கின் படிகளைக் காணலாம். சரிபார்க்கும் பெட்டியைச் சொடுக்கி சரியான விடையைப் பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



முடிவுகள்

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356191

அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்யவும்.

B371_10_MATHS_TM

# 2 எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்

*எண்கள் அழகுத் தன்மை பொருந்தியவை என எனக்கு தெரியும் அவை அழகில்லை எனில் எதுவுமே அழகில்லை –பால் ஏர்டிஷ்*

ஸ்ரீநிவாச இராமானுஜன்
(1887-1920)

ஸ்ரீநிவாச இராமானுஜன் ஈரோட்டில் ஏழைக் குடும்பத்தில் பிறந்த மாபெரும் இந்தியக் கணித மேதை ஆவார். சிறு வயதிலேயே கணிதத்தில் திறன் மிக்கவராகவும் மற்றும் மின்னல் வேகத்தில் கணக்கீடுகளைச் செய்யும் ஆற்றலும் பெற்றிருந்தார். இவர் ஆயிரக்கணக்கான சூத்திரங்களைத் தருவித்து அவற்றைத் தனது மூன்று குறிப்பேடுகளில் எழுதி வைத்தார். அவரது குறிப்பேடுகள் இன்றும் சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தில் பாதுகாக்கப்படுகின்றன. பல பெருமக்களின் உதவியுடன் சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தின் முதல் ஆராய்ச்சி மாணவரானார். பிறகு இங்கிலாந்து சென்று 1914 முதல் 1919 வரை கணித வல்லுநர் G.H. ஹார்டியுடன் இணைந்து பல ஆய்வுகளை மேற்கொண்டார்.

இராமானுஜன் எண்களின் அமைப்புப் பற்றி ஆராய்வதில் மிகுந்த ஆர்வம் கொண்டிருந்தார். அதன் விளைவாகப் பகுமுறை எண்கணிதத்தில் எண்ணற்ற புதிய கருத்துகளை உருவாக்கினார். இவரது கணிதத் திறமையை மாபெரும் கணித மேதைகளான ஆய்லர் மற்றும் ஜெகோபியுடன் ஒப்பிடுகின்றனர். இராமானுஜன் 30 ஆய்வுக் கட்டுரைகளும் மற்றும் G.H. ஹார்டியுடன் இணைந்து 7 ஆய்வுக் கட்டுரைகளும் படைத்துள்ளார். தன்னுடைய 32 வருடக் குறுகிய ஆயுட்காலத்தில் இவர் 3972 சூத்திரங்கள் மற்றும் தேற்றங்களை உருவாக்கியுள்ளார். இவருடைய ஆராய்ச்சிக்காகக் கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக் கழகம் இவருக்கு 1916 ஆம் ஆண்டு B.A. ஆய்வு பட்டம் வழங்கியது. இது இன்றைய முனைவர் (Ph.D.) பட்டத்திற்கு இணையானது. எண்கணிதத்தில் இவருடைய பங்களிப்பிற்காக இலண்டன் ராயல் சொசைட்டியின் மதிப்புமிகு உறுப்பினர் (Fellow of Royal Society - F.R.S.) அந்தஸ்து 1918–யில் வழங்கப்பட்டது.

இராமானுஜனின் கண்டுபிடிப்புகள் இன்றும் உலகளவில் கணித வல்லுநர்களைக் கவர்ந்துள்ளது. ஒரு நூற்றாண்டுக்கு முன்பே தனது வாழ்நாளின் இறுதிக் காலத்தில் இவர் இயற்றிய குறிப்புகள் இன்றைய நவீன அறிவியலோடு தொடர்புடையதாக விளங்குகின்றன.

## கற்றல் விளைவுகள்

SHLMI5

- யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றக் கருத்தை அறிதல்.
- யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம கண்டறிதல்.
- அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- ஒருங்கிசைவு மட்டு '$n$', '$n$'–யின் கூட்டல் மட்டு மற்றும் பெருக்கல் மட்டு ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- தொடர் வரிசையை வரையறை செய்தல் மற்றும் தொடர் வரிசையை ஒரு சார்பாகப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- கூட்டுத் தொடர்வரிசை (A.P) மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையை (G.P) வரையறை செய்தல்.
- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கண்டறிதல்.
- பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $n$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கண்டறிதல்.
- $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ போன்ற சில முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதலை அறிதல்.

## 2.1 அறிமுகம் (Introduction)

பல ஆயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே மனிதர்களுக்கு எண்களைப் பற்றிப் படிப்பது மிகுந்த ஆர்வத்தை ஏற்படுத்துவதாக அமைந்திருந்தது. $25,000$ ஆண்டுகளுக்கு முன்பு பயன்படுத்திய லெபாம்போ மற்றும் இஷாங்கோ எலும்புகளின் கண்டுபிடிப்பானது மனிதர்கள் தங்களது அன்றாட தேவைகளுக்குக் கணக்கிடும் முறைகளைப் பயன்படுத்தியதை உணர்த்துகிறது. எலும்புகளில் குறிப்புகளை ஏற்படுத்தித் தங்களின் கணக்கிடலைத் திறமையாகப் பதிவு செய்துள்ளனர். இவை சந்திரனின் நிலையைக் கொண்டு காலநிலையைக் கணக்கிடும் சந்திர நாள்காட்டியாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எனவே, இந்த எலும்புகளைப் பழங்கால எண்ணும் கருவியாகக் கருதலாம். இந்த அடிப்படைக் கணக்கீட்டு முறையிலிருந்து இன்றைய சூழலில் நாம் பெரும் முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளோம்.

இஷாங்கோ எலும்புகளில் எண் பதிவுகள்

படம் 2.1

பிதாகரஸ் காலம் முதல் இன்றைய நவீனக் கணித வல்லுநர்கள் வரை அனைவரும் எண்களின் அமைப்பு முறையைக் கண்டு வியப்படைகின்றனர். நாம் இங்கு யூக்ளிடின் முக்கியக் கருத்துகளை விரிவாகக் காண உள்ளோம். அதைத் தொடர்ந்து மட்டு எண்கணிதம் பற்றியும், தொடர் வரிசை மற்றும் தொடர்கள் பற்றியும் படிக்க உள்ளோம். இந்தக் கருத்துகள் அனைத்தும் உங்களது உயர் வகுப்புக் கணிதப் புரிதலுக்கு அடித்தளமாக அமையும். கணிதத்தில் கவர்ந்திழுக்கும் பகுதியான எண்களைப் பற்றிப் படிக்க வேண்டிய முக்கியப் பயணத்தைத் தொடங்க வேண்டிய நேரம் இதுவாகும்.

## 2.2 யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம் (Euclid's Division Lemma)

முக்கியக் கணித மேதைகளில் ஒருவராகத் திகழ்ந்த யூக்ளிட் எழுதிய புத்தகமான "எலிமண்ட்ஸ்" $13$ தொகுதிகளைக் கொண்டது. முதல் ஆறு தொகுதிகள் வடிவியல் சார்ந்தவை. இதனாலேயே யூக்ளிடை "வடிவியலின் தந்தை" என அழைக்கிறோம். ஆனால், அவர் அடுத்த சில தொகுதிகளில் எண்களின் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளப் பல அடிப்படைத் தகவல்களை வழங்கியுள்ளார். அதில் ஒன்றுதான் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம். இது நீங்கள் முந்தைய வகுப்புகளில் செய்த எண்களின் நீள் வகுத்தல் முறையின் சுருக்கமே ஆகும்.

இங்கு நாம் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தையும் மற்றும் அதன் பயன்பாடான யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையையும் கற்க உள்ளோம்.

> லெம்மா $(lemma)$ என்பது ஒரு முக்கியத் தேற்றத்தை நிரூபிக்க உதவும் ஒரு துணைத் தேற்றம் ஆகும். இது வழக்கமாக ஒரு சிறு தேற்றம் எனக் கருதப்படும்.

### தேற்றம் 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

$a$ மற்றும் $b$ $\left(a > b\right)$ என்பன ஏதேனும் இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ . என்றவாறு $q,\ r$ எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

**குறிப்பு**

- வகுத்தலில் கிடைக்கும் மீதியானது வகுக்கும் எண்ணைவிட எப்பொழுதும் சிறியதாகவே அமையும்.
- $r = 0$ எனில் $a = bq$. எனவே $b$ ஆனது $a$ ஐ வகுக்கும்.
- இதுபோன்றே, $b$ ஆனது $a$ ஐ வகுக்கும் எனில், $a = bq$

**எடுத்துக்காட்டு 2.1** நம்மிடம் $34$ கேக் துண்டுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் $5$ கேக்குகள் மட்டுமே வைக்க இயலுமெனில் கேக்குகளை வைக்க எத்தனை பெட்டிகள் தேவை மற்றும் எத்தனை கேக்குகள் மீதமிருக்கும் எனக் காண்க.

**தீர்வு** 30 கேக்குகளை வைக்க 6 பெட்டிகள் தேவைப்படுகின்றன. அதில் 4 கேக்குகள் மீதமிருக்கும். கேக்குகளைப் பெட்டிகளில் வைக்கும் இம்முறையைப் பின்வருமாறு புரிந்து கொள்ளலாம்.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | $=$ | 5 | $\times$ | 6 | $+$ | 4 |
| மொத்தக் கேக்குகளின் எண்ணிக்கை | $=$ | ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் உள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை | $\times$ | பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை | $+$ | மீதமுள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை |
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| (வகுபடும் எண்) $a$ | $=$ | (வகுக்கும் எண்) $b$ | $\times$ | (ஈவு) $q$ | $+$ | (மீதி) $r$ |

**குறிப்பு**

- மேற்கண்ட துணைத் தேற்றமானது நீள் வகுத்தல் முறையின் மறுவடிவமே ஆகும். இங்கு $q$ மற்றும் $r$ என்பவை முறையே ஈவு மற்றும் மீதி ஆகும்.
- எந்தவொரு மிகை முழுவையும் 2 ஆல் வகுக்கும்போது 0 அல்லது 1 மட்டுமே மீதியாகக் கிடைக்கும். எனவே, எந்தவொரு மிகை முழுவையும் $2k$ அல்லது $2k+1$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இங்கு $k$ என்பது ஒரு மிகை முழு.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தை எந்த இரு முழு எண்களுக்கும் பொதுமைப்படுத்த இயலும்.

### பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

$a$ மற்றும் $b$ $(a>b)$ என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் எனில், $a=bq+r$, $0\leq r<|b|$ என்றவாறு $q$, $r$ எனும் முழுக்கள் கிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.2** பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் $a$ –யை $b$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க. (i) $a=-12$, $b=5$ (ii) $a=17$, $b=-3$ (iii) $a=-19$, $b=-4$

**தீர்வு**

(i) $a=-12$, $b=5$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r$, இங்கு $0\leq r<|b|$

$-12=5\times(-3)+3 \quad 0\leq r<|5|$

எனவே, ஈவு $q=-3$, மீதி $r=3$

(ii) $a=17 \quad b=-3$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r$, where $0\leq r<|b|$

$17=(-3)\times(-5)+2 \quad 0\leq r<|-3|$

எனவே, ஈவு $q=-5$, மீதி $r=2$

(iii) $a=-19$, $b=-4$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r$, $\quad 0\leq r<|b|$

$-19=(-4)\times(5)+1 \quad 0\leq r<|-4|$

எனவே, ஈவு $q=5$, மீதி $r=1$.

**சிந்தனைக் களம்**

ஒரு மிகை முழுவை 3 ஆல் வகுக்கும்போது

1. கிடைக்கும் மீதிகள் எவை?
2. அவற்றை எந்த வடிவில் எழுத இயலும்?

**முன்னேற்றச் சோதனை**

பின்வரும் முழுக்கள் $a$, $b$ ஆகியவற்றிற்கு $a=bq+r$ என்பதை நிறைவு செய்யும்படி $q$ மற்றும் $r$ காண்க.

1. $a=13$, $b=3$
2. $a=18$, $b=4$
3. $a=21$, $b=-4$
4. $a=-32$, $b=-12$
5. $a=-31$, $b=7$

**எடுத்துக்காட்டு 2.3** ஒற்றை முழு எண்களின் வர்க்கமானது $4q+1$, (இங்கு $q$ ஆனது முழு எண்) என்ற வடிவில் அமையும் எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $x$ என்பது ஓர் ஒற்றை முழு எண் என்க. எந்தவொரு ஒற்றை முழு எண்ணும் ஏதேனும் ஓர் இரட்டை முழு எண்ணை விட ஒன்று அதிகமாக இருக்கும் என்பதால், $x = 2k+1$, இங்கு $k$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு.

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 4k(k+1)+1 \\ &= 4q+1. \text{ இங்கு, } q = k(k+1) \text{ என்பது ஒரு முழு} \end{aligned}$$

## 2.3 யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை (Euclid's Division Algorithm)

முந்தைய பகுதியில், நாம் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகளைப் படித்தோம். தற்போது யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் படிக்க உள்ளோம். Algorithm என்ற ஆங்கில வார்த்தைக்கு வழிமுறை அல்லது படிமுறை என்பது பொருளாகும். Algorithm என்ற வார்த்தை 9 ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த பாரசீக நாட்டைச் சார்ந்த கணித மேதை அல்–கவாரிஸ்மி என்பவரின் பெயரிலிருந்து வந்தது. வழிமுறை (Algorithm) என்பது நமக்குத் தேவையான முடிவினைப் பெறும் வரையில் ஒரு படிநிலையில் பெறும் முடிவுகளை அதற்கு அடுத்த படிநிலையில் பயன்படுத்தும் வகையில் நன்கு வரையறை செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியான படிநிலைகளாகும்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை (மீ.பொ.வ) எளிய முறையில் கண்டறியலாம்.

### தேற்றம் 2

$a$ மற்றும் $b$ என்பன $a = bq + r$, என அமையும் மிகை முழுக்கள் எனில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகியவற்றின் அனைத்துப் பொது வகுத்திகளும் முறையே $b$ மற்றும் $r$ ஆகியவற்றின் பொது வகுத்திகளுக்குச் சமமாக இருக்கும், மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை.

### யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை

$a$ மற்றும் $b$, $a>b$ என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் காண,

**படி 1:** யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் படி $a = bq + r$ ; $0 \le r < b$. இங்கு $q$ என்பது ஈவு, $r$ என்பது மீதி. $r = 0$ எனில் $a$ மற்றும் $b$ –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி $b$ ஆகும்.

**படி 2:** அவ்வாறில்லையெனில், யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $b$ ஐ $r$ ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது $b = rq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < r$

**படி 3:** $r_1 = 0$ எனில், $a$ மற்றும் $b$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி $r$ ஆகும்.

**படி 4:** அவ்வாறில்லையெனில் மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பூச்சியம் மீதியாக வரும் நிலையில் அமையும் வகுத்தியானது $a$ மற்றும் $b$–யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

**குறிப்பு**

- மேற்கண்ட வழிமுறையில் நிச்சயம் ஏதாவது ஒரு படிநிலையில் மீதி பூச்சியமாகும். ஆகவே, இவ்வழிமுறை நிச்சயம் முடிவு பெறும்.
- பூச்சியம் மீதியாக வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த வேண்டும்.
- $a$, $b$ என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) $(a,b)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- மீப்பெரு பொது வகுத்தியானது மீப்பெரு பொதுக் காரணி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையானது மீதி _______ வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்துவதாகும்.
2. $k, k$ என்ற இரு சமமான மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ_______.

**விளக்கம் 1**

மேற்கண்ட வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிவோம். $a = 273$ மற்றும் $b = 119$ ஆகியவை இரு மிகை முழுக்கள் என்க. $a > b$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $273$ ஐ $119$ ஆல் வகுக்கும் போது நாம் பெறுவது,

$$273 = 119 \times 2 + 35 \qquad \ldots(1)$$

மீதி $35 \neq 0$.

எனவே, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி $119$ மற்றும் மீதி $35$ ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$119 = 35 \times 3 + 14 \qquad \ldots(2)$$

மீதி $14 \neq 0$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி $35$ மற்றும் மீதி $14$ ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$35 = 14 \times 2 + 7 \qquad \ldots(3)$$

மீதி $7 \neq 0$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி $14$ மற்றும் மீதி $7$ ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$14 = 7 \times 2 + 0 \qquad \ldots(4)$$

இந்தப் படி நிலையில் மீதி $= 0$. வகுத்தி $= 7$.

பூச்சியம் மீதியாகக் கிடைப்பதால் இந்நிலையில் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை நிறைவு பெறும்.

எனவே, $273, 119$–யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி(மீ.பொ.வ) $= 7$

**எடுத்துக்காட்டு 2.4** $210$ மற்றும் $55$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325$, என்ற வடிவில் எழுதினால் $x$ –யின் மதிப்புக் காண்க.

**தீர்வு** யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட எண்களுக்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

$$\begin{aligned} 210 &= 55 \times 3 + 45 \\ 55 &= 45 \times 1 + 10 \\ 45 &= 10 \times 4 + 5 \\ 10 &= 5 \times 2 + 0 \\ \text{மீதி} &= 0 \end{aligned}$$

ஆகவே, கடைசி படிநிலையின் வகுத்தி $5$ ஆனது $210$ மற்றும் $55$ –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும். மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325 = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\begin{aligned} 55x &= 330 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.5** 445 மற்றும் 572 –ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் வகுக்கும்போது முறையே மீதி 4 மற்றும் 5 –ஐ தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் கண்டறிக.

**தீர்வு** 445 மற்றும் 572 ஐ வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 4 மற்றும் 5 எனில், நமக்குத் தேவையான எண் $445-4=441$, மற்றும் $572-5=567$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகத்தான் இருக்கும்.

எனவே நாம் 441 மற்றும் 567 ஆகிய எண்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிவோம். யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையின்படி நாம் பெறுவது,

$$567 = 441\times1+126$$
$$441 = 126\times3+63$$
$$126 = 63\times2+0$$

ஆகவே 441 மற்றும் 567 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 63 ஆகும். எனவே தேவையான எண் 63 ஆகும்.

### செயல்பாடு 1

இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ காண இந்தச் செயல்பாடு உதவுகிறது. முதலில் நாம் பின்வருவனவற்றை உற்று நோக்குவோம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை நீள அகலங்களாக உடைய செவ்வகம் ஒன்றை உருவாக்குக.

(ii) இந்தச் செவ்வகத்தைச் சிறு சதுரங்களைப் பயன்படுத்தி நிரப்ப முயற்சி செய்க.

(iii) $1\times1$ சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; $2\times2$ சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; $3\times3$ சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; இதுபோலத் தொடர்க.

(iv) இவ்வாறு நிரப்பும்போது முழுச் செவ்வகத்தையும் நிரப்பக்கூடிய மிகப் பெரிய சதுரத்தின் பக்கமே அவ்வெண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

(v) (அ) 12,20 (ஆ) 16,24 (இ) 11,9 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

**தேற்றம் 3**

$a$ மற்றும் $b$ என்பன இரு மிகை முழுக்கள் மற்றும் $a>b$ எனில்,

$(a,\ b)$ –யின் மீ.பொ.வ $=(a-b, b)$ .–யின் மீ.பொ.வ

### செயல்பாடு 2

கொடுக்கப்பட்ட இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ காண உதவும் மற்றொரு செயல்பாடு இதுவாகும்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களில் சிறிய எண்ணைப் பெரிய எண்ணிலிருந்து கழிக்கவும்.

(ii) தற்போது கிடைத்த எண்ணையும், சிறிய எண்ணையும் எடுத்துக்கொண்டு இவ்விரு எண்களில் சிறிய எண்ணைப் பெரிய எண்ணிலிருந்து கழிக்கவும்.

(iii) இவ்வாறு பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைத் தொடர்ந்து கழிக்கவும்.

(iv) அவ்விரு எண்களும் சமமாகும்போது இச்செயல் முறையை நிறுத்தவும்.

(v) படிநிலை (iv) –யில் சமமாக வந்துள்ள எண்ணே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

மேற்கண்ட செயற்பாட்டில் கூறப்பட்ட படிநிலைகளைக் கொண்டு பின்வரும் எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க. (i) 90,15 (ii) 80,25 (iii) 40,16 (iv) 23,12 (v) 93,13

### மூன்று எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி

பின்வரும் செயல்முறையைப் பயன்படுத்தி யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையின் மூலம் மூன்று மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் (மீ.பொ. வ) காண இயலும்.

$a, b, c$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் என்க.

(i) $a, b$ –யின் மீ.பொ. வ காண்க. அதை $d$ எனக் கொள்க.

$$d = (a, b)$$

(ii) $d$ மற்றும் $c$ –யின் மீ.பொ.வ காண்க.

இந்த மீப்பெரு பொது வகுத்தியே கொடுக்கப்பட்ட மூன்று மிகை முழுக்கள் $a,\ b,\ c$ –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.6** $396, 504, 636$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட மூன்று எண்களின் மீ.பொ.வ காண, நாம் முதலில் முதல் இரு எண்களின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

$396$ மற்றும் $504$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண,

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $504 = 396 \times 1 + 108$

இங்கு மீதி $108 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த $396 = 108 \times 3 + 72$

இங்கு மீதி $72 \neq 0$,

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $108 = 72 \times 1 + 36$

இங்கு மீதி $36 \neq 0$,

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $72 = 36 \times 2 + 0$

இங்கு மீதி $= 0$. எனவே $396$ மற்றும் $504$–யின் மீ.பொ.வ $36$ ஆகும். $636$ மற்றும் $36$ –யின் மீ.பொ.வ காண, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $636 = 36 \times 17 + 24$

இங்கு மீதி $24 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $36 = 24 \times 1 + 12$

இங்கு மீதி $12 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $24 = 12 \times 2 + 0$

இங்கு மீதி$=0$. எனவே, $636$ மற்றும் $36$ –யின் மீ.பொ.வ $= 12$

எனவே $396, 504$ மற்றும் $636$ –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி $12$ ஆகும்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி $1$ எனில், அவ்விரு எண்களும் சார்பகா எண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

### பயிற்சி 2.1

1. $3$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $2$ –ஐத் தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களையும் காண்க.
2. ஒரு நபரிடம் $532$ பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு $21$ பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார். எத்தனை வரிசைகள் முழுமை பெறும் எனவும் மற்றும் எத்தனை பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும் எனவும் காண்க.

3. தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.
4. $a$, $b$ மற்றும் $c$ என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9,7,10 எனில் $a+b+c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.
5. எந்த மிகை முழுவின் வர்க்கத்தையும் 4 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 0 அல்லது 1 மட்டுமே கிடைக்கும் என நிறுவுக.
6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

   (i) 340 மற்றும் 412 (ii) 867 மற்றும் 255

   (iii) 10224 மற்றும் 9648 (iv) 84, 90 மற்றும் 120
7. 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.
8. 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி $d$ என்க. $d = 32x + 60y$ எனில் $x$ மற்றும் $y$ என்ற முழுக்களைக் காண்க.
9. ஒரு மிகை முழுவை 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது. அதே மிகை முழுவை 11 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
10. எந்த இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுவும் சார்பகா எண்கள் என நிறுவுக.

## 2.4 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் (Fundamental Theorem of Arithmetic)

பின்வரும் ஆசிரியர் மற்றும் மாணவர்களது உரையாடலைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

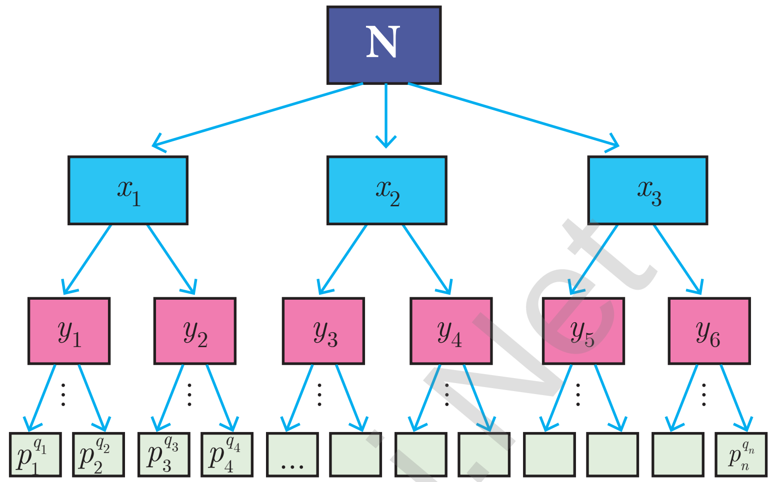
| | | |
|---|---|---|
| ஆசிரியர் | : | 240 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்துக. |
| மலர் | : | $24 \times 10$ |
| இரகு | : | $8 \times 30$ |
| இனியா | : | $12 \times 20$ |
| குமார் | : | $15 \times 16$ |
| மலர் | : | யாருடைய விடை சரியானது ஐயா? |
| ஆசிரியர் | : | எல்லோருடைய விடைகளும் சரிதான். |
| இரகு | : | எப்படி ஐயா? |
| ஆசிரியர் | : | ஒவ்வொரு காரணியையும் பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்கவும். |
| மலர் | : | $2\times2\times2\times3\times2\times5$ |
| இரகு | : | $2\times2\times2\times2\times3\times5$ |
| இனியா | : | $2\times2\times3\times2\times2\times5$ |
| குமார் | : | $3\times5\times2\times2\times2\times2$ |
| ஆசிரியர் | : | நன்று ! இப்போது உங்கள் விடையில் எத்தனை 2,3,5 வந்துள்ளன. |
| மலர் | : | எனக்கு நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது. |
| இரகு | : | எனக்கு நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது. |
| இனியா | : | எனக்கும் நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது. |
| குமார் | : | எனக்கும் அதேதான் கிடைத்தது. |
| மலர் | : | எங்கள் அனைவருக்கும் நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது. இது மிகவும் ஆச்சரியமாக உள்ளது. |
| ஆசிரியர் | : | ஆமாம். உண்மைதான். எந்த ஓர் எண்ணைப் பகாக் காரணிப் படுத்தினாலும் நமக்கு ஒரே விதமான பகாக் காரணிகள் தான் கிடைக்கும். |

மேற்கண்ட கருத்து நம்மைப் பின்வரும் முக்கியத் தேற்றத்திற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

### தேற்றம் 4 (அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்) (நிரூபணம் இல்லாமல்)

"1 ஐ தவிர்த்து மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த முடியும். மேலும் இந்தக் காரணிப்படுத்துதலானது (பகா எண்களை எழுதும் வரிசையைத் தவிர்த்து) ஒரே முறையில் அமையும்."

ஒவ்வொரு பகு எண்ணும் பகா எண்களின் பெருக்கல் பலனாகப் பிரிக்கப்படலாம் (மாற்றப்படலாம்) என்ற கருத்தை அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் வலியுறுத்துகிறது. மேலும் இந்தப் பிரித்தல் தனித்தன்மை உடையது. அதாவது ஒரே விதமான பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாக மட்டுமே பிரித்து எழுத முடியும் என்று பொருள்.



படம் 2.2

பொதுவாக N என்ற பகு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், நாம் N என்ற எண்ணை $N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \cdots \times p_n^{q_n}$ என்ற ஒரே வழியில் மட்டுமே பிரித்து எழுத முடியும். இங்கு, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ஆகியவை பகா எண்கள் மற்றும் $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ ஆகியவை இயல் எண்கள்.

முதலில் நாம் N என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்த வேண்டும். ஒருவேளை N –யின் அனைத்துக் காரணிகளும் பகா எண்கள் எனில் நாம் இதோடு நிறுத்திக் கொள்ளலாம். அப்படியில்லையெனில் நாம் N –யின் காரணிகளில் உள்ள பகு எண்களைப் பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அனைத்துக் காரணிகளும் பகாக் காரணிகளாகக் கிடைக்கும் வரை தொடர வேண்டும்.

**சிந்தனைக் களம்**

1 என்பது பகா எண்ணா?

**விளக்கம்:**

எடுத்துக்காட்டாக, 32, 760 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்த நாம் பெறுவது

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$
$$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 13^1$$

எந்தெந்த வழிகளில் 32,760ஐ காரணிப் படுத்தினாலும் முடிவில் நாம் பெறுவது மூன்று 2, இரண்டு 3, ஒரு 5, ஒரு 7 மற்றும் ஒரு 13.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. ________ ஐத் தவிர்த்த மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும்________–யின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்.
2. ஒரு பகு எண்ணை எத்தனை வழிகளில் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்?
3. எந்தவொரு பகா எண்ணிற்கும் உள்ள வகுத்திகளின் எண்ணிக்கை______.

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது "ஒவ்வொரு பகு எண்ணும் தனித்த பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்" இதுவே அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் என அழைக்கப்படுகிறது.

### 2.4.1 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம் (Significance of the Fundamental Theorem of Arithmetic)

1 –ஐ தவிர்த்து மற்ற இயல் எண்களுக்கான மேலே சொல்லப்பட்ட அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம், கணிதத்திலும் மற்ற துறைகளிலும் எண்ணற்ற பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. இத்தேற்றம் அனைத்து மிகை முழுக்களையும் உருவாக்கும் அடிப்படைக் கட்டமைப்பாகப் பகா

எண்கள் விளங்குவதால் கணிதத்தில் இதன் பயன்பாடு அளவற்றது. ஆகவே, பகா எண்களானது ஒரு மூலக்கூறை உருவாக்கும் அணுக்களோடு ஒப்பிடப்படுகிறது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

1. $ab$ ஐ $p$ என்ற பகா எண் வகுக்கும் எனில், $p$ ஆனது $a$ ஐ வகுக்கும் அல்லது $p$ ஆனது $b$ ஐ வகுக்கும். அதாவது $p$ ஆனது $a, b$ -ல் ஏதேனும் ஒன்றை வகுக்கும்.
2. $ab$ ஐ $n$ என்ற பகு எண் வகுக்கும் எனில், $n$ ஆனது $a$ –யையும் வகுக்க வேண்டியதில்லை $b$ ஐயும் வகுக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, $6$ ஆனது $4 \times 3$ ஐ வகுக்கும். ஆனால் $6$ ஆனது $4$ ஐயும் வகுக்காது $3$ ஐயும் வகுக்காது.

**எடுத்துக்காட்டு 2.7** கொடுக்கப்பட்ட காரணி பிரித்தலில், $m$ மற்றும் $n$ என்ற எண்களைக் காண்க.

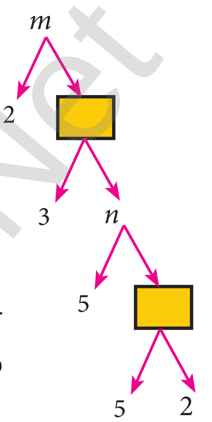
**தீர்வு** கீழிருந்து முதல் பெட்டியின் மதிப்பு $= 5 \times 2 = 10$

$n$ –யின் மதிப்பு $= 5 \times 10 = 50$

கீழிருந்து இரண்டாம் பெட்டியின் மதிப்பு $= 3 \times 50 = 150$

$m$ –யின் மதிப்பு $= 2 \times 150 = 300$

ஆகவே, தேவையான எண்கள் $m = 300,\ n = 50$



படம் 2.3

**எடுத்துக்காட்டு 2.8** $6^n$ , $n$ ஓர் இயல் எண் என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியுமா? உனது விடைக்குக் காரணம் கூறுக.

**தீர்வு** $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ என்பதால்,

$2$ என்பது $6^n$ –யின் ஒரு காரணியாகும்.

எனவே, $6^n$ ஓர் இரட்டைப்படை எண் ஆகும். ஆனால், கடைசி இலக்கம் $5$ –யில் முடியும் எண்கள் அனைத்தும் ஒற்றைப்படை எண்கள் ஆகும்.

ஆகவே, $6^n$ –யின் கடைசி இலக்கம் $5$ என முடிய வாய்ப்பில்லை.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. $m$ ஆனது $n$ ஐ வகுக்கும் எனில் $m$, மற்றும் $n$–யின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம _____ மற்றும் _____ ஆகும்.
2. $2^m$ மற்றும் $3^n$ என்ற வடிவில் அமையும் எண்களின் மீ.பொ.வ ______.

**எடுத்துக்காட்டு 2.9** $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ என்பது ஒரு பகு எண்ணா? உனது விடையை நியாயப்படுத்துக.

**தீர்வு** ஆம். கொடுக்கப்பட்ட எண் ஒரு பகு எண்ணாகும், ஏனெனில்,

$$7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3 = 3 \times \left(7 \times 5 \times 2 + 1\right) = 3 \times 71$$

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணானது இரு பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தப்படுவதால், அது ஒரு பகு எண்ணாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.10** $a^b \times b^a = 800$ என்றவாறு அமையும் இரு மிகை முழுக்கள் '$a$' மற்றும் '$b$' ஐ காண்க.

**தீர்வு** $800$ என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்தும்போது, நாம் பெறுவது

$$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^5 \times 5^2$$

ஆகவே, $a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2$

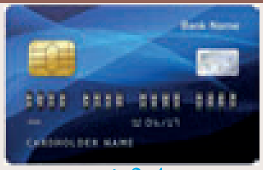
இதிலிருந்து நாம் பெறுவது. $a = 2\ ,\ b = 5$ (அ) $a = 5\quad b = 2$.

**சிந்தனைக் களம்**

$a^b = b^a$ எனுமாறு அமையும் மிகை முழுக்கள் $a$, $b$ –ஐ க்காண இயலுமா?

### செயல்பாடு 3

$p^2 \times q^1 \times r^4 \times s^3 = 3,15,000$ என்றவாறு அமையும் '$pqrs$' என்ற நான்கு இலக்கப் பணப்பரிவர்த்தனை அட்டையின் இரகசிய எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க இயலுமா?



படம் 2.4

### பயிற்சி 2.2

1. $n$ ஓர் இயல் எண் எனில், எந்த $n$ மதிப்புகளுக்கு $4^n$ ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?
2. $m$ மற்றும் $n$ இயல் எண்கள் எனில், எந்த $m$–யின் மதிப்புகளுக்கு $2^n \times 5^m$ என்ற எண் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?
3. 252525 மற்றும் 363636 என்ற எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க.
4. $13824 = 2^a \times 3^b$ எனில், $a$ மற்றும் $b$ –யின் மதிப்புக் காண்க.
5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ இங்கு, $p_1, p_2, p_3, p_4$ என்பன ஏறு வரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள் மற்றும் $x_1, x_2, x_3, x_4$ என்பன முழுக்கள் எனில், $p_1, p_2, p_3, p_4$ மற்றும் $x_1, x_2, x_3, x_4$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.
6. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 408 மற்றும் 170 என்ற எண்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ காண்க.
7. 24,15,36 ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகப்பெரிய ஆறிலக்க எண்ணைக் காண்க.
8. 35, 56 மற்றும் 91 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 7 ஐத் தரக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் எது?
9. முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் எது?

## 2.5 மட்டு எண்கணிதம் (Modular Arithmetic)

கடிகாரத்தில் 24 மணி நேரத்தைக் குறிக்க நாம் 1 முதல் 12 வரை உள்ள எண்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு நாளின் 24 மணி நேரத்தை எவ்வாறு ஒரு 12 மணி நேர எண் அமைப்பில் குறிக்க இயலும்? நாம் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 மற்றும் 12 க்கு பிறகு மீண்டும் 1, 2, 3,... எனத் தொடங்குகிறோம். இந்த அமைப்பில் நேரமானது 1 முதல் 12 வரை சுழன்று கொண்டே உள்ளன. இது போல ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை அடைந்தவுடன் மீண்டும் ஒரே எண்களைத் தொடர்ந்து பெறுவது **மட்டு எண்கணிதம்** ஆகும்.


படம் 2.5

கணிதத்தில் மட்டு எண்கணிதம் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைச் சுற்றி மீண்டும் இடம் பெறும் முழுக்களின் அமைப்பு ஆகும். இயல்பான எண்கணிதம் போன்றில்லாமல் மட்டு எண் கணிதம் சுழற்சி அடிப்படையில் செயல்படுகிறது. 'மட்டு எண்கணிதம்' என்ற கருத்தை உருவாக்கியவர் மாபெரும் ஜெர்மானியக் கணித மேதை **கார்ல் பிரடெரிக் கவுஸ்** ஆவார். இவர் **"கணித மேதைகளின் இளவரசர்"** என அழைக்கப்படுகிறார்.

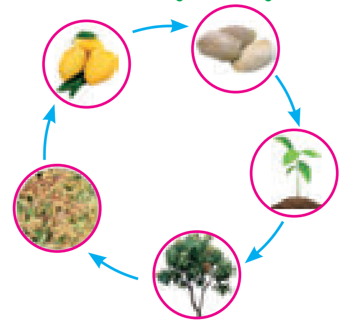
P3XKAU

### உதாரணங்கள்

1. பகல் மற்றும் இரவு தொடர்ந்து மாறிக்கொண்டே இருக்கும்.
2. ஒரு வாரத்தின் நாட்கள் ஞாயிறு முதல் சனி வரை தொடர்ச்சியாக மாறிக் கொண்டே இருக்கும்.

3. தாவரங்களின் வளர்ச்சி மாற்றம்.
4. ஒரு வருடத்தின் காலநிலை தொடர்ந்து மாறிக்கொண்டே இருக்கும் (கோடைக்காலம், மழைக்காலம், குளிர்காலம், வசந்தகாலம்).
5. இரயில்வே மற்றும் விமான நேரங்கள் 24 மணி நேரச் சுழற்சி அடிப்படையில் உள்ளன. இரயில்வே நேரம் 00.00–யில் தொடங்குகிறது. 23:59 –ஐ அடைந்தவுடன், அடுத்த நிமிடம் 24:00 என்பதற்குப் பதிலாக 00:00 என மாறுகிறது.

தாவரங்களின் வாழக்கை சுழற்சி



படம் 2.6

### 2.5.1 மட்டு ஒருங்கிசைவு (Congruence Modulo)

$a$ மற்றும் $b$ –க்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் $n$ –யின் மடங்கு எனில் மட்டு $n$ –யின் அடிப்படையில் $a$ யும் $b$ யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். அதாவது $b-a=kn$ $k\in\mathbb{Z}$ இதை $a\equiv b$ (மட்டு $n$) எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு $n$ என்பது மட்டு எண் என அழைக்கப்படுகிறது. வேறு விதமாகச் சொல்வோமேயானால் $a\equiv b$ (மட்டு $n$) என்பதன் பொருள் $a-b$ ஆனது $n$ ஆல் வகுபடும் எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $61\equiv 5$ (மட்டு 7) ஏனெனில், $61-5=56$ என்பது 7 ஆல் வகுபடும்.

**குறிப்பு**

- ஒரு மிகை முழுவை $n$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிக்கான சாத்தியக்கூறுகள் $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ஆகும்.
- எனவே மட்டு $n$ ஐ கணக்கிடும் போது, நாம் அனைத்து எண்களையும் $n$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதிகளான $0,1,2,3,\ldots, n-1$ ஆல் பதிலிட வேண்டும்.

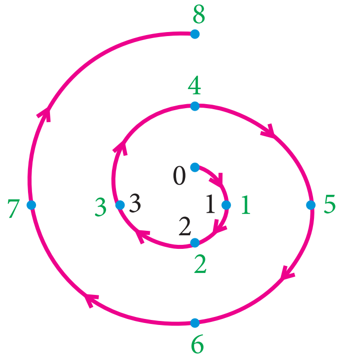
மட்டு ஒருங்கிசைவை தெளிவாகப் புரிந்து கொள்வதற்காக மேலும் இரு விளக்கங்களைக் காண்போம்.

**விளக்கம் 1**

8 (மட்டு 4) காண

மட்டு 4 காண்பதற்கு(சாத்தியமான மீதிகள் 0, 1, 2, 3 என்பதால்) 0,1,2,3 என்ற எண்களைக் கொண்டு கடிகாரம் போன்ற அமைப்பை உருவாக்குவோம். பூச்சியத்தில் தொடங்கிக் கடிகார முள்ளின் திசையில் 8 எண்கள் 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0 என்றவாறு நகர வேண்டும். 8 எண்கள் சுழற்சியாக நகர்ந்த பிறகு நாம் 0 என்ற எண்ணில் முடிக்கிறோம்.

எனவே, $8\equiv 0$ (மட்டு 4)



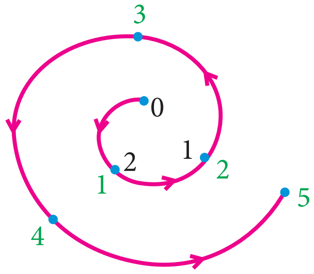

படம் 2.7

**விளக்கம் 2**

$-5$ (மட்டு 3) காண

மட்டு 3 காண்பதற்கு (சாத்தியமான மீதிகள் 0, 1, 2 என்பதால்) 0, 1, 2 என்ற எண்களைக் கொண்டு கடிகாரம் போன்ற அமைப்பை உருவாக்குவோம். குறை எண் என்பதால் பூச்சியத்தில் தொடங்கிக் கடிகார முள்ளின் எதிர்திசையில் 5 எண்கள் 2, 1, 0, 2, 1 என்றவாறு நகர வேண்டும். 5 எண்கள் கடிகார முள்ளின் எதிர்திசையில் சுழற்சியாக நகர்ந்த பிறகு நாம் 1 என்ற எண்ணில் முடிக்கிறோம்.

எனவே, $-5\equiv 1$ (மட்டு 3)




படம் 2.8

### 2.5.2 யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தை மட்டு எண் கணிதத்துடன் தொடர்புபடுத்துதல் (Connecting Euclid's Division lemma and Modular Arithmetic)

$m$ மற்றும் $n$ என்பன இரு முழுக்கள் மற்றும் m ஒரு மிகை முழு என்க. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி $n = mq + r$ இங்கு $0 \le r < m$ மற்றும் $q$ ஒரு முழு என நாம் எழுதலாம். $n = mq + r$ என ஒவ்வொரு முறையும் எழுதுவதற்குப் பதிலாக, நாம் மட்டு ஒருங்கிசைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$n = mq + r$ $q$ ஒரு முழு எனில் $n$ ஆனது மட்டு m–ஐப் பொறுத்து $r$ உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது என நாம் கூறலாம்.

$$\begin{aligned} n &= mq + r \\ n-r &= mq \\ n-r &\equiv 0 \;(\text{மட்டு } m) \\ n &\equiv r \;(\text{மட்டு } m) \end{aligned}$$

ஆகவே யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் மூலம் பெறப்பட்ட $n = mq + r$ என்ற சமன்பாட்டை $n \equiv r$ (மட்டு $m$) என்ற மட்டு ஒருங்கிசைவாக எழுதலாம்..

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. _____________ எனில் மட்டு $n$ அடிப்படையில் $a$–யும் $b$–யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும்.
2. 7 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 5 தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களின் கணம் _____________.

**குறிப்பு**

- a மற்றும் b என்ற இரு முழுக்களும் மட்டு m ஐப் பொறுத்து ஒருங்கிசைவாக அமைய, அதாவது $a \equiv b$ (மட்டு $m$), என எழுத வேண்டுமானால் அவ்விரு எண்களையும் m ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதியைத் தர வேண்டும்.

**சிந்தனைக் களம்**

3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 2 கிடைக்கக்கூடிய வகையில் எத்தனை முழுக்கள் இருக்கும்?

### 2.5.3 மட்டு எண்கணிதச் செயல்பாடுகள் (Modulo operations)

எண்கள் மீதான அடிப்படைச் செயல்பாடுகளான கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் போன்று மட்டு எண்கணிதத்திலும் அதே செயல்பாடுகளை நாம் செய்யலாம். இச்செயல்பாடுகளைச் செய்வதற்குத் தேவையான கருத்துகளைப் பின்வரும் தேற்றம் வழங்குகிறது.

**தேற்றம் 5**

$a, b, c$ மற்றும் $d$ என்பன முழுக்கள் மற்றும் $m$ என்பது ஒரு மிகை முழு. $a \equiv b$ (மட்டு $m$) மற்றும் $c \equiv d$ (மட்டு $m$) எனில்,

(i) $(a+c) \equiv (b+d)$ (மட்டு $m$) (ii) $(a-c) \equiv (b-d)$ (மட்டு $m$)

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d)$ (மட்டு $m$)

**விளக்கம் 3**

$17 \equiv 4$ (மட்டு 13) மற்றும் $42 \equiv 3$ (மட்டு 13) எனில், தேற்றம் 5–ன் படி,

(i)
$$\begin{aligned} 17 + 42 &\equiv 4 + 3 \;(\text{மட்டு } 13) \\ 59 &\equiv 7 \;(\text{மட்டு } 13) \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 17 - 42 &\equiv 4 - 3 \;(\text{மட்டு } 13) \\ -25 &\equiv 1 \;(\text{மட்டு } 13) \end{aligned}$$

(iii) $\quad 17\times 42 \equiv 4\times 3$ (மட்டு 13)

$714 \equiv 12$ (மட்டு 13)

### தேற்றம் 6

$a\equiv b$ (மட்டு $m$) எனில்,

(i) $ac\equiv bc$ (மட்டு $m$) (ii) $a\pm c\equiv b\pm c$ (மட்டு $m$) இங்கு $c$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. $(k-3)\equiv 5$ (மட்டு11) என்றவாறு அமையும் $k$ என்ற மிகை எண்கள் __________.
2. $59\equiv 3$ (மட்டு 7), $46\equiv 4$ (மட்டு 7) எனில், $105\equiv$ ________ (மட்டு 7), $13\equiv$ ________ (மட்டு 7), $413\equiv$ ________ (மட்டு 7), $368\equiv$ ________ (மட்டு 7).
3. $7\times 13\times 19\times 23\times 29\times 31$ என்ற எண்ணை 6 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி _________.

**எடுத்துக்காட்டு 2.11** 70004 மற்றும் 778 ஆகிய எண்களை 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

**தீர்வு** 70000 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என்பதால்

$$70000 \equiv 0 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$70000+4 \equiv 0+4 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$70004 \equiv 4 \text{ (மட்டு 7)}$$

எனவே 70004 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 4.

777 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என்பதால்

$$777 \equiv 0 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$777+1 \equiv 0+1 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$778 \equiv 1 \text{ (மட்டு 7)}$$

எனவே, 778 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 1.

**எடுத்துக்காட்டு 2.12** $15\equiv 3$ (மட்டு $d$) என்றவாறு அமையும் $d$ –யின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க.

**தீர்வு** $15\equiv 3$ (மட்டு d) என்பதன் பொருள் $15-3=kd$, இங்கு $k$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு.

$12=kd$.

$d$ ஆனது 12 ஐ வகுக்கும்.

12 –யின் வகுத்திகளாவன 1,2,3,4,6,12.

$d$ ஆனது 3 ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும், ஏனெனில் மீதி 3 வந்துள்ளது. எனவே, $d$– க்கு சாதகமான மதிப்புகள் 4,6,12 ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.13** பின்வருவனவற்றிற்குப் பொருந்தக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை $x$-ஐக் காண்க.

(i) $67+x\equiv 1$ (மட்டு 4) (ii) $98\equiv (x+4)$ (மட்டு 5)





X_Ch 2 TM.indd 51 16-04-2019 09:36:49

**தீர்வு** (i) $67 + x \equiv 1$ (மட்டு 4)

$67 + x - 1 = 4n$, இங்கு $n$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

$66 + x = 4n$

$66 + x$ என்பது 4 –யின் மடங்கு.

66 ஐ விட அதிகமான 4 –யின் மடங்கு 68. எனவே $x$–யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 2 ஆகும்.

(ii) $98 \equiv (x + 4)$ (மட்டு 5)

$98 - (x + 4) = 5n$, $n$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

$94 - x = 5n$

$94 - x$ என்பது 5 –யின் மடங்கு

94 ஐ விடக் குறைவான 5 –யின் மடங்கு 90. எனவே $x$– யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 4 ஆகும்.

**குறிப்பு**

- இயற்கணிதத்தில் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது பெரும்பாலும் நமக்கு முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான தீர்வுகள் கிடைக்கும். ஆனால், மட்டு ஒருங்கிசைவு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது நமக்கு எண்ணற்றத் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.14** தீர்க்க $8x \equiv 1$ (மட்டு 11)

**தீர்வு** $8x \equiv 1$ (மட்டு 11) என்பதை $8x - 1 = 11k$, இங்கு $k$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு, என எழுதலாம்.

$$x = \frac{11k + 1}{8}$$

$k = 5, 13, 21, 29, \ldots$ என நாம் பிரதியிடும் போது $11k+1$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடுகிறது.

$$x = \frac{11 \times 5 + 1}{8} = 7$$

$$x = \frac{11 \times 13 + 1}{8} = 18$$

எனவே, 7,18,29,40, ... என்பது தீர்வாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.15** $10^4 \equiv x$ (மட்டு 19) என்றவாறு அமையும் $x$ மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** $10^2 = 100 \equiv 5$ (மட்டு 19)

$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 25$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 6$ (மட்டு 19) (ஏனெனில், $25 \equiv 6$ (மட்டு 19))

எனவே, $x = 6$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.16** $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை முழு எண் தீர்வுகள் உள்ளன எனக் காண்க.

**தீர்வு** $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்பதை

$3x - 1 = 15k$, $k$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என எழுதலாம்.

$3x = 15k + 1$

$$x = \frac{15k+1}{3}$$
$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

$5k$ என்பது ஒரு முழு எண் என்பதால், $5k+\frac{1}{3}$ என்பது ஒரு முழு எண் அல்ல. எனவே இச்சமன்பாட்டிற்கு முழு எண் தீர்வே இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 2.17** ஒருவர் சென்னையிலிருந்து டெல்லிக்குச் செல்ல இரயிலில் புறப்படுகிறார். அவர் தனது பயணத்தைப் புதன்கிழமை $22.30$ மணிக்குத் தொடங்குகிறார். எந்தவிதத் தாமதமுமின்றி இரயில் செல்வதாகக் கொண்டால் மொத்தப் பயண நேரம் $32$ மணி நேரம் ஆகும். அவர் எப்பொழுது டெல்லியைச் சென்றடைவார் ?

**தீர்வு** பயணம் தொடங்கும் நேரம் $22.30$. பயண நேரம் $32$ மணி நேரம் இங்கு நாம் மட்டு $24$ ஐ பயன்படுத்த உள்ளோம்.

சென்று சேரும் நேரம்

$$22.30+32 \text{ (மட்டு } 24) \equiv 54.30 \text{ (மட்டு } 24)$$
$$\equiv 6.30 \text{ (மட்டு } 24) \; (32 = (1\times 24) + 8 \text{ வியாழன் வெள்ளி})$$

ஆகவே அவர் வெள்ளிக்கிழமை காலை $6.30$ மணிக்கு டெல்லி சென்றடைவார்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.18** கலா மற்றும் வாணி இருவரும் நண்பர்கள். "இன்று எனது பிறந்தநாள்" எனக் கலா கூறினாள். வாணியிடம், "உனது பிறந்தநாளை எப்போது நீ கொண்டாடினாய்?" எனக் கேட்டாள். அதற்கு வாணி "இன்று திங்கள்கிழமை, நான் என்னுடைய பிறந்த நாளை $75$ நாட்களுக்கு முன் கொண்டாடினேன்", எனப் பதிலளித்தாள். வாணியின் பிறந்தநாள் எந்தக் கிழமையில் வந்திருக்கும் எனக் காண்க.

**தீர்வு** நாம் இங்கு ஒவ்வொரு வார நாளுக்கும் ஓர் எண்ணைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ என்பன முறையே ஞாயிறு முதல் சனி வரை உள்ள கிழமைகளைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

வாணி இன்று திங்கள் கிழமை என்று கூறியதால், அதற்கான எண் $1$. வாணியின் பிறந்தநாள் $75$ நாட்களுக்கு முன் வருவதால் நாம் $1$ –லிருந்து $75$ ஐக் கழித்து மட்டு $7$ காண வேண்டும், ஏனெனில் $1$ வாரத்திற்கு $7$ நாட்கள்.

$$-74 \text{ (மட்டு } 7) \equiv -4 \text{ (மட்டு } 7) \equiv 7-4 \text{ (மட்டு } 7) \equiv 3 \text{ (மட்டு } 7)$$
(ஏனெனில், $-74-3=-77$ ஆனது $7$ ஆல் வகுபடும்)

எனவே, $1-75 \equiv 3$ (மட்டு $7$)

$3$ என்ற எண் புதன்கிழமையைக் குறிக்கும்.
எனவே, வாணி தனது பிறந்தநாளைப் புதன்கிழமை கொண்டாடியிருப்பாள்.

## பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

 (i) $71 \equiv x$ (மட்டு $8$) (ii) $78 + x \equiv 3$ (மட்டு $5$) (iii) $89 \equiv (x+3)$ (மட்டு $4$)
 (iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$ (மட்டு $5$) (v) $5x \equiv 4$ (மட்டு $6$)

2. $x$ ஆனது மட்டு $17$ –யின் கீழ் $13$ உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது எனில், $7x-3$ ஆனது எந்த எண்ணுடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்?

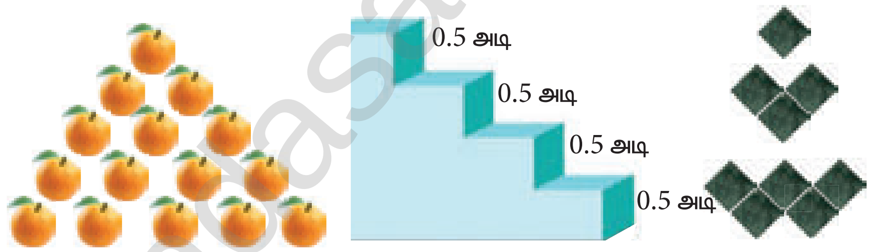
3. தீர்க்க $5x \equiv 4 \pmod{6}$
4. தீர்க்க $3x - 2 \equiv 0 \pmod{11}$
5. முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு நேரம் என்ன?
6. பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் என்ன?
7. இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவதாகக் கூறியுள்ளார். என்னுடைய மாமா எந்தக் கிழமையில் வருவார்?
8. எந்த ஒரு மிகை முழு எண் $n$ –ற்கும் $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.
9. $2^{81}$ ஐ 17 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி காண்க.
10. பிரிட்டிஷ் ஏர்லைன்ஸ் விமானத்தில் சென்னையிலிருந்து லண்டன் செல்லப் பயணநேரம் தோராயமாக 11 மணிநேரம். விமானம் தனது பயணத்தை ஞாயிற்றுக்கிழமை 23:30 மணிக்குத் தொடங்கியது. சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4.30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்குமெனில், விமானம் லண்டனில் தரையிறங்கும் நேரத்தைக் காண்க.

DW69PL

## 2.6 தொடர் வரிசைகள் (Sequences)

பின்வரும் படங்களைக் கருதுக.

இந்தப் படங்களில் ஏதோ ஓர் அமைப்பு அல்லது வரிசைப்படுத்துதல் உள்ளது. முதல் படத்தில், முதல் வரிசையில் ஓர் ஆப்பிள், இரண்டாவது வரிசையில் இரண்டு ஆப்பிள்கள் மூன்றாவது வரிசையில் மூன்று ஆப்பிள்கள் என்றவாறு அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, …



படம் 2.9

இரண்டாவது படத்தில் ஒவ்வொரு படியும் 0.5 அடி உயரம் கொண்டது. அடிமட்டத்திலிருந்து ஒவ்வொரு படியின் மொத்த உயரமானது 0.5 அடி, 1 அடி, 1.5 அடி, … என உள்ளது. மூன்றாவது படத்தில் ஒவ்வொரு வடிவத்திலும் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 1,3,5,… என உள்ளது. இந்த மூன்று உதாரணங்கள் மூலம் பெறப்பட்ட எண்கள் "தொடர்வரிசை" என்ற வகையைச் சார்ந்தவை.

**வரையறை**

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது இயல் எண்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட, மெய்யெண் மதிப்புகளைப் பெறும் சார்பாகும்.

தொடர் வரிசையின் ஒவ்வொரு நிலையில் வரும் எண்ணும், தொடர்வரிசையின் ஓர் உறுப்பு எனப்படும். முதலில் வரும் உறுப்பு முதல் உறுப்பு எனவும் இரண்டாவதாக வரும் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

$n$–வது உறுப்பானது $a_n$ என குறிக்கப்படும் எனில், $a_1$ என்பது முதல் உறுப்பு, $a_2$ என்பது இரண்டாம் உறுப்பு , …

ஒரு தொடர்வரிசையை $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என எழுதலாம்.

### விளக்கம்

1. $1,3,5,7,\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு $a_n = 2n-1,\ n = 1,2,3,\ldots,$ எனப் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது, $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ldots$

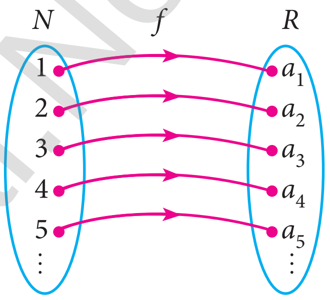
2. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு $a_n = \frac{1}{n+1}$. $n = 1,2,3,\ldots.$ எனப் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது, $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5},\ldots$

ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அது **முடிவுறு தொடர்வரிசை** எனப்படும். ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின் அது **முடிவுறாத் தொடர்வரிசை** எனப்படும்.

### தொடர்வரிசையை ஒரு சார்பாக அறிதல்

தொடர்வரிசையானது இயல் எண்களின் $N$ மீது வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு சார்பாகும். குறிப்பாகத் தொடர்வரிசை ஆனது $f : N \rightarrow R$, இங்கு $\mathrm{R}$ என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.

தொடர்வரிசையானது $a_1, a_2, a_3,\ldots$ வடிவில் அமையுமானால், $a_1, a_2, a_3,\ldots$ என்றத் தொடர்வரிசைக்கு $f(k) = a_k,\ k = 1,2,3,\ldots$ என்ற சார்பைத் தொடர்புபடுத்தலாம்.




படம் 2.10

**குறிப்பு**

➤ எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளே ஆனால் எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசை ஆகாது.

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.
   (i) 7, 13, 19, ______ , … (ii) 2, ______, 10, 17, 26,…
   (iii) 1000, 100, 10, 1, ______, …
2. தொடர்வரிசையானது ______ கணத்தில் வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.
3. $0,2,6,12,20,\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் $n$ –வது உறுப்பு ______.
4. சரியா, தவறா எனக் கூறுக.
   (i) எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளாகும்
   (ii) எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசைகளாகும்

**எடுத்துக்காட்டு 2.19** பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{10},\frac{1}{14},\ldots.$ (ii) $5,\ 2,-1,-4,\ldots.$ (iii) $1, 0.1, 0.01,\ldots$

**தீர்வு** (i) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{14},\ \ldots$

$+4 \quad +4 \quad +4$

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில் தொகுதி ஒரே எண்ணாக உள்ளது மற்றும் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் பகுதியானது $4$ அதிகரிக்கிறது.

எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகளானது

$$a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$$
$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$
$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

(ii) $5, \xrightarrow{-3} 2, \xrightarrow{-3} -1, \xrightarrow{-3} -4, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பைவிட $3$ குறைவாக உள்ளது. எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $-7,\ -10,\ -13$.

(iii) $1, \xrightarrow{\div 10} 0.1, \xrightarrow{\div 10} 0.01, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை $10$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கிறது. எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$
$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$
$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.20** பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் பொது உறுப்பு காண்க.

(i) $3, 6, 9, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ (iii) $5, -25, 125, \ldots$

**தீர்வு** (i) $3, 6, 9, \ldots$

இங்குள்ள உறுப்புகள் $3$ –யின் மடங்குகளாக உள்ளன. எனவே

$$a_n = 3n, \quad n \in N$$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4}$$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் தொகுதியானது வரிசை இயல் எண்களாகவும், பகுதியானது தொகுதியை விட ஒன்று கூடுதலாகவும் உள்ளது. எனவே, பொது உறுப்பு $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$

(iii) $5, -25, 125, \ldots$

இங்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளில் $+$ மற்றும் $-$ எனக் குறிகள் மாறி மாறி வந்துள்ளன. மேலும் உறுப்புகள் $5$ –யின் அடுக்குகளாகவும் அமைந்துள்ளன. எனவே பொது உறுப்பு $a_n = (-1)^{n+1}5^n, n \in N$

**எடுத்துக்காட்டு 2.21** ஒரு தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); \; n \in N \text{ ஓர் ஒற்றை எண்} \\ n^2+1 \quad ; \; n \in N \text{ ஓர் இரட்டை எண்} \end{cases}$$

$11$ –வது உறுப்பு மற்றும் $18$ –வது உறுப்புக் காண்க.

**தீர்வு** $n$=11 என்பது ஒற்றை எண் என்பதால், $a_{11}$ –யின் மதிப்புக் காண $n=11$ என

$$a_n = n(n+3) \text{ –யில் பிரதியிட,}$$

$11$ –வது உறுப்பு $\quad a_{11} = 11(11+3) = 154$.

$n=18$ என்பது இரட்டை எண் என்பதால், $a_{18}$ –யின் மதிப்புக் காண $n=18$ என

$$a_n = n^2+1 \text{ –யில் பிரதியிட,}$$

$18$ –வது உறுப்பு $\quad a_{18} = 18^2+1 = 325.$

**எடுத்துக்காட்டு 2.22** பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளைக் காண்க.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+3};\ n \geq 3,\ n \in N$$

**தீர்வு** $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ எனத் தொடர்வரிசையின் முதல் இரண்டு உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூன்றாவது உறுப்பானது முதல் இரண்டு உறுப்புகளைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2}+3} = \frac{a_2}{a_1+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

இதைப் போலவே நான்காம் உறுப்பு $a_4$ ஆனது $a_2$ மற்றும் $a_3$ ஆகியவற்றைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2}+3} = \frac{a_3}{a_2+3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

இதே வழிமுறையில் ஐந்தாம் உறுப்பு $a_5$ கணக்கிடப்படுகிறது.

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2}+3} = \frac{a_4}{a_3+3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

எனவே, தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் $1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16}$ மற்றும் $\frac{1}{25}$ ஆகும்.

## பயிற்சி 2.4

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $8, 24, 72, \ldots$ (ii) $5, 1, -3, \ldots$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

2. பின்வரும் $n$–வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $a_n = n^3 - 2$ (ii) $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் $n$ –வது உறுப்பைக் காண்க.

   (i) $2, 5, 10, 17, \ldots$ (ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ (iii) $3, 8, 13, 18, \ldots$

4. கீழ்க்கண்ட தொடர்வரிசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் $n$–வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.
   (i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; $a_6$ மற்றும் $a_{13}$ (ii) $a_n = -(n^2-4)$; $a_4$ மற்றும் $a_{11}$

5. $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3} & ; \text{ ஓர் ஒற்றை எண் } n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1} & ; \text{ ஓர் இரட்டை எண் } n \in N \end{cases}$ என்பது $n$ -வது உறுப்பு எனில், $a_8$ மற்றும் $a_{15}$ காண்க.

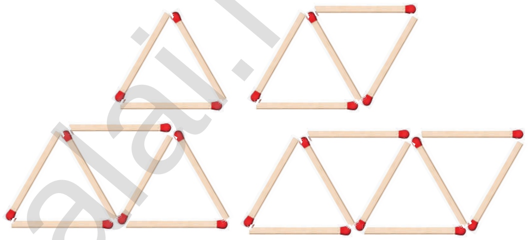
6. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ எனில், தொடர்வரிசையின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் காண்க.

## 2.7 கூட்டுத்தொடர் வரிசை (Arithmetic Progression)

பின்வரும் இரண்டு விளக்கங்களைக் கொண்டு தொடங்குவோம்.

**விளக்கம் 1**

படத்தில் காணும் வடிவங்களைத் தீக்குச்சிகள் கொண்டு உருவாக்குவோம்.



படம் 2.11

(i) ஒவ்வொரு வடிவத்தையும் உருவாக்குவதற்கு எத்தனை தீக்குச்சிகள் தேவைப்படுகின்றன? $3, 5, 7$ மற்றும் $9$.

(ii) இதில், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் காண இயலுமா ? எவ்வளவு? $5-3 = 7-5 = 9-7 = 2$

எனவே, அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் $2$ ஆக இருப்பதைக் காண்க.

**விளக்கம் 2**

ஒருவருக்கு வேலை கிடைக்கிறது. அவருடைய முதல் மாதச் சம்பளம் ₹$10,000$ எனவும், ஆண்டு ஊதிய உயர்வு ₹$2000$ எனவும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது, அவருடைய முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் வருட ஊதியம் முறையே ₹$10000$, ₹$12000$, ₹$14000$ .

அடுத்தடுத்த வருடங்களின் ஊதிய வித்தியாசம் கண்டறியும்போது நாம் பெறுவது $12000-10000 = 2000$; $14000-12000 = 2000$ . ஆகவே அடுத்தடுத்த எண்களின் (ஊதியங்களின்) வித்தியாசம் எப்போதும் $2000$.

மேற்கண்ட இரு விளக்கங்களின் பின்னால் மறைந்துள்ள பொதுப் பண்பை உற்று நோக்கினீர்களா? இரண்டிலும் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் மாறிலியாக உள்ளது. மேலும் முதல் உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகள், அதற்கு முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணை (விளக்கங்களில் $2$, $2000$) கூட்டுவதன் மூலம் கிடைக்கிறது. இந்த மாறாத எண்ணான அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசமானது, பொது வித்தியாசம் என அழைக்கப்படுகிறது.

**வரையறை**

$a$ மற்றும் $d$ என்பன மெய்யெண்கள் எனில், $a$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, ... என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும். கூட்டுத் தொடர்வரிசையைச் சுருக்கமாக A.P. (Arithmetic Progression) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு '$a$' என்ற எண்ணை முதல் உறுப்பு (first term) என்றும் '$d$' என்ற எண்ணை பொது வித்தியாசம் (common difference) என்றும் அழைக்கிறோம்.

எளிமையாகக் கூற வேண்டுமானால் கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்பது அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் ஒரு மாறிலி அளவில் வேறுபடும் தொடர்வரிசையாகும். உதாரணமாக இரட்டை முழு எண்களின் தொகுப்பு $2, 4, 6, 8, 10, 12,\ldots$ என்பது முதல் உறுப்பு $a=2$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d=2$ உள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும். ஏனெனில், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசம் சமம். $4-2=2,\ 6-4=2,\ 8-6=2\ldots$

பெரும்பாலான நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைகின்றன.

**குறிப்பு**

- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எந்த இரு தொடர்ச்சியான உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாத எண்ணாக இருக்கும். இந்த மாறாத எண் "பொது வித்தியாசம்" என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும். ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறா கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

### 2.7.1 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகள் மற்றும் பொது வித்தியாசம் (Terms and Common Difference of an A.P.)

1. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$t_1 = a = a + (1-1)d\,, \quad t_2 = a + d = a + (2-1)d\,, \quad t_3 = a + 2d = a + (3-1)d\,,$$
$$t_4 = a + 3d = a + (4-1)d\,, \ldots$$

பொதுவாக $t_n$ எனக் குறிக்கப்படும் $n$–வது உறுப்பானது $t_n = a + (n-1)d$ என எழுதப்படுகிறது.

**குறிப்பு**

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$ வது உறுப்பு $t_n$ எனில், $t_n = a + (n-1)d$ . இங்கு a என்பது முதல் உறுப்பு, d என்பது பொது வித்தியாசம்.

2. பொதுவாக ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் காண நாம் இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து முதல் உறுப்பைக் கழிக்க வேண்டும் (அ) மூன்றாம் உறுப்பிலிருந்து இரண்டாம் உறுப்பைக் கழிக்க வேண்டும் என்பது போலத் தொடரலாம்.

உதாரணமாக, $t_1 = a,\ t_2 = a + d$

$t_2 - t_1 = (a+d) - a = d$

இதுபோலவே, $t_2 = a + d,\ t_3 = a+2d$

$t_3 - t_2 = (a+2d) - (a+d) = d$

பொதுவாக, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \ldots.$

எனவே, $d = t_n - t_{n-1}\,,\quad n = 2, 3, 4, \ldots$

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ________.
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d$ எனில், அதன் $8$ –வது உறுப்பு ________.
3. $t_n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$-வது உறுப்பு எனில், $t_{2n} - t_n$ –யின் மதிப்பு ________.

பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசம் காண முயல்வோம்.

(i) $1, 4, 7, 10, \ldots \quad d = 4-1 = 7-4 = 10-7 = \ldots = 3$

(ii) $6, 2, -2, -6, \ldots \quad d = 2-6 = -2-2 = -6-(-2) = \ldots = -4$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

பொது வித்தியாசமானது மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ அமையலாம்.

**சிந்தனைக் களம்**

$t_n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$ –வது உறுப்பு எனில் $t_{n+1} - t_{n-1}$ –யின் மதிப்பு _____.

**எடுத்துக்காட்டு 2.23** பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையா, இல்லையா எனச் சோதிக்க.

(i) $x+2,\ 2x+3,\ 3x+4, \ldots$ (ii) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (iii) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையானது கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க வேண்டுமானால், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளனவா என சோதித்தால் போதுமானது.

(i) $t_2 - t_1 = (2x+3)-(x+2) = x+1$

$t_3 - t_2 = (3x+4)-(2x+3) = x+1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே, $x+2,\ 2x+3,\ 3x+4, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

(ii) $t_2 - t_1 = 4-2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8-4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக இல்லை. எனவே, $2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்ல.

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_4 - t_3 = 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே, $3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 7\sqrt{2},\ 9\sqrt{2}, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.24** முதல் உறுப்பு $20$ ஆகவும் பொது வித்தியாசம் $8$ ஆகவும் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்வரிசையை எழுதவும்.

**தீர்வு** முதல் உறுப்பு $a = 20$; பொது வித்தியாசம் $d = 8$

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$

இந்த நிகழ்வில் நாம் பெறுவது $20,\ 20+8,\ 20+2(8),\ 20+3(8), \ldots$

எனவே, தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை $20, 28, 36, 44, \ldots$ ஆகும்.

**குறிப்பு**

➢ பொது வித்தியாசம் பூச்சியமாக கிடைக்கும் கூட்டுத் தொடர்வரிசை மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

**செயல்பாடு 4**

இங்கு ஐந்து பெட்டிகள் உள்ளன. நீங்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு எண்ணைத் தேர்வு செய்து ஐந்து வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளை உருவாக்கவும்.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8, 6, −8, 12, 85 | 14, 1, 40, −5, 2 | 26, 3.5, −14, 7, 55 | 20, 11, −11, −3, 70 | 32, 8.5, −2, 17, 100 |

**எடுத்துக்காட்டு 2.25** $3, 15, 27, 39, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் 15-வது, 24-வது மற்றும் $n$ -வது உறுப்பு காண்க.

**தீர்வு** முதல் உறுப்பு $a = 3$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 15 - 03 = 12$ .

முதல் உறுப்பு $a$, பொது வித்தியாசம் $d$ ஆக உள்ள கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$ –வது உறுப்பு

$t_n = a + (n-1)d$ என நாம் அறிவோம்.

$$t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 3 + 14(12) = 171$$

(இங்கு $a=3$ மற்றும் $d=12$)

$$t_{24} = a + (24-1)d = a + 23d = 3 + 23(12) = 279$$

$n$ –வது உறுப்பு (பொது உறுப்பு) $t_n = a + (n-1)d$

$$t_n = 3 + (n-1)12$$

$$t_n = 12n - 9$$

**குறிப்பு**

➢ ஒரு முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு $a$, கடைசி உறுப்பு $l$ எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ ஏனெனில், $l = a + (n-1)d$

**எடுத்துக்காட்டு 2.26** $3, 6, 9, 12, \ldots, 111$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

**தீர்வு**

முதல் உறுப்பு $a = 3$; பொது வித்தியாசம் $d = 6 - 3 = 3$; கடைசி உறுப்பு $l = 111$

$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ என நாம் அறிவோம்.

$$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$$

எனவே, இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 37 உறுப்புகள் உள்ளன.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் ________
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு $a$, கடைசி உறுப்பு $l$ எனில் அத்தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ________

**எடுத்துக்காட்டு 2.27** ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $7$ –வது உறுப்பு $-1$ மற்றும் $16$ –வது உறுப்பு $17$ எனில், அதன் பொது உறுப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்க.

$t_7 = -1$ மற்றும் $t_{16} = 17$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$a+(7-1)d = -1$ மற்றும் $a+(16-1)d = 17$

$$a + 6d = -1 \qquad \ldots(1)$$

$$a + 15d = 17 \qquad \ldots(2)$$

சமன்பாடு $(2)$ –லிருந்து சமன்பாடு $(1)$ ஐ கழிக்க, நாம் பெறுவது $9d = 18$ –லிருந்து $d = 2$. $d = 2$ எனச் சமன்பாடு $(1)$–யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $a + 12 = -1$. எனவே $a = -13$

ஆகவே, பொது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$

$$= -13 + (n-1)\times 2 = 2n - 15$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.28** ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $l$, $m$ மற்றும் $n$ ஆவது உறுப்புகள் முறையே $x$, $y$ மற்றும் $z$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $x(m-n) + y(n-l) + z(l-m) = 0$ (ii) $(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = 0$

**தீர்வு** (i) முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d$ என்க. $t_l = x$, $t_m = y$, $t_n = z$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பொது உறுப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$a + (l-1)d = x \qquad \ldots(1)$$

$$a + (m-1)d = y \qquad \ldots(2)$$

$$a + (n-1)d = z \qquad \ldots(3)$$

$$x(m-n) + y(n-l) + z(l-m)$$

$$= a[(m-n) + (n-l) + (l-m)] + d[(m-n)(l-1) + (n-l)(m-1) + (l-m)(n-1)]$$

$$= a[0] + d[lm - ln - m + n + mn - lm - n + l + ln - mn - l + m]$$

$$= a(0) + d(0) = 0$$

(ii) சமன்பாடு $(1)$ –லிருந்து $(2)$, $(2)$ –லிருந்து $(3)$, $(3)$ –லிருந்து $(1)$ ஐக் கழித்தால் நாம் பெறுவது,

$$x - y = (l-m)d$$

$$y - z = (m-n)d$$

$$z - x = (n-l)d$$

$$(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = [(l-m)n + (m-n)l + (n-l)m]d$$

$$= \left[ln - mn + lm - nl + nm - lm\right]d = 0$$

**குறிப்பு**

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில்,

- ஒவ்வோர் உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும்.
- ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும்.

- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $a-d$, $a$ மற்றும் $a+d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்குப் பொது வித்தியாசம் $d$ ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $a-3d$ , $a-d$ , $a+d$ மற்றும் $a+3d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்குப் பொது வித்தியாசம் $2d$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.29** ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276. அந்த நான்கு எண்களைக் காண்க.

**தீர்வு** கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த நான்கு எண்களை $(a-3d), (a-d), (a+d)$ மற்றும் $(a+3d)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 என்பதால்,

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d = 28$$

$4a = 28$ –லிருந்து $a = 7$

இதுபோலவே, அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276 என்பதால்,

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2 = 276.$$

$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2 = 276$$

$4a^2+20d^2=276$ –லிருந்து $4(7)^2+20d^2=276$

$d^2 = 4$ –லிருந்து $d = \pm 2$

$a=7,\ d=2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் $7-3(2),\ 7-2,\ 7+2$ மற்றும் $7+3(2)$

அதாவது, 1, 5, 9 மற்றும் 13.

$a=7,\ d=-2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் 13, 9, 5 மற்றும் 1.

எனவே, கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த நான்கு எண்கள் 1, 5, 9 மற்றும் 13.

**மூன்று எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைவதற்கான நிபந்தனை**

$a, b, c$ என்ற எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்குமெனில், $b = a+d,\ c = a+2d$

அதாவது, $a+c = 2a+2d$

$2(a+d) = 2b$

ஆகவே $\boxed{2b = a+c}$

இதுபோலவே, $2b = a+c$, எனில், $b-a = c-b$ எனவே $a, b, c$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்.

ஆகவே, மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் $a, b, c$ என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\boxed{2b = a+c}$

**எடுத்துக்காட்டு 2.30** ஒரு தாய் தன்னிடம் உள்ள ₹207 ஐ கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் மூன்று பாகங்களாகப் பிரித்துத் தனது மூன்று குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்க விரும்பினார். அவற்றில் இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் ₹4623 ஆகும். ஒவ்வொரு குழந்தையும் பெறும் தொகையினைக் காண்க.





X_Ch 2 TM.indd 63 16-04-2019 09:37:10

**தீர்வு** மூன்று குழந்தைகள் பெறும் தொகை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைவதால் அவற்றை , $a-d$ , $a$, $a+d$ என்க. தொகையின் கூடுதல் ₹$207$ என்பதால்

$$(a-d)+a+(a+d)=207$$

$$3a = 207 \text{ –லிருந்து } \quad a = 69$$

இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் $4623$ என்பதால்

$$(a-d)a = 4623$$

$$(69-d)69 = 4623$$

$$d = 2$$

எனவே, மூன்று குழந்தைகளுக்கும் தாய் பிரித்துக் கொடுத்த தொகை

₹$(69-2)$, ₹$69$, ₹$(69+2)$. அதாவது, ₹$67$, ₹$69$ மற்றும் ₹$71$.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $3$-ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் ________.
2. $a$, $b$, $c$ என்ற மூன்று எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே ________.

## பயிற்சி 2.5

1. பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையா எனச் சோதிக்கவும்.

   (i) $a-3, a-5, a-7, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (iii) $9, 13, 17, 21, 25, \ldots$

   (iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ (v) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d$-க்குக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.

   (i) $a = 5$, $d = 6$ (ii) $a = 7$, $d = -5$ (iii) $a = \frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{2}$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க.

   (i) $t_n = -3+2n$ (ii) $t_n = 4-7n$

4. $-11, -15, -19, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $19$ –வது உறுப்பைக் காண்க.
5. $16, 11, 6, 1, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $-54$ என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?
6. $9, 15, 21, 27, \ldots, 183$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க.
7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒன்பதாவது உறுப்பின் ஒன்பது மடங்கும், பதினைந்தாவது உறுப்பின் பதினைந்து மடங்கும் சமம் எனில் இருபத்து நான்காவது உறுப்பின் ஆறு மடங்கானது பூச்சியம் என நிறுவுக.
8. $3+k$, $18-k$, $5k+1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $k$–யின் மதிப்புக் காண்க.
9. $x$, $10$, $y$, $24$, $z$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க.

10. ஒரு சினிமா அரங்கின் முதல் வரிசையில் $20$ இருக்கைகளும் மொத்தம் $30$ வரிசைகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அதற்கு முந்தைய வரிசையைவிட இரண்டு இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. கடைசி வரிசையில் எத்தனை இருக்கைகள் இருக்கும்?

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் $27$ மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $288$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

12. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $6$-வது மற்றும் $8$-வது உறுப்புகளின் விகிதம் $7:9$ எனில், $9$-வது மற்றும் $13$-வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

13. ஒரு குளிர்காலத்தில் திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை ஊட்டியின் வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. திங்கள் கிழமை முதல் புதன்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $0°\text{C}$ மற்றும் புதன்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $18°\text{C}$ எனில், ஐந்து நாட்களின் வெப்பநிலைகளைக் காண்க.

14. பிரியா தனது முதல் மாத வருமானமாக ₹$15,000$ ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹$1500$ உயர்கிறது. அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹$13,000$ மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹$900$ உயர்கிறது. பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹$20,000$ அடைய எவ்வளவு காலம் ஆகும்?

## 2.8 தொடர்கள் (Series)

ஒரு தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் தொடர் எனப்படும். $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என்பது ஒரு மெய்யெண் தொடர்வரிசை என்க. இங்கு $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ என்பது மெய்யெண் தொடர் ஆகும்.

ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு தொடர் எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறாத் தொடர் எனப்படும். நாம் இங்கு முடிவுறு தொடர்களை மட்டுமே விவாதிப்போம்.

### 2.8.1 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் (Sum to $n$ terms of an A.P.)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையுமானால் அத்தொடர் கூட்டுத் தொடர் எனப்படும்.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்க.

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது $S_n$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d)$ ...(1)

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையைக் கடைசியிலிருந்து முதலாவது உறுப்பு வரை மாற்றி எழுத நாம் பெறுவது,

$$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a \qquad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \cdots + [a+(n-2)d+(a+d)] + [a+(n-1)d+a]$$

$= [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+\cdots+[2a+(n-1)d]$ ($n$ உறுப்புகள்)

$2S_n = n\times[2a+(n-1)d]$ –லிருந்து $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right]$

**குறிப்பு**

- ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு $a$ மற்றும் கடைசி உறுப்பு $l$ ($n^{th}$ –வது உறுப்பு) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right] = \frac{n}{2}\left[a+a+\left(n-1\right)d\right]$.
  $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$. (ஏனெனில், $l = a+\left(n-1\right)d$)

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல் _______.
2. ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது _______ எனப்படும்.
3. ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் _______–யில் அமைந்தால் அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனப்படும்.
4. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டால் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _______.

**எடுத்துக்காட்டு 2.31** $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $15$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** இங்கு முதல் உறுப்பு $a = 8$, பொது வித்தியாசம் $d = 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\times 8+(15-1)(-\frac{3}{4})\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16-\frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.32** $0.40+0.43+0.46+\cdots+1$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** இங்கு $n$ -ன் மதிப்பு கொடுக்கப்படவில்லை. ஆனால் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து நாம் முதலில் $n$ -ன் மதிப்பைக் கண்டறியலாம்.

$a = 0.40$ மற்றும் $l = 1$, $d = 0.43 - 0.40 = 0.03$.

ஆகவே, $n = \left(\frac{l-a}{d}\right)+1$

$$= \left(\frac{1-0.40}{0.03}\right)+1 = 21$$

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல், $S_n = \frac{n}{2}\left[a+l\right]$

இங்கு, $n = 21$. எனவே $S_{21} = \frac{21}{2}\left[0.40+1\right] = 14.7$

ஆகவே கூட்டுத் தொடரின் $21$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $14.7$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.33** $1+5+9+...$ என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 190 கிடைக்கும்?

**தீர்வு** இங்கு நாம் $S_n = 190$. எனில், $n$ –யின் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.
முதல் உறுப்பு $a = 1$, பொது வித்தியாசம் $d = 5-1 = 4$.

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 190$$
$$\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times4] = 190$$
$$n[4n-2] = 380$$
$$2n^2-n-190 = 0$$
$$(n-10)(2n+19) = 0$$

ஆனால் $n = 10$ ஏனெனில் $n = -\frac{19}{2}$ என்பது பொருந்தாது. எனவே, $n = 10$.

**சிந்தனைக் களம்**

$n$ –யின் மதிப்பு மிகை முழுவாக மட்டுமே இருக்கவேண்டும். ஏன்?

**முன்னேற்றச் சோதனை**

சரியா, தவறா எனக் கூறுக.

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$-வது உறுப்பானது $pn+q$ என்ற வடிவில் அமையும், இங்கு $p$ மற்றும் $q$ ஆனது மாறிலிகள்.
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது $pn^2+qn+r$ என்ற வடிவில் அமையும், இங்கு $p, q, r$ என்பன மாறிலிகள்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.34** ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13-வது உறுப்பு 3 மற்றும் முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் 234 எனில், கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் மற்றும் முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** 13-வது உறுப்பு =3 என்பதால், $t_{13} = a+12d = 3$ ...(1)

முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= 234$ என்பதால்

$$S_{13} = \frac{13}{2}[2a+12d] = 234$$
$$2a+12d = 36 \quad ...(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க நாம் பெறுவது, $a = 33$, $d = \frac{-5}{2}$

எனவே, பொது வித்தியாசம் $\frac{-5}{2}$.

முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2\times33+(21-1)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{21}{2}[66-50] = 168$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.35** ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{5n^2}{2}+\frac{3n}{2}$ எனில், 17–வது உறுப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதலிலிருந்து முதல் 16 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கழித்தால் 17-வது உறுப்பைக் காணலாம்.

$$S_{17} = \frac{5\times(17)^2}{2}+\frac{3\times17}{2} = \frac{1445}{2}+\frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5\times(16)^2}{2} + \frac{3\times 16}{2} = \frac{1280}{2} + \frac{48}{2} = 664$$

$$t_{17} = S_{17} - S_{16} = 748 - 664 = 84$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.36** 300−க்கும் 600−க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** 300-க்கும் 600-க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் இயல் எண்கள் 301, 308, 315, …, 595.

300-க்கும் 600-க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல்
$301 + 308 + 315 + \cdots + 595$.

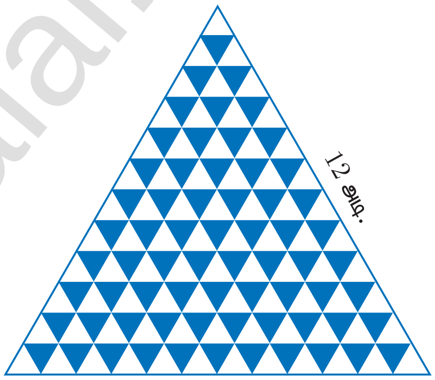
மேற்கண்ட தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

முதல் உறுப்பு $a = 301$; பொது வித்தியாசம் $d = 7$; கடைசி உறுப்பு $l = 595$.

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1 = \left(\frac{595-301}{7}\right) + 1 = 43$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l], \text{ என்பதால் } S_{43} = \frac{43}{2}[301+595] = 19264.$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.37** சிறிய தரையோடுகளைக் கொண்டு 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோண தரையோடுகள் (Mosaic) அமைக்கப்படுகிறது. அவற்றில் உள்ள ஒவ்வொரு தரையோடும் 12 அங்குல அளவிலான சமபக்க முக்கோண வடிவில் உள்ளது. சிறிய தரையோடுகளின் வண்ணங்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல மாறி மாறி உள்ளன. ஒவ்வொரு வண்ணத்திலும் உள்ள தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பில் உள்ள மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை காண்க.




படம் 2.12

**தீர்வு** தரையோடுகள் ஆனது 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் மற்றும் ஒவ்வொரு சிறிய தரையோடும் 12 அங்குல (1 அடி) பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் இருப்பதால், இந்த அமைப்பில் 12 வரிசைகளில் சிறிய தரையோடுகள் அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

படத்திலிருந்து ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள வெள்ளை நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, 4, …, 12 என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என அறியலாம்.

இதுபோல ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, …, 11. இதுவும் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும்.

வெள்ளை நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = \frac{12}{2}[1+12] = 78$

நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = \frac{12}{2}[0+11] = 66$

மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $= 78 + 66 = 144$

**எடுத்துக்காட்டு 2.38** ஒரு தெருவிலுள்ள வீடுகளுக்கு 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியாகக் கதவிலக்கம் வழங்கப்பட்டுள்ளது. செந்திலின் வீட்டிற்கு முன்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது செந்திலின் வீட்டிற்குப் பின்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனில் செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் $x$ என்க.

கணக்கின்படி, $1+2+3+\cdots+(x-1) = (x+1)+(x+2)+\cdots+49$

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = \left[1+2+3+\cdots+49\right]-\left[1+2+3+\cdots+x\right]$$

$$\frac{x-1}{2}\left[1+(x-1)\right] = \frac{49}{2}\left[1+49\right]-\frac{x}{2}\left[1+x\right]$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{49\times 50}{2}-\frac{x(x+1)}{2}$$

$x^2-x = 2450-x^2-x$ -லிருந்து $2x^2 = 2450$

$x^2 = 1225$ -லிருந்து $x = 35$

எனவே, செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் $35$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.39** $S_1, S_2, S_3$ என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$, $2n$, $3n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** $S_1, S_2, S_3$ என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n, 2n, 3n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில்,

$$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right],\quad S_2 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right],\quad S_3 = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

தற்போது, $S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right]-\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$$= \frac{n}{2}\left[\left[4a+2(2n-1)d\right]-\left[2a+(n-1)d\right]\right]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2}\times\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2-S_1) = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2-S_1) = S_3$$

**சிந்தனைக் களம்**

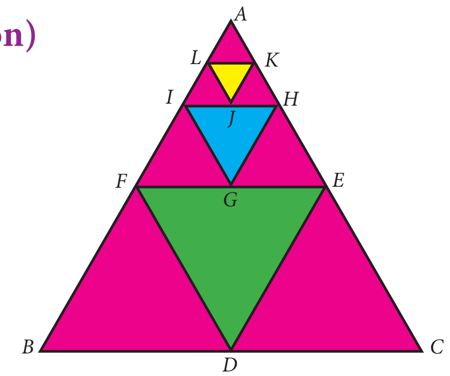
1. முதல் '$n$' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?
2. முதல் '$n$' இரட்டை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?

## பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.
   (i) $3, 7, 11, \ldots$ $40$ உறுப்புகள் வரை (ii) $102, 97, 92, \ldots$ $27$ உறுப்புகள் வரை
   (iii) $6+13+20+\cdots+97$
2. $5$ –லிருந்து தொடங்கி எத்தனை தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் $480$ கிடைக்கும்?.
3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $n$–வது உறுப்பு $4n-3$ எனில், அதன் முதல் $28$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரின் முதல் '$n$' உறுப்புகளின் கூடுதல் $2n^2-3n$ எனில், அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க.
5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $104$–வது உறுப்பு மற்றும் $4$–வது உறுப்புகள் முறையே $125$ மற்றும் $0$. அத்தொடர்வரிசையின் முதல் $35$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
6. $450$–க்குக் குறைவாக உள்ள அனைத்து ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண்க.
7. $602$–க்கும் $902$–க்கும் இடையே $4$ ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

8. இரகு ஒரு மடிக்கணினி வாங்க விரும்புகிறார். அவர் அதற்கான தொகையான ₹$40,000$–ஐ உடனடியாக பணமாகவும் செலுத்தலாம் அல்லது $10$ மாதத் தவணைகளில் முதல் தவணை ₹$4800$, இரண்டாம் தவணை ₹$4750$, மூன்றாம் தவணை ₹$4700$ என்ற அடிப்படையிலும் செலுத்தலாம். அவர் இந்த வகையில் பணம் செலுத்துகிறார் எனில்,
   (i) $10$ மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை
   (ii) மாதத் தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும்போது அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.
9. ஒருவர் தான் பெற்ற ₹$65,000$ கடனை திருப்பிச் செலுத்த முதல் மாதம் ₹$400$ செலுத்துகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் முந்தைய மாதம் செலுத்தியதைவிட ₹$300$ கூடுதலாகச் செலுத்துகிறார். அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க எவ்வளவு காலம் தேவைப்படும்?
10. செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் $30$ படிகட்டுகள் உள்ளன. கீழ்ப் படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு $100$ செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அடுத்தடுத்த படிக்கட்டுகள் அமைப்பதற்கு முந்தைய படிக்கட்டை விட இரண்டு செங்கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது.
   (i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?
   (ii) படிகட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?
11. $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ என்பன $m$ வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். முதல் உறுப்புகள் $1, 2, 3, \ldots, m$ மற்றும் பொது வித்தியாசங்கள் $1, 3, 5, \ldots, (2m-1)$ முறையே அமைந்தால், அந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m = \frac{1}{2}mn(mn+1)$ என நிரூபிக்க.
12. $\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots 12 \text{ உறுப்புகள்}\right]$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

## 2.9 பெருக்குத்தொடர் வரிசை (Geometric Progression)



படம் 2.13

படத்தில் உள்ள $\Delta\, DEF$ ஆனது $\Delta\, ABC$–யின் பக்கங்கள் $AB$, $BC$ மற்றும் $CA$ ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்படியெனில் $\Delta\, DEF$–யின் பரப்பானது $\Delta\, ABC$–யின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகும். இதுபோலவே $\Delta\, GHI$–யின் பரப்பானது $\Delta\, DEF$–யின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகும் மற்றும் மற்ற சிறிய முக்கோணங்களுக்கும் இது போலவே தொடரும். பொதுவாக, ஒவ்வொரு சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பும் அதற்கு முந்தைய பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்காக இருக்கும்.

இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பானது $\Delta\, ABC$,

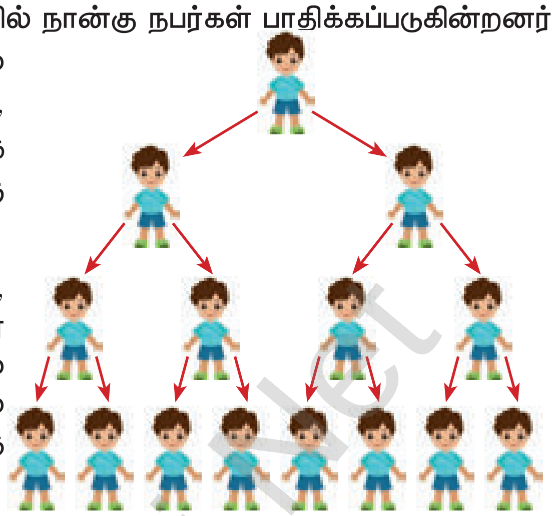
$$\frac{1}{4}\ \Delta\ \text{ABC},\ \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC, \ldots$$

அதாவது, $\Delta\ ABC,\ \frac{1}{4}\ \Delta\ ABC,\ \frac{1}{16}\ \Delta\ ABC, \ldots$

இந்த உதாரணத்தில் நாம் $\Delta\, ABC$–யில் தொடங்குகிறோம். அடுத்தடுத்த முக்கோணங்களின் பரப்பானது முந்தைய முக்கோணத்தின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்காக உள்ளது. அதாவது ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை $\frac{1}{4}$ ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கிறது.

வைரஸினால் பரவும் நோய்களைப் பற்றிய மற்றொரு உதாரணத்தைக் கருதுவோம். ஒரு வைரஸ் நோயானது ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஒரு பாதிக்கப்பட்ட நபரிடமிருந்து இரு புதிய நபர்களுக்குப் பரவுகிறது. முதல் நிலையில் ஒரு நபர் பாதிக்கப்படுகிறார், இரண்டாம் நிலையில் இரு நபர்கள் பாதிக்கப்படுகின்றனர், மூன்றாம் நிலையில் நான்கு நபர்கள் பாதிக்கப்படுகின்றனர் மற்றும் இவ்வாறே தொடர்கிறது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் பாதிக்கப்பட்ட நபர்களின் எண்ணிக்கையானது $1, 2, 4, 8, \ldots$ என்றவாறு அமைகிறது. இங்கு முதல் உறுப்பைத் தவிர, ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பின் இரு மடங்கு ஆகும்.

மேற்கண்ட இரு உதாரணங்களிலிருந்து, ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரே எண்ணால் பெருக்கினால் கிடைக்கிறது என்பதை நாம் தெளிவாக அறியலாம். இந்தக் கருத்துகள் நம்மை பெருக்குத் தொடர்வரிசை என்ற புதிய கோட்பாட்டிற்கு அழைத்துச் செல்கின்றன.



படம் 2.14

**வரையறை :** முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரு பூச்சியமற்ற மாறாத எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடர்வரிசையானது, **பெருக்குத் தொடர்வரிசை** எனப்படும். இந்த மாறாத எண் பொது விகிதம் எனப்படும். பொது விகிதம் வழக்கமாக $r$ எனக் குறிக்கப்படும்.

### 2.9.1 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் (General form of Geometric Progression)

$a$ மற்றும் $r \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள் என்க. $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1} \ldots$ என்ற வடிவில் அமையும் எண்களைப் "பெருக்குத் தொடர்வரிசை" (Geometric Progression). என்கிறோம். இங்கு '$a$' என்பது முதல் உறுப்பு (First term) என்றும் '$r$' என்பது பொது விகிதம் (Common ratio) என்றும் அழைக்கப்படும். முதல் உறுப்பு '$a$' –யில் தொடங்கி பொது விகிதம் '$r$' என்ற எண்ணால் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பெருக்கினால் கிடைப்பது $ar, ar^2, ar^3, \ldots$ என்பதை கவனத்தில் கொள்வோம்.

### 2.9.2 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு (General term of Geometric Progression)

பொது விகிதத்தில் அமைந்த ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $n$ –வது உறுப்பு அல்லது பொது உறுப்பைக் காண ஒரு சூத்திரத்தைக் காண்போம்.

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ இங்கு, '$a$' என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் '$r$' என்பது பொது விகிதம். $t_n$ என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $n$ –வது உறுப்பு என்க.

$$\begin{aligned}
t_1 &= a = a \times r^0 = a \times r^{1-1} \\
t_2 &= t_1 \times r = a \times r = a \times r^{2-1} \\
t_3 &= t_2 \times r = ar \times r = ar^2 = ar^{3-1} \\
\vdots & \quad \vdots \\
t_n &= t_{n-1} \times r = ar^{n-2} \times r = ar^{n-2+1} = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

ஆகவே, பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் பொது உறுப்பு அல்லது $n$ -வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

**குறிப்பு**

➤ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதத்தைக் கருதினால், நாம் பெறுவது,

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{ar}{a}=r\,,\ \frac{t_3}{t_2}=\frac{ar^2}{ar}=r\,,\ \frac{t_4}{t_3}=\frac{ar^3}{ar^2}=r\,,\ \frac{t_5}{t_4}=\frac{ar^4}{ar^3}=r\,,\ldots$$

ஆகவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் எப்போதும் ஒரு மாறிலியாகத்தான் இருக்கும். இந்த மாறிலிதான் அந்தத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதமாகும்.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையானது முந்தைய உறுப்பை ஒரு ________ ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.
2. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் ______ மற்றும் இது __________ என அழைக்கப்படுகிறது.
3. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளில் விடுபட்ட எண்களைக் காண்க.

   (i) $\frac{1}{8},\frac{3}{4},\frac{9}{2},$___  (ii) $7,\frac{7}{2},$___  (iii) ___, $2\sqrt{2},4,\ldots$

**எடுத்துக்காட்டு 2.40** பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … (iii) 5, 25, 50, 75, …

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை, பெருக்குத் தொடர்வரிசையா எனக் கண்டறிய அவற்றின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் சமமாக உள்ளதா எனக் கண்டறிய வேண்டும்.

(i) 7, 14, 21, 28, …

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{14}{7}=2\,;\quad \frac{t_3}{t_2}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}\,;\quad \frac{t_4}{t_3}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 7, 14, 21, 28, … என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையல்ல.

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, …

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\,;\quad \frac{t_3}{t_2}=\frac{2}{1}=2\,;\quad \frac{t_4}{t_3}=\frac{4}{2}=2$$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம் என்பதால் $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … என்ற தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் $r=2$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

(iii) 5, 25, 50, 75,…

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{25}{5}=5\,;\quad \frac{t_3}{t_2}=\frac{50}{25}=2\,;\quad \frac{t_4}{t_3}=\frac{75}{50}=\frac{3}{2}$$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 5, 25, 50, 75,… என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையல்ல.

**சிந்தனைக் களம்**

$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}},\ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகுமா?

**எடுத்துக்காட்டு 2.41** பின்வருவனவற்றின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது விகிதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, அதனுடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க. (i) $a=-7\,,\ r=6$ (ii) $a=256\,,\ r=0.5$

**தீர்வு** (i) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a=-7$, $ar=-7\times 6=-42$, $ar^2=-7\times 6^2=-252$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை $-7, -42, -252, \ldots$

(ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a=256$, $ar=256\times 0.5=128$, $ar^2=256\times(0.5)^2=64$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை $256, 128, 64, \ldots$.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. முதல் உறுப்பு $=a$, பொது விகிதம்$=r$, எனில், $t_9$ மற்றும் $t_{27}$ ஐக் காண்க.
2. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $t_1=\frac{1}{5}$ மற்றும் $t_2=\frac{1}{25}$ எனில், பொது விகிதம் ________.

**எடுத்துக்காட்டு 2.42** $9, 3, 1, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $8$ –வது உறுப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $8$–வது உறுப்பைக் காண $t_n=ar^{n-1}$ என்ற $n$ -வது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

முதல் உறுப்பு $a=9$, பொது விகிதம் $r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$$t_8=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{8-1}=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1}{243}$$

எனவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $8$–வது உறுப்பு $\frac{1}{243}$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.43** ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் $4$–வது உறுப்பு $\frac{8}{9}$ மற்றும் $7$–வது உறுப்பு $\frac{64}{243}$ எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

**தீர்வு** $4$–வது உறுப்பு $t_4=\frac{8}{9}$ –லிருந்து $ar^3=\frac{8}{9}$ ...(1)

$7$–வது உறுப்பு $t_7=\frac{64}{243}$ –லிருந்து $ar^6=\frac{64}{243}$ ...(2)

சமன்பாடு (2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது, $\frac{ar^6}{ar^3}=\frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}}$

$$r^3=\frac{8}{27} \text{ விலிருந்து } r=\frac{2}{3}$$

$r$–யின் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1) –யில் பிரதியிட, $a\times\left[\frac{2}{3}\right]^3=\frac{8}{9}$ –லிருந்து $a=3$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை $a, ar, ar^2, \ldots$ அதாவது, $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$

### குறிப்பு

- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால்,அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.44** ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் $343$ மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் $\frac{91}{3}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் $= 343$

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$$

$a^3 = 7^3$ லிருந்து $a = 7$

உறுப்புகளின் கூடுதல் $= \frac{91}{3}$

ஆகவே, $a\left(\frac{1}{r}+1+r\right) = \frac{91}{3}$ –லிருந்து

$$7\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$$

$3+3r+3r^2 = 13r$ எனவே $3r^2 - 10r + 3 = 0$

$(3r-1)(r-3) = 0$ எனவே $r = 3$ அல்லது $r = \frac{1}{3}$

$a = 7, r = 3$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $\frac{7}{3}, 7, 21$.

$a = 7, r = \frac{1}{3}$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $21, 7, \frac{7}{3}$.

### சிந்தனைக் களம்

1. $64$ என்ற எண்ணைப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த மூன்று எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுக.
2. $a, b, c, \ldots$ என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், $2a, 2b, 2c, \ldots$ என்பது ஒரு ______
3. $3, x, 6.75$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், $x$ –யின் மதிப்பு ____

### முன்னேற்றச் சோதனை

$a, b, c$ என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே ______.

**மூன்று எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைய நிபந்தனை**

$a, b, c$ என்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையுமெனில், $b = ar$, எனவே, $ac = a \times ar^2 = (ar)^2 = b^2$. ஆகவே, $b^2 = ac$

இதுபோலவே, $b^2 = ac$, எனில், $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. எனவே, $a, b, c$ என்பன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும்.

ஆகவே, $a, b, c$ என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $b^2 = ac$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.45** ஓர் இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு $40,000$ மற்றும் ஒவ்வொரு வருடமும் அதன் மதிப்பு $10\%$ குறைகிறது. $6$-வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹$40,000$. அதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு வருட முடிவில் $10\%$ குறையும் என்பதால், முதல் வருட முடிவில் அதன் மதிப்பு ஆரம்ப மதிப்பில் $90\%$ ஆக இருக்கும்.

அதாவது முதல் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $40,000 \times \frac{90}{100}$ ஆகும்.

இரண்டு வருடம் கழித்து இயந்திரத்தின் மதிப்பானது முதல் வருட மதிப்பில் $90\%$ ஆக இருக்கும்.

இரண்டாம் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பானது $40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$ ஆகும்.

இந்த வகையில் தொடர்ந்தால், இயந்திரத்தின் மதிப்பு பின்வருமாறு குறைகிறது.

$$40000,\ 40000\times\frac{90}{100},\ 40000\times\left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

இந்தத் தொடர்வரிசை முதல் உறுப்பு $40,000$ மற்றும் பொது விகிதம் $\frac{90}{100}$ உடைய ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

6வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பைக் காண (5வது வருட முடிவில்), பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 6–வது உறுப்பைக் கண்டறிய வேண்டும்.

ஆகவே, $n=6,\ a=40,000,\ r=\frac{90}{100}$.

$t_n = ar^{n-1}$, என்பதைப் பயன்படுத்த, $t_6 = 40,000\times\left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000\times\left(\frac{90}{100}\right)^5$

$$t_6 = 40,000\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10} = 23619.6$$

எனவே, 6–வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு = ₹23619.60

## பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?

   (i) 3,9,27,81,… (ii) 4,44,444,4444,… (iii) 0.5,0.05,0.005,…

   (iv) $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\ldots$ (v) $1,-5,25,-125,\ldots$ (vi) 120,60,30,18,… (vii) $16,4,1,\frac{1}{4},\ldots$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

   (i) $a=6,\ r=3$ (ii) $a=\sqrt{2},\ r=\sqrt{2}$ (iii) $a=1000,\ r=\frac{2}{5}$

3. 729, 243, 81,… என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 7–வது உறுப்பைக் காண்க.

4. $x+6,\ x+12$ மற்றும் $x+15$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில், $x$–யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

   (i) 4,8,16,…,8192 (ii) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots,\frac{1}{2187}$

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 9–வது உறுப்பு 32805 மற்றும் 6–வது உறுப்பு 1215 எனில், 12–வது உறுப்பைக் காண்க.

7. ஒரு பெருக்கத்தொடர் வரிசையின் 8–வது உறுப்பு 768 மற்றும் பொது விகிதம் 2 எனில், அதன் 10–வது உறுப்பைக் காண்க.

8. $a,\ b,\ c$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில் $3^a,3^b,3^c$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 27 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கற்கலனின் கூடுதல் $\frac{57}{2}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

10. ஒரு நபர் ஒரு நிறுவனத்தில் துணை மேலாளராகப் பணியில் சேர்கிறார். அவருக்கு அந்நிறுவனம் முதல் மாத ஊதியமாக ₹60,000 வழங்குகிறது மற்றும் ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5% வழங்குவதாக ஒப்புக்கொள்கிறது. 5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் எவ்வளவு?

11. சிவமணி ஒரு பணிக்கான நேர்காணலில் பங்கேற்கிறார். அந்நிறுவனம் அவருக்கு இரண்டு விதமான வாய்ப்புகளை வழங்குகிறது.

    வாய்ப்பு $A$: முதல் மாத ஊதியம் ₹$20,000$ மற்றும் நிச்சயமான $6\%$ ஆண்டு ஊதிய உயர்வு $5$ ஆண்டுகளுக்கு.

    வாய்ப்பு $B$: முதல் மாத ஊதியம் ₹$22,000$ மற்றும் நிச்சயமான $3\%$ ஆண்டு ஊதிய உயர்வு $5$ ஆண்டுகளுக்கு.

    $A$ மற்றும் $B$ ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய $4$–வது வருட ஊதியம் எவ்வளவு?

12. $a, b, c$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் மற்றும் $x, y, z$ என்பன ஒரு பெருக்கு தொடர்வசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில் $x^{b-c}\times y^{c-a}\times z^{a-b}=1$ என நிறுவுக.

## 2.10 பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல். (Sum to $n$ terms of a G.P.)

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் அந்தத் தொடர் **பெருக்குத் தொடர்** எனப்படும்.

$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots ar^{n-1},\ \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை என்க. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல்.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \ldots (1)$$

இருபுறமும் $r$ ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது, $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots (2)$

$$(2)-(1) \Rightarrow rS_n - S_n = ar^n - a$$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

ஆகவே ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1$

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இருக்குமானால் அது ________ எனப்படும்.
2. $r=1$ எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் ________.
3. $r\neq 1$ எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் ________.

### குறிப்பு

- $r=1$ எனும் போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது.

  $r=1$, எனில்,

  $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

### 2.10.1 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் (Sum to infinite terms of a G.P.)

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.46** $1, -3, 9, -27\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $8$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** இங்கு முதல் உறுப்பு $a=1$, பொது விகிதம் $r=\frac{-3}{1}=-3<1,\ n=8$.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\quad r\neq 1$

$$\text{ஆகவே,}\quad S_8=\frac{1\left((-3)^8-1\right)}{(-3)-1}=\frac{6561-1}{-4}=-1640$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.47** ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $S_6=4095$ மற்றும் $r=4$ எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** பொது விகிதம் $=4>1$, முதல் $6$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_6=4095$

$$\text{எனவே,}\quad S_6=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=4095$$

$$r=4 \text{ என்பதால், } \frac{a(4^6-1)}{4-1}=4095 \quad \text{இதிலிருந்து } a\times\frac{4095}{3}=4095$$

முதல் உறுப்பு $a=3$.

**எடுத்துக்காட்டு 2.48** $1+4+16+\cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் $1365$ கிடைக்கும்?

**தீர்வு** கூடுதல் $1365$ கிடைக்க கூட்ட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$ என்க.

$$a=1,\ r=\frac{4}{1}=4>1$$

$$S_n=1365 \text{ இதிலிருந்து } \frac{a(r^n-1)}{r-1}=1365$$

$$\frac{1(4^n-1)}{4-1}=1365 \text{ எனவே, } (4^n-1)=4095$$

$$4^n=4096 \text{ இதிலிருந்து, } 4^n=4^6$$

$$n=6$$

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்____
2. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரம் $r$ -யின் எம்மதிப்புகளுக்குப் பொருந்தும்?

**எடுத்துக்காட்டு 2.49** $3+1+\frac{1}{3}+\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** இங்கு $a=3$, $r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{3}$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $=\frac{a}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$

**எடுத்துக்காட்டு 2.50** $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க

**தீர்வு** $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$0.6666\ldots=0.6+0.06+0.006+0.0006+\cdots$$

$0.6, 0.06, 0.006\ldots$ என்ற எண்கள் ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை அமைக்கின்றன. முதல் உறுப்பு $a=0.6$ பொது விகிதம் $r=\frac{0.06}{0.6}=0.1$. மேலும் $-1<r=0.1<1$

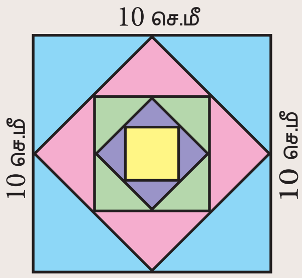
பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$0.6666\ldots=0.6+0.06+0.006+0.0006+\cdots=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

ஆகவே $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

## செயல்பாடு 5

கொடுக்கப்பட்ட சதுரத்தின் பக்கம் 10 செ.மீ. இதன் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு புதிய சதுரம் உருவாக்கப்படுகிறது. இந்தப் புதிய சதுரத்தின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து மீண்டும் ஒரு சதுரம் உருவாக்கப்படுகிறது. இந்தச் செயல்முறை முடிவில்லாமல் தொடர்கிறது. இந்தச் செயல்முறையில் உருவான சதுரங்களின் பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவுகளின் கூடுதல் காண்க.



படம் 2.15

**எடுத்துக்காட்டு 2.51** $5+55+555+\cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

**தீர்வு** $5+55+555+\cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல, பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல. எனவே, இந்தத் தொடரை இரு தொடர்களாகப் பிரித்துக் கூடுதல் காண்போம்.

$$5+55+555+\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை} = 5[1+11+111+\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[9+99+999+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[(10+100+1000+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை})-n]$$

$$=\frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right]=\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$$

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. $3+33+333+\ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடரா?
2. $1+r+r^2+r^3\ldots=\frac{3}{4}$ என்றவாறு அமையும் $r$–யின் மதிப்பு ____.

**எடுத்துக்காட்டு 2.52** $1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச் சிறிய மிகைமுழு எண் $n$ காண்க.

**தீர்வு** எத்தனை குறைவான உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் $5000$–ஐத் தாண்டும் என நாம் காண வேண்டும்.

அதாவது எந்தக் குறைவான $n$ மதிப்பிற்கு $S_n>5000$ வரும் எனக் காண வேண்டும்.

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(6^n-1)}{6-1}=\frac{6^n-1}{5}$$

$$S_n>5000 \text{ என்பதால் } \frac{6^n-1}{5}>5000$$

$$6^n-1>25000 \text{ இதிலிருந்து } 6^n>25001$$

$6^5=7776$ மற்றும் $6^6=46656$ என்பதால்

$1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச்சிறிய $n$ -ன் மதிப்பு $6$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 2.53** ஒரு நபர் ஒவ்வோர் ஆண்டும் அதற்கு முந்தைய ஆண்டு சேமித்த தொகையில் பாதியைச் சேமிக்கிறார். 6 ஆண்டுகளில் அவர் ₹7875–ஐச் சேமிக்கிறார் எனில், முதல் ஆண்டில் அவர் சேமித்த தொகை எவ்வளவு?

**தீர்வு** 6 ஆண்டுகளில் அவர் சேமித்த தொகை $S_6=7875$

ஒவ்வோர் ஆண்டும் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய ஆண்டின் சேமிப்புத் தொகையில் பாதி என்பதால், $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 7875$$

$$\frac{a\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 7875 \text{ லிருந்து } a \times \frac{63}{32} = 7875$$

$$a = \frac{7875 \times 32}{63} \text{ எனவே, } a = 4000$$

எனவே, அந்த நபர் முதல் ஆண்டில் சேமித்த தொகை ₹ $4000$.

## பயிற்சி 2.8

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

   (i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ (ii) $256, 64, 16, \ldots$

2. $5, 15, 45, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $6$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் $5$ மற்றும் முதல் $6$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $46872$ எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க..

4. பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.

   (i) $9 + 3 + 1 + \cdots$ (ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + \cdots$

5. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு $8$ மற்றும் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $\frac{32}{3}$ எனில் அதன் பொது விகிதம் காண்க.

6. பின்வரும் தொடர்களின் $n$ உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

   (i) $0.4 + 0.44 + 0.444 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை

   (ii) $3 + 33 + 333 + \cdots$ $n$ உறுப்புகள் வரை

7. $3 + 6 + 12 + \cdots + 1536$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

8. குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுதுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார். இந்தச் செயல்முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுகின்றது. ஒரு கடிதத்திற்கான செலவு ₹$2$ எனில் $8$ நிலைகள் வரை கடிதங்கள் அனுப்புவதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.

9. $0.\overline{123}$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.

10. $S_n = (x+y) + (x^2+xy+y^2) + (x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots n$ உறுப்புகள் வரை எனில்

    $(x-y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} - \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ என நிறுவுக.

## 2.11 சிறப்புத் தொடர்கள் (Special Series)

சில தொடர்களின் கூடுதலை தனித்த சூத்திரங்கள் மூலம் காணலாம். இத்தகைய தொடர்களைச் சிறப்புத் தொடர்கள் என்கிறோம்.

இங்கு நாம் பொதுவான சில சிறப்புத் தொடர்களைக் காண உள்ளோம்.

(i) முதல் '$n$' இயல் எண்களின் கூடுதல் .

(ii) முதல் '$n$' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்.

(iii) முதல் '$n$' இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்.

(iv) முதல் '$n$' இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்.

$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ என்பதன் மதிப்பை $(x+1)^{k+1} - x^{k+1}$ என்ற கோவையைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்

### 2.11.1 முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதல் (Sum of First $n$ Natural Numbers)

$1+2+3+\cdots+n$ ,என்பதன்மதிப்புகாண $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ என்றமுற்றொருமையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\begin{aligned}
x = 1 &\text{ எனில், } 2^2 - 1^2 = 2(1)+1\\
x = 2 &\text{ எனில், } 3^2 - 2^2 = 2(2)+1\\
x = 3 &\text{ எனில், } 4^2 - 3^2 = 2(3)+1\\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
x = n-1 &\text{ எனில், } n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1)+1\\
x = n &\text{ எனில், } (n+1)^2 - n^2 = 2(n)+1
\end{aligned}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி அதில் இடது பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது.

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1^2 &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\
n^2 + 2n &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\
2(1+2+3+\cdots+n) &= n^2 + n = n(n+1)\\
1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

### 2.11.2 முதல் $n$ ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் (Sum of first $n$ Odd Natural Numbers)

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

இது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை $a=1$, $d=2$ மற்றும் $l = 2n-1$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left[a+l\right]\\
&= \frac{n}{2}\left[1+2n-1\right]\\
S_n &= \frac{n}{2}\times 2n = n^2
\end{aligned}$$

### 2.11.3 முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் (Sum of Squares of First $n$ Natural Numbers)

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, –யின் மதிப்பு காண $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$ என்ற முற்றொருமையைக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}
x = 1 &\text{ எனில், } 2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1)+1\\
x = 2 &\text{ எனில், } 3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2)+1
\end{aligned}$$

$x = 3$ எனில், $4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x = n-1$ எனில், $n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

$x = n$ எனில், $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி, அதில் இடப்பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1+2+3+\cdots+n) + n \\
n^3 + 3n^2 + 3n &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\
3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) &= n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} \\
3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

### 2.11.4 முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் (Sum of Cubes of First $n$ Natural Numbers)

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$–யின் மதிப்பு காண

$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ என்ற முற்றொருமையைக் கருதுவோம்.

$x = 1$ எனில், $2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$

$x = 2$ எனில், $3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$

$x = 3$ எனில், $4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x = n-1$ எனில், $n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$

$x = n$ எனில், $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி அதில் இடப்பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது,

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4(1+2+3+\cdots+n) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - n^2 - 2n^2 - n - 2n^2 - 2n - n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

1. முதல் $n$ இயல் எண்களை ஒரு முக்கோண வடிவில் (படம் 2.16) அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதல் **முக்காண எண்** என்று அழைக்கின்றோம்.
2. முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களை ஒரு பிரமிடு வடிவில் அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதலை சதுர பிரமிடு எண் என்கிறோம்,

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

### சிறந்த நட்பு

220 மற்றும் 284 ஆகிய எண்களைக் கருதுக.

220 –யின் வகுத்திகளின் கூடுதல் (220 நீங்கலாக)

$= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

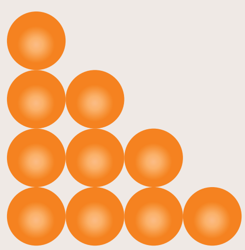
284-யின் வகுத்திகளின் கூடுதல் (284 நீங்கலாக) $=1+2+4+71+142=220$.

இதிலிருந்து, 220, 284 ஆகிய எண்களில் ஓர் எண் நீங்கலாக அதன் வகுத்திகளின் கூடுதலானது மற்றோர் எண்ணுக்குச் சமம்.

இவ்வாறு அமைந்த எண் ஜோடிகளை **இணக்கமான எண்கள்** அல்லது **நட்பு எண்கள்** என அழைக்கிறோம். 220 மற்றும் 284 என்ற எண்களே மிகச் சிறிய சோடி நட்பு எண்கள் ஆகும். இவ்வெண்களைக் கண்டறிந்தவர் பிதாகரஸ் ஆவார். தற்போது வரை 12 மில்லியன் ஜோடி இணக்கமான எண்கள் கண்டறியப்பட்டுள்ளன.

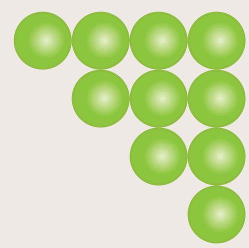
### செயல்பாடு 6

பின்வரும் முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்க.



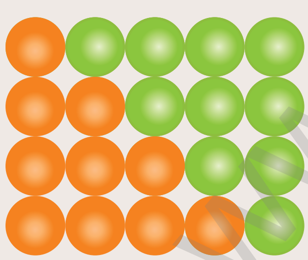
$(1+2+3+4)$ படம் 2.16

இதுபோன்ற மற்றொரு முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்க



$(4+3+2+1)$ படம் 2.17

இரண்டாவது முக்கோணத்தை முதல் முக்கோணத்துடன் சேர்க்க நாம் பெறுவது.



படம் 2.18

ஆகவே, $1+2+3+4$ இருமுறை சேரும்போது $4\times5$ அளவுள்ள ஒரு செவ்வகம் கிடைக்கிறது.

படத்தில் நாம் செய்ததை எண்களில் எழுதினால்,.

$$(4+3+2+1)+(1+2+3+4)=4\times5$$

$$2(1+2+3+4)=4\times5$$

எனவே, $1+2+3+4=\dfrac{4\times5}{2}=10$

இது போன்றே, முதல் 5 இயல் எண்களின் கூடுதல் காண முயற்சி செய்க. இந்த விடையிலிருந்து உனக்குத் தெரிந்த சூத்திரத்தைத் தொடர்புபடுத்துக.

### சிந்தனைக் களம்

1. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை சதுரங்கள் உள்ளன?
2. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை செவ்வகங்கள் உள்ளன?

இங்கு நாம் இதுவரை விவாதித்த கூடுதல் காணும் சூத்திரங்களைத் தொகுப்போம். இந்தச் சூத்திரங்கள் முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல் காணப் பயன்படுகின்றன.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+2+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.54** மதிப்பு காண்க (i) $1+2+3+\ldots+50$ (ii) $16+17+18+\ldots+75$

**தீர்வு** (i) $1+2+3+\cdots+50$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1+2+3+\cdots+50 = \frac{50\times(50+1)}{2} = 1275$$

(ii) $16+17+18+\cdots+75 = (1+2+3+\cdots+75)-(1+2+3+\cdots+15)$

$$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$$

$$= 2850-120 = 2730$$

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. முதல் $n$ இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதலானது, முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதலின் ____________ ஆகும்.
2. முதல் 100 இயல் எண்களின் சராசரி ____________.

**எடுத்துக்காட்டு 2.55** கூடுதல் காண்க. (i) 1+3+5+ ... 40 உறுப்புகள் வரை

(ii) $2+4+6+\cdots+80$ (iii) $1+3+5+\cdots+55$

**தீர்வு** (i) $1+3+5+\cdots 40$ உறுப்புகள் வரை $= 40^2 = 1600$

(ii) $2+4+6+\cdots+80 = 2(1+2+3+\cdots+40) = 2\times\frac{40\times(40+1)}{2} = 1640$

(iii) $1+3+5+\cdots+55$

இங்கு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்படவில்லை. நாம் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $n = \frac{(l-a)}{d}+1$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

$n = \frac{(55-1)}{2}+1 = 28$ எனவே, $1+3+5+\cdots+55 = (28)^2 = 784$

**எடுத்துக்காட்டு 2.56** கூடுதல் காண்க. (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2$ (iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2$

**தீர்வு** (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2 = \frac{19\times(19+1)(2\times19+1)}{6} = \frac{19\times20\times39}{6} = 2470$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2 = 5^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2)$

$$= 25\times\frac{21\times(21+1)(2\times21+1)}{6}$$

$$= \frac{25\times21\times22\times43}{6} = 82775$$

(iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2 = (1^2+2^2+3^2+\cdots+28^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+14^2)$

$$= \frac{28\times29\times57}{6}-\frac{14\times15\times29}{6} = 7714-1015 = 6699$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.57** கூடுதல் காண்க (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3$ (ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3$

**தீர்வு** (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3 = \left[\frac{16\times(16+1)}{2}\right]^2 = (136)^2 = 18496$

(ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3 = (1^3+2^3+3^3+\cdots+21^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3)$

$$= \left[\frac{21\times(21+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{8\times(8+1)}{2}\right]^2 = (231)^2-(36)^2 = 52065$$

**எடுத்துக்காட்டு 2.58** $1+2+3+\cdots+n = 666$ எனில், $n$–யின் மதிப்பு காண்க.

**தீர்வு** $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, என்பதால் $\frac{n(n+1)}{2} = 666$

$n^2+n-1332 = 0$ இதிலிருந்து $(n+37)(n-36) = 0$

எனவே, $n = -37$ அல்லது $n = 36$

ஆனால் $n \neq -37$ (ஏனெனில் $n$ ஓர் இயல் எண்). ஆகவே $n = 36$.

## முன்னேற்றச் சோதனை

சரியா, தவறா எனக் கூறுக. உனது விடைக்கான காரணம் தருக.

(i) முதல் $n$ ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

(ii) அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் இரட்டை எண்ணாகும்.

(iii) முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்றும் முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதல் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் 2 ஆல் வகுபடும்.

(iv) முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஒரு வர்க்க எண்ணாகும்.

## பயிற்சி 2.9

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$

(iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

(vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$

2. $1+2+3+\cdots+k=325$, எனில் $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ யின் மதிப்பு காண்க.

3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$ எனில், $1+2+3+\cdots+k$ யின் மதிப்பு காண்க.

4. $1^3+2^3+3^3+\cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் $14400$ கிடைக்கும்?

5. முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் $285$ மற்றும் முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் $2025$ எனில் $n$–யின் மதிப்பு காண்க.

6. ரேகாவிடம் $10$ செ.மீ, $11$ செ.மீ, $12$ செ.மீ,...., $24$ செ.மீ என்ற பக்க அளவுள்ள $15$ சதுர வடிவ வண்ணக் காகிதங்கள் உள்ளன. இந்த வண்ணக் காகிதங்களைக் கொண்டு எவ்வளவு பரப்பை அடைத்து அலங்கரிக்க முடியும்?

7. $(2^3-1^3)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் (i) $n$ உறுப்புகள் வரை (ii) $8$ உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

## பயிற்சி 2.10

3PDY4D

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் படி, $a$ மற்றும் $b$ என்ற மிகை முழுக்களுக்கு, தனித்த மிகை முழுக்கள் $q$ மற்றும் $r, a=bq+r$ என்றவாறு அமையுமானால், இங்கு $r$ ஆனது,

   (1) $1<r<b$ (2) $0<r<b$ (3) $0\le r<b$ (4) $0<r\le b$

2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, எந்த மிகை முழுவின் கனத்தையும் $9$ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள்

   (1) 0, 1, 8 (2) 1, 4, 8 (3) 0, 1, 3 (4) 1, 3, 5

3. 65 மற்றும் 117–யின் மீ.பொ.வ–வை $65m-117$ என்ற வடிவில் எழுதும்போது, $m$–யின் மதிப்பு

   (1) 4 (2) 2 (3) 1 (4) 3

4. 1729–ஐ பகாக் காரணிப்படுத்தும் போது, அந்தப் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் கூடுதல்

   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5. 1 முதல் 10 வரையுள்ள (இரண்டு எண்களும் உட்பட) அனைத்து எண்களாலும் வகுபடும் மிகச்சிறிய எண்

   (1) 2025 (2) 5220 (3) 5025 (4) 2520

6. $7^{4k}\equiv$ ______ (மட்டு 100)

   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

7. $F_1=1$, $F_2=3$ மற்றும் $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ எனக் கொடுக்கப்படின் $F_5$ ஆனது

   (1)3 (2)5 (3)8 (4)11

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு $1$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $4$ எனில், பின்வரும் எண்களில் எது இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்?

   (1) 4551 (2) 10091 (3) 7881 (4) 13531

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $6$வது உறுப்பின் $6$ மடங்கும் $7$ வது உறுப்பின் $7$ மடங்கும் சமம் எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $13$–வது உறுப்பு
(1) $0$ (2) $6$ (3) $7$ (4) $13$

10. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $31$ உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் $16$–வது உறுப்பு m எனில், அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்.
(1) $16$ m (2) $62$ m (3) $31$ m (4) $\frac{31}{2}$ m

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு $1$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $4$. இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் அதன் கூடுதல் $120$ கிடைக்கும்?
(1) $6$ (2) $7$ (3) $8$ (4) $9$

12. If $A = 2^{65}$ மற்றும் $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \quad + 2^{0}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றில் எது உண்மை?
(1) $B$ ஆனது $A$ ஐ விட $2^{64}$ அதிகம் (2) $A$ மற்றும் $B$ சமம்
(3) $B$ ஆனது $A$-ஐ விட $1$ அதிகம் (4) $A$ ஆனது $B$–ஐ விட $1$ அதிகம்

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் அடுத்த உறுப்பு
(1) $\frac{1}{24}$ (2) $\frac{1}{27}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{81}$

14. $t_1, t_2, t_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில், $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ என்பது
(1) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை (2) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை
(3) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையுமல்ல, பெருக்குத் தொடர்வரிசையுமல்ல
(4) ஒரு மாறிலித் தொடர் வரிசை

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ யின் மதிப்பு
(1) $14400$ (2) $14200$ (3) $14280$ (4) $14520$

## அலகுப் பயிற்சி - 2

1. எல்லா மிகை முழுக்கள் $n$ –க்கும் $n^2 - n$ ஆனது $2$–ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.
2. ஒரு பால்காரரிடம் $175$ லிட்டர் பசும் பாலும் $105$ லிட்டர் எருமைப்பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார். (i)இவ்வாறு விற்பதற்குத் தேவைப்படும் கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு எவ்வளவு? இவ்வாறாக (ii) எத்தனை கலன் பசும்பால் மற்றும் (iii) எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்.?
3. $a, b, c$ என்ற எண்களை $13$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே $9, 7$ மற்றும் $10$. $a + 2b + 3c$ ஐ $13$–ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
4. $107$ ஆனது $4q + 3$, $q$ என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என்ற வடிவில் அமையும் என நிறுவுக.
5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $(m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு எனில், $(3m+1)^{\text{th}}$ வது உறுப்பானது $(m+n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

6. $-2, -4, -6, \ldots -100$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து $12$வது உறுப்பைக் காண்க..

7. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொதுவித்தியாசம் கொண்டுள்ளன. ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு $2$ மற்றும் மற்றொரு தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு $7$. இரு தொடர்வரிசைகளின் $10$வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம், $21$–வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என நிருபித்து உள்ளது. இந்த வித்தியாசம் அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமமாக உள்ளது என நிறுவுக.

8. ஒரு நபர் $10$ வருடங்களில் ₹$16500$ ஐ சேமிக்கிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹$100$ அதிகம். அவர் முதல் வருடம் எவ்வளவு சேமித்திருப்பார்?

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $2$–வது உறுப்பு $\sqrt{6}$ மற்றும் $6$–வது உறுப்பு $9\sqrt{6}$ எனில் அந்தத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

10. ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் $15\%$ குறைகிறது. வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹$45000$ எனில், $3$ ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு என்ன?

## நினைவில் கொள்ள வேண்டியவை

- **யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்**

  $a$ மற்றும் $b$ என்பன இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$ என்றவாறு $q,\ r$ எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

- **அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்**

  எல்லாப் பகு எண்களும் தனித்த பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த இயலும், பகா எண்களின் வரிசை மாறலாம்.

- **கூட்டுத் தொடர்வரிசை**

  (i) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots.$ $n$–வது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$

  (ii) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

  (iii) கடைசி உறுப்பு $l$ ($n$ வது உறுப்பு ) கொடுக்கப்பட்டால் $S_n = \dfrac{n}{2}[a + l]$)

- **பெருக்குத் தொடர்வரிசை**

  (i) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a,\ ar,\ ar^2, \ldots, ar^{n-1}.$ $n^{th}$ $n$–வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

  (ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ இங்கு, $r \neq 1$

  (iii) $r = 1$ எனில், $S_n = na$

  (iv) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $a + ar + ar^2 + \cdots$ is $S = \dfrac{a}{1-r}$, இங்கு, $-1 < r < 1$

- **சிறப்புத் தொடர்கள்**

(i) முதல் $n$ இயல் எண்களின் கூடுதல் $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) முதல் $n$ இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) முதல் $n$ இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) முதல் $n$ ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

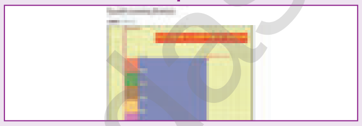
**ICT 2.1**

**படி 1** உலாவியைத் திறந்து கீழ்க்கண்ட URL இணைப்பைத் தட்டச்சு செய்யும் (அ) விரைவுக் குறியீட்டை scan செய்யும். Numbers and Sequences எனற ஜியோஜீப்ரா பயிற்சி ஏடு திறக்கப்படும். பயிற்சி ஏட்டின் இடது பக்கத்தில் எண்களும் தொடர்வரிசைகளும் பாடம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் இருக்கும். அதில் Euclid's lemma Division என்ற பயிற்சித்தாளை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

**படி 2** பயிற்சித்தாளில் Drag me என்ற புள்ளியை இழுத்து தேவையான புள்ளியில் வைக்கவும் இப்போது பாடப்புத்தகத்தில் படித்த வகுத்தல் வழிமுறையை ஒப்பிடவும்.

படி 1

படி 2



முடிவுகள்

**ICT 2.2**

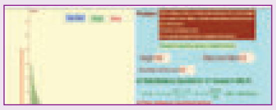
**படி 1** உலாவியைத் திறந்து கீழ்க்கண்ட URL இணைப்பைத் தட்டச்சு செய்யவும் (அல்லது) விரைவுக் குறியீட்டை scan செய்யவும் Numbers and sequences என்ற ஜியோஜீப்ரா பயிற்சி ஏடு திறக்கப்படும். பயிற்சி ஏட்டின் இடதுபக்கத்தில எண்களும் தொடர்வரிசைகளும் பாடம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் இருக்கும் அதில் Bouncing ball problem என்ற பயிற்சித்தாளை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

**படி 2** பயிற்சித்தாளில் height number of bounces மற்றும் debounce ratio ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மாற்றவும். Get ball மற்றும் Drop என்பதை click செய்யவும். நீங்கள் பதிவிட்ட மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தவாறு பந்து குதித்து மேலெழும்பும். வலதுபக்கத்தில் தொடர் வரிசைகளின் கூடுதல் கண்டறிவதை காணலாம்.

படி 1

படி 2

முடிவுகள்



இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356192

அல்லது விரைவுச் செயலியை ஸ்கேன் செய்யவும்

B371_10_MATHS_TM

# 3 இயற்கணிதம்

*$x^2 - 92y^2 = 1$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு ஓராண்டிற்குள் தீர்வு காண்பவரே கணிதவியலாளராக கருதப்படுவார்* **–பிரம்மகுப்தா**

நிக்கோலா போண்டனா டார்டாகிலியா
1499/1500 – 1557 கிபி(பொஆ)

அன்றைய வெனிஸ் குடியரசைச் சேர்ந்த நிக்கோலா போண்டனா டார்டாகிலியா ஓர் இத்தாலியக் கணித மேதையாவார். இவர் பொறியாளர், நில அளவீட்டாளர் மற்றும் புத்தகக் காவலராகவும் திகழ்ந்தார். இவர் ஆர்க்கிமிடிஸ் மற்றும் யூக்ளிட் ஆகியோரின் படைப்புகளை முதன்முதலில் இத்தாலிய மொழியில் மொழி பெயர்ப்பு செய்தார். இவை தவிரப் பல முக்கியக் கணிதப் புத்தகங்களை இயற்றியுள்ளார். பல கணிதக் கருத்துகளைத் தொகுத்து வழங்கியுள்ளார். பீரங்கி குண்டுகளின் நகரும் பாதை குறித்த ஆய்வில் கணிதத்தை முதன் முதலில் பயன்படுத்தியவர் டார்டாகிலியா. மேலிருந்து கீழே விழும் பொருட்கள் பற்றிய இவரது ஆய்வானது பின்னாளில் கலீலியோவால் நிரூபிக்கப்பட்டது.

டார்டாகிலியா, கார்டானோவுடன் இணைந்து முப்படி சமன்பாடுகள் என அழைக்கப்படும் மூன்றாம் படி பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கான வழிமுறைகளைக் கண்டறிந்தார். மேலும் இவர் ஒரு நான்முகியின் கன அளவை அதன் நான்கு உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவை பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் சிறப்பான சூத்திரத்தை வழங்கியுள்ளார்.

## கற்றல் விளைவுகள்

HAUBWW

- மூன்று மாறியில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமை சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றைக் கண்டறிதல்.
- இயற்கணித விகிதமுறு கோவைகளைச் சுருக்குதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காணுதல்.
- இருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி கற்றல்.
- இருபடி வளைவரைகளை வரைதல்.
- அணிகள், அவற்றின் வகைகள் மற்றும் அணிகளின் மீதான செயல்பாடுகளைக் கற்றல்.

## 3.1 அறிமுகம் (Introduction)

இயற்கணிதம் என்பது எண்களைப் பற்றி படிப்பதன் அடுத்த நிலை எனலாம். ஒரு சில தனிப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளின் அடிப்படையில் ஏதாவது ஒன்றைத் தீர்மானிக்க நமக்கு இயற்கணிதம் தேவைப்படுகிறது. இந்த அடிப்படையில், இயற்கணிதக் கற்றலானது "தெரியாதவற்றைத் தீர்மானிக்கும் அறிவியல்" எனக் கருதப்படுகிறது. கி.பி. (பொ.ஆ) மூன்றாம் நூற்றாண்டில் அலெக்ஸாண்டிரியாவில் வாழ்ந்த டையாபாண்டஸ் என்ற கணித மேதை எழுதிய ‘ அரித்மெடிகா’ என்ற புத்தகத்தில் உள்ள பதிமூன்று தொகுதிகளில் நமக்கு ஆறு தொகுதிகள் கிடைத்துள்ளன. இந்தப் புத்தகத்தில் தான் முதன்முதலில் ஒரு கணக்கிலுள்ள கட்டுப்பாடுகளைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி, அதற்குத் தீர்வும் காணப்பட்டுள்ளது. பல அன்றாட வாழ்க்கை கணக்குகளில் மாறிகள் மிகை முழுக்களாக அமைவதை டையாபாண்டஸ் உணர்ந்தார்.

அல், கிதாப் அல் – முக்தசார் பி ஹிசாப் அல்– ஜபர் வா–முக்காப்லா ( *"The compendious Book on calculation by completion and Balancing"*) என்ற புத்தகத்தின் தலைப்பிலுள்ள அல் ஜபர் என்ற வார்த்தையின் எழுத்துப்பிழையாக "அல்ஜீப்ரா" என்ற வார்த்தை உருவானது. **அல் க்வாரிஸ்மி,** தான் எழுதிய அல் ஜபர் புத்தகத்தில் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கான பொருத்தமான முறைகளை வழங்கியுள்ளதால் அவர் **'இயற்கணிதத்தின் தந்தை'** எனப் போற்றப்படுகிறார்.

முந்தைய வகுப்பில் நாம் இயற்கணிதத்தில் உள்ள பல முக்கியக் கருத்துகளைப் படித்தோம். இந்த வகுப்பில் அதிக வாய்ப்புடைய கணக்குகளைத் தீர்க்க உதவும் கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ள நம் பயணத்தைத் தொடர்வோம். இந்தக் கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்வது எதிர்காலத்தில் உயர்நிலை கணிதத்தைக் கற்பதற்கு உங்களுக்கு உதவியாக அமையும்.

### இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமைவு சமன்பாடுகள்

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையை நினைவு கூர்வோம்.

**வரையறை**

**இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்**

$x$ மற்றும் $y$ என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு, இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு எனப்படும். $x$ மற்றும் $y$ என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax+by+c = 0$ ஆகும். இங்கு $a$, $b$ என்பனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றது மற்றும் $a$, $b$, $c$ ஆகியவை மெய்யெண்கள்.

நேரிய சமன்பாடுகள் என்பது கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

**குறிப்பு**

- $xy - 7 = 3$ என்பது இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாடு அல்ல. ஏனெனில், $xy$ என்ற உறுப்பின் படி 2.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாடு $xy$ - தளத்தில் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.1** தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப் போல ஆறு மடங்கு ஆகும். ஆறு வருடங்களுக்குப் பிறகு தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப்போல் நான்கு மடங்கு அதிகம். தந்தை மற்றும் மகனின் தற்போதைய வயதை (வருடங்களில்) காண்க.

**தீர்வு** தந்தையின் தற்போதைய வயது $x$ மற்றும் மகனின் தற்போதைய வயது $y$ என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை, $x = 6y \quad \ldots (1)$

$$x + 6 = 4(y+6) \quad \ldots (2)$$

(1) ஐ (2) –யில் பிரதியிட, $6y + 6 = 4\left(y+6\right)$

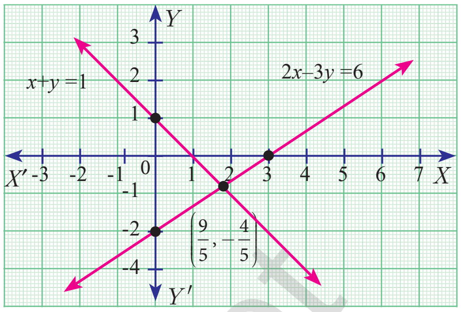
$$6y + 6 = 4y + 24 \Rightarrow \quad y = 9$$

எனவே, மகனின் வயது 9 வருடங்கள் மற்றும் தந்தையின் வயது 54 வருடங்கள்

**எடுத்துக்காட்டு 3.2** தீர்க்க $2x - 3y = 6\,,\; x + y = 1$

**தீர்வு** $2x - 3y = 6$ … (1)

$x + y = 1$ … (2)




படம் 3.1

$(1) \times 1 \;\Rightarrow 2x - 3y = 6$

$(2) \times 2 \;\Rightarrow 2x + 2y = 2$

$-5y = 4$ மூலம், $y = \dfrac{-4}{5}$

$y = \dfrac{-4}{5}$ என (2) –யில் பிரதியிட, $x - \dfrac{4}{5} = 1$

இதிலிருந்து, $x = \dfrac{9}{5}$

எனவே, $x = \dfrac{9}{5},\; y = \dfrac{-4}{5}$.

## 3.2 மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் (Simultaneous Linear Equations in Three Variables)

பல்பொருள் அங்காடியில் பல்வேறு பொருட்களை வாங்கும் போது மொத்தத் தொகையைக் கணக்கிடுவதில் தொடங்கி, சில குறிப்பிட்ட சூழல்களில் மனிதர்களின் வயதைக் கண்டறிதல், மேல்நோக்கி ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் எறியப்பட்ட ஒரு பொருளின் பாதையைக் கணக்கிடுதல் வரை நம் அன்றாட வாழ்வில் பல்வேறு இடங்களில் இயற்கணிதம் முக்கியப் பங்காற்றுகிறது.

படம் 3.2

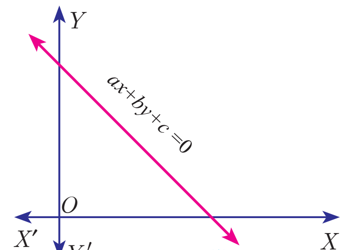
அண்டவெளியில் (Space) உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் அதன் அட்சரேகை, தீர்க்கரேகை மற்றும் உயர மதிப்புகளைக் கொண்டு சரியாகத் தீர்மானிக்கலாம். ஆகவே பூமியின் மீதுள்ள ஒருபுள்ளியின் அமைவிடத்தை அறிய, மூன்று செயற்கைக்கோள்கள் நிலைநிறுத்தப்பட்டு அதிலிருந்து மூன்று சமன்பாடுகள் பெறப்படுகின்றன. இந்த மூன்று சமன்பாடுகளில், இரு நேரிய சமன்பாடுகளும், ஓர் இருபடிச் சமன்பாடும் அடங்கும். ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு பொருளின் அமைவிடத்தை சரியாக அறிய, நாம் அட்ச, தீர்க்க, உயர மாறிகளின் மதிப்பை, சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் அறியலாம். இதுவே புவி நிலைப்படுத்துதல் அமைப்பின் (GPS - Geo Positioning System) அடிப்படையாகும். இதிலிருந்து, புவிநிலைப்படுத்துதல் அமைப்பில் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் பயன்படுவதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

### 3.2.1 மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (System of Linear equations in three variables)

நாம் முந்தைய வகுப்பில் இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கான பல்வேறு முறைகளைக் கற்றோம். இங்கு நாம் $x$, $y$ மற்றும் $z$ என்ற மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குத் தீர்வு காண்போம். $x$, $y$, $z$ என்ற மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + cz + d = 0$, இங்கு $a$, $b$, $c$, d என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a$, $b$, $c$ என்பனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாக இருக்கும்.

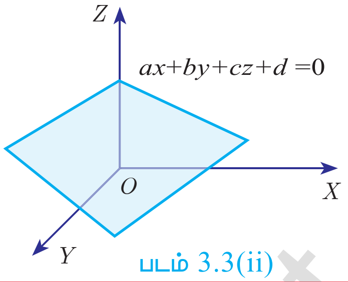
**குறிப்பு**

- $ax + by + c = 0$, என்ற வடிவில் இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.




படம் 3.3(i)

- $ax + by + cz + d = 0$, என்ற வடிவில் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடு ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.



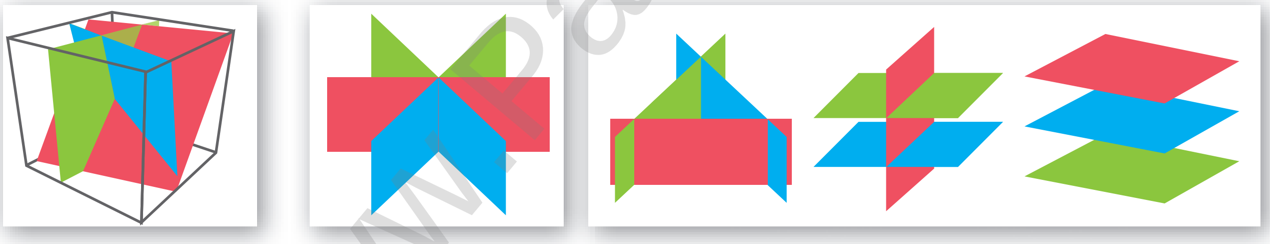

படம் 3.3(ii)

**பொது வடிவம்:** $x$, $y$, $z$ என்ற மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பின் பொதுவடிவம்

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

இச்சமன்பாட்டு தொகுப்பு $(1)$ –யில் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாடும் முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும். இந்த மூன்று சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படும் மூன்று தளங்களும் சந்திக்கும் புள்ளியோ அல்லது பகுதியோ இந்தச் சமன்பாட்டு தொகுப்பின் தீர்வாகும். மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு, அவை குறிக்கும் தளங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றவற்றை எவ்வாறு வெட்டுகின்றன என்பதைப் பொறுத்து ஒரேயொரு தீர்வு, எண்ணற்ற தீர்வுகள், தீர்வு இல்லை என்ற வகையில் தீர்வுகள் அமையும்.

பின்வரும் படங்கள் தீர்வுகளின் வாய்ப்புகளை விளக்குவதாக அமைந்துள்ளன.



ஒரேயொரு தீர்வு எண்ணற்ற தீர்வுகள் தீர்வு இல்லை

படம் 3.4

## மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குத் தீர்வு காணும் படிநிலைகள்

**படி 1** கொடுக்கப்பட்ட மூன்று சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் இரண்டு சமன்பாடுகளை எடுத்து, பொருத்தமான பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கி அவற்றில் ஏதேனும் ஒரு மாறியின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்துக.

**படி 2** சமன்பாடுகளைக் கழித்துக் கெழுக்கள் சமமாக உள்ள மாறியை நீக்குக.

**படி 3** வேறு ஒரு சோடி சமன்பாடுகளை எடுத்து அதே மாறியை நீக்குக.

**படி 4** தற்போது நாம் இரு மாறிகளில் அமைந்த இரு சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

**படி 5** இச்சமன்பாடுகளை முந்தைய வகுப்பில் கற்ற முறைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

**படி 6** மேற்கண்ட படியில் கிடைத்த இரு மாறிகளின் தீர்வை ஏதேனும் ஒரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட மூன்றாவது மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

**குறிப்பு**

- மேற்கண்ட படிநிலைகளில் $0=1$ என்பது போன்ற தவறான முடிவு கிடைக்குமாயின் அந்தச் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை.
- தவறான சமன்பாடுகள் கிடைக்காமல், $0=0$ என்பது போன்ற முற்றொருமை கிடைக்குமாயின் அந்தச் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.3** பின்வரும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பினைத் தீர்க்க. $3x-2y+z=2$, $2x+3y-z=5$, $x+y+z=6$.

**தீர்வு** $3x-2y+z=2 \quad \ldots(1) \qquad 2x+3y-z=5 \quad \ldots(2) \qquad x+y+z=6 \quad \ldots(3)$

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட,

$$\begin{aligned} 3x-2y+z &= 2 \\ 2x+3y-z &= 5 \quad (+) \\ \hline 5x+y &= 7 \quad \ldots(4) \end{aligned}$$

(2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட,

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 5 \\ x+y+z &= 6 \quad (+) \\ \hline 3x+4y &= 11 \quad \ldots(5) \end{aligned}$$

$4\times(4)-(5)$

$$\begin{aligned} 20x+4y &= 28 \\ 3x+4y &= 11 \quad (-) \\ \hline 17x &= 17 \end{aligned}$$

–லிருந்து, $x=1$

$x=1$ என (4) –யில் பிரதியிட, $5+y=7$ கொடுப்பது, $y=2$

$x=1$, $y=2$ என (3) –யில் பிரதியிட, $1+2+z=6$ கிடைப்பது, $z=3$

எனவே, $x=1$, $y=2$, $z=3$

**எடுத்துக்காட்டு 3.4** பள்ளிகளுக்கிடையேயான ஒரு தடகளப் போட்டியில், 24 தனிநபர் போட்டிகளில் ஒட்டுமொத்தமாக 56 புள்ளிகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. முதலிடம் பெறுபவருக்கு 5 புள்ளிகளும், இரண்டாமிடம் பெறுபவருக்கு 3 புள்ளிகளும், மூன்றாமிடம் பெறுபவருக்கு 1 புள்ளியும் அளிக்கப்படும். மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை முதல் மற்றும் இரண்டாம் இடங்களைப் பிடித்தவர்களின் எண்ணிக்கையின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

**தீர்வு** முதலிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை $x$, இரண்டாமிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை $y$, மூன்றாமிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை $z$ என்க.

மொத்தப் போட்டிகள் $=24$; மொத்த புள்ளிகள் $=56$.

எனவே, மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்

$x+y+z=24 \quad \ldots(1) \qquad 5x+3y+z=56 \quad \ldots(2) \qquad x+y=z \quad \ldots(3)$

(3) ஐ (1) –யில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது, $z+z=24$ –லிருந்து, $z=12$

எனவே, (3) –லிருந்து, $x+y=12$

(2) –லிருந்து, $5x+3y=44$

$3\times(3) \Rightarrow$ $3x+3y=36$ $(-)$

$2x=8$ –லிருந்து $x=4$

$x=4$, $z=12$ என (3) –யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $y=12-4=8$

எனவே, முதலிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை $4$ ஆகும்;
இரண்டாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை $8$ ஆகும்;
மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை $12$ ஆகும்;

**எடுத்துக்காட்டு 3.5** தீர்க்க $x+2y-z=5$; $x-y+z=-2$; $-5x-4y+z=-11$

**தீர்வு** Let, $x+2y-z=5 \ldots(1)$ $x-y+z=-2 \ldots(2)$ $-5x-4y+z=-11 \ldots(3)$

(1) மற்றும் (2) -ஐக் கூட்ட,

$$\begin{array}{rl} x+2y-z &= 5 \\ x-y+z &= -2 \quad (+) \\ \hline 2x+y &= 3 \quad \ldots(4) \end{array}$$

(2) –லிருந்து (3) -ஐக் கழிக்க,

$$\begin{array}{rl} x-y+z &= -2 \\ -5x-4y+z &= -11 \quad (-) \\ \hline 6x+3y &= 9 \end{array}$$

3-ஆல் வகுக்க,

$$2x+y = 3 \quad \ldots(5)$$

(4) –லிருந்து (5) -ஐக் கழிக்க,

$$\begin{array}{rl} 2x+y &= 3 \\ 2x+y &= 3 \\ \hline 0 &= 0 \end{array}$$

இங்கு $0=0$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கிறது.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

**எடுத்துக்காட்டு 3.6** தீர்க்க $3x+y-3z=1$; $-2x-y+2z=1$; $-x-y+z=2$.

**தீர்வு** Let $3x+y-3z=1 \quad \ldots(1)$ $-2x-y+2z=1 \ldots(2)$ $-x-y+z=2 \ldots(3)$

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட,

$$\begin{array}{rl} 3x+y-3z &= 1 \\ -2x-y+2z &= 1 \quad (+) \\ \hline x-z &= 2 \quad \ldots(4) \end{array}$$

(1) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட,

$$\begin{array}{rl} 3x+y-3z &= 1 \\ -x-y+z &= 2 \quad (+) \\ \hline 2x-2z &= 3 \quad \ldots(5) \end{array}$$

(5) $-2\times$(4) –லிருந்து,

$$\begin{array}{rl} 2x-2z &= 3 \\ 2x-2z &= 4 \quad (-) \\ \hline 0 &= -1 \end{array}$$

இங்கு நாம் $0=-1$ என்ற தவறான முடிவைப் பெறுகிறோம். எனவே, இந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 3.7** தீர்க்க $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1=\frac{z}{7}+2$; $\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13$

**தீர்வு** $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1$

$\frac{x}{2}-\frac{y}{6}=1+1$ –லிருந்து, $\frac{6x-2y}{12}=2$ –லிருந்து கிடைப்பது, $3x-y=12$ ... (1)

$\frac{x}{2}-1=\frac{z}{7}+2$ என்க.

$\frac{x}{2}-\frac{z}{7}=1+2$ –லிருந்து, $\frac{7x-2z}{14}=3$ –லிருந்து, $7x-2z=42$ ... (2)

$\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13$ –லிருந்து, $\frac{2y+3z}{6}=13$ என்பதிலிருந்து, $2y+3z=78$ ... (3)

(2) மற்றும் (3) –லிருந்து $z$ –ஐ நீக்க,

$$\begin{array}{llll}
(2)\times 3 \text{ –லிருந்து,} & 21x \quad -6z & = 126 & \\
(3)\times 2 \text{ –லிருந்து,} & \quad 4y+6z & = 156 & (+) \\
\hline
 & 21x+4y & = 282 & \\
(1)\times 4 \text{ –லிருந்து,} & 12x-4y & = 48 & (+) \\
\hline
 & 33x & = 330 & \text{–லிருந்து, } x=10
\end{array}$$

$x=10$ என (1) –யில் பிரதியிட, $30-y=12$ –லிருந்து, $y=18$

$x=10$ என (2) –யில் பிரதியிட, $70-2z=42$ –லிருந்து, $z=14$

எனவே, $x=10$, $y=18$, $z=14$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.8** தீர்க்க : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}-\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{x}=\frac{1}{3y}$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{5y}+\frac{4}{z}=2\frac{2}{15}$

**தீர்வு** $\frac{1}{x}=p$ , $\frac{1}{y}=q$ , $\frac{1}{z}=r$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$\frac{p}{2}+\frac{q}{4}-\frac{r}{3} = \frac{1}{4}$$

$$p = \frac{q}{3}$$

$$p-\frac{q}{5}+4r = 2\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$$ என எழுதலாம்.

இவற்றைச் சுருக்கும்போது கிடைப்பது,

$$6p+3q-4r = 3 \quad \ldots(1)$$

$$3p = q \quad \ldots(2)$$

$$15p-3q+60r = 32 \quad \ldots(3)$$

(2) -ஐ (1) மற்றும் (3) –யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$15p-4r = 3 \quad \ldots(4)$$

$6p+60r = 32$ –லிருந்து, $3p+30r = 16$ ...(5)

(4) மற்றும் (5) -ஐத் தீர்க்க

$$\begin{array}{rl} 15p-4r &= 3 \\ 15p+150r &= 80 \quad (-) \\ \hline -154r &= -77 \\ \hline \end{array}$$

–லிருந்து, $r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$ என (4) –யில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது, $15p-2=3$ –லிருந்து, $p=\frac{1}{3}$

(2) –லிருந்து, $q=3p$ –லிருந்து $q=1$

எனவே, $x=\frac{1}{p}=3,\ \ y=\frac{1}{q}=1,\ \ z=\frac{1}{r}=2$. அதாவது,, $x=3, y=1, z=2$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.9** முதல் எண்ணின் மும்மடங்கு, இரண்டாம் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண்ணின் இரு மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் 5. முதல் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண்ணின் மும்மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதலிலிருந்து இரண்டாம் எண்ணின் மும்மடங்கைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 2. முதல் எண்ணின் இரு மடங்கு மற்றும் இரண்டாம் எண்ணின் மும்மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதலிலிருந்து மூன்றாம் எண்ணைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 1. இவ்வாறு அமைந்த மூன்று எண்களைக் காண்க.

**தீர்வு** தேவையான மூன்று எண்கள் $x$, $y$, $z$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$3x+y+2z=5$ ...(1) $\quad x+3z-3y=2$ ...(2) $\quad 2x+3y-z=1$ ...(3)

(1) × 1 –லிருந்து, $3x+y+2z=5$

(2) × 3 –லிருந்து, $3x-9y+9z=6$ (–)

$$10y-7z=-1 \quad \ldots(4)$$

(1) × 2 –லிருந்து, $6x+2y+4z=10$

(3) ×3 –லிருந்து, $6x+9y-3z=3$ (–)

$$-7y+7z=7 \quad \ldots(5)$$

ஐக் கூட்ட, (4) மற்றும் (5), $10y-7z=-1$

$$-7y+7z=7$$

$$3y=6$$ –லிருந்து, $y=2$

$y=2$ என (5) –யில் பிரதியிட, $-14+7z=7$ –லிருந்து, $z=3$

$y=2$ என $z=3$, (1) –யில் பிரதியிட,

$3x+2+6=5$ –லிருந்து, $x=-1$

எனவே, தேவையான எண்கள் $x=-1$, $y=2$, $z=3$.

**சிந்தனைக் களம்**

1. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பினைத் தீர்க்கும்போது கிடைக்கும் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை ________.
2. மூன்று தளங்கள் இணையாக இருப்பின் அவை சந்திக்கும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ________.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு கிடைக்க வேண்டுமெனில் தேவைப்படும் குறைந்தபட்ச சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை _______
2. _________ எனில், நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒரு முற்றொருமையைக் கொடுக்கும்.
3. _________ எனில், நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பின் முடிவு பொருளற்றது.

## பயிற்சி 3.1

1. கீழ்க்காணும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க.
   (i) $x+y+z=5;\ \ 2x-y+z=9;\ \ x-2y+3z=16$
   (ii) $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+4=0;\ \ \frac{1}{y}-\frac{1}{z}+1=0;\ \ \frac{2}{z}+\frac{3}{x}=14$
   (iii) $x+20=\frac{3y}{2}+10=2z+5=110-(y+z)$
2. கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் காண்க.
   (i) $x+2y-z=6;\ \ -3x-2y+5z=-12;\ \ x-2z=3$
   (ii) $2y+z=3\left(-x+1\right);\ -x+3y-z=-4;\ 3x+2y+z=-\frac{1}{2}$
   (iii) $\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2};\ \ x+y+z=27$
3. தாத்தா, தந்தை மற்றும் வாணி ஆகிய மூவரின் சராசரி வயது $53$. தாத்தாவின் வயதில் பாதி, தந்தையின் வயதில் மூன்றில் ஒரு பங்கு மற்றும் வாணியின் வயதில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் $65$. நான்கு ஆண்டுகளுக்கு முன் தாத்தாவின் வயது வாணியின் வயதைபோல் நான்கு மடங்கு எனில் மூவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க?
4. ஒரு மூவிலக்க எண்ணில், இலக்கங்களின் கூடுதல் $11$. இலக்கங்களை இடமிருந்து வலமாக வரிசை மாற்றினால் புதிய எண் பழைய எண்ணின் ஐந்து மடங்கைவிட $46$ அதிகம். பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கோடு நூறாம் இட இலக்கத்தைக் கூட்டினால் ஒன்றாம் இட இலக்கம் கிடைக்கும் எனில், அந்த மூவிலக்க எண்ணைக் காண்க.
5. ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் மொத்த மதிப்பு ₹$105$ மற்றும் மொத்த நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $12$. முதல் இரண்டு வகை நோட்டுகளின் எண்ணிக்கையை இடமாற்றம் செய்தால் முந்தைய மதிப்பை விட ₹$20$ அதிகரிக்கிறது எனில், எத்தனை ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகள் உள்ளன ?

## 3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம. (GCD and LCM of Polynomials)

### 3.3.1 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (அ) மீப்பெரு பொதுக் காரணி (Greatest Common Divisor (or) Highest Common Factor)

நாம் முந்தைய வகுப்பில் இரண்டாம் படி மற்றும் மூன்றாம் படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்குக் காரணி முறையில் மீ.பொ.வ (மீ.பொ.கா) காண்பதைக் கற்றோம். தற்போது நாம் நீள் வகுத்தல் முறையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ எவ்வாறு காண்பது எனக் கற்க உள்ளோம்.

இரண்டாம் பாடத்தில் (எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்) விவாதித்தபடி, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரண்டு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிந்த அதே முறையைப் பயன்படுத்தி இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ கண்டறியலாம்.

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணப் பின்வரும் படிமுறைகள் உதவும்.

**படி 1** முதலில் $f(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுக்கும்போது $f(x)=g(x)q_1(x)+r(x)$, இங்கு $q(x)$ என்பது ஈவு, $r(x)$ என்பது மீதி எனக் கிடைக்கிறது. $r(x)$–யின் படி $<q(x)$–யின் படி என இருக்கும்.





X_Ch 3 TM.indd 97 16-04-2019 09:50:33

**படி 2** மீதி $r(x)$ பூச்சியமில்லையெனில், $g(x)$ ஐ $r(x)$ –ஆல்வகுக்கும்போது $g(x) = r(x)q_1(x) + r_1(x)$ இங்கு $r_1(x)$ என்பது புதிய மீதி ஆகும்.

$r_1(x)$ –யின் படி < $r(x)$ –யின் படி, மீதி $r_1(x)$ பூச்சியமெனில், $r(x)$ என்பது தேவையான மீ.பொ.வ ஆகும்.

**படி 3** $r_1(x)$ பூச்சியமில்லை எனில், இதே செயல்பாட்டை மீதி பூச்சியம் வரும் வரை தொடரவேண்டும். இந்த நிலையில் இருக்கும் வகுத்தியே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

$f(x)$, $g(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ–வை மீ.பொ.வ $[f(x), \; g(x)]$ எனக் குறிக்கலாம்.

**குறிப்பு**

- ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையில் மிக உயர்ந்த படியைக் கொண்ட உறுப்பின் கெழு தலையாயக் கெழு எனப்படும்.
- $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ இரண்டும் ஒரே படியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில் பெரிய எண்ணைத் தலையாயக் கெழுவாகக் கொண்ட கோவையை வகுபடும் கோவையாக எடுக்க வேண்டும். ஒருவேளை, தலையாயக் கெழு சமமாக இருந்தால், அதற்கடுத்த படியில் அமைந்த உறுப்பின் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு வகுத்தலைத் தொடரவேண்டும்.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. ஒரே படியுள்ள இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுக்கும்போது, ________ ஐப் பொறுத்து வகுபடும் மற்றும் வகுக்கும் கோவைகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.
2. $f(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $r(x) = 0$ எனில், $g(x)$ ஆனது அந்த இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் ________ என அழைக்கப்படும்.
3. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, எனில், $f(x)$ ஆனது $g(x)$ –ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில், $f(x)$ உடன் ________ ஐக் கூட்ட வேண்டும்.
4. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, எனில், $f(x)$ ஆனது $g(x)$ –ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில் $f(x)$ உடன் ________ ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.10** $x^3 + x^2 - x + 2$ மற்றும் $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

**தீர்வு** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ மற்றும் $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline x^3 + x^2 - x + 2 & 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \quad (-) \\ \hline & \qquad -7x^2 + 7x - 7 \end{array}$$

$$= -7(x^2 - x + 1)$$

$-7(x^2-x+1)\neq 0$, $-7$ என்பது $g(x)$ –யின் ஒரு வகுத்தி அல்ல.

$g(x)=x^3+x^2-x+2$ -ஐ மீதியால் வகுக்க (மாறிலிக் காரணியை விடுத்து), நாம் பெறுவது

$$
\begin{array}{r|l l}
 & x+2 & \\
\hline
x^2-x+1 & x^3+x^2-x+2 & \\
 & x^3-x^2+x & (-)\\
\hline
 & \quad 2x^2-2x+2 & \\
 & \quad 2x^2-2x+2 & (-)\\
\hline
 & \qquad 0 &
\end{array}
$$

இந்நிலையில், மீதி பூச்சியம் ஆகும்.

எனவே, மீ.பொ.வ $(2x^3-5x^2+5x-3,\ x^3+x^2-x+2)=x^2-x+1$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.11** $6x^3-30x^2+60x-48$ மற்றும் $3x^3-12x^2+21x-18$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

**தீர்வு** $f(x)=6x^3-30x^2+60x-48=6(x^3-5x^2+10x-8)$ மற்றும்

$g(x)=3x^3-12x^2+21x-18=3(x^3-4x^2+7x-6)$ என இருப்பதால், தற்பொழுது நாம் $x^3-5x^2+10x-8$ மற்றும் $x^3-4x^2+7x-6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

$$
\begin{array}{r|l l}
 & 1 & \\
\hline
x^3-5x^2+10x-8 & x^3-4x^2+7x-6 & \\
 & x^3-5x^2+10x-8 & (-)\\
\hline
 & \quad x^2-3x+2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l l}
 & x-2 & \\
\hline
x^2-3x+2 & x^3-5x^2+10x-8 & \\
 & x^3-3x^2+2x & (-)\\
\hline
 & \quad -2x^2+8x-8 & \\
 & \quad -2x^2+6x-4 & (-)\\
\hline
 & \qquad 2x-4 & \\
 & \qquad =2(x-2) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l l}
 & x-1 & \\
\hline
x-2 & x^2-3x+2 & \\
 & x^2-2x & (-)\\
\hline
 & \quad -x+2 & \\
 & \quad -x+2 & (-)\\
\hline
 & \qquad 0 &
\end{array}
$$

இங்கு, மீதி பூச்சியம் ஆகும்.

இங்கு தலையாயக் கெழுக்கள் $3$ மற்றும் $6$ –ன் மீ.பொ.வ $3$ ஆகும்.

எனவே, மீ.பொ.வ $\left[(6x^3-30x^2+60x-48,\ 3x^3-12x^2+21x-18)\right]=3(x-2)$.

### 3.3.2 மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ.பொ.ம) (Least Common Multiple (LCM) of Polynomials)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்பு இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீச்சிறு பொது மடங்கு ஆனது அவற்றால் வகுபடக் கூடிய மிகச்சிறிய படியைக் (அடுக்கை) கொண்ட கோவையாகும்.

பின்வரும் எளிய கோவைகளைக் கருதுவோம் $a^3b^2,\ a^2b^3$.

இந்தக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம $= a^3b^3$.

காரணிமுறையில் மீ.பொ.ம காண,

(i) முதலில் ஒவ்வொரு கோவையையும் அதன் காரணிகளாகப் பிரிக்கவும்.

(ii) அனைத்துக் காரணிகளின் மிக உயர்ந்த அடுக்கே மீ.பொ.ம ஆகும்.

(iii) கோவைகளில் எண் கெழுக்கள் இருக்குமானால் அவற்றுக்கு மீ.பொ.ம காண்க.

(iv) எண்கெழுக்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் கோவைகளின் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனே தேவையான மீ.பொ.ம ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.12** பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க.

(i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$ (ii) $5x-10,\ 5x^2-20$

(iii) $x^4-1,\ x^2-2x+1$ (iv) $x^3-27,\ (x-3)^2,\ x^2-9$

**தீர்வு** (i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$

முதலில் நாம் எண் கெழுக்களின் மீ.பொ.ம காண்போம்.

அதாவது, மீ.பொ.ம $(8,48)=2\times2\times2\times6=48$

இப்பொழுது உறுப்புகளில் உள்ள மாறிகளுக்கு மீ.பொ.ம காண்போம்.

அதாவது மீ.பொ.ம $(x^4y^2,x^2y^4)\ = x^4y^4$

எண்கெழுக்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மாறிகளின் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளின் மீ.பொ.ம ஆகும். எனவே, மீ.பொ.ம. $(8x^4y^2,48x^2y^4)\ = 48x^4y^4$

(ii) $(5x-10),(5x^2-20)$

$$5x-10\ =5(x-2)$$

$$5x^2-20\ =5(x^2-4)\ =5(x+2)(x-2)$$

எனவே, மீ.பொ.ம $[(5x-10),(5x^2-20)]=5(x+2)(x-2)$

(iii) $(x^4-1),\ x^2-2x+1$

$$x^4-1\ =(x^2)^2-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$x^2-2x+1\ =(x-1)^2$$

எனவே, மீ.பொ.ம $[(x^4-1),(x^2-2x+1)]=(x^2+1)(x+1)(x-1)^2$

(iv) $x^3-27, (x-3)^2, x^2-9$

$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ ; $(x-3)^2=(x-3)^2$; $(x^2-9)=(x+3)(x-3)$

எனவே, மீ.பொ.ம $[(x^3-27),(x-3)^2,(x^2-9)]=(x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

**சிந்தனைக் களம்**

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றுக்கான காரணி மரத்தை நிறைவு செய்க. அதிலிருந்து அவற்றின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம காண்க.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 32x - 21$

$2x+3$ | $\boxed{\phantom{x}}$ | $x+1$

$g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 43x - 42$

$\boxed{\phantom{x}}$ | $\boxed{\phantom{x}}$ | $x+2$

மீ.பொ.வ $[f(x)$ மற்றும் $g(x)]$ = ______ மீ.பொ.வ $[f(x)$ மற்றும் $g(x)]$ = ______

**பயிற்சி 3.2**

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.
   (i) $x^4+3x^3-x-3,\ x^3+x^2-5x+3$ (ii) $x^4-1,\ x^3-11x^2+x-11$
   (iii) $3x^4+6x^3-12x^2-24x,\ 4x^4+14x^3+8x^2-8x$
   (iv) $3x^3+3x^2+3x+3,\ 6x^3+12x^2+6x+12$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க.
   (i) $4x^2y,\ 8x^3y^2$ (ii) $-9a^3b^2,\ 12a^2b^2c$ (iii) $16m,\ -12m^2n^2,\ 8n^2$
   (iv) $p^2-3p+2,\ p^2-4$ (v) $2x^2-5x-3,\ 4x^2-36$
   (vi) $(2x^2-3xy)^2, (4x-6y)^3, 8x^3-27y^3$

### 3.3.3 மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான தொடர்பு (Relationship between LCM and GCD)

12 மற்றும் 18 என்ற எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

மீ.பொ.ம $(12,18)=36$, மீ.பொ.வ $(12,18)=6$ என நாம் அறிவோம்.

மீ.பொ.ம. $(12,18)$ $\times$ மீ.பொ.வ $(12,18)$ $=36\times6=216=12\times18$

இதிலிருந்து, மீ.பொ.ம $\times$ மீ.பொ.வ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களின் பெருக்கற்பலனாக உள்ளது என்று அறிகிறோம்.

இதைப் போலவே, இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலனானது அவற்றின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும். அதாவது

$f(x)\times g(x)=$ மீ.பொ.ம $[f(x),g(x)]\times$ மீ.பொ.வ $[f(x),g(x)]$

**உதாரணம்**

$f(x)=12(x^2-y^2)$ மற்றும் $g(x)=8(x^3-y^3)$ என்ற கோவைகளை எடுத்துக்கொள்க.

$f(x)=12(x^2-y^2) = 2^2\times3\times(x+y)(x-y)$ ...(1)

$g(x) = 8(x^3 - y^3) \ = 2^3 \times (x-y)(x^2+xy+y^2)$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\text{மீ.பொ.ம}[f(x),\ g(x)] = 2^3 \times 3 \times (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$= 24 \times (x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)$$
$$\text{மீ.பொ.வ}\ [f(x),\ g(x)] = 2^2 \times (x-y) = 4(x-y)$$
$$\text{மீ.பொ.ம} \times \text{மீ.பொ.வ} = 24 \times 4 \times (x^2-y^2) \times (x^2+xy+y^2) \times (x-y)$$
$$\text{மீ.பொ.ம} \times \text{மீ.பொ.வ} = 96(x^3-y^3)(x^2-y^2) \quad ...(3)$$
$$f(x) \text{ மற்றும் } g(x)\text{–யின் பெருக்கற்பலன்} = 12(x^2-y^2) \times 8(x^3-y^3)$$
$$= 96(x^2-y^2)(x^3-y^3) \quad ...(4)$$

(3) மற்றும் (4) –லிருந்து நாம் பெறுவது, மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ $= f(x) \times g(x)$

**சிந்தனைக் களம்**

$f(x) \times g(x) \times r(x)$ = மீ.பொ.ம $[f(x), g(x), r(x)]$ × மீ.பொ.வ. $[f(x), g(x), r(x)]$ என ஆகுமா?

## பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றில் முறையே $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம காண்க. மேலும், $f(x) \times g(x)$ = (மீ.பொ.ம) × (மீ.பொ.வ) என்பதைச் சரிபார்க்க.
   (i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $(x^3-1)(x+1),\ (x^3+1)$ (iii) $(x^2y+xy^2),\ (x^2+xy)$
2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம காண்க.
   (i) $a^2+4a-12,\ a^2-5a+6$ இவற்றின் மீ. பொ. வ $a-2$
   (ii) $x^4-27a^3x,\ (x-3a)^2$ இவற்றின் மீ.பொ. வ. $(x-3a)$
3. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ. காண்க.
   (i) $12(x^4-x^3),\ 8(x^4-3x^3+2x^2)$ இவற்றின் மீ.பொ.ம $24x^3(x-1)(x-2)$
   (ii) $(x^3+y^3),\ (x^4+x^2y^2+y^4)$ இவற்றின் மீ.பொ.ம $(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$
4. $p(x),\ q(x)$ என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டறிந்து நிரப்புக

| எண் | மீ.பொ.ம | மீ.பொ.வ | $p(x)$ | $q(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $a^3-10a^2+11a+70$ | $a-7$ | $a^2-12a+35$ | |
| (ii) | $(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$ | $(x^2-y^2)$ | | $(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)$ |

## 3.4 விகிதமுறு கோவைகள் (Rational Expressions)

**வரையறை :** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்ற வடிவில் எழுத இயலும் கோவைகள் விகிதமுறு கோவைகள் எனப்படும். இங்கு $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ என்பவை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மற்றும் $q(x) \neq 0$. விகிதமுறு கோவைகளை இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் விகிதமாகக் கருதலாம்.

ஆகியவை விகிதமுறு கோவைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

$$\frac{9}{x},\ \frac{2y+1}{y^2-4y+9},\ \frac{z^3+5}{z-4},\ \frac{a}{a+10}.$$

தொலைவு – காலம் சார்ந்த கணக்கீடுகளைத் குறிப்பதற்கும், பல்முனை பணி சார்ந்த கணக்குகளுக்கான மாதிரிகளை வடிவமைத்தலுக்கும், வேலையாட்கள் (அ) இயந்திரங்களை ஒருங்கிணைத்து ஒரு பணியை முடிப்பதற்குமாகிய எண்ணற்ற சூழல்களில் விகிதமுறு கோவைகள் பயன்படுகின்றன.

### 3.4.1 விகிதமுறு கோவைகளைச் சுருக்குதல் (Reduction of Rational Expression)

$\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற விகிதமுறு கோவையில் மீ.பொ.வ $(p(x),\ q(x)) = 1$ எனில், அது சுருங்கிய வடிவில் (அ) எளிய வடிவில் உள்ளது எனக் கூறுகிறோம்..

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விகிதமுறு கோவையை எளிய வடிவில் எழுதப் பின்வரும் படிநிலைகளைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

(i) தொகுதி மற்றும் பகுதியைக் காரணிப்படுத்த வேண்டும்.

(ii) தொகுதி மற்றும் பகுதிக்குப் பொதுக்காரணி இருக்குமெனில் அவற்றை நீக்கவும்.

(iii) இப்பொழுது கிடைக்கும் விகிதமுறு கோவை எளிய வடிவில் அமையும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.13** விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

**தீர்வு** (i) $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x+3}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}$

7431BN

### 3.4.2 விலக்கப்பட்ட மதிப்பு (Excluded Value)

எந்த மெய் மதிப்பிற்கு, $\frac{p(x)}{q(x)}$ (சுருங்கிய வடிவில்) எனும் விகிதமுறு கோவையை வரையறுக்கப்பட முடியவில்லையோ, அம்மதிப்பை, கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு கோவையின் "விலக்கப்பட்ட மதிப்பு" என்போம். $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற எளிய வடிவில் அமைந்த ஒரு விகிதமுறு கோவையின் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு காண, அதன் பகுதி $q(x) = 0$ என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{5}{x-10}$ என்ற விகிதமுறு கோவையை $x = 10$ எனும்போது கேவை வரையறுக்க முடியாது. எனவே, $\frac{5}{x-10}$ என்பதன் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு $10$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.14** பின்வரும் கோவைகளின் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு காண்க.

(i) $\frac{x+10}{8x}$ (ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ (iii) $\frac{x}{x^2+1}$

**தீர்வு**

(i) $\frac{x+10}{8x}$ என்ற கோவையானது $8x=0$ (அ) $x=0$ எனும்போது வரையறுக்க இயலாததாகிறது. ஆகவே விலக்கப்பட்ட மதிப்பு $0$ ஆகும்.

(ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$

$\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ என்ற கோவையானது $8p^2+13p+5=0$ அதாவது $(8p+5)(p+1)=0$ –லிருந்து, $p=\frac{-5}{8}$, $p=-1$, எனும்போது கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது. எனவே, விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் $\frac{-5}{8}$ மற்றும் $-1$.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$

இங்கு அனைத்து $x$ மதிப்புகளுக்கும் $x^2\geq 0$ எனவே $x^2+1\geq 0+1=1$. ஆகவே எந்தவொரு $x$ மதிப்புக்கும் $x^2+1\neq 0$. எனவே, $\frac{x}{x^2+1}$ என்ற விகிதமுறு கோவைக்கு விலக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புகள் ஏதுமில்லை.

**சிந்தனைக் களம்**

1. $x^2-1$ மற்றும் $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ என்பவை விகிதமுறு கோவைகளா?
2. $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x^4+8x^2-9}$ என்ற கோவையின் விலக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை ________.

**பயிற்சி 3.4**

1. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

   (i) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ (ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4}$ (iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x}$ (iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p}$

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளுக்கு விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

   (i) $\frac{y}{y^2-25}$ (ii) $\frac{t}{t^2-5t+6}$ (iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$ (iv) $\frac{x^3-27}{x^3+x^2-6x}$

### 3.4.3 விகிதமுறு கோவைகள் மீதான செயல்கள் (Operations of Rational Expressions)

முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் விகிதமுறு எண்களின் மீதான கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் செயல்களைப் படித்துள்ளோம். தற்போது நாம் இவற்றை விகிதமுறு கோவைகளுக்குப் பொதுமைப்படுத்துவோம்.

**விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கற்பலன்**

$\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{r(x)}{s(x)}$ என்பன இரு விகிதமுறு கோவைகள். இங்கு $q(x)\neq 0$, $s(x)\neq 0$, எனில், அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)\times r(x)}{q(x)\times s(x)}$

இரு விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கற்பலனை அவற்றின் தொகுதிகளின் பெருக்கற்பலனை பகுதிகளின் பெருக்கற்பலனால் வகுத்து எளிய வடிவில் எழுதுதல் எனவும் கூறலாம்.

### விகிதமுறு கோவைகளின் வகுத்தல்

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ என்பன இரு விகிதமுறு கோவைகள். இங்கு $q(x),\ s(x) \neq 0$ எனில்,

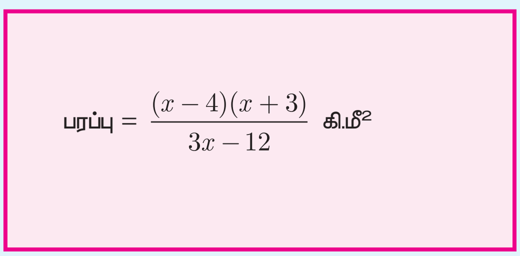
$$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x) \times s(x)}{q(x) \times r(x)}$$

இதிலிருந்து இரு விகிதமுறு கோவைகளின் வகுத்தலானது, முதல் விகிதமுறு கோவை மற்றும் இரண்டாவது விகிதமுறு கோவையின் தலைகீழி ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும். இப்பெருக்கற்பலன் எளிய வடிவில் இல்லையெனில் மேலும் எளிய வடிவில் மாற்றி எழுத வேண்டும்.

#### முன்னேற்றச் சோதனை

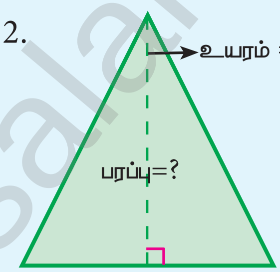
பின்வரும் படங்களில் விடுபட்ட கோவையைக் காண்க.

1.




படம் 3.5

2.




படம் 3.6

**எடுத்துக்காட்டு 3.15** (i) $\dfrac{x^3}{9y^2}$ -ஐ $\dfrac{27y}{x^5}$ -ஆல் பெருக்குக. (ii) $\dfrac{x^4b^2}{x-1}$ -ஐ $\dfrac{x^2-1}{a^4b^3}$ -ஆல் பெருக்குக.

**தீர்வு** (i) $\dfrac{x^3}{9y^2} \times \dfrac{27y}{x^5} = \dfrac{3}{x^2y}$ (ii) $\dfrac{x^4b^2}{x-1} \times \dfrac{x^2-1}{a^4b^3} = \dfrac{x^4 \times b^2}{x-1} \times \dfrac{(x+1)(x-1)}{a^4 \times b^3} = \dfrac{x^4(x+1)}{a^4b}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.16** பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\dfrac{14x^4}{y} \div \dfrac{7x}{3y^4}$ (ii) $\dfrac{x^2-16}{x+4} \div \dfrac{x-4}{x+4}$ (iii) $\dfrac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \dfrac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$

**தீர்வு :**

(i) $\dfrac{14x^4}{y} \div \dfrac{7x}{3y^4} = \dfrac{14x^4}{y} \times \dfrac{3y^4}{7x} = 6x^3y^3$

(ii) $\dfrac{x^2-16}{x+4} \div \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)} \times \left(\dfrac{x+4}{x-4}\right) = x+4$

(iii) $\dfrac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \dfrac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4} = \dfrac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \times \dfrac{3x^2-11x-4}{8x^2+11x+3}$

$$= \frac{(8x+3)(2x-1)}{(3x+1)(x-1)} \times \frac{(3x+1)(x-4)}{(8x+3)(x+1)} = \frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-9x+4}{x^2-1}$$

## பயிற்சி 3.5

1. சுருக்குக

(i) $\dfrac{4x^2y}{2z^2}\times\dfrac{6xz^3}{20y^4}$ (ii) $\dfrac{p^2-10p+21}{p-7}\times\dfrac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$ (iii) $\dfrac{5t^3}{4t-8}\times\dfrac{6t-12}{10t}$

2. சுருக்குக

(i) $\dfrac{x+4}{3x+4y}\times\dfrac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$ (ii) $\dfrac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2}\times\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

3. சுருக்குக

(i) $\dfrac{2a^2+5a+3}{3a^2+7a+6}\div\dfrac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$ (ii) $\dfrac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4}\div\dfrac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

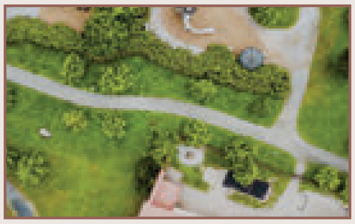
(iii) $\dfrac{x+2}{4y}\div\dfrac{x^2-x-6}{12y^2}$ (iv) $\dfrac{12t^2-22t+8}{3t}\div\dfrac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

4. $x=\dfrac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ மற்றும் $y=\dfrac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ எனில், $x^2y^{-2}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

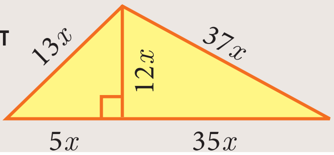
5. $p(x)=x^2-5x-14$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க $\dfrac{x-7}{x+2}$, எனும் விடை கிடைக்கிறது எனில், $q(x)$ –ஐக் காண்க.

### செயல்பாடு 1

(i) ஒரு செவ்வக வடிவப் பூங்காவின் நீளமானது ஓர் எண் மற்றும் அதன் தலைகீழியின் கூடுதலாகும். அதன் அகலமானது அதே எண்ணின் வர்க்கம் மற்றும் அந்த வர்க்க எண்ணின் தலைகீழி ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் ஆகும். செவ்வக வடிவப் பூங்காவின் நீளம், அகலம் மற்றும் நீள, அகலங்களின் விகிதம் ஆகியவற்றைக் காண்க.



(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தின் சுற்றளவிற்கும், அதன் பரப்பளவிற்கும் உள்ள விகிதம் காண்க.




### விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

### ஒத்த பகுதிகளை உடைய விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

(i) தொகுதியைக் கூட்டுக (அ) கழிக்க.

(ii) தொகுதியின் கூடுதல் (அ) வித்தியாசத்தைப் பொதுப் பகுதியின் மீது தொகுதியாக எழுதுக.

(iii) இந்த விகிதமுறு கோவையை எளிய வடிவில் எழுதுக.

**எடுத்துக்காட்டு 3.17** $\dfrac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\dfrac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$ ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $$\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}=\frac{(x^2+20x+36)-(x^2+12x+4)}{x^2-3x-28}$$

$$=\frac{8x+32}{x^2-3x-28}=\frac{8(x+4)}{(x-7)(x+4)}=\frac{8}{x-7}$$

### மாறுபட்ட பகுதிகளை உடைய விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

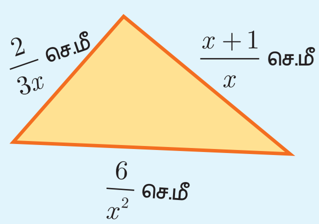
(i) பகுதிகளின் மீச்சிறு பொது மடங்கு காண வேண்டும்.

(ii) படிநிலை $(1)$ –யில் கண்ட மீ.பொ.ம–க்குத் தகுந்தவாறு ஒவ்வொரு பின்னத்தின் சமானப் பின்னத்தையும் எழுத வேண்டும். இதனை, தொகுதி மற்றும் பகுதியில் உள்ள கோவைகளை மீ.பொ.ம–விற்குத் தேவையான காரணியால் பெருக்குவதன் மூலம் பெறலாம்.

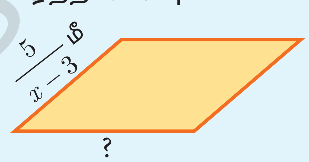
(iii) பகுதிகள் சமமானதால், ஒத்த பகுதிகளை உடைய விகிதமுறு கோவைகளைக் கூட்டுவதற்கும், கழிப்பதற்குமுள்ள படிநிலைகளைப் பின்பற்றவேண்டும்.

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணத்தின் சுற்றளவுக்கான விகிதமுறு கோவையை எழுதிச் சுருக்குக.




2. சுற்றளவு $\frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$ ஆக உள்ள இணைகரத்தின் அடிப்பக்கம் காண்க.




**எடுத்துக்காட்டு 3.18** சுருக்குக $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$

**தீர்வு** $$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{(x-5)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-5)+(x-3)(x-5)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-6x+5)+(x^2-8x+15)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{x^2-11x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{(x-9)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{x-9}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$

**சிந்தனைக் களம்**

**சரியா தவறா எனக் கூறுக.**

1. இரு விகிதமுறு கோவைகளின் கூடுதல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு கோவையே.
2. இரு விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு கோவையே.

## பயிற்சி 3.6

1. கூட்டுக (i) $\dfrac{x(x+1)}{x-2}+\dfrac{x(1-x)}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-2}$ (iii) $\dfrac{x^3}{x-y}+\dfrac{y^3}{y-x}$
2. கழிக்க (i) $\dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-4}-\dfrac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$ (ii) $\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\dfrac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ –லிருந்து $\dfrac{1}{x^2+2}$ –ஐக் கழிக்க.
4. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ –லிருந்து எந்த விகிதமுறு கோவையைக் கழித்தால் $\dfrac{3}{x^2-2x+4}$ என்ற கோவை கிடைக்கும்.
5. $A=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ மற்றும் $B=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ எனில், $\dfrac{1}{A-B}-\dfrac{2B}{A^2-B^2}$ காண்க.
6. $A=\dfrac{x}{x+1}$ மற்றும் $B=\dfrac{1}{x+1}$, எனில், $\dfrac{(A+B)^2+(A-B)^2}{A\div B}=\dfrac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ என நிரூபிக்க.
7. ஒரு வேலையை $4$ மணி நேரத்தில் பாரி செய்கிறார். யுவன் அதே வேலையை $6$ மணி நேரத்தில் செய்கிறார் எனில் இருவரும் சேர்ந்து அந்த வேலையைச் செய்து முடிக்க எத்தனை மணி நேரமாகும்?

   இனியா $50$கி.கி எடையுள்ள ஆப்பிள்கள் மற்றும் வாழைப்பழங்கள் வாங்கினார். ஒரு கிலோகிராமுக்கு ஆப்பிள்களின் விலை வாழைப்பழங்களின் விலையைப் போல இருமடங்கு ஆகும். வாங்கப்பட்ட ஆப்பிள்களின் விலை ₹$1800$ மற்றும் வாழைப்பழங்களின் விலை ₹$600$ எனில், இனியா வாங்கிய இருவகை பழங்களின் எடையைக் கிலோகிராமில் காண்க.

## 3.5 பல்லுறுப்புக் கோவையின் வர்க்க மூலம் (Square Root of Polynomials)

ஒரு மிகை மெய்யெண்ணின் வர்க்கமூலம் ஆனது, எந்த எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கினால் கொடுக்கப்பட்ட மிகை மெய்யெண் கிடைக்கிறதோ அந்த எண் ஆகும்.

இதுபோலவே கொடுக்கப்பட்ட கோவை $p(x)$ –யின் வர்க்கமூலம் ஆனது எந்தக் கோவையை அதே கோவையால் பெருக்கினால் கொடுக்கப்பட்ட கோவை $p(x)$ கிடைக்கிறதோ, அந்தக் கோவை ஆகும். அதாவது $p(x)$–யின் வர்க்கமூலம் $q(x)$ எனில் $q(x).\ q(x)=p(x)$

ஆகவே, $|q(x)|=\sqrt{p(x)}$ இங்கு $|q(x)|$ என்பது $q(x)$ –யின் மட்டு மதிப்பு ஆகும்.

பின்வரும் இரு முறைகளில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோவையின் வர்க்கமூலம் காணலாம்.

(i) காரணிப்படுத்தல் முறை (Factorization method)

(ii) வகுத்தல் முறை (Division method)

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. $x^2+4x+4$ என்பது ஒரு முழுவர்க்கமாகுமா?
2. $3\sqrt{x}=9$ எனில் $x$ –யின் மதிப்பு என்ன?
3. $361x^4y^2$ –யின் வர்க்க மூலம் ______.
4. $\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2}=$ ______.
5. பல்லுறுப்புகோவையானதுமுழுவர்க்கம்எனில்,அதன்காரணிகள்______எண்ணிக்கையில் இடம்பெறும் (ஒற்றைப் படை / இரட்டைப் படை)

### 3.5.1 கராணிப்படுத்துதல் முறையில் வர்க்கமூலம் காணுதல் (Square root by factorization method)

**எடுத்துக்காட்டு 3.19** கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$ (ii) $\dfrac{144\ a^8\ b^{12}\ c^{16}}{81\ f^{12} g^4\ h^{14}}$

**தீர்வு** (i) $\sqrt{256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}} = 16\left|(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^8(x-d)^{10}\right|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}} = \dfrac{4}{3}\left|\dfrac{a^4b^6c^8}{f^6g^2h^7}\right|$

**எடுத்துக்காட்டு 3.20** கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9$ (ii) $(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)$

(iii) $\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]$

**தீர்வு** (i) $\sqrt{16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9}$

$$= \sqrt{(4x)^2+(-3y)^2+(3)^2+2(4x)(-3y)+2(-3y)(3)+2(4x)(3)}$$

$$= \sqrt{(4x-3y+3)^2} = \left|4x-3y+3\right|$$

(ii) $\sqrt{(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)}$

$$= \sqrt{(3x-1)(2x+1)(3x-1)(x+1)(2x+1)(x+1)} = \left|(3x-1)(2x+1)(x+1)\right|$$

(iii) முதலில் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்பு கோவையைக் காரணிப்படுத்தலாம்.

$$\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2} = \sqrt{15}x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{10}x+\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{5}x+1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{5}x+1\right)$$

$$= \left(\sqrt{5}x+1\right)\times\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$$

$$\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2 = \sqrt{5}x^2+2\sqrt{5}x+x+2$$

$$= \sqrt{5}x(x+2)+1(x+2) = \left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)$$

$$\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2} = \sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$$

$$= x\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)+2\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right) = (x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$$

எனவே,

$$\sqrt{\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)} = \left|\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)\right|$$

**பயிற்சி 3.7**

1. பின்வருவனவற்றின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $\dfrac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ (ii) $\dfrac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$ (iii) $\dfrac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $4x^2+20x+25$ (ii) $9x^2-24xy+30xz-40yz+25z^2+16y^2$

(iii) $1+\frac{1}{x^6}+\frac{2}{x^3}$ (iv) $(4x^2-9x+2)(7x^2-13x-2)(28x^2-3x-1)$

(v) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

### 3.5.2 வகுத்தல் முறையில் கோவையின் வர்க்கமூலம் காணல் (Finding the square root of a polynomial by Division method)

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி அதிகமாக இருக்கும்போது வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி அக்கோவையின் வர்க்க மூலத்தைக் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.21** $64x^4-16x^3+17x^2-2x+1$ என்பதின் வர்க்கமூலம் காண்க.

**தீர்வு**

$$\begin{array}{r|l l}
 & 8x^2-x+1 & \\
\hline
8x^2 & 64x^4-16x^3+17x^2-2x+1 & \\
 & 64x^4 & (-) \\
\hline
16x^2-x & -16x^3+17x^2 & \\
 & -16x^3+x^2 & (-) \\
\hline
16x^2-2x+1 & 16x^2-2x+1 & \\
 & 16x^2-2x+1 & (-) \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

**குறிப்பு**

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் வர்க்க மூலத்தைக் காணத் தொடங்குமுன் அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறியின் படியானது இறங்கு வரிசையிலோ அல்லது ஏறு வரிசையிலோ அமைந்துள்ளதா என உறுதிப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.

எனவே, $\sqrt{64x^4-16x^3+17x^2-2x+1}=\left|8x^2-x+1\right|$

**எடுத்துக்காட்டு 3.22** $\frac{4x^2}{y^2}+\frac{20x}{y}+13-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் காண்க.

**தீர்வு**

$$\begin{array}{r|l l}
 & \frac{2x}{y}+5-\frac{3y}{x} & \\
\hline
\frac{2x}{y} & \frac{4x^2}{y^2}+\frac{20x}{y}+13-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2} & \\
 & \frac{4x^2}{y^2} & (-) \\
\hline
\frac{4x}{y}+5 & \frac{20x}{y}+13 & \\
 & \frac{20x}{y}+25 & (-) \\
\hline
\frac{4x}{y}+10-\frac{3y}{x} & -12-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2} & \\
 & -12-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2} & (-) \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

எனவே, $\sqrt{\frac{4x^2}{y^2}+\frac{20x}{y}+13-\frac{30y}{x}+\frac{9y^2}{x^2}} = \left|\frac{2x}{y}+5-\frac{3y}{x}\right|$

**எடுத்துக்காட்டு 3.23** If $9x^4+12x^3+28x^2+ax+b$ ஆனது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், $a$, $b$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு**

$$\begin{array}{r|l l}
 & 3x^2+2x+4 & \\ \hline
3x^2 & 9x^4+12x^3+28x^2+ax+b & (-)\\
 & 9x^4 & \\ \hline
6x^2+2x & 12x^3+28x^2 & (-)\\
 & 12x^3+4x^2 & \\ \hline
6x^2+4x+4 & 24x^2+ax+b & (-)\\
 & 24x^2+16x+16 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை ஒரு முழு வர்க்கம் என்பதால், $a-16=0$, $b-16=0$ எனவே, $a=16$, $b=16$.

**பயிற்சி 3.8**

1. வகுத்தல் முறையில் பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.
   (i) $x^4-12x^3+42x^2-36x+9$ (ii) $37x^2-28x^3+4x^4+42x+9$
   (iii) $16x^4+8x^2+1$ (iv) $121x^4-198x^3-183x^2+216x+144$
2. $\frac{x^2}{y^2}-\frac{10x}{y}+27-\frac{10y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் காண்க.
3. பின்வருபவை முழு வர்க்கப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில் $a$ மற்றும் $b$–யின் மதிப்பு காண்க.
   (i) $4x^4-12x^3+37x^2+bx+a$ (ii) $ax^4+bx^3+361x^2+220x+100$
4. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழு வர்க்கங்கள் எனில், $m$ மற்றும் $n$ –யின் மதிப்பு காண்க.
   (i) $\frac{1}{x^4}-\frac{6}{x^3}+\frac{13}{x^2}+\frac{m}{x}+n$ (ii) $x^4-8x^3+mx^2+nx+16$

## 3.6 இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic Equations)

### அறிமுகம்

லத்தீனில் 'சவசோர்டா' எனும் பெயரால் அறியப்பட்ட கணிதவியலாளர் அப்ரஹாம் பார் ஹியா ஹா–நாசி என்பவர் பொ.யு 1145 ஆம் ஆண்டு 'லிபர் எம்படோரம்' எனும் புத்தகத்தை ஐரோப்பாவில் முதன்முதலில் வெளியிட்டார். இந்நூலில் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் முழுமையான தீர்வுகள் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.





X_Ch 3 TM.indd 111 16-04-2019 09:51:05

மூவாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முற்பட்ட பண்டைய காலம் முதல் இன்றைய காலம் வரை இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் பல்வேறு வழிமுறைகளை மக்கள் அறிந்திருந்தனர். குறிப்பாக, சமன்பாட்டில் உள்ள கெழுக்கள், நான்கு அடிப்படைச் செயலிகள் மற்றும் வர்க்க மூலங்களைக் கொண்டு தீர்வைக் கண்டனர். இவ்வாறு பெறும் தீர்வு முறைகள் "படிமுறைத் தீர்வு" என அழைக்கப்படுகிறது. இன்று வரையில், பல்வேறு சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காண ஆழ்ந்த ஆய்வுகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

### இருபடிக் கோவை

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ என்பது $x$ எனும் மாறியில் $n$ படியில் அமைந்த கோவையாகும். மேலும், $a_0 \neq 0$ மற்றும் $a_1, a_2, \ldots a_n$ ஆகியவை மெய் எண்கள். $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ஆகியவற்றை கெழுக்கள் என அழைக்கிறோம். குறிப்பாகக் கோவையின் படி $2$ -ஆக இருப்பின் அதை 'இருபடிக் கோவை' என அழைக்கிறோம். $p(x)$ என்பது இருபடிக்கோவையெனில், அதை $p(x) = ax^2 + bx + c$, என எழுதலாம். இங்கு, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ மற்றும் $a$, $b$, $c$ ஆகியவை மெய் எண்களாகும்.

### 3.6.1 இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeroes of a Quadratic Polynomial)

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்பு கோவை என்க. $p(a)=0$ எனில் $x=a$ என்பது $p(x)$ –யின் ஒரு பூச்சியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, $p(x)=x^2-2x-8$ எனில் $p(-2)=4+4-8 = 0$ மற்றும் $p(4)= 16- 8 -8 = 0$. எனவே, $-2$ மற்றும் $4$ என்பவை $p(x)=x^2-2x-8$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

### 3.6.2 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (Roots of a Quadratic Equations)

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ என்பது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு என்க. $ax^2 + bx + c$ என்ற கோவையின் மதிப்பைப் பூச்சியமாக்குகின்ற $x$–யின் மதிப்புகளை $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்கிறோம்.

$ax^2 + bx + c = 0$ என்க.

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{ஏனெனில், } a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}(2x) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

இதிலிருந்து, $$x^2 + (2x)\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

AX12IM

எனவே, $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ மற்றும் $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ஆகியவை $ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

### 3.6.3 இருபடிச் சமன்பாட்டை அமைத்தல் (Formation of a Quadratic Equation)

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ மற்றும் } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

மேலும், $$\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

மற்றும் $$\alpha\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}.$$

ஆகவே, $(x-\alpha)$ மற்றும் $(x-\beta)$ என்பன $ax^2+bx+c=0$ –யின் காரணிகள் ஆகும்.

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

எனவே, $$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$$

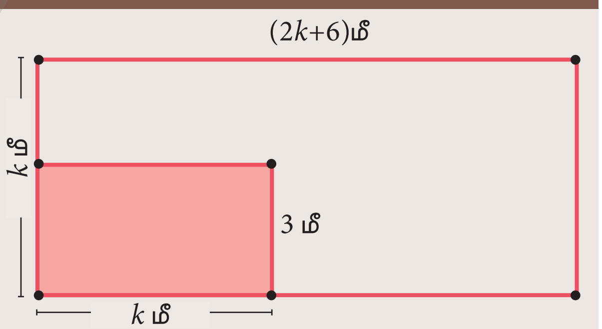
அதாவது, $x^2-$ (மூலங்களின் கூடுதல்) $x+$ மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $=0$. இதுவே கொடுக்கப்பட்ட இரு மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும்.

**குறிப்பு**

➢ $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டை ($a\neq0$) என்பதால் $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. எனவும் எழுதலாம்.

**செயல்பாடு 2**

உன் வீட்டின் முன் $(2k+6)$ மீ மற்றும் $k$ மீ அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவப் பூங்கா உள்ளது என்க. படத்தில் உள்ளவாறு $k$ மீ மற்றும் 3மீ அளவுகள் கொண்ட ஒரு சிறிய செவ்வகப் பகுதி சமன்படுத்தப்படுகிறது. மீதமுள்ள சமன்படுத்தப்படாத பூங்கா பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.




**எடுத்துக்காட்டு 3.24** $x^2+8x+12$ என்ற இருபடி கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

**தீர்வு** $p(x)=x^2+8x+12=(x+2)(x+6)$ என்க.

$p(-2)= 4 - 16 + 12=0$

$p(-6)= 36 - 48 + 12=0$

எனவே, $p(x)=x^2+8x+12$ –யின் பூச்சியங்கள் $-2$ மற்றும் $-6$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.25** மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் கீழ்க்காணுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், அவற்றுக்குத் தகுந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக.

(i) 9, 14 (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$ (iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

**தீர்வு** (i) மூலங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்

$$x^2 - (\text{மூலங்களின் கூடுதல்})\,x + \text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்} = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

(ii) $$x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{5}{2} = 0 \text{ எனவே, } 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

(iii) $$x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{10x^2 + 6x - 5}{10} = 0$$

இதிலிருந்து, $10x^2 + 6x - 5 = 0$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.26** கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$ (iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

**தீர்வு** $\alpha$ மற்றும் $\beta$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ இங்கு, $a = 1$, $b = 8$, $c = -65$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -8 \text{ மற்றும் } \alpha\beta = \frac{c}{a} = -65$$

$$\alpha + \beta = -8; \quad \alpha\beta = -65$$

(ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$ இங்கு, $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{2} \text{ மற்றும் } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2}; \; \alpha\beta = \frac{7}{2}$$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$ இங்கு, $a = k$, $b = -k^2$, $c = -2k^3$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-k^2)}{k} = k \text{ மற்றும் } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2k^3}{k} = -2k^2$$

## பயிற்சி 3.9

1. மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

   (i) $-9, 20$ (ii) $\frac{5}{3}, 4$ (iii) $\frac{-3}{2}, -1$ (iv) $-(2-a)^2, (a+5)^2$

2. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் காண்க.

   (i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ (ii) $x^2 + 3x = 0$ (iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$ (iv) $3y^2 - y - 4 = 0$

### 3.6.4 இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் (Solving a Quadratic Equation)

ஒன்று, இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகளை அறிவோம். சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் மாறியின் மதிப்பே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு என்பதை நினைவு கூர்வோம்.

இந்தப் பகுதியில், இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் மூன்று முறைகள் பற்றி அறிய உள்ளோம். அவையாவன, காரணிப்படுத்தல் முறை, வர்க்கப் பூர்த்தி முறை மற்றும் சூத்திர முறை போன்றவை ஆகும்.

## காரணிப்படுத்தல் முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல்

கீழ்க்காணும் படிநிலைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கலாம்.

**படி 1** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் பொதுவடிவில் எழுதுக.

**படி 2** சமன்பாட்டைக் காரணிப்படுத்துக.

**படி 3** நேரிய காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாகச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

**படி 4** நேரிய காரணிகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனிட்டு, $x$–யின் மதிப்புகளைப் பெறுக.
இந்த $x$ மதிப்புகளே கொடுத்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.27** தீர்க்க $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

**தீர்வு** $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 2x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}x + 3$ (நடு உறுப்பைப் பிரிக்க)

$$= \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)$$

காரணிகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த

$$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = 0$$

மூலங்கள் சமம் எனவே, $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$$

எனவே, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ என்பது தீர்வாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.28** தீர்க்க $2m^2 + 19m + 30 = 0$

**தீர்வு** $2m^2 + 19m + 30 = 2m^2 + 4m + 15m + 30 = 2m(m+2) + 15(m+2)$

$$= (m+2)(2m+15)$$

இப்பொழுது, $(m+2)(2m+15) = 0$ –லிருந்து, காரணிகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த

$m + 2 = 0$ –லிருந்து, $m = -2$ அல்லது $2m + 15 = 0$ –லிருந்து, $m = \dfrac{-15}{2}$

எனவே, மூலங்கள் $-2$ அல்லது $\dfrac{-15}{2}$.

இருபடிச் சமன்பாடு வடிவில் அமைந்திராத சில சமன்பாடுகளைப் பொருத்தமான பிரதியிடல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடு வடிவத்திற்குச் சுருக்கித் தீர்வு காணலாம். இந்த வகையிலான எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

**எடுத்துக்காட்டு 3.29** தீர்க்க $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$

**தீர்வு** என்க. $x^2 = a$ ஆகவே, $(x^2)^2 - 13x^2 + 42 = a^2 - 13a + 42 = (a-7)(a-6)$

ஆனால், $(a-7)(a-6) = 0$ ஆகும், $a = 7$ மற்றும் 6.

$a = x^2$ எனவே, $x^2 = 7$ –லிருந்து, $x = \pm\sqrt{7}$ மற்றும் $x^2 = 6$ –லிருந்து, $x = \pm\sqrt{6}$

எனவே, $x = \pm\sqrt{7},\ \pm\sqrt{6}$ மூலங்கள் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.30** தீர்க்க $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$

**தீர்வு** $y=\frac{x}{x-1}$ எனும்போது, $\frac{1}{y}=\frac{x-1}{x}$ எனக் கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $y$–யின் மதிப்பைப் பிரதியிட,

$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ கிடைக்கும்.

$2y^2-5y+2=0$ –லிருந்து, $y=\frac{1}{2},\ 2$

$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$ மற்றும் $2x=x-1$ –லிருந்து, $x=-1$

$\frac{x}{x-1}=2$ மற்றும் $x=2x-2$ –லிருந்து, $x=2$

எனவே, $-1$ மற்றும் $2$ ஆகியவை மூலங்கள் ஆகும்.

## பயிற்சி 3.10

1. காரணிப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $4x^2-7x-2=0$ (ii) $3(p^2-6)=p(p+5)$ (iii) $\sqrt{a(a-7)}=3\sqrt{2}$

   (iv) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ (v) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

2. $n$ அணிகள் பங்குபெறும் ஒரு கையுந்து விளையாட்டு $(Volley\ ball)$ போட்டியில் ஒவ்வோர் அணியும் மற்ற அனைத்து அணிகளோடும் விளையாட வேண்டும். $15$ போட்டிகள் கொண்ட தொடரில் மொத்தப் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை $G(n)=\frac{n^2-n}{2}$ எனில், பங்கேற்கும் அணிகளின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

### வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல்

கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வை வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் பெறக் கீழே தரப்பட்டுள்ள படிநிலைகளைப் பின்பற்றவும்.

**படி 1** கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $ax^2+bx+c=0$ எனும் பொது வடிவில் எழுதுக.

**படி 2** $x^2$–யின் கெழு $1$ என இல்லை எனில், $x^2$–யின் கெழுவால் சமன்பாட்டின் இருபுறம் வகுத்து $x^2$–யின் கெழுவை $1$ ஆக மாற்றுக.

**படி 3** மாறிலியை வலப்புறத்தில் எழுதுக.

**படி 4** $x$ –யின் கெழுவில் பாதியின் வர்க்கத்தை இருபுறமும் கூட்டுக.

**படி 5** இடப்புறத்தை முழு வர்க்கமாகவும், வலப்புறத்தை எளிமைப்படுத்தியும் எழுதுக.

**படி 6** வர்க்க மூலம் காணுவதன் மூலம் $x$–யின் மதிப்பைக் காண்க.

**எடுத்துக்காட்டு 3.31** தீர்க்க $x^2-3x-2=0$

**தீர்வு** $x^2-3x-2=0$

$$x^2-3x = 2 \quad \text{(மாறிலியை வலப்புறம் மாற்றுக)}$$

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left(\left[\frac{1}{2}\left(x \text{ -ன் கெழு}\right)\right]^2 \text{ –ஐ இருபுறமும் கூட்ட}\right)$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \quad \text{(இடப்புறத்தை முழு வர்க்கமாக எழுத)}$$

$$x-\frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{(இருபுறமும் வர்க்கமூலம் காண)}$$

$$x = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ அல்லது } x = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$$

எனவே, $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ தீர்வுகளாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.32** தீர்க்க $2x^2-x-1=0$

**தீர்வு** $2x^2-x-1=0$

$x^2$–யின் கெழுவை $1$ -ஆக மாற்ற, சமன்பாட்டை $2$ –ஆல் வகுக்கவும்.

$$x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2-\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$x-\dfrac{1}{4} = \pm\dfrac{3}{4}$ –லிருந்து, $x = 1$ அல்லது $-\dfrac{1}{2}$

## சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல்

$ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் காணுதல் சூத்திரம் (பகுதி 3.6.2 இல் தருவிக்கப்பட்டுள்ளது ) $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ஆகும்.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

பண்டைய பாபிலோனியர்கள் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் காணும் சூத்திரங்களை அறிந்திருந்தனர். அவர்கள் செய்யுள் மற்றும் பாடல்கள் மூலமாக மூலங்களைக் காணும் படிகளை எழுதினர். விவசாயத்திற்கான நிலங்களின் அளவுகளைக் கணக்கிட, பாபிலோனியர்கள் இருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினர்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.33** சூத்திர முறையில் $x^2+2x-2=0$ -ஐத் தீர்க்கவும்.

**தீர்வு** $x^2+2x-2=0$ –ஐ $ax^2+bx+c=0$ -உடன் ஒப்பிட,

$$a=1,\ b=2,\ c=-2$$

$a$, $b$ மற்றும் $c$ –யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

எனவே, $x = -1 + \sqrt{3}\,,\ \ -1 - \sqrt{3}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.34** சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்தி $2x^2 - 3x - 3 = 0$ –ஐத் தீர்க்க.

**தீர்வு** $2x^2 - 3x - 3 = 0$ –ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$ மற்றும் $c$ –யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

எனவே, $x = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{4}\ ,\quad x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{4}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.35** $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ –ஐ சூத்திர முறையில் தீர்க்கவும்.

**தீர்வு** $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ –ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$$a = 3,\ b = 2\sqrt{5},\ c = -5.$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$ மற்றும் $c$ –யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$p = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{6} = \frac{-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{3}$$

எனவே, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\ ,\ -\sqrt{5}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.36** தீர்க்க $pqx^2 - (p+q)^2x + (p+q)^2 = 0$

**தீர்வு** $pqx^2 - (p+q)^2x + (p+q)^2 = 0$ –ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$$a = pq,\ b = -(p+q)^2,\ c = (p+q)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$ மற்றும் $c$ –யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$x = \frac{-\left[-(p+q)^2\right] \pm \sqrt{\left[-(p+q)^2\right]^2 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2\left[(p+q)^2 - 4pq\right]}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p^2+q^2+2pq-4pq)}}{2pq}$$

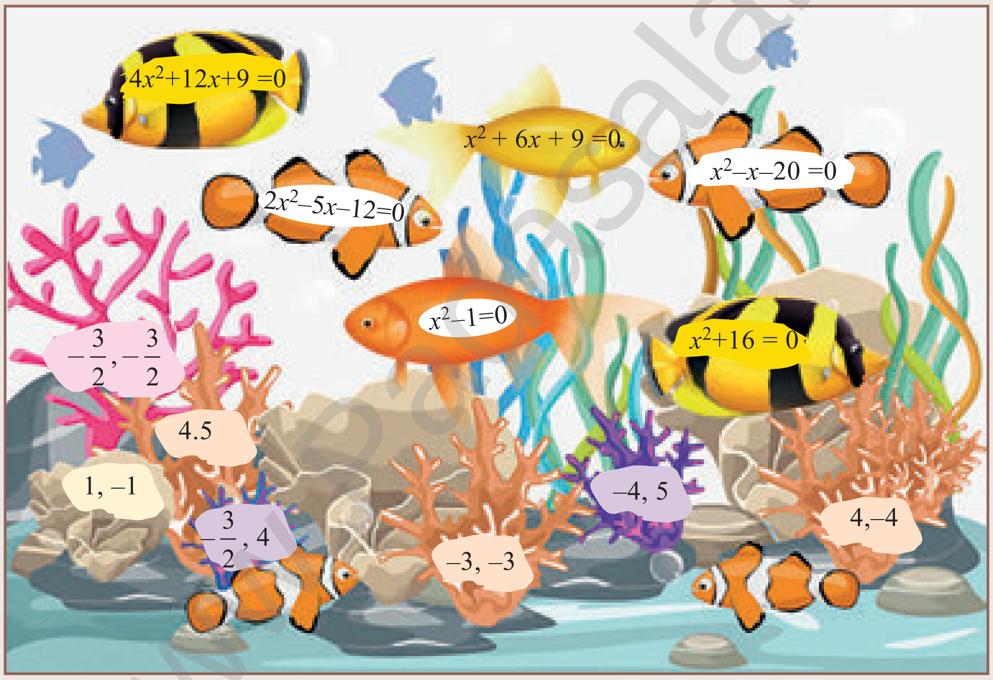
$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p-q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm (p+q)(p-q)}{2pq} = \frac{(p+q)\{(p+q) \pm (p-q)\}}{2pq}$$

எனவே, $x = \frac{p+q}{2pq} \times 2p$ , $\frac{p+q}{2pq} \times 2q$ அல்லது $x = \frac{p+q}{q}$ , $\frac{p+q}{p}$

## செயல்பாடு 3

மீன்களுக்கு (சமன்பாடு) தகுந்த உணவுகளை (மூலங்கள்) அளியுங்களேன்! எந்த மீனுக்கு உணவு அளிக்க முடியாது?




## பயிற்சி 3.11

1. வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ (ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x+2$

2. சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$ (iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

   (iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

3. சாய்வு தளத்தில் t– வினாடிகளில் ஒரு பந்து கடக்கும் தூரம் $d = t^2 - 0.75t$ அடிகளாகும். $11.25$ அடி தொலைவைக் கடக்கப் பந்து எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?.

### 3.6.5 இருபடிச் சமன்பாடுகள் சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுதல் (Solving Problems Involving Quadratic Equations)

**சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் படிகள்**

படி 1 சொற்றொடர்களால் அமைந்த கணக்கை இருபடிச் சமன்பாடாக மாற்றுக.

படி 2 மேலே குறிப்பிட்ட மூன்று முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

படி 3 கணித முறையில் பெற்ற விடையை வினாவிற்கு ஏற்ப சொற்றொடரில் மாற்றி எழுதுக.

**எடுத்துக்காட்டு 3.37** குமரனின் தற்போதைய வயதின் இருமடங்கோடு ஒன்றைக் கூட்டினால் கிடைப்பது, குமரனின் இரண்டாண்டுகளுக்கு முந்தைய வயதையும் அவரின் $4$ ஆண்டுகளுக்குப் பிந்தைய வயதையும் பெருக்கக் கிடைப்பதற்குச் சமம் எனில், அவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

**தீர்வு** குமரனின் தற்போதைய வயது $x$ ஆண்டுகள் என்க.

$2$ ஆண்டுகளுக்கு முன் வயது $= (x-2)$ ஆண்டுகள்.

$4$ ஆண்டுகளுக்குப் பின் வயது $= (x+4)$ ஆண்டுகள்.

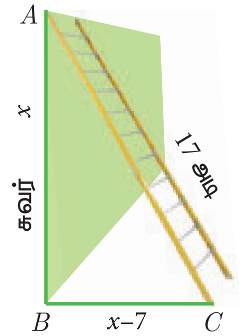
கொடுத்த தகவல்படி, $(x-2)(x+4) = 1+2x$

$x^2+2x-8 = 1+2x$ –லிருந்து, $(x-3)(x+3)=0$ –லிருந்து, $x = \pm 3$

வயது குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

எனவே, குமரனின் தற்போதைய வயது $3$ ஆண்டுகள்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.38** $17$ அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி ஒரு சுவரின் மீது சாய்ந்துள்ளது. தரை, ஏணி மற்றும் செங்குத்துச் சுவர் மூன்றும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன. சுவரின் அடியிலிருந்து ஏணியின் அடி முனை வரை உள்ள தூரம் ஏணியின் மேல் முனை சுவரைத் தொடும் உயரத்தைவிட $7$ அடி குறைவு எனில், சுவரின் உயரம் காண்க.



படம் 3.7

**தீர்வு** சுவரின் உயரம் $AB = x$ அடி என்க

கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி $BC = (x–7)$ அடி

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$, $AC=17$ அடி $BC = (x–7)$ அடி

பித்தாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = x^2 + (x-7)^2$; $289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$x^2 - 7x - 120 = 0$ –லிருந்து, $(x-15)(x+8) = 0$ –லிருந்து,

ஆகவே, $x = 15$ அல்லது $-8$

உயரம் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது. எனவே, சுவரின் உயரம் $15$ அடி ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.39** ஓர் இடத்தில் $x^2$ அன்னங்கள் கூட்டமாக இருந்தன. மேகங்கள் கூடியதால், $10x$ அன்னங்கள் ஏரிக்குச் சென்றன; எட்டில் ஒரு பங்கு தோட்டத்திற்குப் பறந்தன. மீதமுள்ள மூன்று ஜோடிகள் நீரில் விளையாடின எனில், மொத்த அன்னங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

**தீர்வு** மந்தையில் மொத்தம் $x^2$ அன்னங்கள் உள்ளன. கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின்படி,

$x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6$ –லிருந்து, $7x^2 - 80x - 48 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(7)(-48)}}{14} = \frac{80 \pm 88}{14}$$

எனவே, $x = 12, -\frac{4}{7}$.

அன்னங்களின் எண்ணிக்கை $x = -\frac{4}{7}$ ஆக இருக்க முடியாது.

ஆகையால், $x = 12$. மொத்த அன்னங்களின் எண்ணிக்கை $x^2 = 144$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.40** சென்னையிலிருந்து விருதாச்சலத்திற்கு $240$ கி.மீ தூரத்தைக் கடக்க ஒரு பயணிகள் தொடர்வண்டிக்கு ஒரு விரைவு தொடர்வண்டியைவிட $1$ மணி நேரம் கூடுதலாகத் தேவைப்படுகிறது. பயணிகள் தொடர்வண்டியின் வேகம், விரைவு தொடர்வண்டியின் வேகத்தைவிட $20$ கி.மீ/மணி குறைவு எனில், இரு தொடர்வண்டிகளின் சராசரி வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** பயணிகள் தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் $x$ கி.மீ/மணி என்க.

தற்போது, விரைவு தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் $(x+20)$ கி.மீ/மணி ஆகும்.

$240$ கி.மீ கடக்கப் பயணிகள் தொடர்வண்டி எடுக்கும் நேரம் $= \frac{240}{x}$ மணி

$240$ கி.மீ கடக்க விரைவு தொடர்வண்டி எடுக்கும் நேரம் $= \frac{240}{x+20}$ மணி

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின்படி, $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+20} + 1$

$240\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right] = 1$ –லிருந்து, $240\left[\frac{x+20-x}{x(x+20)}\right] = 1$ –லிருந்து, $4800 = (x^2 + 20x)$

$x^2 + 20x - 4800 = 0$ –லிருந்து, $(x+80)(x-60) = 0$ –லிருந்து, $x = -80$ or $60$.

வேகம் ஒரு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

எனவே, பயணிகள் தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் $60$ கி.மீ/மணி

எனவே, விரைவு தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் $80$ கி.மீ/மணி

## பயிற்சி 3.12

1. ஓர் எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் $\frac{24}{5}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.
2. $12$ மீ $\times$ $16$மீ அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவப் பூங்காவைச் சுற்றி '$w$' மீட்டர் அகலமுள்ள நடைபாதை அமைக்கப்படும்போது, அதன் மொத்தப் பரப்பு $285$ சதுர மீட்டராக அதிகரிக்கிறது. நடைபாதையின் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.
3. ஒரு பேருந்து $90$கி.மீ தொலைவைச் சீரான வேகத்தில் கடக்கிறது. அதன் வேகம் $15$ கி.மீ/மணி அதிகரிக்கப்பட்டால், பயண நேரம் $30$ நிமிடங்கள் குறைகிறது எனில், பேருந்தின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.
4. ஒரு பெண்ணின் வயது அவரது சகோதரியின் வயதைப் போல இருமடங்கு ஆகும். ஐந்து ஆண்டுகளுக்குப் பின் இரு வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் $375$ எனில், சகோதரிகளின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.
5. $20$ மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் கம்பம் ஒன்று பொருத்தப்பட வேண்டும். ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ள $P$ மற்றும் $Q$ எனும் கதவுகளில் இருந்து கம்பத்திற்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வித்தியாசம் $4$ மீ உள்ளவாறு கம்பம்

நடமுடியுமா? ஆம் எனில், இரு கதவுகளிலிருந்து கம்பத்தை எவ்வளவு தொலைவில் பொருத்த வேண்டும்?

6. $2x^2$ எண்ணிக்கையுடைய கருப்பு தேனீக்களின் கூட்டத்திலிருந்து கூட்டத்தின் பாதியின் வர்க்கமூல எண்ணிக்கை கொண்ட தேனீக்கள் ஒரு மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீண்டும் கூட்டத்திலிருந்து ஒன்பதில் எட்டுப் பங்கு கொண்ட தேனீக்கள் அதே மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீதமுள்ள இரண்டு தேனீக்கள் மணம் கமழும் மலரில் சிக்கிக் கொண்டன எனில், மொத்தத் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

7. $70$ மீ இடைப்பட்ட தொலைவில் உள்ள இரு அரங்குகளில் இசை ஒலிக்கப்படுகிறது. முதல் அரங்கில் $4$ பாடகர்களும் இரண்டாம் அரங்கில் $9$ பாடகர்களும் பாடுகிறார்கள். சம ஒலி அளவில் இசையைக் கேட்க விரும்பும் ஒரு நபர் இரு அரங்கங்களுக்கு இடையில் எங்கு நிற்க வேண்டும்? (குறிப்பு ஒலி அளவுகளின் விகிதமும், இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வர்க்கத்தின் விகிதமும் சமம்).

8. $10$ மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவ நிலத்தின் நடுவில், ஒரு சதுர மலர் மேடையும் அதனைச் சுற்றிச் சீரான அகலமுள்ள சரளை பாதையும் அமைக்கப்படுகிறது. ஒரு சதுர மீட்டர் மேடை மற்றும் பாதை அமைக்க முறையே ₹$3$ மற்றும் ₹$4$ என்றவாறு மொத்தச் செலவு ₹$364$ எனில், சரளை பாதையின் அகலம் என்ன?

9. இரு பெண்கள் $100$ முட்டைகளைச் சந்தைக்கு விற்பனைக்கு எடுத்துச் செல்கின்றனர். இருவரிடமும் சம எண்ணிக்கையில் முட்டைகள் இல்லை எனினும் முட்டைகள் விற்ற தொகை சமம் ஆகும். முதல் பெண், "உனது முட்டைகளை நான் விற்றிருந்தால் நான் '15 சம்பாதித்திருப்பேன்" என இரண்டாவது பெண்ணிடம் கூறினாள். அதற்கு "உனது முட்டைகளை நான் விற்று இருந்தால் ₹$6\frac{2}{3}$" சம்பாதித்திருப்பேன்" என இரண்டாவது பெண் பதிலளித்தாள். தொடக்கத்தில் இருவரிடமும் இருந்த முட்டைகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

10. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் $25$ செ.மீ மற்றும் அதன் சுற்றளவு $56$ செ.மீ எனில், முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கத்தின் அளவைக் காண்க.

### 3.6.6 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை (Nature of Roots of a Quadratic Equation)

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம். இருபடிச் சமன்பாட்டின் 'தன்மைகாட்டி' [குறியீடு $\Delta$] என அழைக்கப்படும். $b^2-4ac$ மூலங்களின் தன்மையைக் கீழ்க்கண்டவாறு தெரிவிக்கிறது.

| தன்மைகாட்டியின் மதிப்பு $\Delta=b^2-4ac$ | மூலங்களின் தன்மை |
|---|---|
| $\Delta>0$ | மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை |
| $\Delta=0$ | மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் |
| $\Delta<0$ | மெய் மூலம் இல்லை. |

**எடுத்துக்காட்டு 3.41** பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.

(i) $x^2-x-20=0$ (ii) $9x^2-24x+16=0$ (iii) $2x^2-2x+9=0$

**தீர்வு** (i) $x^2-x-20=0$

இங்கு, $a=1,\ b=-1,\ c=-20$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 81$

$\Delta = 81 > 0$.

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை.

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

இங்கு, $a = 9,\ b = -24,\ c = 16$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0$

$\Delta = 0$.

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

இங்கு, $a = 2,\ b = -2,\ c = 9$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(2)(9) = -68$

$\Delta = -68 < 0$.

எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 3.42** (i) இருபடிச் சமன்பாட்டு $kx^2 - (8k+4)x + 81 = 0$ –யின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், '$k$', –யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $(k+9)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ –யின் மூலங்கள் மெய் இல்லை எனில், $k$–யின் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** (i) $kx^2 - (8k+4)x + 81 = 0$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம். எனவே, $\Delta = 0$.

அதாவது, $b^2 - 4ac = 0$

இங்கு, $a = k,\ b = -(8k+4),\ c = 81$

எனவே, $\left[-(8k+4)\right]^2 - 4(k)(81) = 0$

$64k^2 + 64k + 16 - 324k = 0$

$64k^2 - 260k + 16 = 0$

4ஆல் வகுக்க, $16k^2 - 65k + 4 = 0$

$(16k-1)(k-4) = 0$ –லிருந்து, $k = \frac{1}{16}$ அல்லது $k = 4$

(ii) $(k+9)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் இல்லை. எனவே, $\Delta < 0$

அதாவது, $b^2 - 4ac < 0$

இங்கு, $a = k+9,\ b = k+1,\ c = 1$

எனவே, $(k+1)^2 - 4(k+9)(1) < 0$

$k^2 + 2k + 1 - 4k - 36 < 0$

$k^2 - 2k - 35 < 0$

$(k+5)(k-7) < 0$

எனவே, $-5 < k < 7$ $\{\alpha < \beta\ \ (x-\alpha)(x-\beta) < 0$ எனில், $\alpha < x < \beta\}$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.43** $x^2(p^2+q^2)+2x(pr+qs)+r^2+s^2=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை எனக் காட்டுக. மேலும் $ps=qr$, எனில், மூலங்கள் மெய்யானவை மற்றும் சமம் என நிறுவுக.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு, $x^2(p^2+q^2)+2x(pr+qs)+r^2+s^2=0$

இங்கு, $a=p^2+q^2$, $b=2(pr+qs)$, $c=r^2+s^2$

தன்மைகாட்டி, $\Delta=b^2-4ac=\left[2(pr+qs)\right]^2-4(p^2+q^2)(r^2+s^2)$

$$=4\left[p^2r^2+2pqrs+q^2s^2-p^2r^2-p^2s^2-q^2r^2-q^2s^2\right]$$

$$=4\left[-p^2s^2+2pqrs-q^2r^2\right]=-4\left[(ps-qr)^2\right]<0 \quad \ldots(1)$$

$\Delta=b^2-4ac<0$, எனவே, மூலங்கள் மெய் இல்லை.

மேலும், $ps=qr$ எனில், $\Delta=-4\left[ps-qr\right]^2=-4\left[qr-qr\right]^2=0$ ((1)–ஐப் பயன்படுத்தி)

ஆகவே, $\Delta=0$ எனவே, $ps=qr$ எனில், மூலங்கள் மெய்யாகவும், சமமாகவும் இருக்கும்.

**பயிற்சி 3.13**

1. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் கூறுக.
   (i) $15x^2+11x+2=0$ (ii) $x^2-x-1=0$ (iii) $\sqrt{2}t^2-3t+3\sqrt{2}=0$
   (iv) $9y^2-6\sqrt{2}y+2=0$ (v) $9a^2b^2x^2-24abcdx+16c^2d^2=0$, $a\neq0$, $b\neq0$
2. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், $k$–யின் மதிப்பைக் காண்க. (i) $(5k-6)x^2+2kx+1=0$ (ii) $kx^2+(6k+2)x+16=0$
3. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், $b, a, c$ ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும் என நிறுவுக.
4. $a$ மற்றும் $b$ மெய் எண்கள் எனில், $(a-b)x^2-6(a+b)x-9(a-b)=0$ –யின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை என நிரூபிக்கவும்.
5. $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+b^2-ac=0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் சமம் மற்றும் மெய் எனில், $a$=0 அல்லது $a^3+b^3+c^3=3abc$ என நிரூபி.

**சிந்தனைக் களம்**

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவை முழு வர்க்கமாகுமாறு, விடுபட்ட கட்டங்களை நிரப்புக

(i) $x^2+14x+$ ☐ (ii) $x^2-24x+$ ☐ (iii) $p^2+2qp+$ ☐

## 3.6.7 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு (The Relation between Roots and Coefficient of a Quadratic Equation)

$ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில்,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3.6.3 லிருந்து, நமக்குக் கிடைப்பது

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-x\text{–யின் கெழு}}{x^2\text{–யின் கெழு}}\ ; \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{–யின் கெழு}}$$

## முன்னேற்றச் சோதனை

| இருபடிச் சமன்பாடு | இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (α மற்றும் β) | $x^2$ மற்றும் $x$ –யின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி | மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha+\beta$ | மூலங்களின் பெருக்கற் பலன் $\alpha\beta$ | $-\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{a}$ | முடிவு |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-9x+2=0$ | | | | | | | |
| $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=0$ | | | | | | | |
| $2x^2-15x-27=0$ | | | | | | | |

**எடுத்துக்காட்டு 3.44** $x^2-13x+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வித்தியாசம் 17 எனில், $k$ –யின் மதிப்புக் காண்க.

**தீர்வு** $x^2-13x+k=0$ இங்கு, $a=1,\ b=-13,\ c=k$

$\alpha,$ மற்றும் $\beta$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-13)}{1}=13 \quad \ldots(1)$$

$$\alpha-\beta=17 \quad \ldots(2) \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

(1)+(2) காண, $2\alpha=30$ கிடைக்கும்

எனவே, $\alpha=15$

$\alpha=15$ ஐ (1)–யில் பிரதியிட,

$15+\beta=13$ $\beta=-2$

ஆனால், (2)–லிருந்து $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k}{1}$ $15\times(-2)=k$ எனவே, $k=-30$.

**சிந்தனைக் களம்**

$ax^2+bx+c=0$ என்ற இருப்படி சமன்பாட்டில் நிலைத்த மதிப்பு 0 வாக இருந்தால் இதன் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் பலன் _____ மற்றும் _____

**எடுத்துக்காட்டு 3.45** $x^2+7x+10=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $(\alpha-\beta)$ (ii) $\alpha^2+\beta^2$ (iii) $\alpha^3-\beta^3$ (iv) $\alpha^4+\beta^4$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

**தீர்வு** $x^2+7x+10=0$ இங்கு, $a=1,\ b=7,\ c=10$

$\alpha$ மற்றும் $\beta$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{1}=-7\,;\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{10}{1}=10$$

(i) $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-7)^2-4\times10}=\sqrt{9}=3$

(ii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\times10=29$

(iii) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=(3)^3+3(10)(3)=117$

(iv) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

((ii)–லிருந்து, $\alpha^2+\beta^2=29$ எனவே, $29^2-2\times(10)^2=641$

(v) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{49-20}{10} = \dfrac{29}{10}$

(vi) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(-343)-3\big(10\times(-7)\big)}{10} = \frac{-343+210}{10} = \frac{-133}{10}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.46** $3x^2+7x-2=0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

**தீர்வு** $3x^2+7x-2=0$ இங்கு, $a=3$, $b=7$, $c=-2$

$\alpha$ மற்றும், $\beta$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ; எனவே,

(i) $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-7}{3}$; $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-7}{3}\right)^2-2\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{-2}{3}} = \frac{-61}{6}$$

(ii) $$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{-\frac{7}{3}} = \frac{67}{9}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.47** $2x^2-x-1=0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$

**தீர்வு** $2x^2-x-1=0$ இங்கு, $a=2$, $b=-1$, $c=-1$

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2};\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

(i) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

தேவையான சமன்பாடு, $x^2$ –(மூலங்களின் கூடுதல்)$x$ + (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்)$=0$

$x^2-(-1)x-2=0$ இதிலிருந்து $x^2+x-2=0$.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $(\alpha^2\beta)\times(\beta^2\alpha)=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

தேவையான சமன்பாடு, $x^2-$(மூலங்களின் கூடுதல்)$x+$(மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் )$=0$

$x^2-\left(-\frac{1}{4}\right)x-\frac{1}{8}=0$ இதிலிருந்து $8x^2+2x-1=0$.

(iii) $2\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$

மூலங்களின் கூடுதல் $2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3(\alpha+\beta)=3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $=(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)=4\alpha\beta+2\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta$

$$=5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)=5\alpha\beta+2\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$$

$$=5\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left[\frac{1}{4}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

தேவையான சமன்பாடு, $x^2-$(மூலங்களின் கூடுதல்)$x+$(மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்)$=0$

$x^2-\frac{3}{2}x+0=0$ இதிலிருந்து $2x^2-3x=0$.

## பயிற்சி 3.14

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளை $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ வாயிலாக மாற்றி எழுதுக.

   (i) $\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}$ (iii) $(3\alpha-1)(3\beta-1)$ (iv) $\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}$

2. $2x^2-7x+5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. [குறிப்பு: தீர்வு தேவையில்லை]

   (i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}$

3. $x^2+6x-4=0$ –யின் மூலங்கள் α, β எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) $\alpha^2$ மற்றும் $\beta^2$ (ii) $\frac{2}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{2}{\beta}$ (iii) $\alpha^2\beta$ மற்றும் $\beta^2\alpha$

4. α, β என்பன $7x^2+ax+2=0$ –யின் மூலங்கள் மற்றும் $\beta-\alpha=\frac{-13}{7}$ எனில், $a$-யின் மதிப்புக் காண்க.

5. $2y^2-ay+64=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றவை போல இருமடங்கு எனில் $a$–யின் மதிப்புக் காண்க.

6. மெய்யெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட $3x^2+kx+81=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கம் எனில், $k$–யின் மதிப்புக் காண்க.

## 3.7 இருபடிச் சமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள் (Quadratic Graphs)

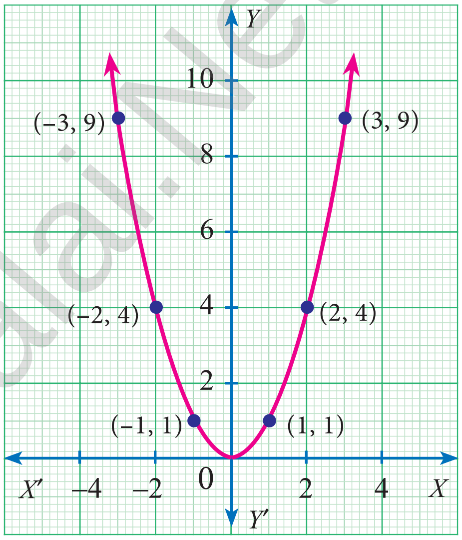
### அறிமுகம்

படம் 3.8

ஒரு பொருளை (பந்து போல) மேல் நோக்கி எறியும்போது ஏற்படும் ஒரு கோணத்திலிருந்து உருவாகும் பாதை பரவளையம் எனும் வளைவரை ஆகும். நீரூற்றிலிருந்து வெளிப்படும் தண்ணீரின் பாதை போன்றவை பரவளைய பாதையாகும். பரவளையமானது ஒரு சமன்பாட்டை குறிக்கும்.

$f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ என்பது இருபடிச் சார்புகளின் பொது வடிவம் ஆகும்.

இங்கு $a,\ b,\ c$ என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$.

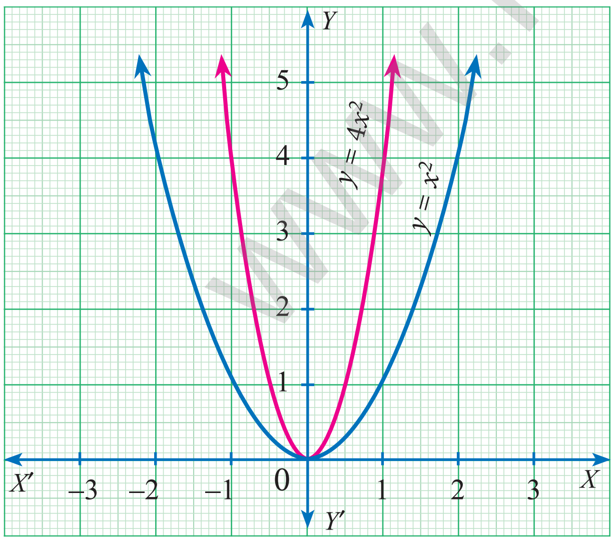



படம் 3.9

பல இருபடிச் சார்புகளின் வரைபடங்களை என்ற பரவளையத்தை அடிப்படையாக வைத்து நேர்த்தியாகக் கையால் வரைய முடியும். $y = x^2$ என்ற வளைவரையை வரையலாம். படம் 3.9 –யில் காட்டியுள்ளபடி பரவளையம் $y = x^2$ தோன்றும்.

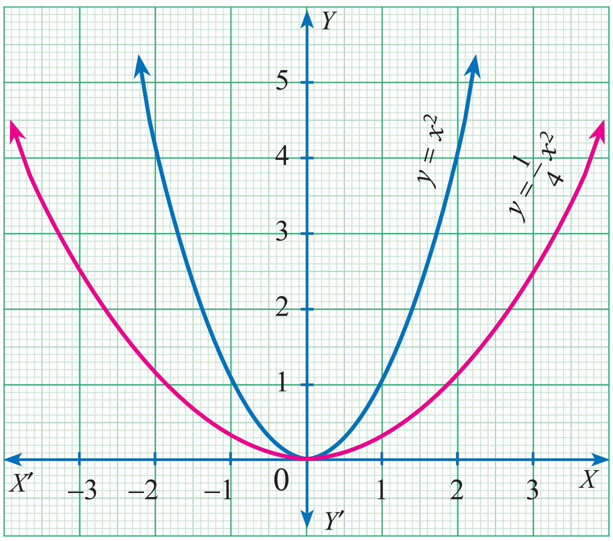
பொதுச் சமன்பாட்டின் கெழு $a$-ஐ பொறுத்துத் திறந்த பரவளையமானது மேல்நோக்கி அல்லது கீழ்நோக்கி இருக்கும். அதேபோல் $'a'$-வின் மதிப்பைக் கொண்டு பரவளையம் விரிந்துள்ளதா அல்லது குறுகியுள்ளதா (அகலத்தை) என முடிவு செய்யலாம். அனைத்துப் பரவளையங்களுமே அடிப்படையில் “$\cup$” என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழு அதிகமாக இருந்தால் பரவளையம் குறுகியதாக இருக்கும். இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழு சிறியதாக இருந்தால் பரவளையம் விரிந்து காணப்படும்.




படம் 3.10

$y = 1x^2$ என்ற வரைபடம் $y = 4x^2$ என்ற வரைபடத்தை விட அகலமாக உள்ளது.




படம் 3.11

$y = 1x^2$ என்ற வரைபடம் $y = \frac{1}{4}x^2$ என்ற வரைபடத்தை விட குறுகியதாக உள்ளது.

ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டினைப் பொறுத்துப் பரவளையம் சமச்சீராக இருக்கும் அக்கோடு 'சமச்சீர் அச்சுக்கோடு' எனப்படும். பரவளையமும் சமச்சீர் அச்சும் வெட்டிக்கொள்வது பரவளையத்தின் உச்சி எனப்படும். இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை வரைபடத்தில் பொருத்தும்போது ஏற்படும் வளைவரையானது "பரவளையம்" என அழைக்கப்படுகிறது.

**குறிப்பு :** ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில் அச்சுக் கோடு $x = \frac{-b}{2a}$ மற்றும் அதன் உச்சி $x = \frac{-b}{2a}$, $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, ($\Delta = b^2 - 4ac$ என்பது $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைகாட்டி) என்றவாறு அமைந்துள்ளது இங்கு, $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ இங்கு, $a, b, c \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a \neq 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என ஏற்கனவே கருத்தியலாகப் படித்து இருக்கிறோம். இந்தப் பகுதியில் வரைபடத்தின் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது எனக் கற்க இருக்கிறோம்.

### 3.7.1 இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மையை வரைபடம் வாயிலாக அறிதல் (Finding the Nature of Solution of Quadratic Equations Graphically)

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை வரைபடத்தின் மூலம் காண முதலில் $y = ax^2 + bx + c$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைய வேண்டும்.

இருபடிச் சமன்பட்டின் தீர்வானது, வரைபடம் $X$ - அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளில் உள்ள $x$ - ஆய தொலைவுகளாகும்.

பின்வரும் படிநிலைகளைக் கொண்டு வரைபட முறையில் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் காணலாம்.

(i) இருபடிச் சமன்பாட்டின் வளைவரையானது $X$ -அச்சை இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டினால் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு சமமில்லாத மெய்யெண் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(ii) இருபடிச் சமன்பாட்டின் வளைவரையானது $X$-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டால் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குச் சமமான மெய்யெண் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

(iii) இருபடிச் சமன்பாட்டின் வளைவரையானது $X$-அச்சை எந்த ஒரு புள்ளியிலும் வெட்டவில்லை எனில், கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் இல்லை.

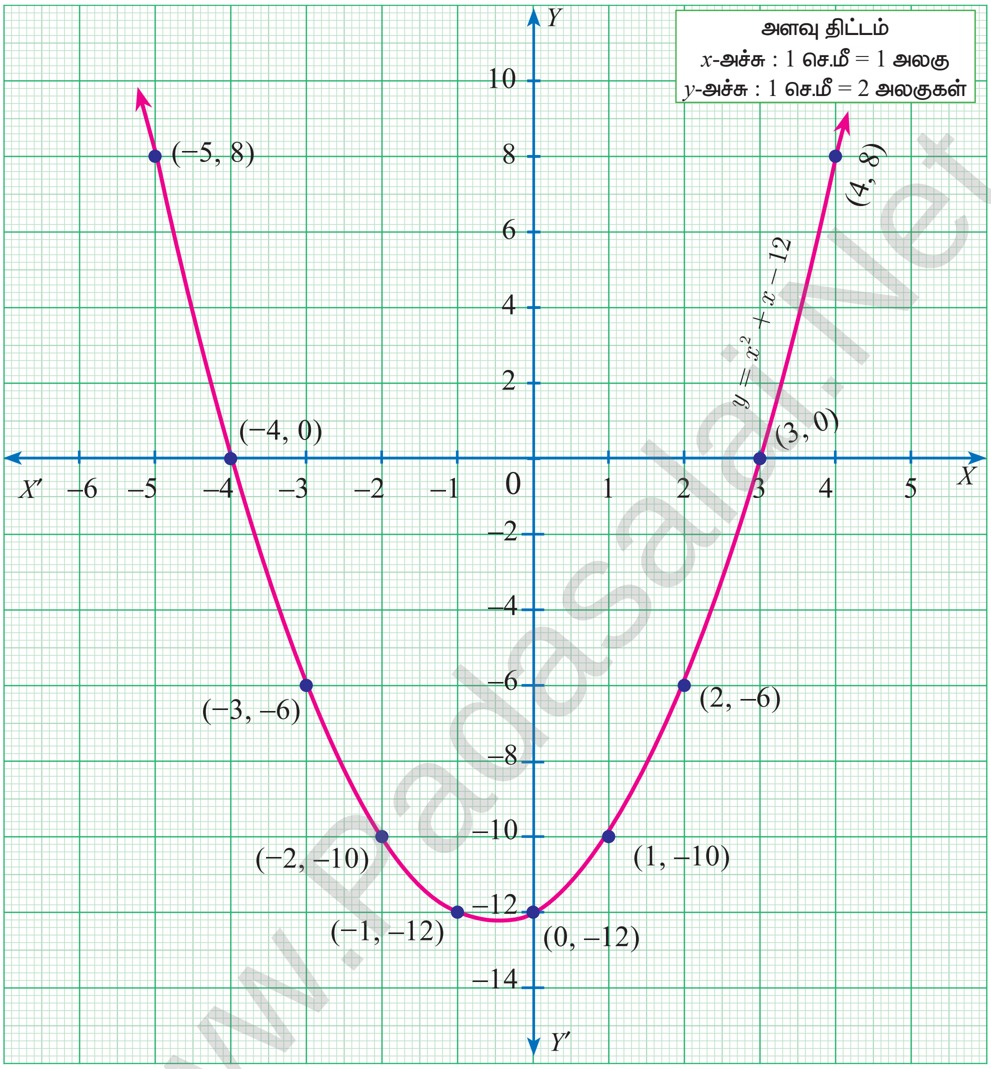
**எடுத்துக்காட்டு 3.48** பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் தன்மையை வரைபடம் மூலம் ஆராய்க. (i) $x^2 + x - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

**தீர்வு** (i) $x^2 + x - 12 = 0$

**படி 1** $y = x^2 + x - 12$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $8$ | $0$ | $-6$ | $-10$ | $-12$ | $-12$ | $-10$ | $-6$ | $0$ | $8$ |

**படி 2** $(x,\ y)$ என்ற வரிசைச் சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும்.




படம் 3.12

**படி 3** பரவளையம் வரைந்து அது $X$-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

**படி 4** பரவளையம் $X$-அச்சை $(-4,0)$ மற்றும் $(3,0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளிகளின் $x$- ஆயத் தொலைவுகள் $-4$ மற்றும் $3$ ஆகும்.

இங்கு $x^2 + x - 12 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு $X$-அச்சை இருவேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரு சமமற்ற மெய்யெண்களாக இருக்கும்.

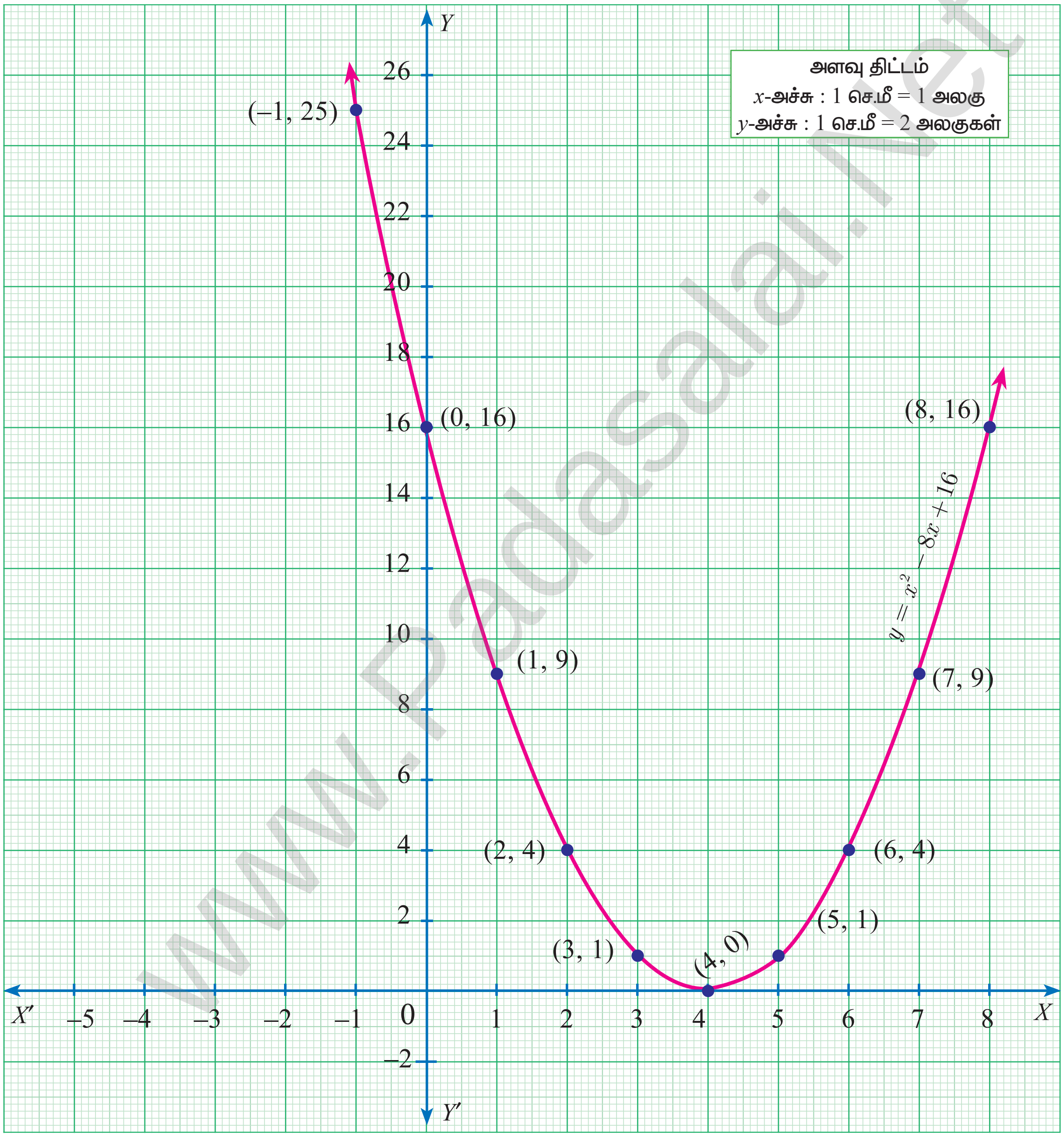
(ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

**படி 1** $y = x^2 - 8x + 16$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

**படி 2** $(x, y)$ என்ற வரிசை சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும்.

**படி 3** பரவளையம் வரைந்து அது $X$-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.




படம் 3.13

**படி 4** பரவளையம் $X$-அச்சை $(4,0)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளியின் $x$ ஆயத்தொலைவு 4.

$X$-அச்சை ஒரே புள்ளியில் வெட்டுவதால் $x^2 - 8x + 16 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மற்றும் சமமான தீர்வுகள் உண்டு.

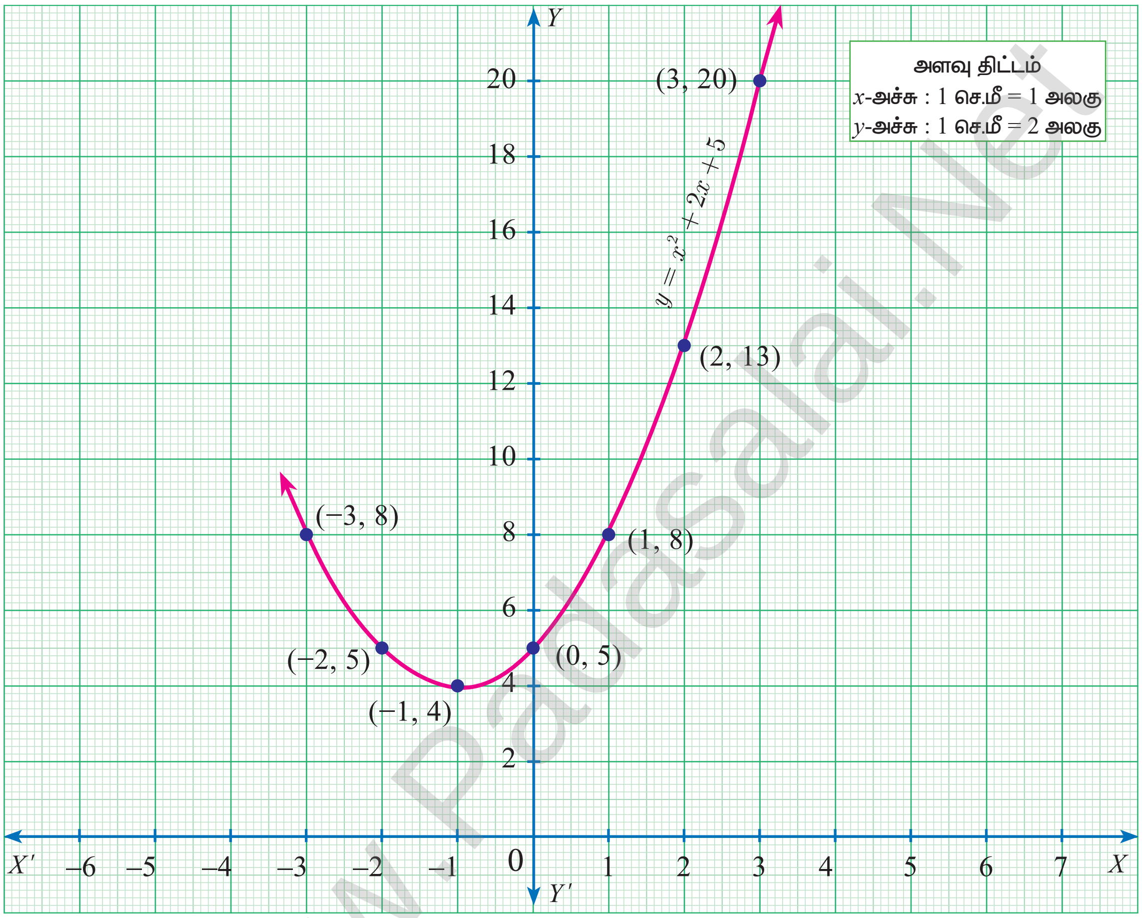
(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

$y = x^2 + 2x + 5$ என்க.

படி 1 $y = x^2 + 2x + 5$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 |

படி 2 $(x, y)$ என்ற வரிசைச் சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.



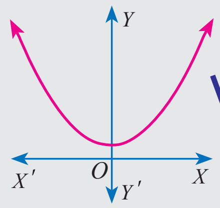
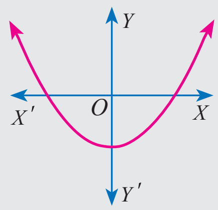
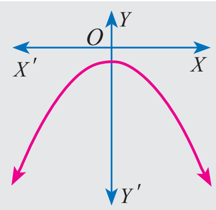
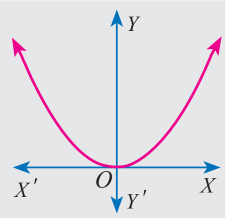
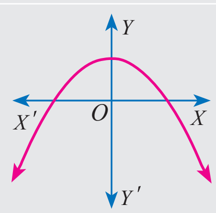
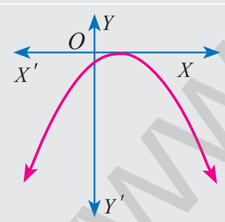

படம் 3.14

படி 3 இப்புள்ளிகளை நேர்கோடற்ற இழைவான வளைவரையில் (Smooth Curve) இணைத்துப் பெறப்பட்ட வளைவரை $y = x^2 + 2x + 5$ -ன் வரைபடம் ஆகும்.

படி 4 கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பரவளையமானது $X$-அச்சை எந்தப் புள்ளியிலும் வெட்டவில்லை/தொட்டு செல்லவில்லை. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.

### முன்னேற்றச் சோதனை

கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் $X$-அச்சை வெட்டும் போது உண்டாகும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் அதற்கு உண்டான தீர்வுகளின் தன்மையையும் இணைக்கவும்.

| வ. எண் | வரைபடங்கள் | $X$-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை | தீர்வுகளின் தன்மை |
|---|---|---|---|
| 1. |  | 2 | மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள் |
| 2. |  | 1 | மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை. |
| 3. |  | 2 | மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை |
| 4. |  | 0 | மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள் |
| 5. |  | 0 | மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள் |
| 6. |  | 1 | மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள் |



### 3.7.2 இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வெட்டுக் கோடுகளின் மூலம் காணுதல் (Solving quadratic equations through intersection of lines)

கொடுத்த பரவளையத்தை வெட்டுகின்ற பொருத்தமான நேர்கோட்டின் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணலாம்.

(i) பரவளையத்தை நேர்கோடு ஆனது இருவேறு புள்ளிகளில் வெட்டினால் அப்புள்ளிகளின் $x$ -ன் ஆயத் தொலைவுகள் அந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்.

(ii) பரவளையத்தை நேர்கோடானது ஒரே புள்ளியில் தொட்டுச் சென்றால், அப்புள்ளியின் $x$-ன் ஆயத்தொலைவு அச்சமன்பாட்டின் ஒரே ஒரு மூலம் ஆகும்.

(iii) பரவளையத்தை நேர்கோடானது வெட்டிக் கொள்ளாமல் சென்றால் அச்சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.





X_Ch 3 TM.indd 133 16-04-2019 09:51:58

**எடுத்துக்காட்டு 3.49** $y=2x^2$ என்ற வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் $2x^2-x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

**தீர்வு** படி 1 $y=2x^2$ -ன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

படி 2 $2x^2-x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு, முதலில் $y=2x^2$ -லிருந்து $2x^2-x-6=0$ ஐ கழிக்க வேண்டும்.

எனவே,
$$\begin{array}{rl} y = 2x^2 & \\ 0 = 2x^2 - x - 6 & (-) \\ \hline y = x + 6 & \\ \hline \end{array}$$

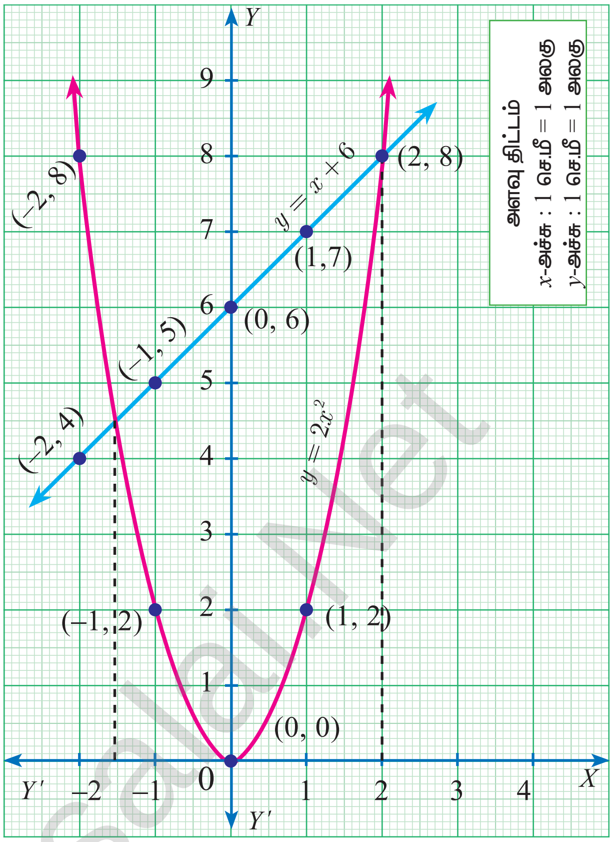
$y=x+6$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். $y=x+6$ நேர்கோட்டின் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

படி 3 $y=2x^2$ என்ற பரவளையம் மற்றும் $y=x+6$ என்ற நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் $(-1.5,4.5)$ மற்றும் $(2,8)$

படி 4 இப்புள்ளிகளின் $x$– ஆயத் தொலைவுகள் -1.5 மற்றும் 2 ஆகும்.

எனவே, சமன்பாடு $2x^2-x-6=0$ -யின் தீர்வுகள் $-1.5$ மற்றும் 2 ஆகும்.



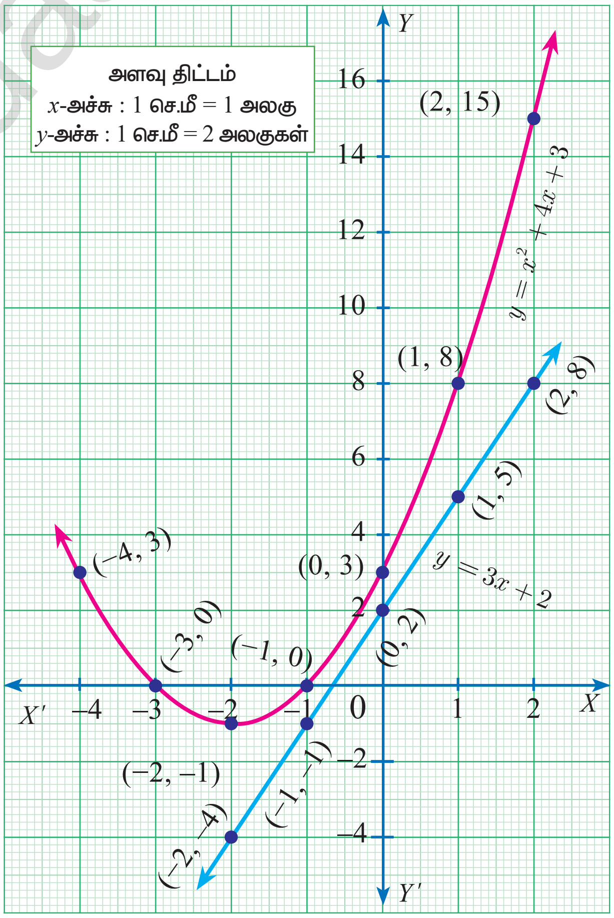

படம் 3.15

**எடுத்துக்காட்டு 3.50** $y=x^2+4x+3$ –ன் வரைபடம் வரைந்து அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2+x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

**தீர்வு**

படி 1 $y=x^2+4x+3$ –ன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 0 | $-1$ | 0 | 3 | 8 | 15 |




படம் 3.16

**படி 2** $x^2+x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு, முதலில் $y=x^2+4x+3$ -லிருந்து $x^2+x+1=0$ -ஐ கழிக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} y &= x^2+4x+3 \\ 0 &= x^2+x+1 \quad (-) \\ \hline y &= 3x+2 \end{aligned}$$

இங்கு, $y=3x+2$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். இதன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ | $8$ |

**படி 3** $y=3x+2$ என்ற நேர்கோட்டின் வரைபடம் $y=x^2+4x+3$ என்ற பரவளையத்தை எந்த ஒரு புள்ளியிலும் வெட்டாமல்/தொடாமல் செல்கிறது.

எனவே, $x^2+x+1=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் இல்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 3.51** $y=x^2+x-2$ –ன் வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் $x^2+x-2=0$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கவும்.

**தீர்வு**

**படி 1** $y=x^2+x-2$ –ன் வரைபடம் வரைவதற்குக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணை மதிப்புகளைத் தயார் செய்க.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $0$ | $-2$ | $-2$ | $0$ | $4$ |

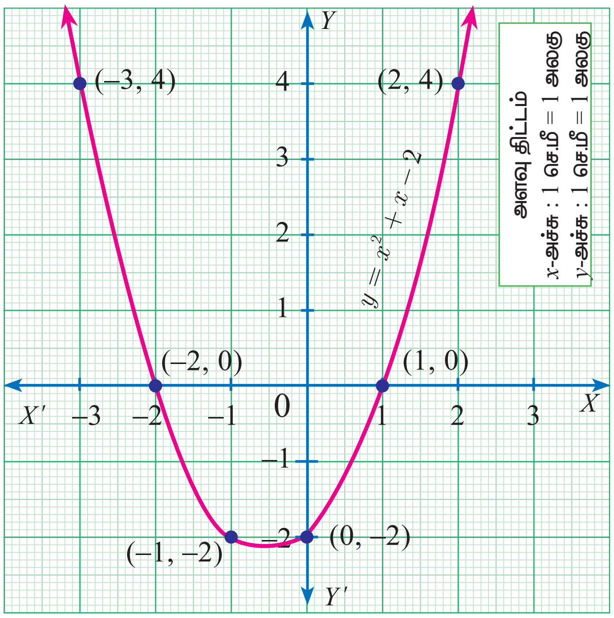
**படி 2** $x^2+x-2=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்பதற்கு, $y=x^2+x-2$ -யிலிருந்து $x^2+x-2=0$ -ஐ கழிக்க வேண்டும்.

எனவே
$$\begin{aligned} y &= x^2+x-2 \\ 0 &= x^2+x-2 \quad (-) \\ \hline y &= 0 \end{aligned}$$

இங்கு, $y=0$ என்பது $X$-அச்சு ஆகும்.

**படி 3** $x^2+x-2$ என்ற பரவளையம் $X$-அச்சை $(-2,0)$ மற்றும் $(1,0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

**படி 4** இப்புள்ளிகளின் $x$-ஆயத்தொலைவுகள் -2 மற்றும் 1 ஆகும். எனவே, சமன்பாடு $x^2+x-2=0$-ன் தீர்வுகள் $-2$ மற்றும் $1$.



படம் 3.17

**எடுத்துக்காட்டு 3.52** $y = x^2 - 4x + 3$-யின் வரைபடம் வரைந்து அதன்மூலம் $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

**தீர்வு**

**படி 1** $y = x^2 - 4x + 3$-யின் வரைபடம் வரைவதற்குக் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 15 | 8 | 3 | 0 | $-1$ | 0 | 3 |

**படி 2** $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்பதற்கு, $y = x^2 - 4x + 3$ –லிருந்து $x^2 - 6x + 9 = 0$ –ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

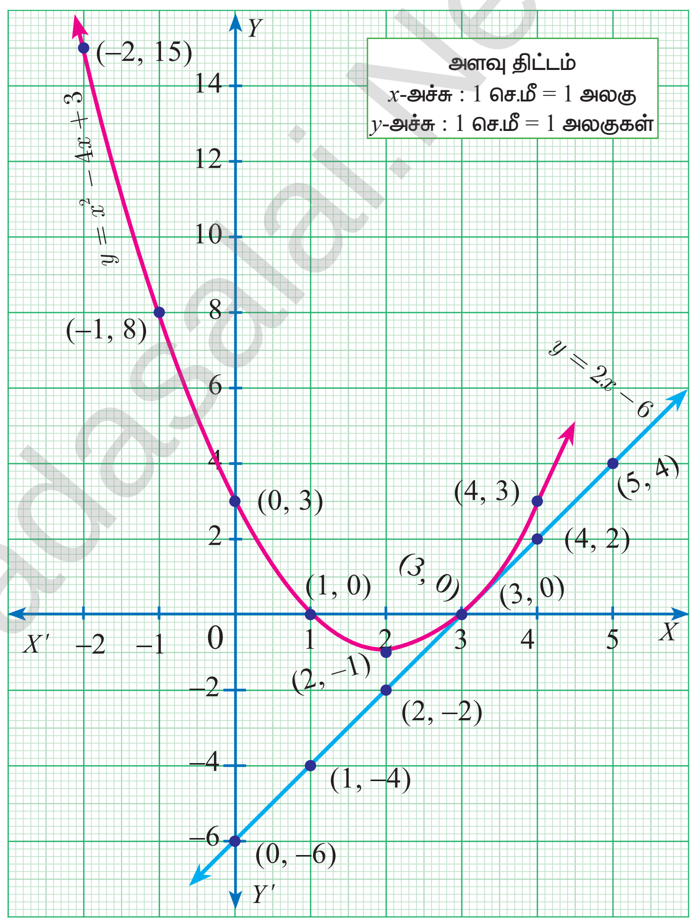
எனவே
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 \\ 0 &= x^2 - 6x + 9 \quad (-) \\ y &= \quad 2x - 6 \end{aligned}$$

$y = 2x - 6$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். $y = 2x - 6$ –யின் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |

$y = 2x - 6$ என்ற பரவளையமும் $y = x^2 - 4x + 3$ என்ற நேர்கோடும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

**படி 3** $y = x^2 - 4x + 3$ என்ற பரவளையமும் $y = 2x - 6$ என்ற நேர்கோடும் $(3,0)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகின்றன. எனவே, இதன் $x$ ஆயத் தொலைவு 3 என்பதே $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.




படம் 3.18

**பயிற்சி 3.15**

1. கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக. அவற்றின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் கூறுக.

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 7 = 0$

(iv) $x^2 - 9 = 0$ (v) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (vi) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

2. $y = x^2 - 4$ வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
3. $y = x^2 + x$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
4. $y = x^2 + 3x + 2$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
5. $y = x^2 + 3x - 4$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
6. $y = x^2 - 5x - 6$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 5x - 14 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
7. $y = 2x^2 - 3x - 5$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $2x^2 - 4x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
8. $y = (x-1)(x+3)$ –யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

## 3.8 அணிகள் (Matrices)

### அறிமுகம்

பின்வரும் தகவலைக் கருதுவோம். வனிதா என்பவர் 12 கதை புத்தகங்கள், 20 நோட்டுப் புத்தகங்கள் மற்றும் 4 பென்சில்களும், இராதா என்பவர் 27 கதை புத்தகங்கள், 17 நோட்டுப் புத்தகங்கள் மற்றும் 6 பென்சில்களும், கோகுல் என்பவர் 7 கதை புத்தகங்கள், 11 நோட்டுப் புத்தகங்கள் மற்றும் 4 பென்சில்களும், கீதா என்பவர் 10 கதை புத்தகங்கள், 12 நோட்டுப் புத்தகங்கள் மற்றும் 5 பென்சில்களும் வைத்திருக்கிறார்கள்.

| விவரம் | கதை புத்தகங்கள் | நோட்டுப் புத்தகங்கள் | பென்சில் |
|---|---|---|---|
| வனிதா | 12 | 20 | 4 |
| ராதா | 27 | 17 | 6 |
| கோகுல் | 7 | 11 | 4 |
| கீதா | 10 | 12 | 5 |

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணை தயார் செய்வோம்.

$$\begin{array}{l} \text{முதல் நிரை} \\ \text{இரண்டாம் நிரை} \\ \text{மூன்றாம் நிரை} \\ \text{நான்காம் நிரை} \end{array} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ 27 & 17 & 6 \\ 7 & 11 & 4 \\ 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

முதல் நிரல்    இரண்டாம் நிரல்    மூன்றாம் நிரல்

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு நபர்களின் பொருள்கள் நான்கு கிடைமட்டத்திலும், மூன்று செங்குத்து மட்டத்திலும் குறிக்கப்பட்டு ஒரு செவ்வக வடிவத்தில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைமட்டத்தில் உள்ள உறுப்புகள் நிரை என்றும் செங்குத்து மட்டத்தில் உள்ள உறுப்புகள் நிரல் என்றும் அழைக்கப்படும். இந்தச் செவ்வக வடிவ அமைப்புக்கு 'அணி' என்று பெயர். பொதுவாகப் பொருள்களைச் செவ்வக வடிவத்தில் அமைத்தால் கிடைப்பதை அணி என அழைக்கிறோம்.

அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்பத் துறைகளில் அணிகளின் பயன்பாடு பெரும் பங்கு வகிக்கின்றது. மின்கலத்தில் மின்சார வெளிப்பாடு கணக்கீட்டு முறை, மின்னாற்றலிலிருந்து மற்ற வகையான ஆற்றல் பெறப்படுவதற்கும் அணிகள் உதவுகின்றன.

கணினித் துறை பயன்பாட்டில் முப்பரிமாணப் படம் இருபரிமாண திரையில் காட்டப்படும்போது உண்மையை ஒத்த நகரும் படங்களை உருவாக்குவதிலும் அணிகள் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன. கிராஃப்பிக்ஸ் வடிவமைப்பில் ஒளிப்படங்களைப் பெறுவதற்கு நேரிய உருமாற்றங்கள் பயன்படுகின்றன. இந்த நேரிய உருமாற்றத்தை அணிகள் மூலம் வெளிப்படுத்தலாம்.

குழுக் குறியீட்டு முறைகளில் அணிகளின் பயன்பாடு அதிகளவில் காணப்படுகிறது. ஒரு செய்தியை இரகசியச் செய்தியாக மாற்றுவதற்கும் (encryption), மூலச் செய்தியைப் பெறுவதற்கும் (decryption) அணிகளின் பெருக்கல் மற்றும் நேர்மாறல் கருத்துகள் தேவைப்படுகின்றன. மிக நீளமான செய்தி பரிமாற்றங்களை எளிமையாக்க அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. நிலவியலில் நில அதிர்வு கணக்கீடுகளுக்கு அணிகள் பயன்படுகின்றன. இயந்திரவியல் ரோபோ செயல்படும் விதத்தைக் கண்டறிய அணிகள் பயன்படுகின்றன.

**வரையறை**

செவ்வக அடுக்கு அமைப்பை 'அணி' எனக் கூறுகிறோம். கிடைமட்டத்தில் உள்ள அடுக்கு 'நிரை' என்றும் செங்குத்து மட்டத்தில் உள்ள அடுக்கு 'நிரல்' என்றும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு, $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ என்பது ஓர் அணி ஆகும்.

$A, B, C, X, Y, \ldots$ என்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகள் அணிகளையும் $a, b, c, l, m, n, a_{12}, a_{13}, \ldots$ என்பன அணிகளின் உறுப்புகளையும் குறிக்கும்.

அணிகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1+x & x^3 & \sin x \\ \cos x & 2 & \tan x \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3+1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1.5 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & 13 & \frac{-7}{9} \end{pmatrix}$

### 3.8.1 அணியின் வரிசை (Order of a Matrix)

$A$ என்ற ஓர் அணியில் $m$ நிரைகளும், $n$ நிரல்களும் இருப்பின் அணி $A$-ன் வரிசை (நிரைகளின் எண்ணிக்கை) $\times$ (நிரல்களின் எண்ணிக்கை) ஆகும். இதனை $m \times n$ என எழுதலாம். இங்கு $m \times n$ என்பது $m, n$ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் அல்ல.

பொதுவாக $m$ நிரல்களும் $n$ நிரல்களும் (வரிசை $m \times n$) உடைய $A$ என்ற அணியைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

இங்கு, $a_{11}, a_{12}, \ldots$ என்பன அணியின் உறுப்புகள் ஆகும். $a_{11}$ என்பது அணியின் முதலாவது நிரை மற்றும் முதலாவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பாகும். $a_{12}$ என்பது அணியின் முதலாவது நிரை மற்றும் இரண்டாவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பாகும். இவற்றைப் போலவே மற்ற உறுப்புகளை எழுதலாம்.

பொதுவாக, $a_{ij}$ என்பது $i$ ஆவது நிரை மற்றும் $j$ ஆவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பாகும்.

இதனைக் கொண்டு $A$ அணியை $A = (a_{ij})_{m\times n}$ என்று எழுதலாம். இங்கு $i = 1, 2, \ldots. m$ மற்றும் $j = 1, 2, \ldots n$.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ is $mn$ என்ற அணியின் மொத்த உறுப்புகள் $mn$ ஆகும்.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் இரண்டாவது நிரை மற்றும் மூன்றாவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு எது?

2. $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \tan\theta \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் வரிசை என்ன?

3. கீழுள்ள அணியில் $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ என்பவை குறிக்கும் மதிப்புகளை எழுதுக.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & -4 & \sqrt{7} \\ 3 & \frac{5}{2} & 8 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

### குறிப்பு

➤ அணியின் வரிசையைக் குறிப்பிடும்போது, முதலில் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் அதனைத் தொடர்ந்து நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

| வ. எண் | அணிகள் | அணியில் உள்ள உறுப்புகள் | அணியின் வரிசை |
|---|---|---|---|
| 1. | $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ | $a_{11} = \sin\theta$, $a_{12} = -\cos\theta$, $a_{21} = \cos\theta$, $a_{22} = \sin\theta$ | $2\times2$ |
| 2. | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$ | $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = \sqrt{2}$, $a_{22} = 5$, $a_{31} = \frac{1}{2}$, $a_{32} = -4$ | $3\times2$ |

## செயல்பாடு 4

(i) ஒரு நாள்காட்டியில் எதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட வருடத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட மாதத்தை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

(ii) நாள்காட்டி அட்டையில் நாள்களைக் கொண்டு அணிகளை அமைக்கவும்.

(iii) கீழ்க்கண்ட வரிசையுடைய அனைத்து அணிகளையும் அமைக்கவும். $2\times2$, $3\times2$, $2\times3$, $3\times3$, $4\times3$.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட நாள்காட்டி அட்டையிலிருந்து மிகப் பெரிய வரிசையுடைய அணியைக் கண்டுபிடி.

(v) நடைமுறை வாழ்வில் உள்ள தகவல்களைக் கையாள்வதில் அணிகள் எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதைக் குறிப்பிடுக.

### 3.8.2 அணிகளின் வகைகள் (Types of Matrices)

இப்பகுதியில், அணிகளின் வகைகள் சிலவற்றை வரையறை செய்வோம்.

#### 1. நிரை அணி (Row Matrix)

ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரையும், பல நிரல்களும் இருந்தால் அவ்வணி நிரை அணி எனப்படும். நிரை அணியை நிரை வெக்டர் (row vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = (8 \quad 9 \quad 4 \quad 3)$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ என்பன முறையே $1 \times 4$ மற்றும் $1 \times 3$ வரிசையுடைய நிரை அணிகள் ஆகும்.

பொதுவாக, $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n})$ என்பது $1 \times n$ வரிசையில் உள்ள நிரை அணி ஆகும்.

#### 2. நிரல் அணி (Column Matrix)

ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரலும், பல நிரைகளும் இருந்தால் அவ்வணி 'நிரல் அணி' எனப்படும் இதனை நிரல் வெக்டர் (column vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 7 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}$ என்பன $3 \times 1$, $2 \times 1$ மற்றும் $4 \times 1$ வரிசையுடைய நிரல் அணிகள் ஆகும்.

பொதுவாக, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ என்பது $m \times 1$ வரிசையுடைய நிரல் அணி ஆகும்..

#### 3. சதுர அணி (Square Matrix)

ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையானது நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி சதுர அணி எனப்படும். $m = n$ எனில், $A = (a_{ij})_{m \times n}$ என்பது சதுர அணியைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3}$ என்பன சதுர அணிகள் ஆகும்.

பொதுவாக, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ என்பன $2 \times 2$ மற்றும் $3 \times 3$ வரிசையுடைய சதுர அணிகள் ஆகும். $A = (a_{ij})_{m \times m}$ என்பது $m$ வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி ஆகும்.

**வரையறை :** ஒரு சதுர அணியில், $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, . . . என்பன சதுர அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் எனப்படும். இவை $a_{ij}\,(i{=}j)$, என்ற அமைப்பில் இருக்கும் உறுப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியில் $1$ மற்றும் $5$ என்பன முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளாகும்.

### 4. மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலை விட்டத்திற்கு மேலேயும் கீழேயும் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில் அந்த அணி மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

அதாவது, ஒரு சதுர அணி $A=(a_{ij})$ மூலைவிட்ட அணி எனில், $a_{ij}=0,\ i\neq j$ என இருக்கவேண்டும். சில மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூச்சியங்களாக இருக்கலாம், ஆனால் அனைத்தும் பூச்சியமாக இருக்கக்கூடாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-3&0\\0&0&11\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ என்பன மூலைவிட்ட அணிகள் ஆகும்.

### 5. திசையிலி அணி (Scalar Matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருப்பின் அந்த அணி திசையிலி அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ என்பன திசையிலி அணிகள் ஆகும்.

பொதுவாக, $A=(a_{ij})_{m\times m}$ ஒரு திசையிலி அணி எனில்,

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j \text{ எனும்போது}\\ k & i=j \text{ எனும்போது}\end{cases}$$

இங்கு $k$ என்பது ஒரு மாறிலி ஆகும்.

### 6. சமனி (அல்லது) அலகு அணி Identity (or) Unit Matrix

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் $1$ ஆகவும் மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும்.

பொதுவாக, சதுர அணி $A=(a_{ij})$ என்பது ஓர் அலகு அணி எனில், $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \text{ எனும்போது}\\ 0 & i\neq j \text{ எனும்போது}\end{cases}$

$n$ வரிசையுடைய அலகு அணியை $I_n$ எனக் குறிக்கலாம்.

$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ என்பன முறையே $2$ மற்றும் $3$ வரிசையுடைய அலகு அணிகள் ஆகும்.

### 7. பூச்சிய அணி (அல்லது) வெற்று அணி (Zero matrix (or) Null matrix)

ஓர் அணியிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $(0),\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ என்பன முறையே $1\times1,\ 2\times2$ மற்றும் $3\times3$ என வேறுபட்ட வரிசையுடைய பூச்சிய அணிகள் ஆகும். $n\times n$ வரிசையுடைய பூச்சிய அணியை $O_n$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ என்பது $2\times3$ வரிசையுடைய பூச்சிய அணி ஆகும்.

### 8. நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix)

$A$ என்ற அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றக் கிடைக்கும் அணி A–யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். A–யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியை $A^T$ ($A$ அணியின் திருப்பான்) எனக் குறிப்பிடலாம்.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ எனில், $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & 7 \\ -1 & 9 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ எனில், $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

அணி $A$ –யின் வரிசை $m \times n$ எனில், $A^T$ –யின் வரிசை $n \times m$ ஆகும்.

$(A^T)^T = A$ எனக் கிடைக்கும்.

### 9. முக்கோண அணி (Triangular Matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலே உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி கீழ்முக்கோண அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூச்சியமாக இருந்தால் அந்த அணி மேல் முக்கோண அணி எனப்படும்.

**வரையறை :** ஒரு சதுர அணி $A = (a_{ij})_{n\times n}$ –யில், $i > j$ எனும்போது, $a_{ij} = 0$ எனில், அது மேல் முக்கோண அணி என்றும் $i < j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில், அது கீழ் முக்கோண அணி என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ என்பது மேல் முக்கோண அணி மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது கீழ் முக்கோண அணி ஆகும்.

### சம அணிகள் (Equal Matrices)

அணிகள் $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் மற்றும் $A$–யில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் $B$–யில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுக்குச் சமம் எனில், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை சம அணிகள் எனப்படும். அதாவது, அனைத்து $i, j$-களுக்கு $a_{ij} = b_{ij}$.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1^2 + 2^2 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} & 2 + \sec^2\theta - \tan^2\theta \end{pmatrix}$ எனில், $A$ மற்றும் $B$ ஒரே வரிசை கொண்டும் அனைத்து $i, j$-களுக்கு $a_{ij} = b_{ij}$ ஆகவும் உள்ளது.

ஆகவே $A$ மற்றும் $B$ என்பன சம அணிகள் ஆகும்.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. ஒரு நிரல் அணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை ________
2. ஒரு நிரை அணியில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை ________
3. எந்தவோர் அலகு அணியிலும் மூலைவிட்டத்திலில்லாத உறுப்புகள் ________ ஆகும்.
4. 32 உறுப்புகளைக் கொண்ட சதுர அணி இருக்க முடியுமா?

### எதிர் அணி (The negative of a matrix)

அணி $-A_{m\times n}$ –யின் எதிர் அணி $A_{m\times n}$ என்றவாறு அமையும். $-A$ என்ற அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் $A$ –வில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளின் கூட்டல் நேர்மாறல்களாக இருக்கும்.

$k$ என்ற எண்ணின் கூட்டல் நேர்மாறல் $-k$ ஆகும். அதாவது $-A$ -யின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $A$-யின் ஒத்த உறுப்புகளின் கூட்டல் நேர்மாறாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 9\\ 5 & -3 & -1\end{pmatrix}_{2\times 3}$ எனில், $-A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -9\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.53** I, II, III என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகளில் பணி புரியும் ஆண்கள், பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| தொழிற்சாலை | ஆண்கள் | பெண்கள் |
|---|---|---|
| I | 23 | 18 |
| II | 47 | 36 |
| III | 15 | 16 |

மேற்கண்ட தகவலை ஓர் அணி அமைப்பில் எழுதுக. இதில் இரண்டாவது நிரை மற்றும் முதலாவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பு எதனைக் குறிக்கிறது?

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு $3\times 2$ என்ற வரிசை கொண்ட அணியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A=\begin{pmatrix}23 & 18\\ 47 & 36\\ 15 & 16\end{pmatrix}$$

இரண்டாவது நிரை மற்றும் முதல் நிரல் இடத்தில் உள்ள உறுப்பானது II–வது தொழிற்சாலையில் 47 ஆண்கள் பணிபுரியும் விவரத்தைக் குறிக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 3.54** ஓர் அணியானது 16 உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அந்த அணிக்கு எத்தனை விதமான வரிசைகள் இருக்கும்?

**தீர்வு** ஓர் அணியின் வரிசை $m\times n$ எனில், அதற்கு $mn$ உறுப்புகள் இருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும். 16 உறுப்புகளைக் கொண்ட அணிக்கு இருக்கக்கூடிய அனைத்து வரிசைகளையும் காண்போம்.

நிரை, நிரலைப் பெருக்கினால் 16 கிடைக்கக்கூடிய இயல் எண்களின் சோடிகளைக் காண வேண்டும். அந்த விதமான வரிசைச் சோடிகள் (1,16), (16,1), (4,4), (8,2), (2,8)

எனவே, நமக்குக் கிடைக்கும் அணியின் வரிசைகள் $1\times 16$, $16\times 1$, $4\times 4$, $2\times 8$, $8\times 2$

**செயல்பாடு 5**

| எண் | உறுப்புகள் | அணிகளின் வரிசைகள் | அணிகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|---|---|
| 1. | 4 | | 3 |
| 2. | | $1\times 9$, $9\times 1$, $3\times 3$ | |
| 3. | 20 | | |
| 4. | 8 | | 4 |
| 5. | 1 | | |
| 6. | 100 | | |
| 7. | | $1\times 10$, $10\times 1$, $2\times 5$, $5\times 2$ | |

இரண்டாவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கும் நான்காவது நிரலில் உள்ள அணிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காணமுடிகிறதா? ஆம் எனில், விடுபட்ட கட்டங்களை நிரப்புக.

**எடுத்துக்காட்டு 3.55** $a_{ij} = i^2 j^2$ என்ற அமைப்பைக் கொண்ட $3\times 3$ வரிசையுடைய அணியைக் காண்க.

**தீர்வு** $3\times3$ வரிசையுடைய அணியின் பொது வடிவம் $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $a_{ij} = i^2 j^2$

$$a_{11} = 1^2\times1^2 = 1\times1 = 1; \quad a_{12} = 1^2\times2^2 = 1\times4 = 4; \quad a_{13} = 1^2\times3^2 = 1\times9 = 9;$$
$$a_{21} = 2^2\times1^2 = 4\times1 = 4; \quad a_{22} = 2^2\times2^2 = 4\times4 = 16; \quad a_{23} = 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$$
$$a_{31} = 3^2\times1^2 = 9\times1 = 9; \quad a_{32} = 3^2\times2^2 = 9\times4 = 36; \quad a_{33} = 3^2\times3^2 = 9\times9 = 81$$

எனவே, தேவையான அணி $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.56** $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணி சமன்பாட்டிலிருந்து $a,\ b,\ c,\ d$ மதிப்புகளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட அணிகள் சமம். எனவே ஒத்த உறுப்புகள் சமம்.

ஆகையால்,
$$a-b = 1 \qquad \ldots(1)$$
$$2a+c = 5 \qquad \ldots(2)$$
$$2a-b = 0 \qquad \ldots(3)$$
$$3c+d = 2 \qquad \ldots(4)$$

(3) -லிருந்து நாம் பெறுவது $2a-b = 0$

$$2a = b \qquad \ldots(5)$$

$2a = b$ என்பதை (1) –யில் பிரதியிட, $a-2a = 1$ இதிலிருந்து, $a = -1$

$a = -1$ என்பதை (5) –யில் பிரதியிட, $2(-1) = b$ இதிலிருந்து, $b = -2$

$a = -1$ என்பதை (2) –யில் பிரதியிட, $2(-1)+c = 5$ இதிலிருந்து, $c = 7$

$c = 7$ என்பதை (4) –யில் பிரதியிட, $3(7)+d = 2$ இதிலிருந்து, $d = -19$

எனவே, $a = -1, b = -2, c = 7, d = -19$

## பயிற்சி 3.16

1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியில் (i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(iii) $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$ ஆகிய உறுப்புகளை எழுதுக.

2. 18 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்? ஓர் அணியின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 6 எனில், எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

3. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு $3\times 3$ வரிசையைக் கொண்ட அணி A = $[a_{ij}]$ –யினைக் காண்க.

(i) $a_{ij} = |i-2j|$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{(i+j)^3}{3}$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $A$–யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ எனில், $-A$–யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $(A^T)^T = A$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

7. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் இருந்து $x$, $y$ மற்றும் $z$ –யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

### 3.8.3 அணிகளின் மீதான செயல்கள் (Operations on Matrices)

இப்பகுதியில் அணிகளின் கூடுதல், அணிகளின் கழித்தல், ஓர் அணியை ஒரு திசையிலியால் பெருக்குதல் மற்றும் அணிகளின் பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

#### அணிகளின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தல் (Addition and subtraction of matrices)

ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ முடியும். இரு அணிகளைக் கூட்டுவதற்கோ அல்லது கழிப்பதற்கோ அந்த அணிகளில் இருக்கின்ற ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,2, \ldots m$, $j = 1,2, \ldots n$ எனில், $C = A + B$ ஆகும்.

இங்கு, $C=(c_{ij})$ மேலும், $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ அனைத்து $i=1,2,\ldots m$ மற்றும் $j=1,2,\ldots n$ மதிப்புகளுக்குமாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.57** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&0\\1&3&1\\2&4&0\end{pmatrix}$ எனில், $A+B$ –ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&7&0\\1&3&1\\2&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&2+7&3+0\\4+1&5+3&6+1\\7+2&8+4&9+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&3\\5&8&7\\9&12&9\end{pmatrix}$

**எடுத்துக்காட்டு 3.58** குழு $1$, குழு $2$, குழு $3$ எனும் மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்களுக்கு இரண்டு தேர்வுகள் நடத்தப்பட்டுத் தமிழ், ஆங்கிலம், அறிவியல், மற்றும் கணிதம் ஆகிய பாடங்களில் அவர்கள் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களை $A$ மற்றும் $B$ என்ற அணிகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்கள், இரண்டு தேர்வுகளிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களைக் காண்க.

$$A\quad \begin{array}{c} \\ \text{குழு } 1\\ \text{குழு } 2\\ \text{குழு } 3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{தமிழ்}&\text{ஆங்கிலம்}&\text{அறிவியல்}&\text{கணிதம்}\end{array}\\ \begin{pmatrix}22&15&14&23\\50&62&21&30\\53&80&32&40\end{pmatrix}\end{array}$$

$$B\quad \begin{array}{c} \\ \text{குழு } 1\\ \text{குழு } 2\\ \text{குழு } 3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{தமிழ்}&\text{ஆங்கிலம்}&\text{அறிவியல்}&\text{கணிதம்}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20&38&15&40\\18&12&17&80\\81&47&52&18\end{pmatrix}\end{array}$$

**தீர்வு** மூன்று குழுவில் உள்ளவர்கள் இரண்டு தேர்வுகளிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களின் கூடுதலை அணி மூலம் எழுதினால்,

$$A+B=\begin{pmatrix}22+20&15+38&14+15&23+40\\50+18&62+12&21+17&30+80\\53+81&80+47&32+52&40+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42&53&29&63\\68&74&38&110\\134&127&84&58\end{pmatrix}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.59** $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\5&-4&6\\-3&2&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&8\\3&4\\9&6\end{pmatrix}$ எனில், $A+B$ –ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $A$ மற்றும் $B$ என்ற அணிகள் வேறுபட்ட வரிசைகளைக் கொண்டிருப்பதால் இவைகளைக் கூட்ட இயலாது.

## அணியைத் திசையிலியால் பெருக்குதல் (Multiplication of Matrix by a Scalar)

கொடுக்கப்பட்ட $A$ என்ற அணியின் உறுப்புகளைப் பூச்சியமற்ற $k$ என்ற எண்ணால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய அணி $kA$ ஆகும். இதன் உறுப்புகள் அனைத்தும் $k$ ஆல் பெருக்கப்பட்டிருக்கும். $kA$ என்பது $A$–யின் திசையிலி அணி பெருக்கல் எனப்படும்.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ எனில், $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$, அனைத்து $i = 1,2,\ldots,m$ , $j = 1,2,\ldots,n$ மதிப்புகளுக்குமாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.60** $A=\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$ எனில், $2A+B$ –ஐக் காண்க.

**தீர்வு** அணி $A$–யும் அணி $B$–யும் $3\times 3$ எனும் ஒரே வரிசை உடையதால் $2A+B$ –லிருந்து வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$2A+B=2\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16 & 12\\ 2 & 6 & 18\\ -8 & 6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}18 & 27 & 9\\ 1 & 8 & 22\\ -1 & 11 & -2\end{pmatrix}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.61** $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$ எனில், $4A-3B$ –ஐக் காண்க.

**தீர்வு** அணி $A$–யும் அணி $B$–யும் $3\times 3$ எனும் ஒரே வரிசை உடையதால் $4A$ –லிருந்து $3B$ –யின் கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$4A-3B=4\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}20 & 16 & -8\\ 2 & 3 & 4\sqrt{2}\\ 4 & 36 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}21 & -12 & 9\\ -\frac{3}{4} & -\frac{21}{2} & -9\\ -15 & 18 & -27\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}41 & 4 & 1\\ \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} & 4\sqrt{2}-9\\ -11 & 54 & -11\end{pmatrix}$$

## அணி கூட்டல் மற்றும் திசையிலி பெருக்கலின் பண்புகள் (Properties of Matrix Addition and Scalar Multiplication)

$A,\ B,\ C$ என்ற அணிகளின் வரிசை $m\times n$ மற்றும் $p,\ q$ இரண்டு பூச்சியமற்ற எண்கள் என்க. இதன் மூலம் பின்வரும் பண்புகளைப் பெறலாம்.

(i) $A+B=B+A$ [அணி கூட்டல் பரிமாற்று பண்பு உடையது]

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ [அணி கூட்டல் சேர்ப்பு பண்பு உடையது]

(iii) $(pq)A = p(qA)$ [திசையிலி அணியின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது]

(iv) $IA = A$ [திசையிலி சமனிப் பண்பு. இங்கு, $I$ என்பது அலகு அணி ஆகும்]

(v) $p(A+B) = pA + pB$ [இரண்டு அணிகள் மற்றும் திசையிலியின் பங்கீட்டுப் பண்பு]

(vi) $(p+q)A = pA + qA$ [இரண்டு திசையிலி உடைய ஓர் அணியின் பங்கீட்டுப் பண்பு]

### கூட்டல் சமனி (Additive Identity)

அணி கூட்டலில் வெற்று அணி அல்லது பூச்சிய அணியானது கூட்டல் சமனியாகும்.

$A$ என்பது ஏதாவது ஓர் அணி என்க. $A + O = O + A = A$ (கூட்டல் சமனிப் பண்பு)

இங்கு, $A$ என்ற அணியும் $O$ என்ற வெற்று அணி அல்லது பூச்சிய அணியும் ஒரே வரிசையைக் கொண்டிருக்கும்.

### அணியின் கூட்டல் நேர்மாறு (Additive Inverse)

$A$ என்பது ஏதாவது கொடுக்கப்பட்ட அணி என்க.

$-A$ என்பது $A$–யின் கூட்டல் நேர்மாறு எனப்படும்.

இங்கு, $A + (-A) = (-A) + A = O$ எனக் கிடைக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 3.62** கீழ்க்கண்ட அணிச் சமன்பாட்டிலிருந்து $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

**தீர்வு**

வலப்பக்கத்தில் உள்ள இரு அணிகளையும், இடப்பக்கத்தில் உள்ள இரு அணிகளையும் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$\begin{pmatrix} d+3 & 8+a \\ 3b-2 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ b-5 & 4c \end{pmatrix}$$

இரு அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகளைச் சமன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$d + 3 = 2$ இதிலிருந்து, $d = -1$

$8 + a = 2a + 1$ இதிலிருந்து, $a = 7$

$3b - 2 = b - 5$ இதிலிருந்து, $b = \dfrac{-3}{2}$

$a = 7$ என்பதை $a - 4 = 4c$ –யில் பிரதியிடக் கிடைப்பது $c = \dfrac{3}{4}$

எனவே, $a = 7,\ b = -\dfrac{3}{2},\ c = \dfrac{3}{4},\ d = -1.$

**எடுத்துக்காட்டு 3.63** If $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -6 & -4\\ 2 & 11 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ -1 & -7 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ எனில்,

பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $3A+2B-C$ (ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B$

**தீர்வு** (i) $3A+2B-C$

$$=3\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8 & -6 & -4\\ 2 & 11 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ -1 & -7 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 24 & 9\\ 9 & 15 & 0\\ 24 & 21 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16 & -12 & -8\\ 4 & 22 & -6\\ 0 & 2 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & -3 & 0\\ 1 & 7 & -2\\ -1 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14 & 9 & 1\\ 14 & 44 & -8\\ 23 & 19 & 25\end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B=\frac{1}{2}(A-3B)$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}8 & -6 & -4\\ 2 & 11 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24 & 18 & 12\\ -6 & -33 & 9\\ 0 & -3 & -15\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23 & 26 & 15\\ -3 & -28 & 9\\ 8 & 4 & -9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{23}{2} & 13 & \frac{15}{2}\\ -\frac{3}{2} & -14 & \frac{9}{2}\\ 4 & 2 & -\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

## பயிற்சி 3.17

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 3 & 4\\ 8 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

   (i) $A+B=B+A$ (ii) $A+(-A)=(-A)+A=O$.

2. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -8\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 9 & 2\\ -7 & 1 & -1\end{pmatrix}$ மற்றும் $C=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ எனில்,

$A+(B+C)=(A+B)+C$. என்பதைச் சரிபார்க்க.

3. $X+Y=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ மற்றும் $X-Y=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ எனில், $X$ மற்றும் $Y$ ஆகிய அணிகளைக் காண்க.

4. $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 8\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.(i) $B-5A$ (ii) $3A-9B$

5. பின்வரும் அணிச் சமன்பாடுகளில் இருந்து $x$, $y$ மற்றும் $z$ –களின் மதிப்புகளைக் காண்க.if

(i) $\begin{pmatrix}x-3 & 3x-z\\ x+y+7 & x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

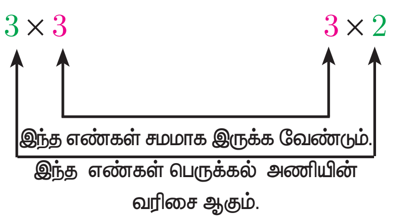
(ii) $(x \quad y-z \quad z+3)+(y \quad 4 \quad 3)=(4 \quad 8 \quad 16)$

6. $x\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$ எனில், $x$ மற்றும் $y$ –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. $x\begin{pmatrix}2x & 2\\ 3 & x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8 & 5x\\ 4 & 4x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x^2+8 & 24\\ 10 & 6x\end{pmatrix}$ என்ற அணிச் சமன்பாட்டில் $x$–ன் பூச்சியமற்ற மதிப்பைக் காண்க.

8. $x$, $y$ –ஐத் தீர்க்க. $\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 8\end{pmatrix}$

## அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Matrices)




இரு அணிகளைப் பெருக்குவதற்கு, முதல் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையானது இரண்டாவது அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

$3\times3$ மற்றும் $3\times2$ என்ற அணிகளின் பெருக்கற்பலனை எடுத்துக்கொள்க.

(இடப்பக்க அணியின் வரிசை) $\times$ (வலப்பக்க அணியின் வரிசை) $\rightarrow$ (பெருக்கற்பலன் அணியின் வரிசை).

$(3\times3) \qquad (3\times2) \qquad \rightarrow \qquad (3\times2)$

அணியின் பெருக்கல் என்பது முதல் அணியின் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு இரண்டாவது அணியின் நிரல்களைப் பெருக்கிப் பின் கூட்டவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அணியின் பெருக்கல் $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g & h & i\\ k & l & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ag+bk & ah+bl & ai+bm\\ cg+dk & ch+dl & ci+dm\\ eg+fk & eh+fl & ei+fm\end{pmatrix}$

$A$ என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் $B$ – என்ற அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் மட்டுமே அதன் பெருக்கல் அணி $AB$ –ஐக் காண முடியும்.

$A$ என்ற அணியின் வரிசை $m\times n$ மற்றும் $B$ என்ற அணியின் வரிசை $n\times p$ எனில், $AB$ என்ற அணியின் வரிசை $m\times p$ ஆகும்.

### அணி பெருக்கலின் பண்புகள் (Properties of Multiplication of Matrix)

**(a) பொதுவாக அணியின் பெருக்கல் பரிமாற்று பண்பு உடையது அல்ல.**

அணி $A$–யின் வரிசை $m \times n$ மற்றும் $B$–யின் வரிசை $n \times p$ எனில், அணியின் பெருக்கல் $AB$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆனால் அணியின் பெருக்கல் $BA$–ஐ வரையறுக்க முடியாது. அதேபோல், $AB$ மற்றும் $BA$ என்ற அணிகள் வரையறுக்கப்பட்டாலும்கூட, $AB$–யும் $BA$–யும் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. பொதுவாக, $AB \neq BA$.

**(b) அணியின் கூட்டலைப் பொறுத்து அணி பெருக்கலானது பங்கீட்டு பண்பு உடையது.**

(i) $A,\ B,\ C$ என்ற அணிகளின் வரிசைகள் $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $n \times p$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$ (வலது பங்கீட்டு விதி)

(ii) $A,\ B,\ C$ என்ற அணிகளின் வரிசைகள் $m \times n$, $m \times n$ மற்றும் $n \times p$ எனில், $(A+B)C = AC + BC$ (இடது பங்கீட்டு விதி)

**(c) அணியின் பெருக்கல் சேர்ப்பு பண்பு உடையது**

$A,\ B,\ C$ என்ற அணிகளின் வரிசைகள் $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $p \times q$ எனில், $(AB)C = A(BC)$ ஆகும்.

**(d) அணிகளின் பெருக்கலுக்கான அலகு அணி**

$A$ என்ற சதுர அணியின் வரிசை $n \times n$ மற்றும் அதே வரிசையுடைய அலகு அணி $I$ எனில், $AI = IA = A$.

**குறிப்பு**

- $x$ மற்றும் $y$ என்பன $xy = 0$ என்றவாறு இருக்கும் இரு மெய்யெண்கள் என்க. இவற்றில் $x = 0$ அல்லது $y = 0$ என இருக்கவேண்டும். ஆனால் இரண்டு அணிகளுக்கு இது உண்மையாக இருக்காது.
- $AB = 0$ எனில், $A = 0$ அல்லது $B = 0$ அல்லது $A, B = 0$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை. குறிப்பாக, இரண்டு பூச்சியமற்ற அணிகளின் பெருக்கல் பூச்சிய அணியைக் கொடுக்கலாம்.

**விளக்கம்** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

ஆனால், $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

எனவே, $A \neq 0,\ B \neq 0$ ஆனால் $AB = 0$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.64** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $AB$–ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $A$ என்ற அணியின் வரிசை $2 \times 3$ மற்றும் $B$ என்ற அணியின் வரிசை $3 \times 3$ என்பதால் $AB$–என்ற அணி வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் AB–யின் வரிசை $2 \times 3$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகள் $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&5\end{pmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{pmatrix}8&3&1\\2&4&1\\5&3&1\end{pmatrix}_{3\times 3}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8&3&1\\2&4&1\\5&3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8+4+0&3+8+0&1+2+0\\24+2+25&9+4+15&3+1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&11&3\\51&28&9\end{pmatrix}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3.65** If $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ எனில் $AB$ மற்றும் $BA$ காண்க. மேலும் $AB=BA$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு** $A$ என்ற அணியின் வரிசை $2\times 2$. $B$ என்ற அணியின் வரிசை $2\times 2$ எனவே, $2\times 2$ என்ற வரிசையுடைய $AB$ என்ற அணி வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1&0+3\\2+3&0+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\5&9\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0&2+0\\2+3&1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\5&10\end{pmatrix}$$

எனவே, $AB\neq BA$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.66** $A=\begin{pmatrix}2&-2\sqrt{2}\\\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}2&2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$ எனில், அணியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து $A$ மற்றும் $B$ என்ற அணிகளுக்குப் பரிமாற்று விதி உண்மை எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $AB=BA$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இடப்பக்கம்

$$AB=\begin{pmatrix}2&-2\sqrt{2}\\\sqrt{2}&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+4&4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\\2\sqrt{2}-2\sqrt{2}&4+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$$

வலப்பக்கம்

$$BA=\begin{pmatrix}2&2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-2\sqrt{2}\\\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+4&-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}&4+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$$

எனவே, இடப்பக்கம் = வலப்பக்கம்

அதாவது, $AB=BA$

**எடுத்துக்காட்டு 3.67** தீர்க்க $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

**தீர்வு** $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

அணியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$2x + y = 4 \quad \ldots(1)$$
$$x + 2y = 5 \quad \ldots(2)$$

$(1) -2 \times (2)$ எனில்,
$$\begin{array}{r} 2x + \phantom{4}y = \phantom{1}4 \\ 2x + 4y = 10 \\ \hline -3y = -6 \end{array} \quad (-)$$
எனில், $y = 2$

$y = 2$ என்பதை $(1)$–யில் பிரதியிட, $2x + 2 = 4$ –லிருந்து $x = 1$

எனவே, $x = 1$, $y = 2$.

> **குறிப்பு**
> - $A$, $B$ என்பன இரண்டு பூச்சியம் இல்லா இரண்டு அணிகள் எனில் $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
> - ஆனால், $AB = BA$ எனில், $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

**எடுத்துக்காட்டு 3.68** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ எனில் $(AB)C = A(BC)$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** இடப்பக்கம் $(AB)C$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1-2+2 & -1-1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}_{1\times 2} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1+8 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

வலப்பக்கம் $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1 \\ 2+2 & 4-1 \\ 1+6 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} -1-4+14 & 3-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

$(1)$ மற்றும் $(2)$ –லிருந்து, $(AB)C = A(BC)$.

**எடுத்துக்காட்டு 3.69** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ எனில், $A\left(B+C\right)=AB+AC.$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு** இடப்பக்கம் $A(B+C)$

$$B+C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-1 & 8+4\\ 6-3 & -8+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

வலப்பக்கம் $AB+AC$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 2+2\\ -1-12 & -2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7+3 & 6+2\\ 7+9 & -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}$$

எனவே, $$AB+AC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

$(1)$, $(2)$ லிருந்து, $A(B+C)=AB+AC$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 3.70** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ எனில் $(AB)^T=B^TA^T$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

**தீர்வு**

இடப்பக்கம் $(AB)^T$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times3}\times\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2+0 & -1+8+2\\ 4+1+0 & -2-4+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 5 & -4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

வலப்பக்கம் $(B^TA^T)$

$$B^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2+0 & 4+1+0\\ -1+8+2 & -2-4+2\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

$(1)$, $(2)$ –லிருந்து $(AB)^T=B^TA^T$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

## பயிற்சி 3.18

1. $A$, $B$ என்ற அணிகள் கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பின் $AB$–யின் வரிசையைக் காண்க.

| | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | (v) |
|---|---|---|---|---|---|
| **A –யின் வரிசைகள்** | 3×3 | 4×3 | 4×2 | 4×5 | 1×1 |
| **B –யின் வரிசைகள்** | 3×3 | 3×2 | 2×2 | 5×1 | 1×3 |

2. அணி $A$–யின் வரிசை $p\times q$ மற்றும் அணி $B$ –யின் வரிசை $q\times r$ இரு அணிகளையும் பெருக்க முடியும் எனில், $AB$ மற்றும் $BA$ ஆகியவற்றின் வரிசையைக் காண்க.

3. அணி $A$ –யில் '$a$' நிரைகளும் '$a+3$' நிரல்களும் மற்றும் அணி $B$ –யில் '$b$' நிரைகளும் '$17-b$' நிரல்களும் உள்ளன. பெருக்கல் அணிகள் $AB$ மற்றும் $BA$-ஐக் காண முடியும் எனில், a மற்றும் $b$ –யின் மதிப்பைக் காண்க.

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ எனில், $AB$ மற்றும் $BA$ -ஐக் காண்க. மேலும், $AB = BA$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$ –ஐச் சரிபார்க்கவும்.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ எனில், இவ்விரு அணிகளுக்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு $AB{=}BA$ உண்மை என நிறுவுக.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

   (i) $A(BC) = (AB)C$ (ii) $(A-B)C = AC - BC$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$

8. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}$ எனில், $A^2 + B^2 = I$ என நிறுவுக.

9. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ எனில், $AA^T = I$ எனக் காட்டுக.

10. $A^2 = I$ எனில், $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

11. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ எனில், $A^2-(a+d)A=(bc-ad)I_2$ என நிறுவுக.

12. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 9\\ 1 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^T = B^TA^T$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ என நிறுவுக.

பயிற்சி 3.19

PIGFC6

## பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. மூன்று மாறிகளில் அமைத்த மூன்று நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வுகள் இல்லையெனில், அத்தொகுப்பில் உள்ள தளங்கள்
   (1) ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன (2) ஒரே ஒரு கோட்டில் வெட்டுகின்றன
   (3) ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும் (4) ஒன்றையொன்று வெட்டாது

2. $x + y - 3x = -6$, $-7y + 7z = 7$, $3z = 9$ என்ற தொகுப்பின் தீர்வு
   (1) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ (2) $x = -1,\ y = 2,\ z = 3$
   (3) $x = -1,\ y = -2,\ z = 3$ (4) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

3. $x^2 - 2x - 24$ மற்றும் $x^2 - kx - 6$ –யின் மீ.பொ.வ. $(x - 6)$ எனில், $k$ –யின் மதிப்பு
   (1) 3 (2) 5 (3) 6 (4) 8

4. $\dfrac{3y-3}{y} \div \dfrac{7y-7}{3y^2}$ என்பது
   (1) $\dfrac{9y}{7}$ (2) $\dfrac{9y^3}{(21y-21)}$ (3) $\dfrac{21y^2-42y+21}{3y^3}$ (4) $\dfrac{7(y^2-2y+1)}{y^2}$

5. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது $y^2 + \dfrac{1}{y^2}$ –க்குச் சமம் இல்லை.
   (1) $\dfrac{y^4+1}{y^2}$ (2) $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ (3) $\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2 + 2$ (4) $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2 - 2$

6. $\dfrac{x}{x^2-25} - \dfrac{8}{x^2+6x+5}$ –யின் சுருங்கிய வடிவம்
   (1) $\dfrac{x^2-7x+40}{(x-5)(x+5)}$ (2) $\dfrac{x^2+7x+40}{(x-5)(x+5)(x+1)}$
   (3) $\dfrac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$ (4) $\dfrac{x^2+10}{(x^2-25)(x+1)}$

7. $\dfrac{256x^8y^4z^{10}}{25x^6y^6z^6}$ –யின் வர்க்கமூலம்
   (1) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{x^2z^4}{y^2}\right|$ (2) $16\left|\dfrac{y^2}{x^2z^4}\right|$ (3) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{y}{xz^2}\right|$ (4) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{xz^2}{y}\right|$

8. $x^4 + 64$ முழு வர்க்கமாக மாற்ற அதனுடன் பின்வருவனவற்றுள் எதைக் கூட்ட வேண்டும்?
   (1) $4x^2$ (2) $16x^2$ (3) $8x^2$ (4) $-8x^2$

9. $(2x-1)^2 = 9$ –யின் தீர்வு
   (1) $-1$ (2) $2$ (3) $-1,\ 2$ (4) இதில் எதுவும் இல்லை

10. $4x^4 - 24x^3 + 76x^2 + ax + b$ ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், $a$ மற்றும் $b$ –யின் மதிப்பு

(1) 100,120 (2) 10,12 (3) $-120$,100 (4) 12,10

11. $q^2x^2 + p^2x + r^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்கள், $qx^2 + px + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $q$, $p$, $r$ என்பன

(1) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன

(2) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன

(3) கூட்டுத் தொடர் வரிசை மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசை இரண்டிலும் உள்ளன.

(4) இதில் எதுவும் இல்லை.

12. ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் ஒரு

(1) நேர்கோடு (2) வட்டம் (3) பரவளையம் (4) அதிபரவளையம்

13. $x^2 + 4x + 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $X$ அச்சோடு வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 0 (2) 1 (3) 0 அல்லது 1 (4) 2

14. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ –க்கான நிரை நிரல் மாற்று அணியின் வரிசை

(1) $2 \times 3$ (2) $3 \times 2$ (3) $3 \times 4$ (4) $4 \times 3$

15. $A$ என்ற அணியின் வரிசை $2 \times 3$, $B$ என்ற அணியின் வரிசை $3 \times 4$ எனில், $AB$ என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

16. நிரல்கள் மற்றும் நிரைகள் சம எண்ணிக்கையில்லாத அணி

(1) மூலைவிட்ட அணி (2) செவ்வக அணி

(3) சதுர அணி (4) அலகு அணி

17. ஒரு நிரல் அணியின், நிரை நிரல் மாற்று அணி

(1) அலகு அணி (2) மூலைவிட்ட அணி

(3) நிரல் அணி (4) நிரை அணி

18. $2X + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், $X$ என்ற அணியைக் காண்க.

(1) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ஆகிய அணிகளைக் கொண்டு எவ்வகை அணிகளைக் கணக்கிட முடியும்?, (i) $A^2$ (ii) $B^2$ (iii) $AB$ (iv) $BA$

(1) (i), (ii) மட்டும் (2) (ii), (iii) மட்டும்

(3) (ii), (iv) மட்டும் (4) அனைத்தும்

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ மற்றும் $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றுள் எவை சரி? (i) $AB+C=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ (ii) $BC=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\\ -4 & 10\end{pmatrix}$

(iii) $BA+C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ (iv) $(AB)C=\begin{pmatrix}-8 & 20\\ -8 & 13\end{pmatrix}$

(1) (i) மற்றும் (ii) மட்டும் (2) (ii) மற்றும் (iii) மட்டும்

(3) (iii) மற்றும் (iv) மட்டும் (4) அனைத்தும்

## அலகுப் பயிற்சி- 3

1. தீர்க்க $\frac{1}{3}(x+y-5)=y-z=2x-11=9-(x+2z)$

2. ஒரு பள்ளியில் $A$, $B$ மற்றும் $C$ என்ற மூன்று பிரிவுகளில் $150$ மாணவர்கள் புதிதாகச் சேர்க்கப்படுகின்றனர். பிரிவு $A$ –யிலிருந்து பிரிவு $C$ –க்கு $6$ மாணவர்கள் மாற்றப்பட்டால், இரு பிரிவுகளிலும் சமமான மாணவர்கள் இருப்பர். $C$ பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் $4$ மடங்கு மற்றும் $A$ பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கை இவற்றின் வித்தியாசம் $B$ பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனில், மூன்று பிரிவுகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

3. ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின், பத்தாம் இட மற்றும் நூறாம் இட இலக்கங்களை இடமாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கும் புதிய எண், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மும்மடங்கைவிட $54$ அதிகம். கொடுக்கப்பட்ட எண்ணோடு $198$ – ஐ கூட்டினால் இலக்கங்கள் இட–வலப்பக்கமாக வரிசை மாறும். ஒன்றாம் இட இலக்கத்தைவிட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கு, நூறாம் இட இலக்கத்தை விட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்திற்குச் சமம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைக் காண்க. .

4. $xy(k^2+1)+k(x^2+y^2)$ மற்றும் $xy(k^2-1)+k(x^2-y^2)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம. காண்க

5. வகுத்தல் படிமுறையைப் பயன்படுத்தி $2x^4+13x^3+27x^2+23x+7$, $x^3+3x^2+3x+1$, $x^2+2x+1$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ. காண்க.

6. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\dfrac{x^{3a}-8}{x^{2a}+2x^a+4}$ (ii) $\dfrac{10x^3-25x^2+4x-10}{-4-10x^2}$

7. சுருக்குக $\dfrac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q+r}}{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q+r}}\times\left(1+\dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)$

8. அருள், இரவி மற்றும் இராம் மூவரும் இணைந்து ஒரு கடையை $6$ மணி நேரத்தில் சுத்தம் செய்கின்றனர். தனித்தனியாகச் சுத்தம் செய்தால் அருளைப் போல இருமடங்கு நேரம் இரவி எடுத்துக் கொள்கிறார், மேலும் இராம், அருளின் நேரத்தைப்போல மும்மடங்கு எடுத்துக்கொள்கிறார் எனில், மூவரும் தனித்தனியாக எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக் கொள்வார்கள்.

9. $289x^4-612x^3+970x^2-684x+361$ –யின் வர்க்கமூலம் காண்க..

10. தீர்க்க $\sqrt{y+1}+\sqrt{2y-5}=3$

11. 36 கி.மீ தூரத்தை ஒரு படகு நீரோட்டத்தின் திசையில் கடக்கும் நேரத்தைவிட எதிர்திசையில் கடக்கும் நேரம் $1.6$ மணி நேரம் அதிகமாக எடுத்துக்கொள்கிறது. நீரோட்டத்தின் வேகம் $4$ கி.மீ/மணி எனில், அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் என்ன?

12. $320$ மீ சுற்றளவும் $4800$ ச.மீ பரப்பளவும் கொண்ட செவ்வக வடிவப் பூங்காவை அமைக்க முடியுமா? ஆம் எனில், அதன் நீளம், அகலம் காண்க.

13. ஒரு கடிகாரத்தில் பிற்பகல் $2$ மணியிலிருந்து $t$ நிமிடங்களுக்குப் பிறகு $3$ மணியை அடைவதற்குரிய கால அளவானது $\dfrac{t^2}{4}$ –ஐ விட மூன்று நிமிடங்கள் குறைவு எனில், $t$ –யின் மதிப்பைக் காண்க.

14. ஓர் அரங்கில், ஒரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை அந்த அரங்கில் உள்ள மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஒவ்வொரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளை $5$ குறைத்து மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையை இரட்டிப்பாக்கினால் அரங்கில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை முன்பைவிட $375$ அதிகரிக்கும். அரங்கில் துவக்கத்தில் இருந்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

15. $f(x)=x^2-2x+3$, என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள் $\alpha$ மற்றும் $\beta$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.
(i) $\alpha+2,\ \beta+2$ (ii) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1},\ \dfrac{\beta-1}{\beta+1}$.

16. $x^2+px-4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் –4 மற்றும் $x^2+px+q=0$ –யின் மூலங்கள் சமம் எனில், $p$ மற்றும் $q$ –யின் மதிப்புக் காண்க

17. செந்தில், இரவி என்ற இரு விவசாயிகள் அரிசி, கோதுமை மற்றும் கேழ்வரகு ஆகிய மூன்று தானியங்களைப் பயிரிட்டனர். ஏப்ரல் மாதத்தில் இருவருக்குமான தனியங்களின் விற்பனை விலை கீழ்க்கண்ட அணியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஏப்ரல் மாத விற்பனை (ரூபாயில்)

$$\begin{array}{cccc} \text{அரிசி} & \text{கோதுமை} & \text{கேழ்வரகு} & \\ \end{array}$$
$$A=\begin{pmatrix}500 & 1000 & 1500\\ 2500 & 1500 & 500\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{செந்தில்}\\ \text{இரவி}\end{array}$$

மேலும் மே மாத விலை ஏப்ரல் மாத விலையின் இருமடங்கு எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.

(i) ஏப்ரல், மே மாதங்களின் சராசரி விற்பனை யாது?

(ii) இதேபோல் விலை தொடர்ந்து வரும் மாதங்களில் ஏற்றமடைந்தால் ஆகஸ்ட் மாத விலையைக் காண்க.

18. $\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\times\sin\theta\begin{pmatrix}x & -\cos\theta\\ \cos\theta & x\end{pmatrix}=I_2$ எனில், $x$ –ஐக் காண்க.

19. $A=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ மற்றும் $BA=C^2$ எனில், $p$, $q$ –ஐக் காண்க.

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ எனில், $CD-AB=0$ எனுமாறு அணி $D$ –ஐக் காண்க.

## நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குப் பின்வருமாறு தீர்வுகள் அமையலாம்.

  (i) ஒரே ஒரு தீர்வு (ii) எண்ணற்ற தீர்வு (iii) தீர்வு இல்லை

- கோவையின் படி இரண்டாக இருப்பின் அக்கோவையை இருபடி கோவை என அழைக்கிறோம். ஓர் இருபடி கோவைக்கு அதிகபட்சமாக இரண்டு பூச்சியங்கள் உண்டு. மேலும் இந்தப் பூச்சியங்கள் $X$ அச்சைச் சந்திக்கும்.

- $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின்.

  மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-x\text{–யின் கெழு}}{x^2\text{ –யின் கெழு}}$

  மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{ –யின் கெழு}}$

- $\alpha,\beta$ –வை மூலங்களாக உடைய இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

- ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை பற்றி தன்மை காட்டி மூலம் $(\Delta=b^2-4ac)$ பின்வருமாறு அறியலாம்.

  (i) $\Delta>0$ எனில், மூலங்கள் மெய், சமமல்ல.

  (ii) $\Delta=0$ எனில், மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

  (iii) $\Delta<0$ எனில், மூலங்கள் மெய் எண்கள் அல்ல.

- இருபடிச் சமன்பாட்டை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல்.
- செவ்வக வடிவில் நிரை மற்றும் நிரல்களால் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தும் அமைப்பு அணி எனப்படும்.
- '$A$' என்ற அணியில் $m$ நிரைகளும் $n$ நிரல்களும் இருப்பின் '$A$' –யின் வரிசை (நிரைகளின் எண்ணிக்கை) $\times$ (நிரல்களின் எண்ணிக்கை) ஆகும். இதனை $m\times n$ என எழுதலாம். $m\times n$ என்பது $m$ மற்றும் $n$ –யின் பெருக்கற்பலன் அல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.
- அணிகளின் வகைகள்

(i) ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரையும், பல நிரல்களும் இருந்தால் அவ்வணி நிரை அணி எனப்படும். நிரை அணியை நிரை வெக்டர் (row vector) எனவும் கூறலாம்.

(ii) ஓர் அணியில் ஒரே ஒரு நிரலும், பல நிரைகளும் இருந்தால், அவ்வணி நிரல் அணி எனப்படும். நிரல் அணியை நிரல் வெக்டர் எனவும் கூறலாம்.

(iii) ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையானது நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி சதுர அணி எனப்படும்.

(iv) ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலை விட்டத்திற்கு மேலேயும் கீழேயும் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில் அந்த அணி மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

(v) ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருப்பின் அந்த அணி திசையிலி அணி எனப்படும்.

(vi) ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 1 ஆகவும் மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும்.

(vii) ஓர் அணியிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி எனப்படும்.

(viii) $A$ என்ற அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றக் கிடைக்கும் அணி $A$–யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். இதனை எனக் குறிக்கலாம்.

(ix) ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலே உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி கீழ்முக்கோண அணி எனப்படும்.

(x) ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூச்சியமாக இருந்தால் அந்த அணி மேல் முக்கோண அணி எனப்படும்.

(xi) அணிகள் $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் மற்றும் $A$–யில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் $B$–யில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுக்குச் சமம் எனில், $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை சம அணிகள் எனப்படும்.

(xii) அணி $A_{m\times n}$ –யின் எதிர் அணி $-A_{m\times n}$ என்றவாறு அமையும். $-A$ என்ற அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் $A$ –வில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளின் கூட்டல் நேர்மாறல்களாக இருக்கும்.

- **அணிகளின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தல்**

ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ முடியும். இரு அணிகளைக் கூட்டுவதற்கோ அல்லது கழிப்பதற்கோ அந்த அணிகளில் இருக்கின்ற ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ செய்ய வேண்டும்.

- **அணியைத் திசையிலியால் பெருக்குதல்**

கொடுக்கப்பட்ட $A$ என்ற அணியின் உறுப்புகளைப் பூச்சியமற்ற $k$ என்ற எண்ணால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய அணி $kA$ ஆகும். இதன் உறுப்புகள் அனைத்தும் $k$ ஆல் பெருக்கப்பட்டிருக்கும். $kA=(ka_{ij})$ என்பது $A$–யின் திசையிலி அணி பெருக்கல் எனப்படும். $A=(a_{ij})$ எனில், $kA$ அனைத்து $i=1,2,\ldots,m$ ; $j=1,2,\ldots,n$ ஆகும்.

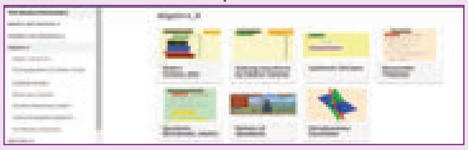
## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

**ICT 3.1**

**படி 1:** கீழ்காணும் உரலி/ விரைவுத் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் "Algebra "பக்கத்திற்குச் செல்க "Simultaneous Equations "எனும் பயிற்சித்தாளைத் தேர்வு செய்க.

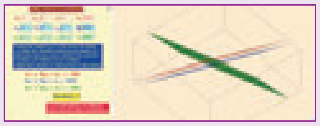
**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சித் தாளில் நீங்கள் மூன்று நேரிய சமன்பாடுகளைக் காணலாம் மற்றும் a, b, c வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுப்பதன் மூலம் சமன்பாடுகளை மாற்றலாம். 3D வரைபடத்திற்குச் சென்று உற்றுநோக்கலாம். சமன்பாடுகளை மாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கும் தீர்வுகளின் தன்மையை உற்றுநோக்கலாம்..

படி 1



படி 2

முடிவுகள்



**ICT 3.2**

**படி 1:** கீழ்காணும் உரலி/ விரைவுத் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம் "Algebra "பக்கத்திற்குச் செல்க "Nature of Quadratic Equations "எனும் பயிற்சித்தாளைத் தேர்வு செய்க.

**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சித்தாளில் கொடுக்கப்பட்ட நழுவலை நகர்த்துவதன் மூலம் குணகத்தை மாற்றலாம். 'New Position' – ஐ சொடுக்க, நழுவலை நகர்த்தி எல்லைகளைத் தீர்மானிக்கலாம். Gell ball மற்றும் fire –ஐ சொடுக்கவதன் மூலம் எல்லையைத் தகர்க்கலாம். இங்கு, ஒவ்வொரு கெழு மாறும் போதும் வளைவரை எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்..

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

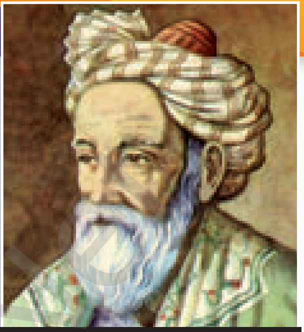
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356193

அல்லது விரைவுச் செயலியை ஸ்கேன் செய்யவும்

B371_10_MATHS_TM

# 4 வடிவியல்

*அளவிட முடியாத நிலையை புரிந்துகொள்வதே வடிவியல் பற்றிய அறிதலின் நோக்கமாகும் –பிளேட்டோ*



ஒமர் கயாம்
(18.5.1048 – 4.12.1131)

ஒமர் கயாம் ஒரு பாரசீகக் கணிதவியலாளர், வானியல் வல்லுநர் மற்றும் கவிஞர் ஆவார். இவரது உன்னதப் படைப்பான "ருபாயத்" (Rubaiyat) உலகப்புகழ் பெற்ற கவிதைத் தொகுப்பாகும்.

இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியலை ஒருங்கிணைப்பதற்குக் கயாம் முயற்சித்தார். முப்படிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு இவர் அளித்த கருத்துகளே முறையானதாகவும், துல்லியமாகவும் இருந்ததாக அறியப்படுகிறது. இதற்கு இவர் வடிவியலைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். 'யூக்ளிட்' உருவாக்கிய வடிவியல் கொள்கைகளைப் பொதுமைப்படுத்த இவர் மேற்கொண்ட பணிகள் பல ஐரோப்பியக் கணிதவியலாளர்களுக்கு ஒரு தூண்டுகோலாக அமைந்தது. இதுவே "யூக்ளிடியன் அல்லாத வடிவியல்" கண்டுபிடிக்கப்படுவதற்கு வழிவகை செய்தது. பலரும் அடைய முடியாத சாதனைகளைப் படைத்த சிறந்த கவிஞரும், குறிப்பிடத்தக்க அறிவியல் விஞ்ஞானியுமாகத் திகழ்வதற்கு இவர் மிகச் சரியான உதாரணமாக விளங்கினார்.

L4SD4V

## கற்றல் விளைவுகள்

- சர்வசம முக்கோணங்களை நினைவு கூர்தல் மற்றும் வடிவொத்த முக்கோணங்களின் வரையறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகள் மற்றும் அவற்றை உருவாக்கும் முறைகளை அறிதல். இக்கருத்துகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுதல்.
- அடிப்படை விகிதசம தேற்றம், கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தை நிரூபித்து அவற்றின் பயன்பாடுகளை அறிதல் மற்றும் கொடுத்த கட்டுப்பாடுகளை வைத்து முக்கோணங்கள் வரைதல்.
- பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிரூபித்து, அதன் பயன்பாட்டைத் தெரிந்து கொள்ளுதல்.
- வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் பற்றிய கருத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல் மற்றும் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல்.
- ஒருங்கிசைவு தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.

## 4.1 அறிமுகம் (Introduction)

பல்வேறு வடிவங்களையும், உருவங்களையும் கவனமாக அறிந்து கொள்ள வடிவியல் சிந்தனை முக்கியமானது. எண் கணிதம் மற்றும் வடிவியலானது கணிதத்தின் பழமையான இரு பிரிவுகள் ஆகும். கிரேக்கர்கள் வடிவியலை உயர்ந்த இடத்தில் வைத்திருந்தனர். வடிவியலின் தன்மைகளை நேர்த்தியாகப் பயன்படுத்திப் பல அறிவியல் கோட்பாடுகளைக் கிரேக்கர்கள் உருவாக்கினர். வடிவியல் இல்லையென்றால் இந்த முன்னேற்றங்கள் சாத்தியப்பட்டிருக்காது எனக் கூறும் அளவிற்கு வடிவியலை வாழ்க்கை செய்திகளோடு ஒப்பிட்டுப் பயனடைந்தனர். வட்டத்தின் வடிவொத்த தன்மையைப் பயன்படுத்தி எரோடோதினிஸ் (Eratosthenes) பூமியின்

சுற்றளவையும், பூமியிலிருந்து நிலவு மற்றும் சூரியனுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவையும் மிகத் துல்லியமாகக் கண்டறிந்தார். இந்த சாதனைகளைத் தவிர ஆறுகளின் அகலம், மரங்களின் உயரம் என பலவற்றையும் துல்லியமாகக் கணக்கிட வடிவியலை பயன்படுத்தியுள்ளனர்.

இப்பாடப் பகுதியில், முந்தைய வகுப்பில் கற்றவற்றின் தொடர்ச்சியான கருத்துகளை நாம் விவாதிப்போம். அதிலும் மிக முக்கியமான கருத்துகளான வடிவொத்த முக்கோணங்கள், அடிப்படை விகிதசம தேற்றம், கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம், மிகவும் முக்கியமான பிதாகரஸ் தேற்றம் பற்றியும் கற்க உள்ளோம். மேலும் சீவாஸ் தேற்றம் (Ceva's theorem) மற்றும் மெனிலாஸ் தேற்றம் (Menelaus theorem) முதல் முறையாக கற்கப் போகிறோம். இந்த இரண்டு தேற்றங்களும் நாம் அறிந்த அனைத்து ஒருங்கிசைவுத் தேற்றங்களைப் பொதுமைப்படுத்துகின்றன.

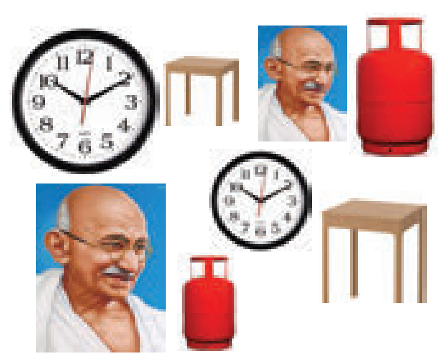
வடிவியலைப் பற்றியக் கற்றலானது, நம்மைச் சுற்றியுள்ள பொருள்களைப் பற்றி ஆழ்ந்து புரிந்து கொள்ளுவதற்கான ஆர்வத்தை உருவாக்குகிறது. அறிவியல், பொறியியல் மற்றும் கட்டிடக் கலைத் துறையில் வடிவியல் மிக முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது. இயற்கையில் நாம் பல வடிவியல் அமைப்புகளைக் காண்கிறோம். முக்கோணங்களைப் பற்றியும், அவற்றின் பண்புகளைப் பற்றியும் முந்தைய வகுப்புகளிலிலேயே நாம் அறிந்திருக்கிறோம்.

## 4.2 வடிவொத்தவை (Similarity)

ஓர் உருவத்தின் ஒவ்வோர் அளவும் மற்றொரு உருவத்தின் அளவுக்கு விகிதச் சமமாக இருந்தால் அந்த இரு உருவங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,மேலே உள்ள வீடு, அலைபேசி ஆகிய இரு உருவங்களும் ஒரே மாதிரியாகவும் அளவில் விகிதச் சமமாகவும் இருக்கின்றன. இதிலிருந்து கணித ரீதியாக, இரு உருவங்களும் ஒரே மாதிரியாகவும் அதனுடைய அளவுகள் விகிதசமமாகவும் இருந்தால் அவை வடிவொத்தவை ஆகும்.

படம் 4.1

படம் 4.2-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவியல் உருவங்களில் வடிவொத்தவைகளை பட்டியலிடுக.



படம் 4.2

இந்தப் பாடப்பகுதியில் வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பயன்பாட்டைப் பற்றி விவாதிக்க உள்ளோம். நம்மால் எளிமையாகக் கணக்கிட இயலாத தொலைவையும், உயரத்தையும் சாதாரண அளவீட்டு கருவிகளை வைத்துக் கண்டறிய இந்தக் கருத்துகள் உதவுகின்றன. வடிவொத்தவை குறித்த கருத்தானது பரவலாகப் பொறியியல், கட்டிடக்கலை மற்றும் கட்டுமானத் துறையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வடிவொத்தவையின் சில பயன்பாடுகள்

(i) பொருட்களின் நிழல்களை ஆய்வு செய்து ஏற்படும் முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்தி பொருள்களின் சரியான உயரத்தைக் கண்டறியலாம்.

(ii) வான்வெளியிலிருந்து தரையிலுள்ள ஓர் இடத்தைப் புகைப்படம் எடுக்கும்போது புகைப்படக் கருவிக்கும் அந்த இடத்திற்கும் உள்ள தொலைவைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுகிறது.

(iii) கட்டிடக்கலைத் துறையில் கட்டிடங்களின் வடிவமைப்புகளை உருவாக்குவதற்குப் பயன்படுகிறது.

### 4.2.1 வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (Similar triangles)

ஒன்பதாம் வகுப்பில் சர்வசம முக்கோணத்தைப் பற்றி கற்றோம். ஒரே அளவையும் வடிவத்தையும் கொண்ட இரு வடிவியல் உருவங்களைச் சர்வசமம் என அழைக்கலாம். இங்கே, வேறுபட்ட அளவுகள் கொண்ட ஒரே மாதிரியான உருவங்களைப் பற்றி கற்க உள்ளோம். இவற்றை **வடிவொத்த உருவங்கள்** என்கிறோம்.

படம் 4.3

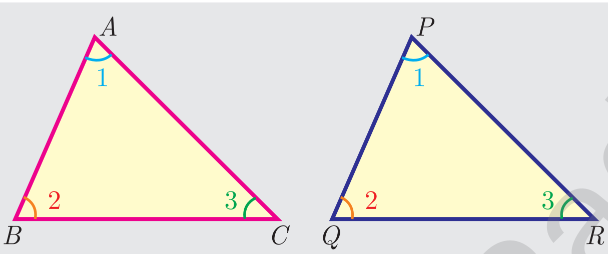
#### சர்வசம மற்றும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

சர்வசமமானது, வடிவொத்தவையின் ஒரு பகுதியாகும். இவ்விரண்டிலும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் மற்ற முக்கோணத்தின் மூன்று ஒத்த கோணங்களுக்குச் சமமாக இருக்கும். ஆனால் சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்கள் சமமாக இருக்கும். வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமாக இருக்கும்.

**குறிப்பு**

முக்கோணம் $ABC$ மற்றும் $PQR$ இரண்டும் வடிவொத்தவை. இதை $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ என எழுதலாம்

**சர்வசம முக்கோணங்கள்**





படம் 4.4

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

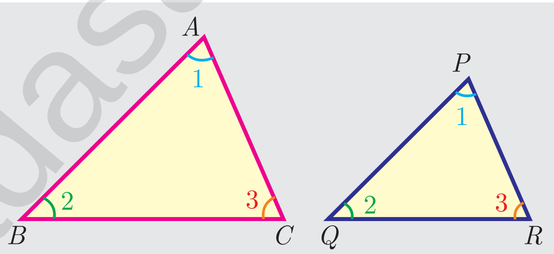
$$\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q,\ \angle C = \angle R.$$

$$AB = PQ, BC = QR, CA = RP$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$$

ஒத்த வடிவமும் ஒரே அளவும்.

**வடிவொத்த முக்கோணங்கள்**





படம் 4.5

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

$$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$$

$AB \neq PQ, BC \neq QR, CA \neq RP$ ஆனால்

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} > 1$ அல்லது $< 1$

ஒரே வடிவமும் வேறுபட்ட அளவும்.

**சிந்தனைக் களம்**

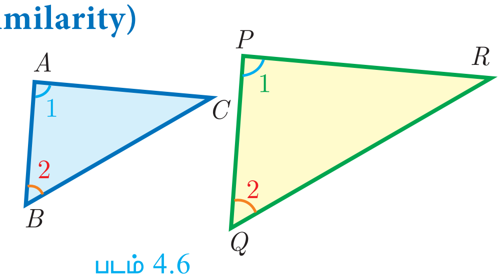
1. சதுரமும், சாய்சதுரமும் சர்வசம உருவங்களா அல்லது வடிவொத்த உருவங்களா என்பதை விவாதிக்கவும்.
2. செவ்வகமும், இணைகரமும் வடிவொத்த உருவங்களா என்பதை விவாதிக்கவும்.

### 4.2.2 வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான விதிமுறைகள் (Criteria of Similarity)

பின்வரும் அடிப்படை விதிமுறைகள் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதை நிரூபிக்கப் போதுமானவை.

### வடிவொத்தவைக்கான AA விதிமுறை (Criterion of similarity)

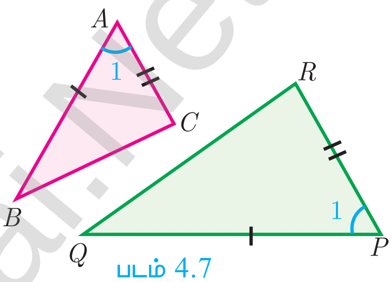
ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும். ஏனெனில் இரு முக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது கோணம் சமமாக இருக்கும். எனவே வடிவொத்தவைக்கான $AA$-விதிமுறையானது வடிவொத்தவைக்கான $AAA$-விதிமுறை போலவே உள்ளது.


படம் 4.6

$\angle A = \angle P = 1$ மற்றும் $\angle B = \angle Q = 2$ எனில், $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

### வடிவொத்தவைக்கான SAS விதிமுறை (SAS Criterion of similarity)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், அவை உள்ளிட்ட பக்கங்களும் விகிதசமமாக இருந்தால், அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும்.


படம் 4.7

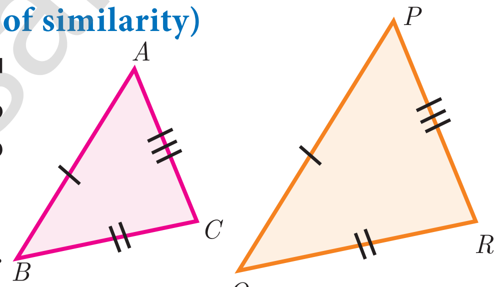
எனவே $\angle A = \angle P = 1$ மற்றும்

$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$ எனில், $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ .

### வடிவொத்தவைக்கான SSS விதிமுறை (SSS Criterion of similarity)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு விகிதசமம் எனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும்.

எனவே, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$ எனில், $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.


படம் 4.8

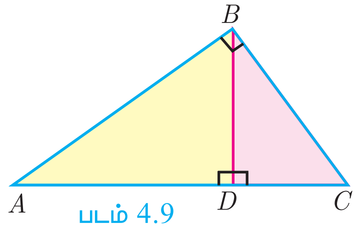
**சிந்தனைக் களம்**

இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்குமா? ஏன்?

### வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான சில பயனுள்ள முடிவுகள்

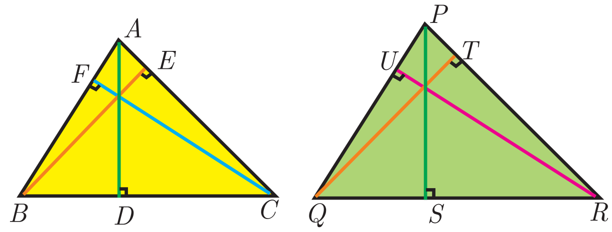
1. செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து கோட்டினால் பிரிக்கப்படும் இரு சிறிய முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாக இருக்கும். மேலும் அச்சிறிய முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கும் வடிவொத்தவையாகவே இருக்கும்.

   $\Delta ADB \sim \Delta BDC$, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$


படம் 4.9

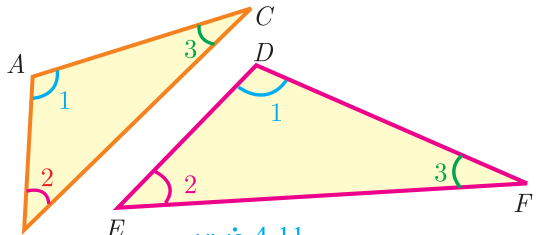
2. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த குத்துயரங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

   எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ எனில்,


படம் 4.10

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{AD}{PS} = \frac{BE}{QT} = \frac{CF}{RU}$$

3. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

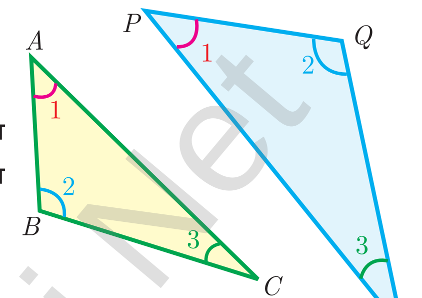


படம் 4.11

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ எனில்,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$$

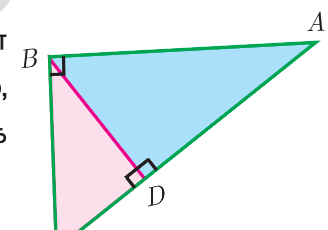
4. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.



படம் 4.12

$$\frac{\Delta ABC\text{-யின் பரப்பளவு}}{\Delta PQR\text{-யின் பரப்பளவு}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

5. இரு முக்கோணங்கள் பொதுவான முனையையும் அவற்றின் அடிப்பக்கங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலும் இருந்தால், அம்முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் விகிதம் அவற்றின் அடிப்பக்க நீளங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.



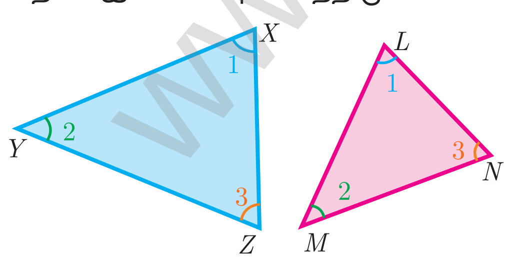
படம் 4.13

$$\frac{\Delta ABD\text{-யின் பரப்பளவு}}{\Delta BDC\text{-யின் பரப்பளவு}} = \frac{AD}{DC}$$

**வரையறை 1** இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமாக இருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

**வரையறை 2** இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அவை சமகோண முக்கோணங்கள் ஆகும்.

**விளக்கம்:** இரண்டு முக்கோணங்களான, $\Delta XYZ$ மற்றும் $\Delta LMN$ -யின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் என்பதால் இவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும்.



படம் 4.14

**குறிப்பு**

(i) ஒரு ஜோடி சமகோண முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும்.

(ii) இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில் அவை சமகோண முக்கோணங்கள் ஆகும்.

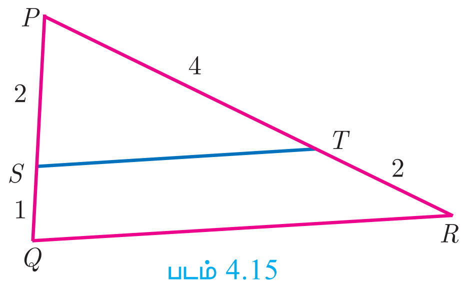
(i) $\angle X = \angle L, \angle Y = \angle M, \angle Z = \angle N$ (கோணத்தைப் பொறுத்து)

(ii) $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$ (பக்கத்தைப் பொறுத்து)

இங்கு $X,\ Y,\ Z$ -ன் ஒத்த முனைகள் $L,\ M,\ N$ ஆகும். குறியீட்டில் $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ எனக் கூறலாம். (~ வடிவொத்தவை என்பதைக் குறிக்கிறது).

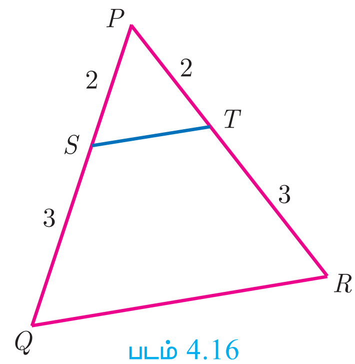
**எடுத்துக்காட்டு 4.1** $\Delta PST \sim \Delta PQR$ எனக் காட்டுக.

(i)



படம் 4.15

(ii)



படம் 4.16

**தீர்வு**

(i) $\Delta PST$ மற்றும் $\Delta PQR$ –யில்,

$$\frac{PS}{PQ}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}, \frac{PT}{PR}=\frac{4}{4+2}=\frac{2}{3}$$

இதிலிருந்து, $\frac{PS}{PQ}=\frac{PT}{PR}$ மற்றும்

$\angle P$ ஆனது பொதுக் கோணம். எனவே,

$SAS$ விதிமுறைப்படி, $\Delta PST \sim \Delta PQR$

(ii) In $\Delta PST$ மற்றும் $\Delta PQR$ –யில்,

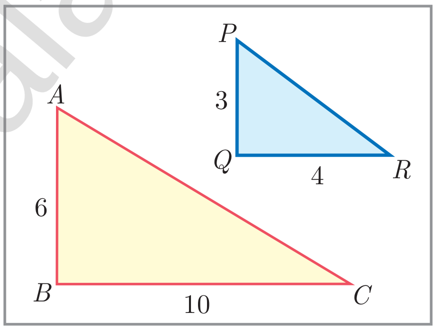
$$\frac{PS}{PQ}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}, \frac{PT}{PR}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$$

இதிலிருந்து, $\frac{PS}{PQ}=\frac{PT}{PR}$ மற்றும்

$\angle P$ ஆனது பொதுக் கோணம். எனவே,

$SAS$ விதிமுறைப்படி, $\Delta PST \sim \Delta PQR$

**எடுத்துக்காட்டு 4.2** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆக இருக்குமா?



படம் 4.17

**தீர்வு** $\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta PQR$ -யில்,

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}; \frac{QR}{BC}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{5}$ என்பதால், $\frac{PQ}{AB}\neq\frac{QR}{BC}$

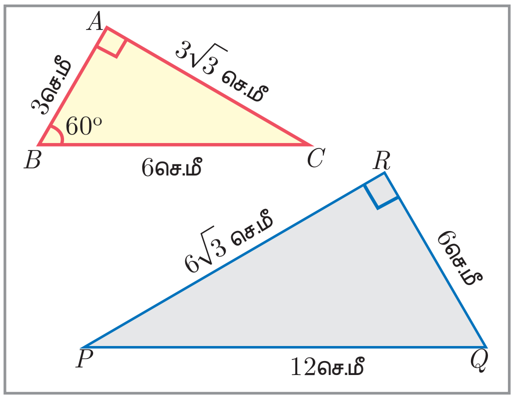
ஒத்த பக்கங்கள் விகிதச் சமமாக இல்லை.

எனவே, $\Delta ABC$ ஆனது $\Delta PQR$ -க்கு வடிவொத்ததாக அமையாது

**குறிப்பு**

- கொடுக்கப்பட்ட நான்கு நீளங்களில் ஒன்றை மாற்றியமைத்து வடிவொத்த முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.3** படம் 4.18–லிருந்து $\angle P$ -ஐ காண்க.



படம் 4.18

**தீர்வு** $\Delta BAC$ மற்றும் $\Delta PRQ$ -ல், $\frac{AB}{RQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}; \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

எனவே, $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

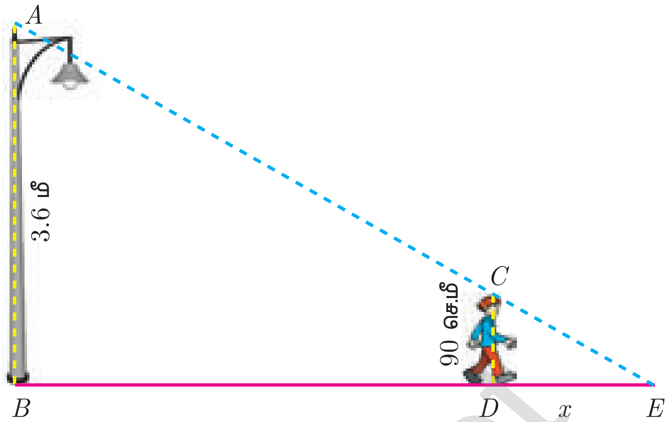
$SSS$ விதிமுறைப்படி நாம் பெறுவது, $\Delta BAC \sim \Delta QRP$

$\angle P=\angle C$ (வடிவொத்த முக்கோணத்தின் ஒத்த கோணங்கள் சமம்)

$\angle P=\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)$

$\angle P=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

**எடுத்துக்காட்டு 4.4** 90 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுவன் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 1.2 மீ/வினாடி வேகத்தில் நடந்து செல்கிறான். தரையிலிருந்து விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 3.6 மீ எனில், 4 வினாடிகள் கழித்துச் சிறுவனுடைய நிழலின் நீளத்தைக் காண்க.



படம் 4.19

**தீர்வு** வேகம் $= 1.2$ மீ/வினாடி,

என்பது கொடுக்கப்பட்டது.

நேரம் $= 4$ வினாடி,

தொலைவு $=$ வேகம் $\times$ நேரம்

$= 1.2\times 4 = 4.8$ மீ

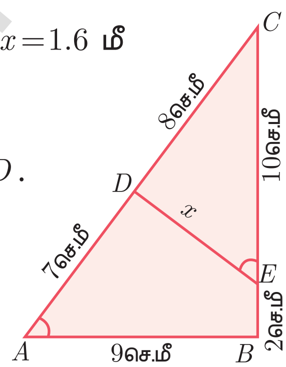
4 வினாடிகளுக்குப் பிறகு சிறுவனுடைய நிழலின் நீளம் $x$ என்க.

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$ ஆகையால், $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ எனவே $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9} = 4$ (90 செமீ $= 0.9$ மீ)

$4.8 + x = 4x$ -யிலிருந்து $3x = 4.8$ ஆகவே, $x = 1.6$ மீ

சிறுவனுடைய நிழலின் நீளம் $DE = 1.6$ மீ

**எடுத்துக்காட்டு 4.5** படம் 4.20-யில் $\angle A = \angle CED$ எனில், $\Delta CAB \sim \Delta CED$. என நிரூபிக்கவும். மேலும் $x$-யின் மதிப்பு காண்க.



படம் 4.20

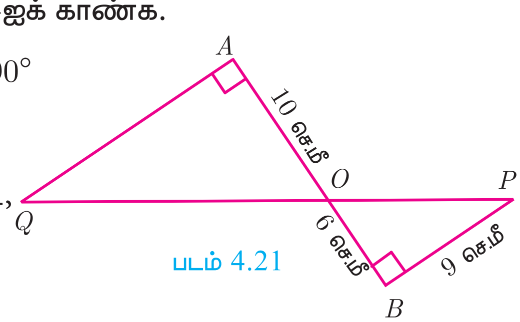
**தீர்வு** $\Delta CAB$ மற்றும் $\Delta CED$ -யில், $\angle C$ பொதுவானது, $\angle A = \angle CED$

எனவே, $\Delta CAB \sim \Delta CED$ ($AA$ விதிமுறைப்படி)

ஆகவே, $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$

$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$ -யிலிருந்து $\frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$ எனவே, $x = \frac{8\times 9}{12} = 6$ செ.மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 4.6** படம் 4.21-யில், $QA$ மற்றும் $PB$ ஆனது $AB$ –க்கு செங்குத்தாகும். $AO = 10$ செ.மீ, $BO = 6$ செ.மீ மற்றும் $PB = 9$ செ.மீ. $AQ$ -ஐக் காண்க.



படம் 4.21

**தீர்வு** $\Delta AOQ$ மற்றும் $\Delta BOP$ -ல், $\angle OAQ = \angle OBP = 90°$

$\angle AOQ = \angle BOP$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எனவே, வடிவொத்தமைக்கான, $AA$ விதிமுறைப்படி, $\Delta AOQ \sim \Delta BOP$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$$

எனவே, $\frac{10}{6} = \frac{AQ}{9}$ -லிருந்து $AQ = \frac{10\times 9}{6} = 15$ செ.மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 4.7** வடிவொத்த முக்கோணங்கள் $ABC$ மற்றும் $PQR$-ன் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ ஆகும். $PQ = 10$ செ.மீ எனில், $AB$ -ஐக் காண்க.

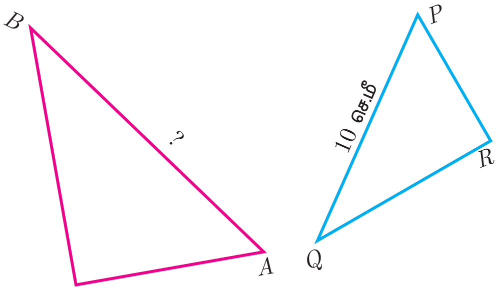
**தீர்வு** வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆகையினால்,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{36}{24}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \text{ -லிருந்து, } \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

$$AB = \frac{36 \times 10}{24} = 15 \text{ செ.மீ}$$



படம் 4.22

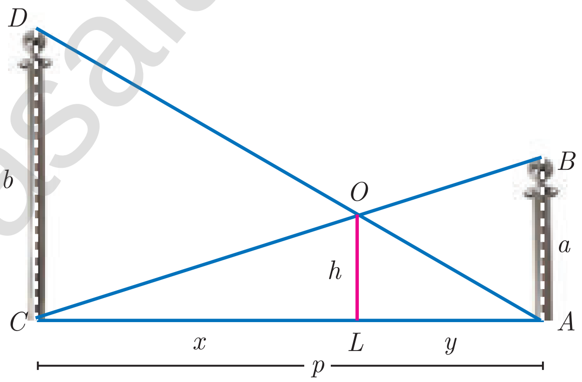
**எடுத்துக்காட்டு 4.8** $\Delta ABC$ ஆனது $\Delta DEF$ –க்கு வடிவொத்தவை. மேலும் $BC=3$ செ.மீ, $EF=4$ செ.மீ மற்றும் முக்கோணம் $ABC$-யின் பரப்பு $= 54$ செ.மீ$^2$ எனில், $\Delta DEF$ -யின் பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களுடைய பரப்புகளின் விகிதமானது அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களுடைய வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம் என்பதால்

$$\frac{\Delta ABC\text{-ன் பரப்பளவு}}{\Delta DEF\text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{BC^2}{EF^2} \text{ எனவே } \frac{54}{\Delta DEF\text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{3^2}{4^2}$$

$$\Delta DEF\text{-ன் பரப்பளவு} = \frac{16 \times 54}{9} = 96 \text{ செ.மீ}^2$$

**எடுத்துக்காட்டு 4.9** $p$ மீட்டர் இடைவெளியில் $a$ மீட்டர் மற்றும் $b$ மீட்டர் உயரமுள்ள இரண்டு தூண்கள் உள்ளன. தூண்களின் உச்சியிலிருந்து எதிரேயுள்ள தூண்களின் அடிக்கு வரையப்படும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் உயரமானது $\frac{ab}{a+b}$ மீட்டர் என்பதை நிரூபிக்கவும்.



படம் 4.23

**தீர்வு** $p$ மீட்டர் இடைவெளியில் உள்ள $AB$ மற்றும் $CD$ என்ற இரு தூண்களின் உயரங்கள் முறையே '$a$' மீட்டர், '$b$' மீட்டர் என்க. அதாவது, $AC = p$ மீட்டர். $AD$ மற்றும் $BC$-யானது $O$-வில் சந்திக்கிறது எனில், $OL = h$ மீட்டர்.

$CL = x$ மற்றும் $LA = y$ என்க.

எனவே, $x + y = p$

$\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta LOC$ -லிருந்து,

$\angle CAB = \angle CLO$ [ஒவ்வொன்றும் $90^\circ$ -க்கு சமம்]

$\angle C = \angle C$ [$C$-பொதுவானது]

$\Delta CAB \sim \Delta CLO$ [$AA$ விதிமுறைப்படி]

$$\frac{CA}{CL} = \frac{AB}{LO} \text{ -விலிருந்து } \frac{p}{x} = \frac{a}{h}$$

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. எல்லா வட்டங்களும்________ (சர்வசமம்/ வடிவொத்தவை)
2. எல்லாச் சதுரங்களும்________ (வடிவொத்தவை / சர்வசமம்)
3. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில் அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் ________ மற்றும் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் ________.
4. (அ) எல்லா வடிவொத்த முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும்– சரி/ தவறு.

   (ஆ) எல்லாச் சர்வசம முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாகும்– சரி /தவறு.
5. வடிவொத்தவை இல்லாத உருவங்களுக்கு இரு வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கவும்.

ஆகையினால் $x = \dfrac{ph}{a}$ ...(1)

$\Delta ALO$ மற்றும் $\Delta ACD$-விலிருந்து $\angle ALO = \angle ACD$ [ஒவ்வொன்றும் $90^\circ$-க்கு சமம்]

$\angle A = \angle A$ [$A$ பொதுவானது]

$\Delta ALO \sim \Delta ACD$ [$AA$ -விதிமுறைப்படி]

$\dfrac{AL}{AC} = \dfrac{OL}{DC}$ -விலிருந்து $\dfrac{y}{p} = \dfrac{h}{b}$ ஆகவே, $y = \dfrac{ph}{b}$ ...(2)

(1)+(2) -விலிருந்து $x + y = \dfrac{ph}{a} + \dfrac{ph}{b}$

$$p = ph\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \text{(ஏனெனில் } x + y = p\text{)}$$

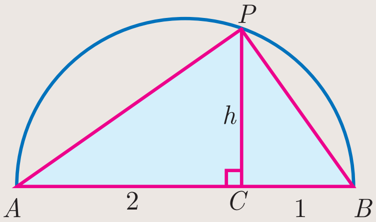
$$1 = h\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

எனவே, $h = \dfrac{ab}{a+b}$

எனவே, இரு தூண்களின் உச்சியிலிருந்து எதிரே உள்ள தூண்களின் அடிக்கு வரையப்படும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் உயரமானது $\dfrac{ab}{a+b}$ மீட்டர் ஆகும்.

**செயல்பாடு 1**

$\sqrt{2}$ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத் துண்டினை வரைய முயற்சிப்போம். அதற்குக் கீழ்க்கண்ட படிகளைக் கருத்தில் கொள்க.



படம் 4.24

**படி 1:** 3 அலகு நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டினை எடுத்துக்கொள்க. அதற்கு $AB$ என்று பெயரிடுக.

**படி 2:** $AB$ -யில் $C$ என்ற புள்ளியை $AC=2$, $CB=1$ என எடுத்துக்கொள்க.

**படி 3:** படத்தில் காட்டியுள்ளபடி $AB$-ஐ விட்டமாக உடைய ஓர் அரைவட்டம் வரைக.

**படி 4:** அரைவட்டத்தின் மேல் $AB$-க்கு செங்குத்தாக $CP$ இருக்குமாறு $P$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க.

**படி 5:** $P$ -யிலிருந்து $A$ மற்றும் $B$ -ஐ இணைக்க. இப்பொழுது $ACP$ மற்றும் $BCP$ என்ற இரு செங்கோண முக்கோணங்களைப் பெறுகிறோம்.

**படி 6:** முக்கோணங்கள் $ACP$ மற்றும் $BCP$ ஆனது வடிவொத்தவையாக இருக்கிறதா எனச் சரிபார்க்கவும்.

**படி 7:** $CP = h$ என்பது பொதுவான செங்குத்துயரம் என்க. வடிவொத்தவையை பயன்படுத்தி $h$ -யின் மதிப்பைக் காண்க.

**படி 8:** $h$ -ஐ கண்டுபிடிப்பதின் மூலம் நீ என்ன தெரிந்துகொண்டாய்?

இதே செயல்முறைகளின்படி, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டினை உருவாக்க முடியுமா?

### 4.2.3 வடிவொத்த முக்கோணங்களை வரைதல் (Construction of similar triangles)

வடிவொத்த முக்கோணங்களைப் பற்றிய கருத்துகளையும் அவற்றின் பண்புகளையும் இதுவரை விவாதித்தோம். இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்குக் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் அமையும் வடிவொத்த மற்றொரு முக்கோணத்தை வரையும் முறையினைப் பற்றி காண்போம்.



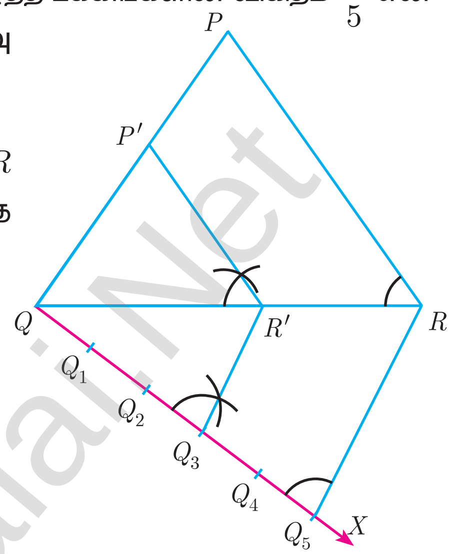


X_Ch 4 TM.indd 171 16-04-2019 09:57:12

இந்த வரைதல் முறையில் இரு வகை உள்ளன. அதில் ஒன்று, ஒத்த பக்கங்களின் தகவு $1$-ஐ விடக் குறைவாகவும், மற்றொன்று ஒத்த பக்கங்களின் தகவு $1$-ஐ விட அதிகமாகவும் உள்ள இரண்டு வாய்ப்புகளைக் கருதுவோம். ஒத்த பக்கங்களின் தகவை அளவு காரணி (scale factor) என அழைக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் ஒத்த பக்கத்தின் தகவானது மேற்கூறிய இரு வாய்ப்புகளில் இருக்குமாறு, ஒரு வடிவொத்த முக்கோணத்தை வரையும் முறையைக் காண்போம்

**எடுத்துக்காட்டு 4.10** கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $PQR$ –க்கு ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{3}{5}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{3}{5} < 1$)

**தீர்வு** $PQR$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ஆகும். $PQR$ என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு $\frac{3}{5}$ அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களின் மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



படம் 4.25

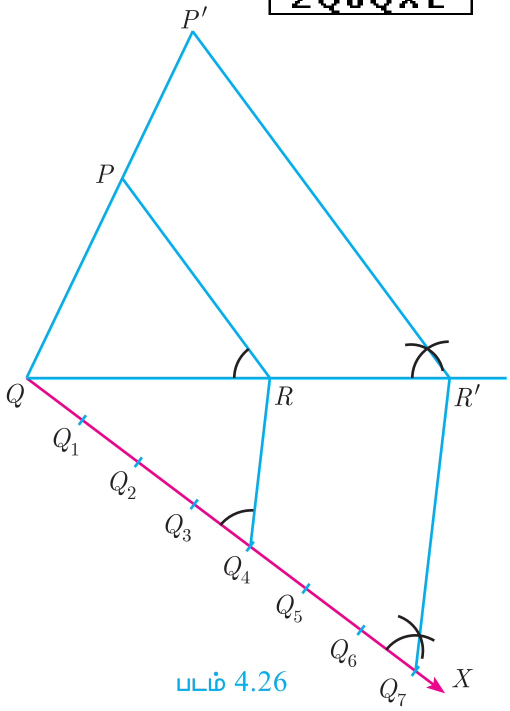
**வரைதலின் படிகள்**

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு $\Delta PQR$ வரைக.
2. $QR$ என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு, $QX$ என்ற கதிரை $P$ என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர் திசையில் வரைக.
3. $QX$–யின் மீது $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ மற்றும் $Q_5$ என்ற $5$ புள்ளிகளை ($\frac{3}{5}$–யில் $3$ மற்றும் $5$ ஆகியவற்றில் பெரியது $5$ என்பதால்) $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$ என்றவாறு குறிக்கவும்.
4. $Q_5R$ –ஐ இணைத்து $Q_3$ –யிலிருந்து ($3$-வது புள்ளி, அதாவது $\frac{3}{5}$ –யில் $3$ மற்றும் $5$ ஆகியவற்றில் சிறியது) $Q_5R$ –க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக. இது $QR$ –ஐ $R'$ –யில் சந்திக்கிறது.
5. $R'$ –லிருந்து $RP$–க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு $QP$–ஐ $P'$–யில் சந்திக்கிறது. $\Delta P'QR'$ –யின் பக்கங்கள் $\Delta PQR$ –ன் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் $5$–ல் $3$ பங்கு ஆகும்.
6. $\Delta P'QR'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

ZQ8QXE

**எடுத்துக்காட்டு 4.11** கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $PQR$ -க்கு ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{7}{4}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{7}{4} > 1$)

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட $\triangle PQR$ -ன் பக்கங்களைப் போல் $\frac{7}{4}$ பங்கு அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



படம் 4.26

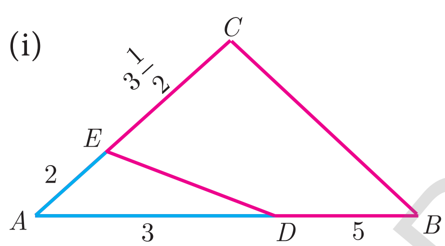
**வரைதலின் படிகள்**

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு $\Delta PQR$ வரைக.
2. $QR$ என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு $QX$ என்ற கதிரை $P$ என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர் திசையில் வரைக.
3. $QX$ –ன் மீது $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ மற்றும் $Q_7$ என்ற 7 புள்ளிகளை ( $\frac{7}{4}$ –யில் , 7 மற்றும் 4 ஆகியவற்றில் பெரியது ) $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$ என்றவாறு குறிக்கவும்.
4. $Q_4$ ஐ (4–வது புள்ளி, அதாவது $\frac{7}{4}$ –யில் 4 மற்றும் 7 ஆகியவற்றில் சிறியது) புள்ளி R –வுடன் இணைக்க. $Q_4R$ -க்கு இணையாக $Q_7$-லிருந்து வரையப்படும் கோடு $QR$ ஐ $R'$ –ல் சந்திக்கிறது.
5. $R'$ –லிருந்து $RP$–க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு $QP$–ஐ $P'$ –யில் சந்திக்கிறது. $\Delta P'QR'$ –யின் பக்கங்கள் $\Delta PQR$ –யின் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 4–யில் 7 பங்கு ஆகும். $\Delta P'QR'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

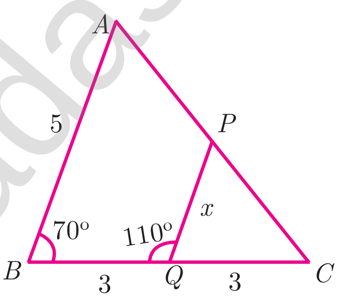
## பயிற்சி 4.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றில் எந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதைச் சோதிக்கவும் மேலும் $x$ –யின் மதிப்பு காண்க..

(i)

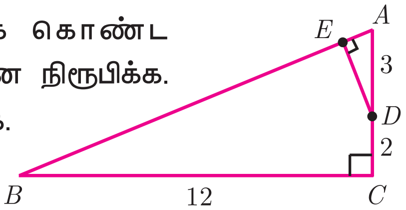



(ii)

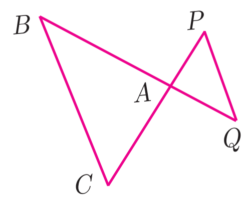



2. ஒரு பெண் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 6.6 மீ தொலைவிலுள்ள கண்ணாடியில் விளக்கு கம்ப உச்சியின் பிரதிபலிப்பைக் காண்கிறாள். 1.25 மீ உயரமுள்ள அப்பெண் கண்ணாடியிலிருந்து 2.5 மீ தொலைவில் நிற்கிறாள். கண்ணாடியானது வானத்தை நோக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பெண், கண்ணாடி மற்றும் விளக்கு கம்பம் ஆகியவை எல்லாம் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதாக எடுத்துக் கொண்டால், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.
3. 6 மீ உயரமுள்ள செங்குத்தாக நிற்கும் கம்பமானது தரையில் 400 செ.மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. ஒரு கோபுரமானது 28 மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. கம்பம் மற்றும் கோபுரம் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதாகக் கருதி வடிவொத்த தன்மையைப் பயன்படுத்தி, கோபுரத்தின் உயரம் காண்க.
4. $QR$ ஐ அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட இரு முக்கோணங்கள் $QPR$ மற்றும் $QSR$ –யின் புள்ளிகள் $P$ மற்றும் $S$ –யில் செங்கோணங்களாக அமைந்துள்ளன. இரு முக்கோணங்களும் $QR$–யின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன. $PR$ மற்றும் $SQ$ என்ற பக்கங்கள் $T$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனில், $PT \times TR = ST \times TQ$ என நிறுவுக.

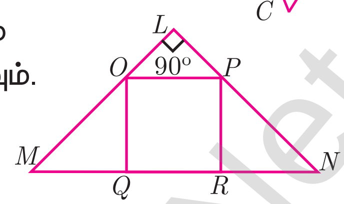
5. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $C$ -ஐ செங்கோணமாகக் கொண்ட $\Delta ABC$ –யில் $DE \perp AB$ எனில் $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ என நிரூபிக்க. மேலும் $AE$ மற்றும் $DE$ ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காண்க.




6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $\Delta ACB \sim \Delta APQ$. $BC = 8$ செ.மீ, $PQ = 4$ செ.மீ, $BA = 6.5$ செ.மீ மற்றும் $AP = 2.8$ செ.மீ எனில், $CA$ மற்றும் $AQ$ –யின் மதிப்பைக் காண்க.

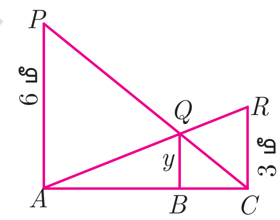



7. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $OPRQ$ ஆனது சதுரம் மற்றும் $\angle MLN = 90^\circ$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.
(i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$ (ii) $\Delta LOP \sim \Delta RPN$
(iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ (iv) $QR^2 = MQ \times RN$




8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ -ல், $\Delta ABC$ -யின் பரப்பு $9$ செ.மீ$^2$, $\Delta DEF$ -யின் பரப்பு $16$ செ.மீ$^2$ மற்றும் $BC = 2.1$ செ.மீ எனில், $EF$ -யின் நீளம் காண்க.

9. 6 மீ மற்றும் 3 மீ உயரமுள்ள இரண்டு செங்குத்தான தூண்கள் $AC$ என்ற தரையின் மேல் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஊன்றப்பட்டுள்ளது எனில், $y$ –யின் மதிப்பு காண்க.




10. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $PQR$ –யின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{2}{3}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{2}{3}$)

11. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $LMN$-ன் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{4}{5}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{4}{5}$)

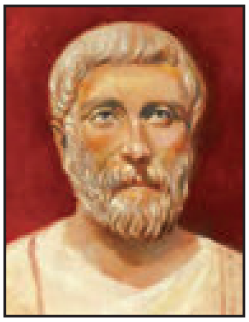
12. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $ABC$ -யின் ஒத்த பக்கங்களின் $\frac{6}{5}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{6}{5}$)

13. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $PQR$-ன் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{7}{3}$ என்றவாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{7}{3}$)

## 4.3 தேல்ஸ் தேற்றமும், கோண இருசமவெட்டித் தேற்றமும் (Thales Theorem and Angle Bisector Theorem)

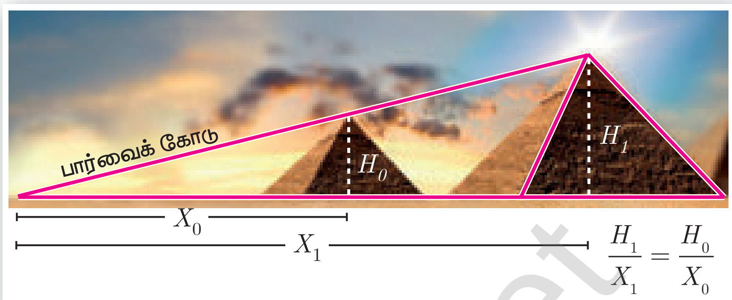
### 4.3.1 அறிமுகம்

கி.மு ஏழாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த தேல்ஸ் (கி.மு. (பொ.ஆ.மு) 640–540) புகழ்பெற்ற கிரேக்கக் கணிதவியலாளரும், தத்துவஞானியும் ஆவார். கிரேக்க நாட்டில் வாழ்ந்த ஏழு ஞானிகளில் இவர் முதன்மையானவராகக் கருதப்படுகிறார். எந்த ஒரு புதிய கருத்தையும் அறிவியல் பூர்வமாகப் பரிசோதித்த பின்னரே ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும் என்று முதன்முதலில் அறிவித்தவர் இவரே. அந்த வகையில் இவர் கணிதத்திலும், வானியியலிலும் ஆராய்ச்சிகள் மேற்கொண்டு பல கருத்துகளைக் கண்டறிந்தார். இன்றைய அடிப்படை விகிதச்சமத் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை முதன்முதலில் வழங்கிய


தேல்ஸ்
(640 - 540 கி.மு (பொ.ஆ.மு))

பெருமைக்குரியவர் தேல்ஸ் ஆவார். எனவே, இவருடைய பெயரால் இது "தேல்ஸ் தேற்றம்" என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தேல்ஸ் தேற்றத்தின் கண்டுபிடிப்பே ஒரு ஆர்வத்தைத் தூண்டக்கூடிய நிகழ்வாகும். இவர் ஒருமுறை எகிப்திய நாட்டிற்குச் சென்றபோது எகிப்தியர்கள் உருவாக்கிய பல அற்புதப் பிரமிடுகளின் உயரத்தைக் கணக்கிடுமாறு சவால் விடுத்தனர். சவாலை ஏற்றுக்கொண்ட தேல்ஸ், வடிவொத்த முக்கோணக் கருத்துகளைப் பயன்படுத்திச் சவாலில் வெற்றி பெற்றார். படத்தில் $X_0$, $X_1$ மற்றும் $H_0$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தெரியும். எனில், பிரமிடின் உயரம் $H_1$–ஐக் கணக்கிடலாம். இது வடிவியலின் மற்றொரு வெற்றிகரமான பயன்பாடாகும்.



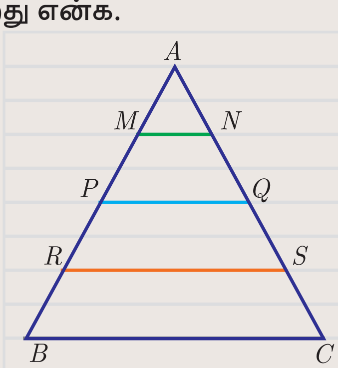

படம் 4.27

அடிப்படை விகிதச்சமத் தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்வதற்குக் கீழ்க்கண்ட செயல்பாட்டை அறிவோம்.

## செயல்பாடு 2

முக்கோணம் $ABC$–யின் அடிப்பக்கமானது கோடிட்ட காகிதத்தின் ஒரு கோட்டின் மேல் அமையுமாறு எடுத்துக் கொள்க. பல இணை கோடுகள் முக்கோணம் $ABC$–யை வெட்டும். இந்த இணைகோடுகளில் ஏதேனும் ஓர் இணைக்கோட்டை எடுத்துக்கொள்க. மேலும் இக்கோடு பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$–ஐ முறையே $P$ மற்றும் $Q$ –யில் வெட்டுகிறது என்க.

$\frac{AP}{PB}$ மற்றும் $\frac{AQ}{QC}$ –யின் விகிதங்களைக் காணமுடியுமா? $AP$, $PB$ , $AQ$ மற்றும் $QC$–ஐ அளவுகோலைக் கொண்டு அளவிட்டு விகிதங்கள் சமமாக உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்கவும். வெவ்வேறு இணைகோடுகள் $MN$, $RS$–க்கு $\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ மற்றும் $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க. இவ்விகிதங்கள் சமமாக உள்ளதா? இந்த முடிவுகளில் இருந்து வடிவியலின் மிக முக்கியமான தேற்றத்தைப் பற்றி நாம் விவாதிப்போம்.

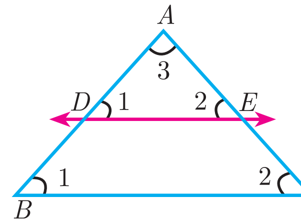



படம் 4.28

**தேற்றம் 1: அடிப்படை விகிதச்சம தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம் (Basic Proportionality Theorem (BPT) or Thales theorem)**

**கூற்று**

ஒரு நேர்கோடு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விரண்டு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.




படம் 4.29

**நிரூபணம்**

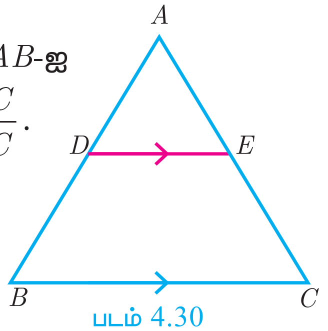
**கொடுக்கப்பட்டவை :** $\Delta ABC$ –யில் $AB$–யின் மேலுள்ள புள்ளி $D$, $AC$–யின் மேல் உள்ள புள்ளி $E$ ஆகும்

**நிரூபிக்க:** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ .   **அமைப்பு :** $DE \parallel BC$ வரைக.

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$ | ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$ |
| 2. | $\angle ACB = \angle AED = \angle 2$ | ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$ |
| 3. | $\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$ | இரு முக்கோணங்களும் ஒரு பொதுவான கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது |
| 4. | $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ | $AAA$ விதிமுறைப்படி |
| | $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ | ஒத்த பக்கங்கள் விகிதச்சமம் |
| | $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$ | $D$ மற்றும் $E$–ஐப் பயன்படுத்தி $AB$ மற்றும் $AC$–ஐ பிரித்தல். |
| | $1+\frac{DB}{AD} = 1+\frac{EC}{AE}$ | சுருக்குதல் |
| | $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ | இரு பக்கங்களிலும் $1$ –ஐ நீக்குக. |
| | $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ | தலைகீழாக மாற்றுக |
| | தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது | |

### கிளைத்தேற்றம்

$\Delta ABC$ -யில் $BC$-க்கு இணையான நேர்கோடு $DE$-யானது, $AB$-ஐ $D$-யிலும், $AC$-ஐ $E$-யிலும் வெட்டினால் (i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.



படம் 4.30

**நிரூபணம் :** $\Delta ABC$ -யில் $DE \parallel BC$

எனவே, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (அடிப்படை விகிதச்சம தேற்றப்படி)

(i) தலைகீழியாக எடுத்துக்கொண்டால் நாம் பெறுவது $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ ஆகும்.

இருபுறமும் 1ஐ கூட்ட, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$ ஆகையால், $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) இருபுறமும் 1ஐ கூட்ட,

$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

எனவே, $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையா? பின்வரும் விளக்கத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

### விளக்கம்

படம் 4.31–யில் காட்டியுள்ளபடி, உங்கள் குறிப்பேட்டில் $XAY$ என்ற கோணம் வரைந்து, $AX$ என்ற கதிரில் $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ செ.மீ என இருக்குமாறு $B_1, B_2, B_3, B_4$, $B$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

இதேபோல் கதிர் $AY$–யில் $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ செ.மீ இருக்குமாறு $C_1, C_2, C_3, C_4$ , $C$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். $B_1C_1$ மற்றும் $BC$–ஐ இணைக்கவும்.

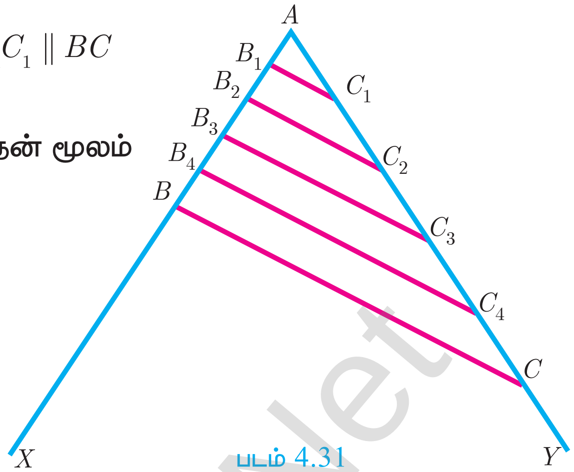
இதிலிருந்து $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ மற்றும் $B_1C_1 \parallel BC$

இதே போல் $B_2C_2$, $B_3C_3$ மற்றும் $B_4C_4$ –ஐ இணைப்பதன் மூலம்

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ மற்றும் $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ மற்றும் $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ மற்றும் $B_4C_4 \parallel BC$



படம் 4.31

ஆகையால், ஒரு கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களைச் சமவிகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில், அக்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகும் என்பதைப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

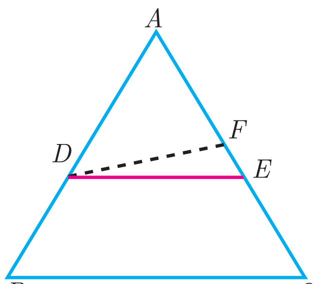
இக்கருத்தை முறையாக நிரூபிக்கும் தேற்றமானது அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலையாகும்.

### தேற்றம் 2: அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலை (அல்லது) தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Basic Proportionality Theorem)

**கூற்று**

ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களைச் சமவிகிதத்தில் பிரித்தால், அந்நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்**



படம் 4.32

**கொடுக்கப்பட்டவை :** $\Delta ABC$ -யில், $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

**நிரூபிக்க :** $DE \parallel BC$

**அமைப்பு :** $DE$ ஆனது $BC$ -க்கு இணையாக இல்லையெனில், $DF \parallel BC$ என்றவாறு $DF$ -ஐ வரைக.

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\Delta ABC$ -யில் $DF \parallel BC$ | அமைப்பு |
| 2. | $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ...(1) | கொடுக்கப்பட்டது |
| 3. | $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ ... (2) | தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி, ($\Delta ABC$ -யில், $AC$-யில் $F$ –ஐ எடுத்துக்கொள்க). |

| | | |
|---|---|---|
| 4. | $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AF}{FC}$ | (1) மற்றும் (2) –லிருந்து |
| | $\dfrac{AE}{EC} + 1 = \dfrac{AF}{FC} + 1$ | இருபுறமும் $1$–ஐ கூட்ட |
| | $\dfrac{AE+EC}{EC} = \dfrac{AF+FC}{FC}$ | |
| | $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AC}{FC}$ | |
| | $\mathrm{EC} = \mathrm{FC}$ | இருபுறமும் $AC$–ஐ நீக்குக |
| | எனவே, $F = E$ | ஆகவே $DE$ ஆனது $BC$–க்கு இணையாக இல்லை என்ற கருதுகோள் தவறு |
| | இதிலிருந்து, $DE \parallel BC$ | தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது |

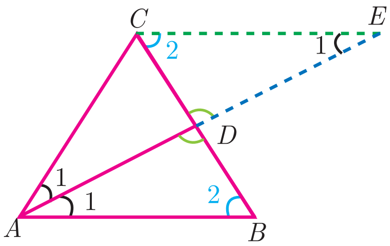
## தேற்றம் 3: கோண இருசமவெட்டி தேற்றம் (Angle Bisector Theorem)

**கூற்று**

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

**நிரூபணம்**

**கொடுக்கப்பட்டவை** : $\Delta$ ABC-யில் $AD$–யானது $\angle A$–யின் உட்புற இருசமவெட்டி




படம் 4.33

**நிரூபிக்க** : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$

**அமைப்பு** : $AB$ –க்கு இணையாக $C$ வழியாகச் ஒரு இணைகோடு வரைக. $AD$–யின் நீட்சியானது $C$ வழியாக செல்லும் கோட்டினை $E$ –யில் சந்திக்கிறது

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$ | ஒரு குறுக்குவெட்டியானது இரண்டு இணைகோடுகளை வெட்டுவதால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம். |
| 2. | $\Delta ACE$ என்பது இரு சமபக்க முக்கோணம். $\mathrm{AC} = \mathrm{CE}$ … (1) | $\Delta ACE$ -யில் $\angle CAE = \angle CEA$. |
| 3. | $\Delta ABD \sim \Delta ECD$ $\dfrac{AB}{CE} = \dfrac{BD}{CD}$ | AA விதிமுறைப்படி. |
| 4. | $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$ | (1) -லிருந்து, $AC = CE$. தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. |

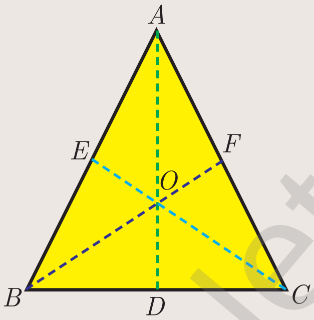
### செயல்பாடு 3

**படி 1:** படம் 4.34(i)-யில் காட்டியுள்ளபடி, வரைபட அட்டையை முக்கோண வடிவத்தில் வெட்டிக் கொள்ளவும்.

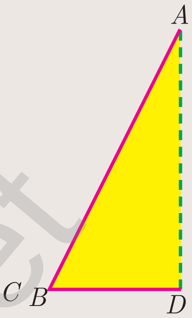
**படி 2:** புள்ளிகள் $C$ மற்றும் $B$ ஆனது ஒன்றின்மீது ஒன்று பொருந்துமாறு சமச்சீர் கோடு $AD$-ஐக் கொண்டு மடிக்கவும்.

**படி 3:** இதேபோல $CE$-ஐ மடிக்கும்போது, புள்ளிகள் $B$ மற்றும் $A$ ஒன்றின்மீது ஒன்று பொருந்தி இருக்கும்.

**படி 4:** இதேபோல $BF$ -ஐ மடிக்கும்போது, புள்ளிகள் $A$ மற்றும் $C$ ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தி இருக்கும்



படம் 4.34(i)



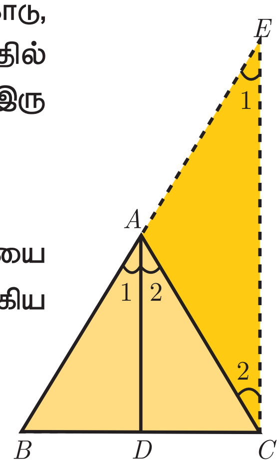
படம் 4.34(ii)

அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி $AB, AC, BD, DC$ -யின் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், $\frac{AB}{AC}, \frac{BD}{DC}$ ஆனது சமமாக உள்ளதா எனச் சரிபார்க்கவும்? இந்த மூன்று நிலைகளிலிருந்து, ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டியானது அதன் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. இந்தச் செயல்பாட்டிலிருந்து நீ என்ன முடிவுக்கு வருகிறாய்?

## தேற்றம் 4: கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Angle Bisector Theorem)

**கூற்று**

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து செல்லும் ஒரு நேர்கோடு, அதன் எதிர் பக்கத்தினை உட்புறமாக மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு அமைந்த முனைக் கோணத்தினை உட்புறமாக இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.



படம் 4.35

**நிரூபணம்**

**கொடுக்கப்பட்டது** : $ABC$ என்பது ஒரு முக்கோணம். $AD$ ஆனது பக்கம் $BC$-யை $D$ என்ற புள்ளியில் கோணம் $\angle A$-யை உள்ளடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

அதாவது $$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \ldots (1)$$

**நிரூபிக்க** : $\angle A$-யின் உட்புற இருசமவெட்டி $AD$. அதாவது $\angle 1 = \angle 2$

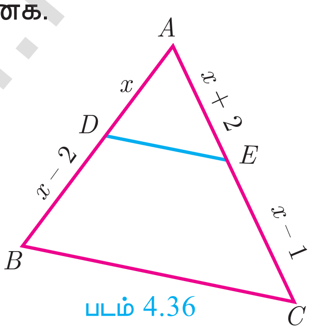
**அமைப்பு** : $CE \parallel DA$ வரைக. $BA$–யின் நீட்சி $E$ -யில் சந்திக்கிறது.

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\angle BAD = \angle 1$ மற்றும் $\angle DAC = \angle 2$ என்க. | அனுமானம் |
| 2. | $\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$ | $DA \parallel CE$ ஒத்தகோணங்கள் சமம். |
| 3. | $\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$ | $DA \parallel CE$ மற்றும் $AC$ ஆனது குறுக்குவெட்டி. ஆகையினால், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம். |

| | | |
|---|---|---|
| 4. | $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ … (2) | $\Delta BCE$ –யில் தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி. |
| 5. | $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ | (1)-லிருந்து. |
| 6. | $\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$ | (1) மற்றும் (2) -லிருந்து. |
| 7. | AC = AE … (3) | $AB$ -ஐ நீக்க. |
| 8. | $\angle 1 = \angle 2$ | (3) -லிருந்து $\Delta ACE$ ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம். |
| 9. | $\angle A$-யின் உட்புற இருசமவெட்டி $AD$ | $\angle 1 = \angle BAD = \angle 2 = \angle DAC$ என்பதால், தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. |

**எடுத்துக்காட்டு 4.12** $\triangle ABC$ –யில் $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x-2$, $AE = x+2$ மற்றும் $EC = x-1$ எனில், பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$ -யின் நீளங்களைக் காண்க.

**தீர்வு** $\Delta ABC$ -யில் $DE \parallel BC$ .



படம் 4.36

தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மூலம் நாம் பெறுவது, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ –லிருந்து, $x(x-1) = (x-2)(x+2)$

ஆகவே, $x^2 - x = x^2 - 4$ எனவே, $x = 4$

$x = 4$ எனில், $AD = 4$, $DB = x-2 = 2$, $AE = x+2 = 6$, $EC = x-1 = 3$.

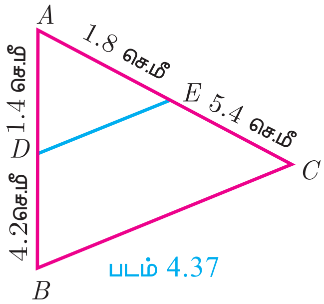
எனவே, $AB = AD + DB = 4+2 = 6$, $AC = AE + EC = 6+3 = 9$.

ஆகவே, $AB = 6$, $AC = 9$.

**எடுத்துக்காட்டு 4.13** $\Delta ABC$ -யின் பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$-ல் அமைந்த புள்ளிகள் முறையே $D$ மற்றும் $E$ மேலும், $AB$=5.6 செ.மீ, AD=1.4 செ.மீ, $AC$=7.2 செ.மீ மற்றும் $AE$ = 1.8 செ.மீ எனில், $DE \parallel BC$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $AB = 5.6$ செ.மீ, $AD = 1.4$ செ.மீ, $AC = 7.2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 1.8$ செ.மீ.

$BD = AB - AD$ = 5.6–1.4 = 4.2 செ.மீ



படம் 4.37

மற்றும் $EC = AC - AE$ = 7.2–1.8 = 5.4 செ.மீ.

$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{1}{3}$ மற்றும் $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{1}{3}$

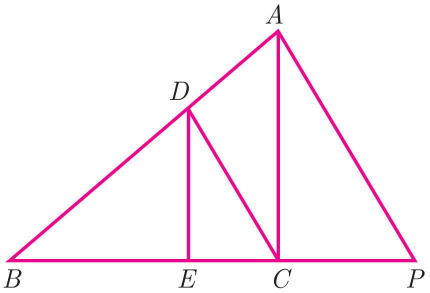
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

எனவே, அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $DE$ -யானது $BC$-க்கு இணை ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.14** படம் 4.38-யில், $DE \parallel AC$ மற்றும் $DC \parallel AP$ எனில், $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** $\triangle BPA$ -யில், $DC \parallel AP$ என்பதால், அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி,

நாம் பெறுவது, $\dfrac{BC}{CP} = \dfrac{BD}{DA}$ $\ldots(1)$



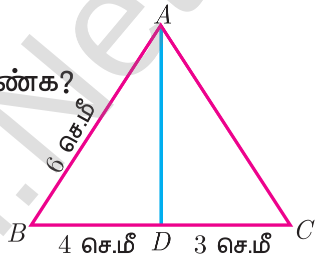
படம் 4.38

$\Delta BCA$-யில், $DE \parallel AC$ என்பதால், அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி,

நாம் பெறுவது, $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BD}{DA}$ $\ldots(2)$

$(1)$ மற்றும் $(2)$ -லிருந்து, $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BC}{CP}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

**எடுத்துக்காட்டு 4.15** படம் 4.39 -யில் $\angle A$ -யின் இருசமவெட்டி $AD$ ஆகும். $BD = 4$ செ.மீ, $DC = 3$ செ.மீ மற்றும் $AB = 6$ செ.மீ எனில், $AC$-யைக் காண்க?



படம் 4.39

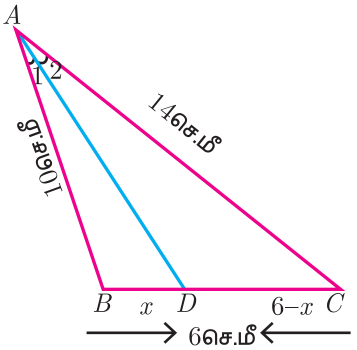
**தீர்வு** $\Delta ABC$ -யில், $\angle A$ -யின் இருசமவெட்டி $AD$ ஆகும்.

எனவே, கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{AC}$ –லிருந்து, $4AC = 18$. எனவே, $AC = \dfrac{9}{2} = 4.5$ செ.மீ

**எடுத்துக்காட்டு 4.16** படம் 4.40–யில், AD என்பது $\angle BAC$ –யின் இருசமவெட்டியாகும். $AB = 10$ செ.மீ, $AC = 14$ செ.மீ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ. எனில், $BD$ மற்றும் $DC$-ஐ காண்க.



படம் 4.40

**தீர்வு** $BD = x$ செ.மீ என்க. $DC = (6-x)$செ.மீ

$\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி $AD$ ஆகும்

எனவே, கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$\dfrac{10}{14} = \dfrac{x}{6-x}$ -லிருந்து $\dfrac{5}{7} = \dfrac{x}{6-x}$

$12x = 30$ எனவே, $x = \dfrac{30}{12} = 2.5$ செ.மீ

ஆகவே, $BD = 2.5$ செ.மீ, $DC = 6 - x = 6 - 2.5 = 3.5$ செ.மீ

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு ________ வரையப்படும் நேர்கோடு மற்ற இரு பக்கங்களை விகிதசமத்தில் பிரிக்கும்.
2. அடிப்படை விகிதசம தேற்றம் ________ என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

3. $\Delta ABC$ என்பது சமபக்க முக்கோணம் என்க. இதில் $BC$-யின் மேலுள்ள புள்ளி $D$ மற்றும் $\angle A$ –யின் உட்புற இருசமவெட்டி $AD$ ஆகும். கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால் $\frac{BD}{DE}$ என்பது ________ ஆகும்.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் ________ ஆனது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

5. $\Delta ABC$ –யில் பக்கம் $BC$–யின் நடுக்கோடு $AD$–யானது $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டியாகவும் இருந்தால், $\frac{AB}{AC}$ ஆனது ________.

## 4.3.2 முக்கோணங்கள் வரைதல் (Construction of triangle)

முந்தைய வகுப்பில் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணங்கள் எவ்வாறு வரைவது எனக் கற்றுள்ளோம். இப்பகுதியில்

(i) அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் நடுக்கோடு

(ii) அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு

(iii) அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் உச்சிக் கோணத்தின் இருசமவெட்டி அடிப்பக்கத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி

ஆகியன கொடுக்கப்பட்டால் எவ்வாறு முக்கோணம் வரைவது எனக் காண்போம். கீழ்க்கண்ட வரைதலை முதலில் காண்போம்.

### கோணம் θ–வை உள்ளடக்கிய கொடுக்கப்பட்ட கோட்டுத் துண்டின் மேல் அமைந்த வட்டப்பகுதியை வரைதல்

**வரைமுறை**

**படி 1:** $\overline{AB}$ என்ற கோட்டுத் துண்டு வரைக.

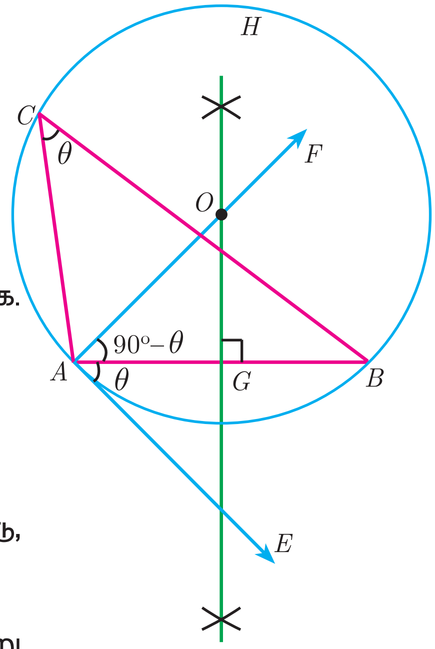
**படி 2:** புள்ளி $A$-யில் $\angle BAE = \theta$ என அமையுமாறு $AE$ வரைக.

**படி 3:** $AF \perp AE$ வரைக.

**படி 4:** $AB$-க்கு வரையப்படும் மையக் குத்துக்கோடானது $AF$-யை $O$-யில் சந்திக்கிறது.

**படி 5:** $O$-வை மையமாகவும், $OA$-வை ஆரமாகவும், கொண்டு, ஒரு வட்டம் வரைக.

**படி 6:** வட்டத்தின்மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $C$ ஆகும். மாற்று வட்டத் துண்டு தேற்றத்தின்படி பெரிய வில் $ACB$ ஆனது கோணம் $\theta$ –வை உள்ளடக்கிய தேவையான வட்டப்பகுதி ஆகும்.



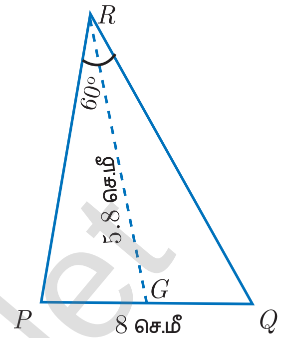
படம் 4.41

**குறிப்பு**

➤ $C_1, C_2, \ldots$ என்பன வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள் எனில், $\Delta BAC_1$, $\Delta BAC_2, \ldots$ ஆகியவை ஒரே அடிப்பக்கமும், ஒரே உச்சிக் கோணமும் கொண்ட முக்கோணங்களாகும்.

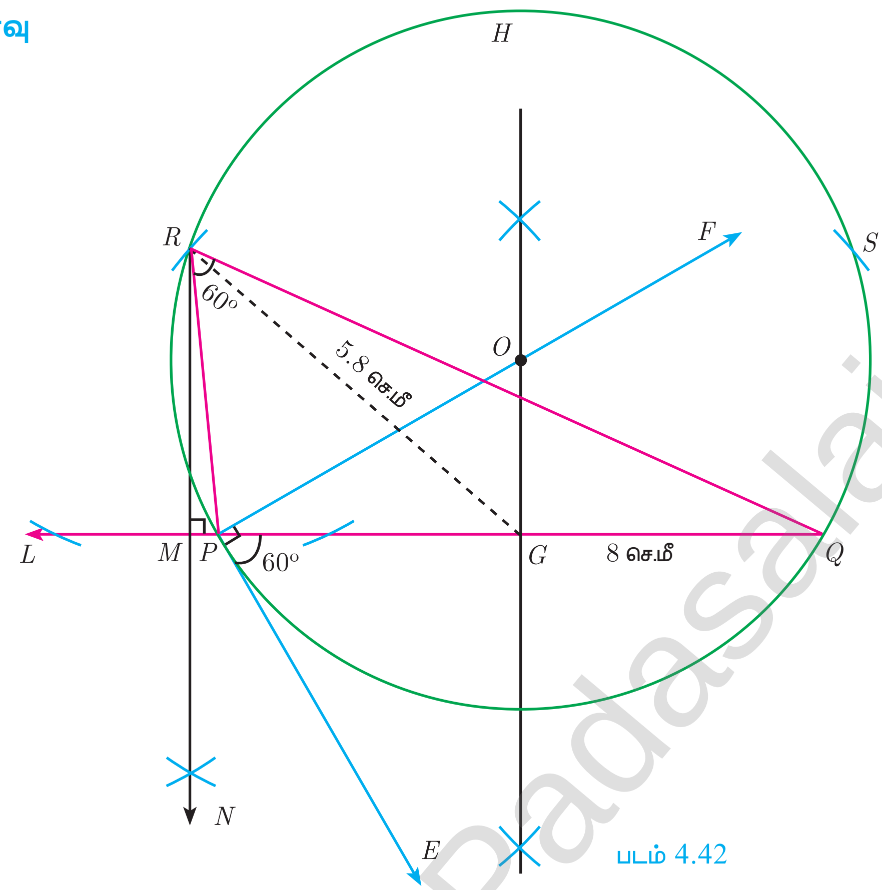
### அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.17** $PQ = 8$ செ.மீ, $\angle R = 60^\circ$ உச்சி $R$-லிருந்து $PQ$-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் $RG = 5.8$ செ.மீ. என இருக்குமாறு $\Delta PQR$ வரைக. $R$–லிருந்து $PQ$–க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.




உதவிப்படம்

**தீர்வு**




படம் 4.42

**வரைமுறை**

**படி 1:** $PQ = 8$செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

**படி 2:** புள்ளி $P$ வழியே $\angle QPE = 60^\circ$ என இருக்கும்படி $PE$ வரைக.

**படி: 3** புள்ளி $P$ வழியே $\angle EPF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி $PF$ வரைக. .

**படி 4:** $PQ$-க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடு $PF$-ஐ $O$-விலும், $PQ$-ஐ $G$-யிலும் சந்திக்கிறது.

**படி 5:** $O$-வை மையமாகவும், $OP$-யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

**படி 6:** $G$-யிலிருந்து $5.8$ செ.மீ ஆரமுள்ள வில்களை வட்டத்தில் வெட்டுமாறு வரைக. அவை வெட்டும் புள்ளிகளை $R$ மற்றும் $S$ எனக் குறிக்கவும்.

**படி 7 :** $PR$ மற்றும் $RQ$ -ஐ இணைக்கவும். $\Delta PQR$ தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

**படி 8 :** $R$ -லிருந்து $LQ$-க்கு செங்குத்துக்கோடு $RN$ வரைக. $RN$ ஆனது $LQ$-வை $M$-யில் சந்திக்கிறது.

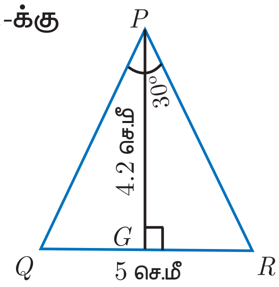
**படி 9:** குத்துக்கோடு $RM$-யின் நீளம் $3.5$ செ.மீ.

**குறிப்பு**

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்கு $\Delta PQS$ என்பது தேவையான மற்றொரு முக்கோணம் ஆகும்

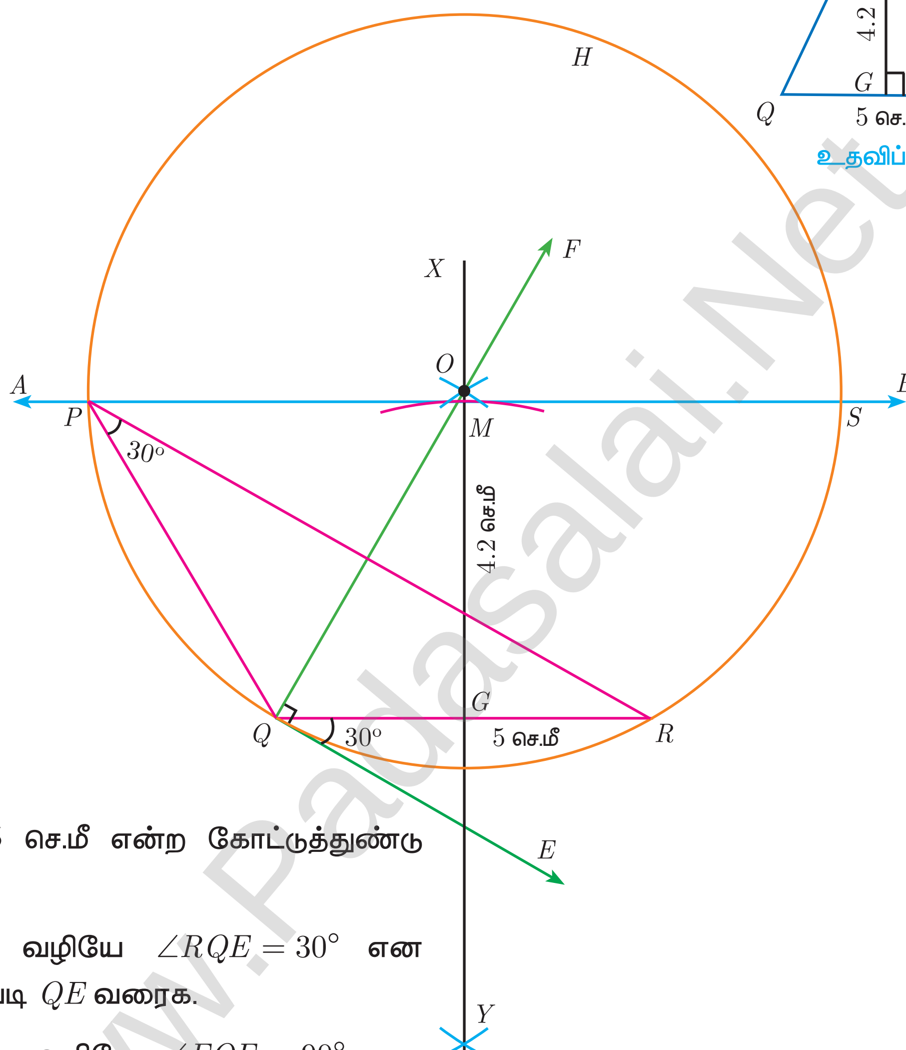
### அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.18** $QR = 5$ செ.மீ, $\angle P = 30^\circ$ மற்றும் $P$–யிலிருந்து $QR$-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் $4.2$ செ.மீ கொண்ட $\Delta PQR$ வரைக.



உதவிப்படம்

**தீர்வு**



படம் 4.43

**வரைமுறை**

**படி 1 :** $QR = 5$ செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

**படி 2 :** புள்ளி $Q$ வழியே $\angle RQE = 30^\circ$ என இருக்கும்படி $QE$ வரைக.

**படி 3 :** புள்ளி $Q$ வழியே $\angle EQF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி $QF$ வரைக.

**படி 4 :** $QR$-க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடு $XY$-யானது $QF$-ஐ, $O$-விலும் $QR$-ஐ $G$-யிலும் சந்திக்கிறது.

**படி 5 :** $O$-வை மையமாகவும், $OQ$ -வை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

**படி 6:** $G$-யிலிருந்து மையக்குத்துக் கோடு $XY$-ல், $GM = 4.2$ செ.மீ இருக்கும்படி ஒரு வில் வரைக.

**படி 7 :** $QR$-க்கு இணையாக $M$ வழியே $AB$ என்ற கோடு வரைக.

**படி 8 :** $AB$-யானது வட்டத்தை $P$ மற்றும் $S$ -யில் சந்திக்கிறது

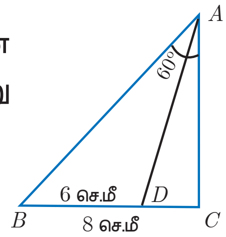
**படி 9 :** $QP$ மற்றும் $RP$ -யை இணைக்கவும். $\triangle PQR$ ஆனது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

**குறிப்பு**

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்கு $\Delta SQR$ என்பது தேவையான மற்றொரு முக்கோணம் ஆகும்.

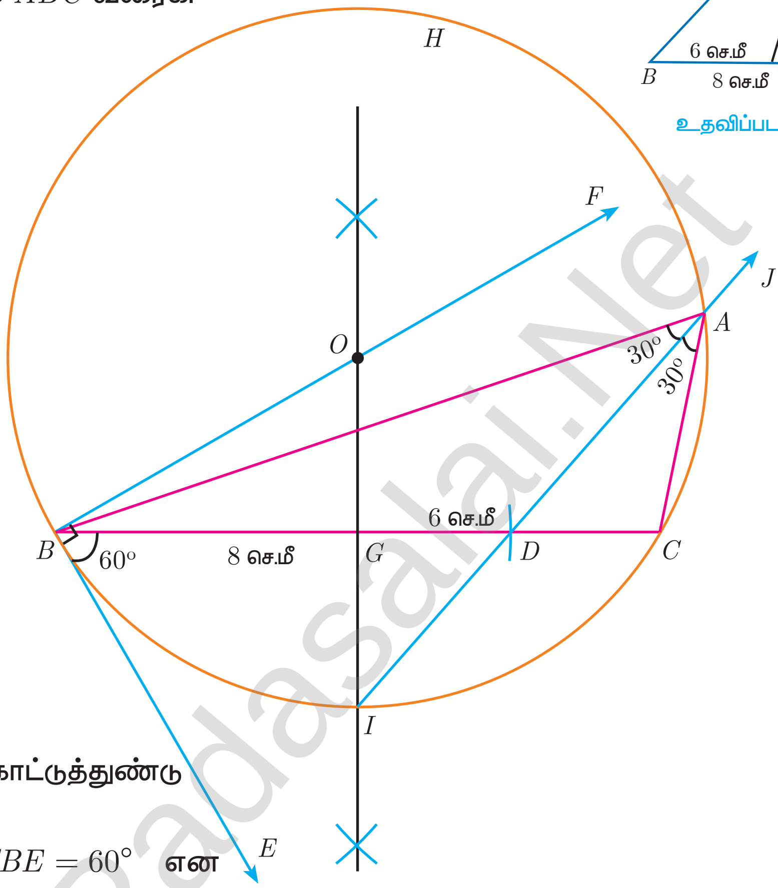
## அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் உச்சிக்கோணத்தின் இருசமவெட்டி அடிப்பக்கத்தைத் தொடும் புள்ளி தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.19** அடிப்பக்கம் $BC = 8$ செ.மீ, $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் $\angle A$ -யின் இருசமவெட்டியானது $BC$-ஐ $D$ என்ற புள்ளியில் $BD = 6$ செ.மீ என்றவாறு சந்திக்கிறது எனில், முக்கோணம் $ABC$ வரைக.




உதவிப்படம்

**தீர்வு**




படம் 4.44

**வரைமுறை**

**படி 1 :** $BC = 8$ செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

**படி 2 :** புள்ளி $B$ வழியே $\angle CBE = 60^\circ$ என இருக்கும்படி $BE$ வரைக.

**படி 3 :** புள்ளி $B$ வழியே $\angle EBF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி $BF$ வரைக.

**படி 4 :** $BC$-க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக்கோடானது $BF$-ஐ $O$-விலும், $BC$-யை $G$-யிலும் சந்திக்கிறது.

**படி 5 :** $O$ -வை மையமாகவும், $OB-$யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

**படி 6 :** புள்ளி $B$ -யிலிருந்து $BC$-யில் 6 செ.மீ தொலைவில் $D$ என்ற புள்ளிக்கு ஒரு வில் வரைக.

**படி 7 :** மையக்குத்துக்கோடானது வட்டத்தை $I$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. $ID$-யை இணைக்கவும்.

**படி 8 :** $ID$-யை வட்டத்தில் $A$-யில் சந்திக்குமாறு நீட்டவும். $AB$ மற்றும் $AC$-யை இணைக்கவும். $\triangle ABC$ என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

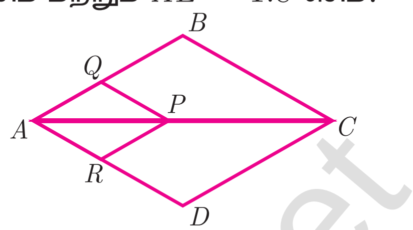
## பயிற்சி 4.2

1. $\Delta ABC$ யின் பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$ -யின் மீதுள்ள புள்ளிகள் முறையே $D$ மற்றும் $E$ ஆனது $DE \parallel BC$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. (i) $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{4}$ மற்றும் $AC = 15$ செ.மீ எனில் $AE$ -யின் மதிப்பு காண்க. (ii) $AD = 8x - 7$, $DB = 5x - 3$, $AE = 4x - 3$ மற்றும் $EC = 3x - 1$ எனில், $x$ -ன் மதிப்பு காண்க.

2. $ABCD$ என்ற ஒரு சரிவகத்தில் $AB \parallel DC$ மற்றும் $P$, $Q$ என்பன முறையே பக்கங்கள் $AD$ மற்றும் $BC$–யின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். மேலும் $PQ \parallel DC$, $PD = 18$ செ.மீ, $BQ = 35$ செ.மீ மற்றும் $QC = 15$ செ.மீ எனில், $AD$ காண்க.

3. $\triangle ABC$ -யில் $D$ மற்றும் $E$ என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$ ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. பின்வருவனவற்றிற்கு $DE \parallel BC$ என நிறுவுக.
   (i) $AB = 12$ செ.மீ, $AD = 8$ செ.மீ, $AE = 12$ செ.மீ மற்றும் $AC = 18$ செ.மீ.
   (ii) $AB = 5.6$ செ.மீ, $AD = 1.4$ செ.மீ, $AC = 7.2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 1.8$ செ.மீ.

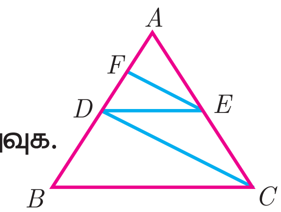
4. படத்தில் $PQ \parallel BC$ மற்றும் $PR \parallel CD$ எனில்
   (i) $\dfrac{AR}{AD} = \dfrac{AQ}{AB}$ (ii) $\dfrac{QB}{AQ} = \dfrac{DR}{AR}$ என நிறுவுக.




5. $\Delta ABC$ –யின் உள்ளே $\angle B$ ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்ட சாய்சதுரம் $PQRB$ அமைந்துள்ளது. $P$, $Q$ மற்றும் $R$ என்பன முறையே பக்கங்கள் $AB$, $AC$ மற்றும் $BC$ மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். $AB = 12$ செ.மீ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ எனில், சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் $PQ$, $RB$ -யைக் காண்க.

6. சரிவகம் $ABCD$-யில் $AB \parallel DC$ , $E$ மற்றும் $F$ என்பன முறையே இணையற்ற பக்கங்கள் $AD$ மற்றும் $BC$ -ன் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள், மேலும் $EF \parallel AB$ என அமைந்தால் $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC}$ என நிறுவுக.

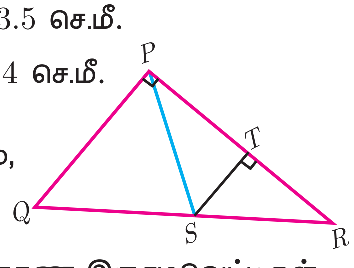
7. படத்தில் $DE \parallel BC$ மற்றும் $CD \parallel EF$ எனில் $AD^2 = AB \times AF$ என நிறுவுக.




8. $\Delta ABC$ -யில் $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி $AD$ ஆனது பக்கம் $BC$ -ஐ $D$-யில் சந்திக்கிறது. $AB = 10$ செ.மீ, $AC = 14$ செ.மீ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ எனில், $BD$ மற்றும் $DC$ –ஐக் காண்க.

9. பின்வருவனவற்றுள் $\Delta ABC$ -யில் $AD$ ஆனது $\angle A$-யின் இருசமவெட்டி ஆகுமா எனச் சோதிக்கவும்.
   (i) $AB = 5$ செ.மீ, $AC = 10$ செ.மீ, $BD = 1.5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 3.5$ செ.மீ.
   (ii) $AB = 4$ செ.மீ, $AC = 6$ செ.மீ, $BD = 1.6$ செ.மீ மற்றும் $CD = 2.4$ செ.மீ.

10. படத்தில் $\angle QPR = 90^\circ$ , PS ஆனது $\angle P$ –யின் இருசமவெட்டி மேலும், $ST \perp PR$ எனில், $ST \times (PQ + PR) = PQ \times PR$ என நிறுவுக. .




11. நாற்கரம் $ABCD$-யில் $AB = AD$, $\angle BAC$ மற்றும் $\angle CAD$ –யின் கோண இருசமவெட்டிகள் $BC$ மற்றும் $CD$ ஆகிய பக்கங்களை முறையே $E$ மற்றும் $F$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன எனில், $EF \parallel BD$ என நிறுவுக.

12. $PQ = 4.5$ செ.மீ, $\angle R = 35^\circ$ மற்றும் உச்சி $R$–யிலிருந்து வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் $RG = 6$ செ.மீ என அமையுமாறு $\Delta PQR$ வரைக.

13. $QR = 5$ செ.மீ, $\angle P = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி $P$-யிலிருந்து $QR$-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் $PG = 4.4$ செ.மீ என இருக்கும்படி $\Delta PQR$ வரைக. மேலும் $P$-லிருந்து $QR$-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

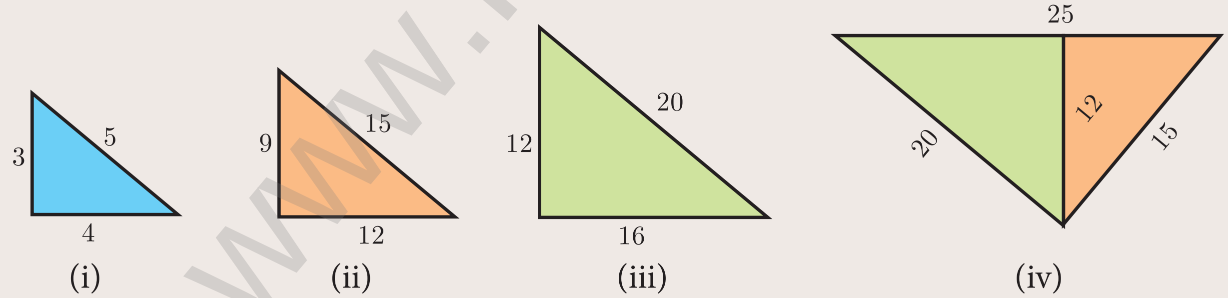
14. $QR = 6.5$ செ.மீ, $\angle P = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி $P$-யிலிருந்து $QR$-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் $4.5$ செ.மீ உடைய $\Delta PQR$ வரைக.
15. $AB=5.5$ செ.மீ, $\angle C = 25^\circ$ மற்றும் உச்சி $C$-யிலிருந்து $AB$-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் $4$ செ.மீ உடைய $\Delta ABC$ வரைக.
16. அடிப்பக்கம் $BC = 5.6$ செ.மீ, $\angle A = 40^\circ$ மற்றும் $\angle A$-யின் இருசமவெட்டியானது அடிப்பக்கம் $BC$–ஐ $CD=4$ செ.மீ என $D$-யில் சந்திக்குமாறு அமையும் முக்கோணம் $ABC$ வரைக.
17. $PQ=6.8$ செ.மீ, உச்சிக்கோணம் $50^\circ$ மற்றும் உச்சிக்கோணத்தின் இருசமவெட்டியானது அடிப்பக்கத்தை $PD= 5.2$ செ.மீ என $D$-யில் சந்திக்குமாறு அமையும் $\Delta PQR$ வரைக.

## 4.4 பிதாகரஸ் தேற்றம் (Pythagoras Theorem)

கணிதத்தில் உள்ள அனைத்துத் தேற்றங்களிலும், பிதாகரஸ் தேற்றம்தான் மிகவும் முக்கியமானதாகக் கருதப்படுகிறது. ஏனெனில் இது அதிக அளவிலான நிரூபணங்களைக் கொண்டுள்ளது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிரூபிக்க $350$–க்கும் அதிகமான வெவ்வேறு வழிமுறைகள் உள்ளன. இந்த நிரூபணங்கள் ஒவ்வொன்றும் சிறந்த கணிதவியலாளர்கள், அறிஞர்கள், பொறியாளர்கள் மற்றும் கணித ஆர்வலர்கள் ஆகியோரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இவர்களில் அமெரிக்காவின் $20$-வது ஜனாதிபதி ஜேம்ஸ் கார்பீல்டும் ஒருவர். அமெரிக்காவிலுள்ள கணிதம் கற்பித்தலுக்கான தேசிய மன்றம் (NCTM) வெளியிட்டுள்ள எலிஷாஸ்காட் லூமிஸ் எழுதிய "The Pythogoream Propostion" என்ற தலைப்பிலான புத்தகத்தில் பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் $367$ நிரூபணங்கள் உள்ளன.

மூன்று எண்கள் $(a,b,c)$ என்பன செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனில், அந்த மூன்று எண்கள் $(a,b,c)$–ஐ பிதாகோரியனின் மூன்றின் தொகுதி என அழைக்கலாம். ஆகவே, $(a,b,c)$ என்பவை பிதாகோரியனின் மூன்றின் தொகுதி எனில், $c^2 = a^2 + b^2$. வடிவியல் மட்டுமல்லாது, கணிதத்தின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் மிகப் பிரபலமானதும், முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததுமான இத்தேற்றத்தைப் பற்றி இப்பொழுது கற்போம்.

### செயல்பாடு 4




படம் 4.45

**படி 1:** ஒரு வரைபடத்தாளில், முக்கோணம் (i)-யில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்கு ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை வெட்டுக.

**படி 2:** மூன்று வெவ்வேறு வண்ண வரைபடத்தாள்களைக் கொண்டு முக்கோணம் (ii) -யின் பக்க அளவுகள் முக்கோணம் (i)-யின் பக்கங்களின் மூன்று மடங்காகவும், முக்கோணம் (iii)-யின் பக்க அளவுகள் முக்கோணம் (i)-யின் பக்கங்களின் நான்கு மடங்காகவும், முக்கோணம் (iv)-யின் பக்க அளவுகள் முக்கோணம் (i)-யின் பக்கங்களின் ஐந்து மடங்காகவும் இருக்குமாறு மூன்று முக்கோணங்களை வெட்டுக.

**படி 3:** முக்கோணங்கள் (ii) மற்றும் (iii)-யில் பொதுவான அளவு 12 உள்ள பக்கங்களை இணைத்து அவற்றை முக்கோணம் (iv)-யின் மீது வைக்கும்போது இவ்விரு முக்கோணங்களும் (iv)-வோடு ஒன்றின்மீது ஒன்று சரியாகப் பொருந்தியிருக்கும்.

கர்ணத்தின் சமன்பாட்டை எழுதவும். இதிலிருந்து என்ன முடிவுக்கு வருகிறாய்?

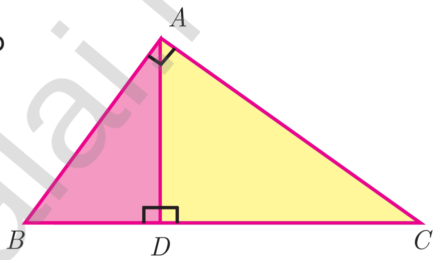
**குறிப்பு**

- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் $90^\circ$ (செங்கோணம்)–க்கு எதிராக உள்ள பக்கம் கர்ணம் என்றழைக்கப்படுகிறது.
- மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனப்படுகிறது.
- செங்கோண முக்கோணத்தில் மிக நீளமான பக்கமே கர்ணம் ஆகும்.

## தேற்றம் 5 : பிதாகரஸ் தேற்றம் (Pythagoras Theorem)

**கூற்று**

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.



படம் 4.46

**நிரூபணம்**

கொடுக்கப்பட்டது: $\Delta ABC$, -யில் $\angle A = 90^\circ$

நிரூபிக்க : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

அமைப்பு : $AD \perp BC$ வரைக.

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta ABD$ –ஐ ஒப்பிடுக.<br>$\angle B$ பொதுவானது<br>$\angle BAC = \angle BDA = 90^\circ$<br>எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta ABD$<br>$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$<br>$AB^2 = BC \times BD \quad \ldots (1)$ | $\angle BAC = 90^\circ$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும்<br>$\angle BDA = 90^\circ$ அமைப்பிலிருந்து<br>AA விதிமுறைப்படி |
| 2. | $\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta ADC$ –ஐ ஒப்பிடுக<br>$\angle C$ பொதுவானது<br>$\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$<br>எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta ADC$<br>$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$<br>$AC^2 = BC \times DC \quad \ldots (2)$ | $\angle BAC = 90^\circ$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும்<br>$\angle CDA = 90^\circ$ அமைப்பிலிருந்து<br>AA விதிமுறைப்படி |

(1) மற்றும் (2) –ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC) = BC \times BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**
இந்தியாவில் பிதாகரஸ் தேற்றமானது "போதயானா தேற்றம்" என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

### சிந்தனைக் களம்

1. ஐந்து பிதாகோரியனின் மூன்றன் தொகுதிகளை எழுதுக.
2. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் ______.

## பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Pythagoras Theorem)

**கூற்று**

ஒரு முக்கோணத்தில் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

### சிந்தனைக் களம்

செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளும் ஒற்றை எண்களாக இருக்க இயலுமா? ஏன்?

### செயல்பாடு 5

(i) இரு அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

(ii) அந்த இரு எண்களின் தலைகீழிகளை எழுதிக் கூட்டவும். அது $\frac{p}{q}$ வடிவில் இருக்கும்.

(iii) $\frac{p}{q}$ –யில் பகுதியுடன் 2 ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது $q+2$.

(iv) இப்பொழுது $p,\ q,\ q+2$ என்ற எண்களைக் கருதுக. இந்த மூன்று எண்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

இந்தச் செயல்பாட்டை, மூன்று ஜோடி அடுத்தடுத்த ஒற்றை எண்களைக் கொண்டு செய்து பார்த்து உங்கள் பதிலைக் குறிப்பிடுக.

**எடுத்துக்காட்டு 4.20** ஒரு விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 6 மீ. அதன் அடியிலிருந்து 8 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு பூச்சி, கம்பத்தை நோக்கி ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு நகர்கிறது. கம்பத்தின் உச்சிக்கும் தற்பொழுது பூச்சி இருக்கும் இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு, பூச்சி கம்பத்தை நோக்கி நகர்ந்த தொலைவிற்குச் சமம் எனில், கம்பத்தின் அடியிலிருந்து பூச்சி தற்பொழுது எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

**தீர்வு** விளக்கு கம்பத்தின் அடிக்கும், பூச்சிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு $BD = 8$ மீ

விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் $AB = 6$ மீ

$x$ மீ தொலைவு நகர்ந்த பின்பு, பூச்சி இருக்கும் இடம் $C$ என்க.

$AC = CD = x$ என்க. மேலும் $BC = BD - CD = 8 - x$

$\Delta ABC$ –யில், $\angle B = 90^\circ$

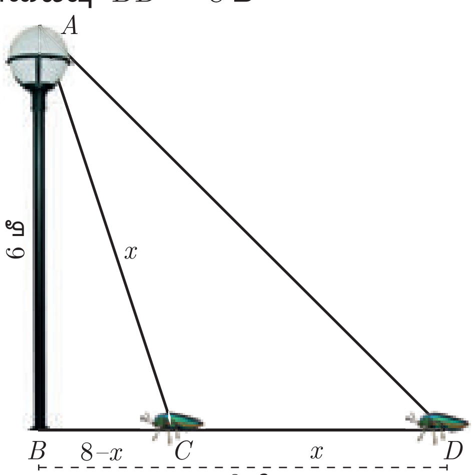
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ –யிலிருந்து $x^2 = 6^2 + (8-x)^2$

$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$

$16x = 100$ எனவே, $x = 6.25$

எனில், $BC = 8 - x = 8 - 6.25 = 1.75$ மீ

எனவே, பூச்சியானது விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 1.75 மீ தொலைவில் உள்ளது.

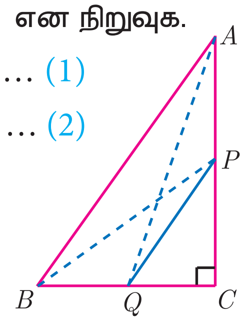


படம் 4.47

**எடுத்துக்காட்டு 4.21** $\Delta ABC$ –யில் $C$ ஆனது செங்கோணம் ஆகும். பக்கங்கள் $CA$ மற்றும் $CB$-யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $P$ மற்றும் $Q$ எனில் $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ என நிறுவுக.

**தீர்வு** $\Delta AQC$ -யில், $C$ ஆனது, செங்கோணம் என்பதால், $AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ... (1)

$\Delta BPC$ -யில், $C$ ஆனது, செங்கோணம் என்பதால், $BP^2 = BC^2 + CP^2$ ... (2)



படம் 4.48

(1) மற்றும் (2) )–லிருந்து, $AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

$$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$$

$$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$$

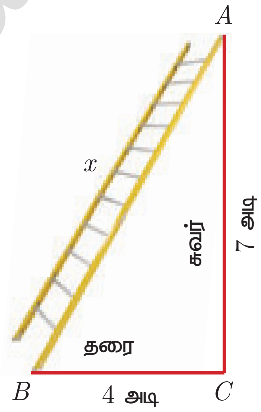
$$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2$$ ($P$ மற்றும் $Q$ என்பது நடுப்புள்ளி என்பதால்)

$$= 5(AC^2 + BC^2)$$

$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி).

**எடுத்துக்காட்டு 4.22** சுவரின் அடியிலிருந்து 4 அடி தொலைவில் உள்ள ஏணியானது சுவரின் உச்சியை 7 அடி உயரத்தில் தொடுமெனில் தேவையான ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க. விடையை ஒரு தசம இடத்திருத்தமாக தருக.

**தீர்வு** ஏணியின் நீளம் $AB = x$ என்க . $BC=4$ அடி, $AC=7$ அடி.



படம் 4.49

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$x^2 = 7^2 + 4^2$ –லிருந்து, $x^2 = 49 + 16$

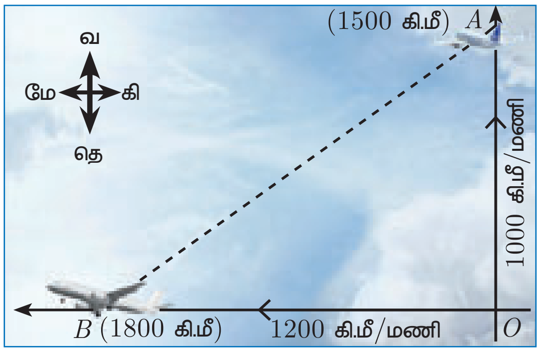
$x^2 = 65$. எனவே, $x = \sqrt{65}$

$\sqrt{65}$ ஆனது 8 மற்றும் 8.1 –க்கு இடையில் அமைகிறது.

$8^2 = 64 < 65 < 65.61 = 8.1^2$

எனவே, ஏணியின் நீளம் தோராயமாக 8.1 அடி ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.23** ஒரு விமானம் விமான நிலையத்தை விட்டு வடக்கு நோக்கி 1000 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு விமானம் அதே விமான நிலையத்தை விட்டு 1200 கி.மீ/மணி வேகத்தில் மேற்கு நோக்கிப் பறக்கிறது. $1\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்குப் பிறகு இரு விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு எவ்வளவு இருக்கும்?



படம் 4.50

**தீர்வு** முதல் விமானம் $O$ -வில் இருந்து புறப்பட்டு வடக்கு நோக்கி $A$ என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது என்க. (தொலைவு $=$ வேகம் $\times$ நேரம்)

எனவே $OA = \left(1000 \times \frac{3}{2}\right)$ கி.மீ $= 1500$ கி.மீ

இரண்டாவது விமானம் $O$ -வில் இருந்து புறப்பட்டு மேற்கு நோக்கி $B$ என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது என்க.

எனவே $OB = \left(1200 \times \frac{3}{2}\right) = 1800$ கி.மீ

கணக்கிடப்பட வேண்டிய தேவையான தொலைவு $BA$ ஆகும்.

செங்கோணம் $AOB$ -யில், $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2 = 100^2\ (15^2+18^2)$$
$$= 100^2 \times 549 = 100^2 \times 9 \times 61$$
$$\text{AB} = 100 \times 3 \times \sqrt{61} = 300\sqrt{61} \text{ கி.மீ.}$$

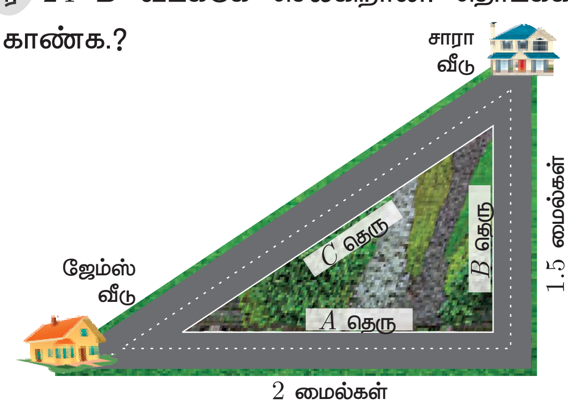
## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ________ ஆனது செங்கோண முக்கோணத்தின் நீளமான பக்கம் ஆகும்.
2. கணிதத்தின் முதல் தேற்றம் ________ ஆகும்.
3. ஒரு முக்கோணத்தின் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அம்முக்கோணம்________.
4. சரியா, தவறா எனக் கூறுக.
   (i) எல்லா வகை முக்கோணங்களுக்கும் பிதாகரஸ் தேற்றம் பொருந்தும் .
   (ii) செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 4 -ன் மடங்காக இருக்கும்.

## பயிற்சி 4.3

1. ஒரு மனிதன் 18 மீ கிழக்கே சென்று பின்னர் 24 மீ வடக்கே செல்கிறான். தொடக்க நிலையிலிருந்து அவர் இருக்கும் தொலைவைக் காண்க.?

2. சாராவின் வீட்டிலிருந்து ஜேம்ஸின் வீட்டிற்குச் செல்ல இரண்டு வழிகள் உள்ளன. ஒரு வழி '$C$' என்ற தெரு வழியாகச் செல்வதாகும். மற்றொரு வழி $A$ மற்றும் $B$ ஆகிய தெருக்கள் வழியாகச் செல்வதாகும். நேரடி பாதை C வழி செல்லும்போது தொலைவு எவ்வளவு குறையும்? (படத்தைப் பயன்படுத்துக).




3. $A$ என்ற புள்ளியில் இருந்து $B$ என்ற புள்ளிக்குச் செல்வதற்கு ஒரு குளம் வழியாக, நடந்து செல்ல வேண்டும். குளம் வழியே செல்வதைத் தவிர்க்க 34 மீ தெற்கேயும், 41 மீ கிழக்கு நோக்கியும் நடக்க வேண்டும். குளம் வழியாகச் செல்வதற்குப் பாதை அமைத்து அப்பாதை வழியே சென்றால் எவ்வளவு மீட்டர் தொலைவு சேமிக்கப்படும்?

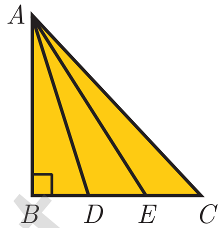
4. $WXYZ$ என்ற செவ்வகத்தில், $XY+YZ=17$ செ.மீ மற்றும் $XZ+YW=26$ செ.மீ எனில் செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.


5. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கை விட 6 மீ அதிகம். மேலும் மூன்றாவது பக்கமானது கர்ணத்தை விட 2 மீ குறைவு எனில், முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காண்க?

6. $5$ மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது ஒரு செங்குத்து சுவர் மீது சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது. ஏணியின் மேல் முனை சுவரை $4$ மீ உயரத்தில் தொடுகிறது. ஏணியின் கீழ்முனை சுவரை நோக்கி $1.6$ மீ நகர்த்தப்படும்போது, ஏணியின் மேல்முனை சுவரில் எவ்வளவு தொலைவு மேல்நோக்கி நகரும் எனக் கண்டுபிடி.

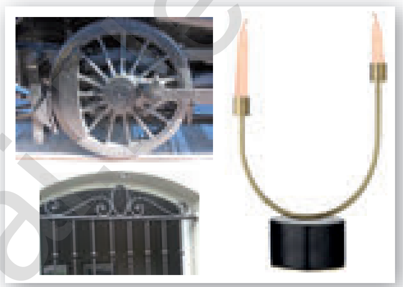
7. $\Delta PQR$ –யில் அடிப்பக்கம் $QR$-க்கு செங்குத்தாக உள்ள $PS$ ஆனது $QR$–ஐ $S$ -யில் சந்திக்கிறது. மேலும், $QS=3SR$ எனில், $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$ என நிறுவுக.

8. படத்தில், செங்கோண முக்கோணம் $ABC$-யில் கோணம் $B$ ஆனது செங்கோணம் மற்றும் $D$, $E$ என்ற புள்ளிகள் பக்கம் $BC$-ஐ மூன்று சமபகுதிகளாக பிரிக்கிறது எனில், $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ என நிறுவுக.




## 4.5 வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகள் (Circles and Tangents)

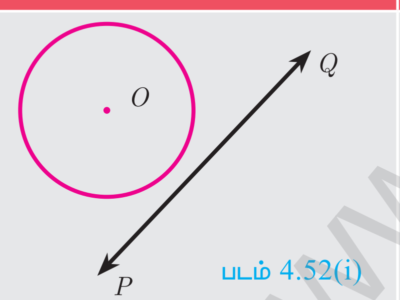
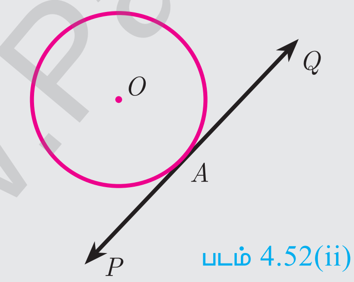
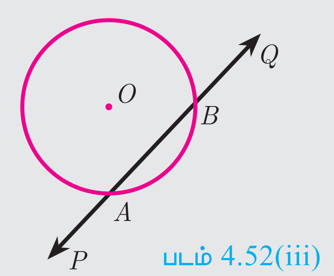
நமது அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழல்களில் ஒரு தளத்தில் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிச் செல்வதையும் அல்லது வெட்டிக்கொள்ளாமல் செல்வதையும் பார்க்கின்றோம். உதாரணமாக, இரயில் பாதையில் இரண்டு இணையான கோடுகள், ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாமல் செல்கின்றன. அதே நேரத்தில் ஜன்னலில் உள்ள கம்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன.


படம் 4.51

இதுபோல் ஒரு தளத்தில் ஒரு வளைவரை மற்றும் ஒரு கோடு கொடுக்கப்பட்டால் என்ன நடக்கிறது? அந்த வளைவரையானது (Curve) பரவளையமாகவோ, வட்டமாகவோ அல்லது ஏதேனும் ஒரு பொதுவான வடிவமாகவோ இருக்கலாம்.

இதேபோல், ஒரு கோடும் ஒரு வட்டமும் வெட்டுவதாகக் கருதும்போது என்ன நடக்கிறது?

**பின்வரும் விளக்கப்படத்தில் மூன்று சூழ்நிலைகளை நாம் பெறலாம்.**

| படம் 1 | படம் 2 | படம் 3 |
|---|---|---|
|   படம் 4.52(i) |   படம் 4.52(ii) |   படம் 4.52(iii) |
| (i) $PQ$ என்ற நேர்கோடு ஆனது வட்டத்தைத் தொடுவதில்லை. | (i) $PQ$ என்ற நேர்கோடு ஆனது வட்டத்தை ஒரு பொதுவான புள்ளியில் தொடுகிறது. | (i) $PQ$ என்ற நேர்கோடு வட்டத்தை $A$ மற்றும் $B$ என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. |
| (ii) நேர்கோடு மற்றும் வட்டத்திற்குப் பொதுப்புள்ளி இல்லை. | (ii) $PQ$ ஆனது வட்டத்திற்கு $A$ என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு ஆகும். | (ii) $PQ$ என்ற கோடானது வட்டத்திற்கு ஒரு வெட்டுக் கோடு ஆகும். |
| (iii) இதனால் நேர்கோடு மற்றும் வட்டம் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியமாகும். | (iii) இதனால் நேர்கோடு மற்றும் வட்டம் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை ஒன்று ஆகும். | (iii) இதனால் நேர்கோடு மற்றும் வட்டம் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை இரண்டு ஆகும். |

**குறிப்பு**

படம் 4.52(iii)–யில் வட்டத்தின் மீது அமைந்திருக்கும் கோட்டுத்துண்டு $AB$-யானது வட்டத்தின் நாண் ஆகும். இதனால் நாண் என்பது வெட்டுக்கோட்டின் உட்பகுதியாகும்.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

தொடுகோடு என்பதன் ஆங்கில வார்த்தையான "tangent" என்பது இலத்தீன் மொழி வார்த்தையான டேன்ஜீர் (tangere) என்பதிலிருந்து பெறப்பட்டது. இதற்கு 'தொடுதல்' என்று பொருள். இதனை 1583–இல் டேனிஷ் கணிதவியலாளரான "தாமஸ் ஃபினேகோ" அறிமுகப்படுத்தினார்.

**வரையறை**

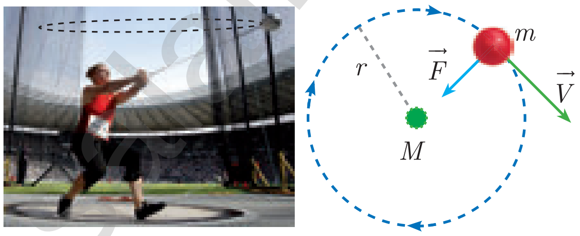
ஒரு நேர்கோடானது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே தொட்டால் அந்த நேர்கோடானது வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.

### வட்டத்தின் தொடுகோடுகளுக்கான அன்றாட வாழ்வியல் உதாரணங்கள்

(i) ஒரு மிதிவண்டியானது சாலையில் செல்லும்போது சாலையானது சுழலக்கூடிய சக்கரங்களுக்குத் தொடுகோடாக இருக்கும்.

படம் 4.53(i)

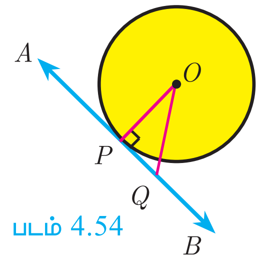
(ii) ஒரு கம்பியின் ஒரு முனையில் கல்லினைக் கட்டி, மறுமுனையினைக் கையினால் சுழற்றும்போது கல்லானது ஒரு வட்டப்பாதையை ஏற்படுத்தும். திடீரென்று கையிலிருந்து கம்பியினை விடும்பொழுது கல்லானது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் திசையில் செல்வதைக் காணலாம்.



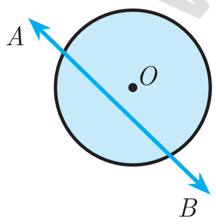
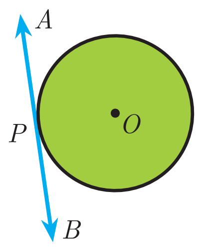
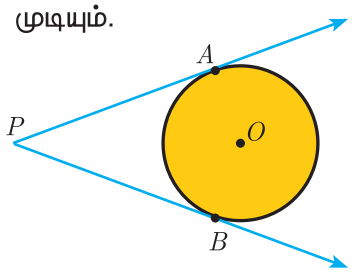

படம் 4.53(ii)

### வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகளுக்கான சில முடிவுகள்

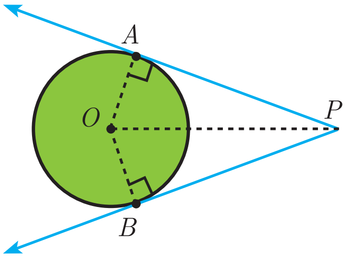
1. ஒரு வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, அத்தொடு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும்.




படம் 4.54

| | | |
|---|---|---|
| 2. (i) வட்டத்திற்கு உள்ளே உள்ள புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு எந்தத் தொடுகோடும் வரைய முடியாது.   படம் 4.55(i) | (ii) வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.   படம் 4.55(ii) | (iii) வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைய முடியும்.   படம் 4.55(iii) |

3. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும்.



படம் 4.56

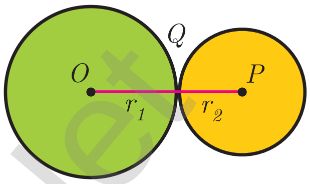
**நிரூபணம் :** 1-லிருந்து $OA \perp PA, OB \perp PB$.

மேலும் $OA = OB =$ ஆரம்,

$OP$ ஆனது பொதுவான பக்கம், $\angle AOP = \angle BOP$

எனவே, $\Delta OAP \cong \Delta OBP$. ஆகவே $PA = PB$

4. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது அவ்வட்டங்களின் ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம். அதாவது $OP = r_1 + r_2$



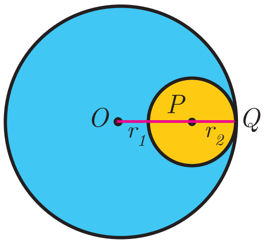
படம் 4.57

**நிரூபணம் :** $O$ மற்றும் $P$ என்ற மையம் கொண்ட இரு வட்டங்கள் Q என்ற புள்ளியில் தொட்டுக்கொள்கின்றன என்க.

$OQ = r_1$ மற்றும் $PQ = r_2$ மற்றும் $r_1 > r_2$ என்க.

மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $OP = d$. படம் 4.57–லிருந்து இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொட்டுக்கொள்வதால் $OP = d = OQ + PQ = r_1 + r_2$.

5. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடுமானால் வட்ட மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது அவற்றின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும். அதாவது $OP = r_1 - r_2$.



படம் 4.58

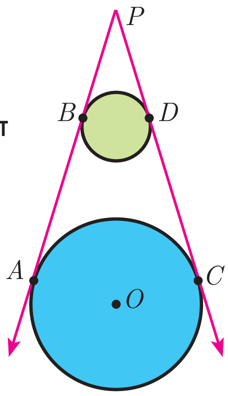
**நிரூபணம் :** $O$ மற்றும் $P$ என்ற மையம் கொண்ட இரு வட்டங்கள் Q என்ற புள்ளியில் தொட்டுக்கொள்கின்றன என்க.

$OQ = r_1$ மற்றும் $PQ = r_2$ மற்றும் $r_1 > r_2$ என்க.

மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $OP = d$. படம் 4.58-லிருந்து இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொட்டுக்கொள்வதால், $OP = d = OQ - PQ$

$OP = r_1 - r_2$.

6. வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட இரண்டு பொதுவான தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம் ஆகும். அதாவது $AB = CD$.



படம் 4.59

**நிரூபணம் :**

$P$ என்ற புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும்.

எனவே, $PA = PC$ மற்றும் $PB = PD$.

$PA - PB = PC - PD$

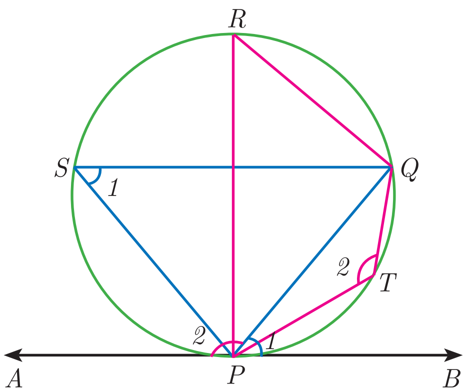
$AB = CD$

**சிந்தனைக் களம்**

1. ஒன்றுக்கொன்று இணையாக ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைய முடியுமா?
2. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைய முடியுமா?

### மாற்று வட்டத்துண்டு

படம் 4.60-யில் $PQ$ என்ற நாண் வட்டத்தினை இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கிறது. $P$ என்ற புள்ளி வழியே வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு செல்லுமாறு $AB$ என்ற தொடுகோடு வரைக.



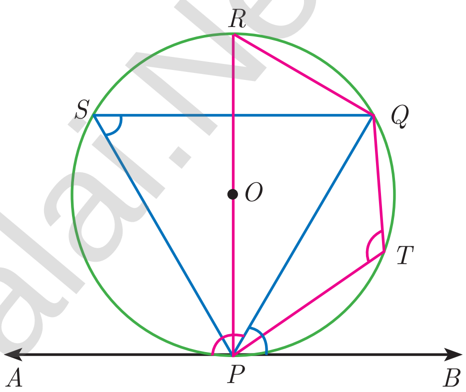
படம் 4.60

$\angle QPB$ $(\angle 1)$ –யின் மாற்று வட்டத் துண்டில் உள்ள கோணம் $\angle QSP$ $(\angle 1)$ ஆகும். மற்றும் $\angle QPA$ $(\angle 2)$-யின் மாற்று வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணம் $\angle PTQ$ $(\angle 2)$ ஆகும்.

### தேற்றம் 6 : மாற்று வட்டத் துண்டு தேற்றம் (Alternate Segment Theorem)

**கூற்று**

வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையப்பட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத்துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.



படம் 4.61

**நிரூபணம்**

கொடுக்கப்பட்டது : $O$-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் $AB$ என்ற தொடுகோடு $P$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது. மற்றும் $PQ$ என்பது நாண் ஆகும். $S$ மற்றும் $T$ என்பன $PQ$ என்ற நாணிற்கு எதிரெதிர் பக்கங்களில் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.

நிரூபிக்க : (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ மற்றும் (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

அமைப்பு : $POR$ என்ற விட்டம் வரைக. மேலும் $QR$, $QS$ மற்றும் $PS$ -யை இணைக்கவும்.

| எண் | கூற்று | காரணம் |
|---|---|---|
| 1. | $\angle RPB = 90^\circ$<br>$\angle RPQ + \angle QPB = 90^\circ$ ...(1) | விட்டம் $RP$ ஆனது தொடுகோடு $AB$-க்கு செங்குத்து ஆகும். |
| 2. | $\Delta RPQ$ -வில், $\angle PQR = 90^\circ$ ...(2) | அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் $90^\circ$. |
| 3. | $\angle QRP + \angle RPQ = 90^\circ$ ...(3) | ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் $90^\circ$ ஆகும். |
| 4. | $\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$<br>$\angle QPB = \angle QRP$ ...(4) | (1) மற்றும் (3) –லிருந்து. |
| 5. | $\angle QRP = \angle PSQ$ ...(5) | ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமம்.. |
| 6. | $\angle QPB = \angle PSQ$ ...(6) | (4) மற்றும் (5)–லிருந்து, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது |
| 7. | $\angle QPB + \angle QPA = 180^\circ$ ...(7) | நேர்கோட்டில் அமைந்த நேரிய இணைக் கோணங்கள். |

| | | |
|---|---|---|
| 8. | $\angle PSQ + \angle PTQ = 180^\circ$ ...(8) | வட்டநாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் $180^\circ$ . |
| 9. | $\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$ | (7) மற்றும் (8) –லிருந்து |
| 10. | $\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$ | (6)–லிருந்து $\angle QPB = \angle PSQ$ |
| 11. | $\angle QPA = \angle PTQ$ | எனவே (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது. தேற்றமும் நிரூபிக்கப்பட்டது. |

**எடுத்துக்காட்டு 4.24** 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 செ.மீ தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டது OP = 5 செ.மீ, ஆரம் $r = 3$ செ.மீ

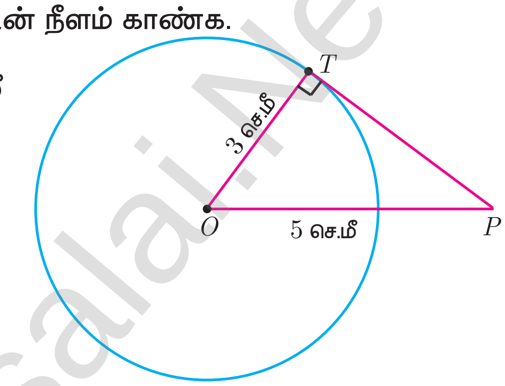
தொடுகோட்டின் நீளம் $PT$ ஐ காண

செங்கோண முக்காணம் $OTP$ -யில்

$OP^2 = OT^2 + PT^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$5^2 = 3^2 + PT^2$ –லிருந்து $PT^2 = 25 - 9 = 16$

தொடுகோட்டின் நீளம் $PT = 4$ செ.மீ




படம் 4.62

**எடுத்துக்காட்டு 4.25** 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் $PQ$ ஆனது 8 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் ஆகும். $P$ மற்றும் $Q$ –வின் வழியே செல்லும் தொடுகோடுகள் $T$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது எனில், $TP$ என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

**தீர்வு** $TR = y$ என்க. $OT$ ஆனது $PQ$ –யின் செங்குத்து இருசம வெட்டி ஆகும்.

$PR = QR = 4$ செ.மீ

$\Delta ORP$ –யில் $OP^2 = OR^2 + PR^2$

$OR^2 = OP^2 - PR^2$

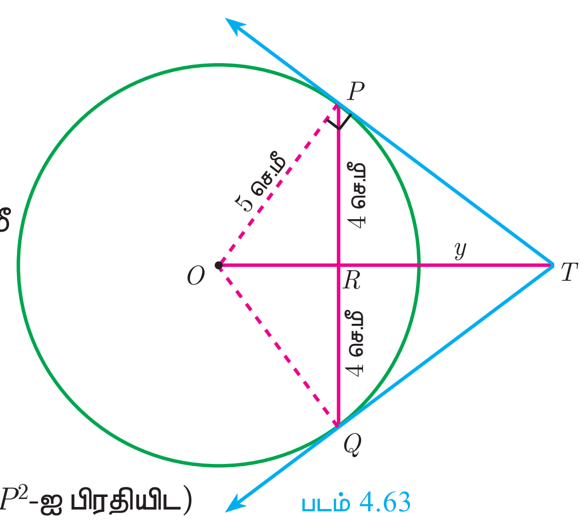
$OR^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ -லிருந்து $OR$=3 செ.மீ

$OT = OR+RT = 3+y$ ... (1)

$\Delta PRT$ –யில், $TP^2 = TR^2 + PR^2$ ... (2)

மற்றும் $\Delta\ OPT$ –லிருந்து, $OT^2 = TP^2 + OP^2$

$OT^2 = (TR^2 + PR^2) + OP^2$ ((2) -லிருந்து, $TP^2$-ஐ பிரதியிட)




படம் 4.63

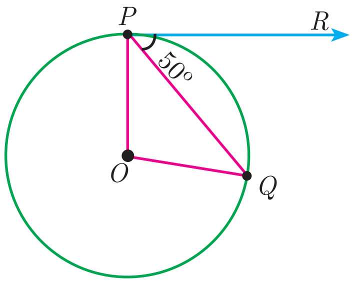
$(3+y)^2 = y^2 + 4^2 + 5^2$ ((1) -லிருந்து, $OT$-ஐ பிரதியிட)

$9 + 6y + y^2 = y^2 + 16 + 25$

$6y = 41 - 9$ எனவே, $y = \frac{16}{3}$ ; (2) -லிருந்து, $TP^2 = TR^2 + PR^2$

$$TP^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{256}{9} + 16 = \frac{400}{9} \quad \text{எனவே, } TP = \frac{20}{3} \text{ செ.மீ.}$$

**எடுத்துக்காட்டு 4.26** படம் 4.64–யில், $O$ ஆனது வட்டத்தின் மையம். $PQ$ ஆனது ஒரு நாண் ஆகும். தொடுகோடு $PR$ ஆனது நாண் $PQ$ –வுடன் $P$ –யில் $50^\circ$ கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், $\angle POQ$ காண்க.



படம் 4.64

**தீர்வு** $\angle OPQ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ (தொடுகோட்டிற்கும், ஆரத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $90^\circ$)

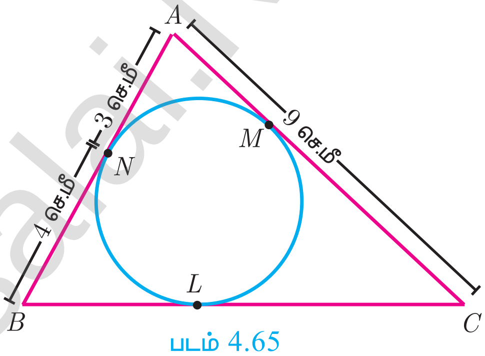
$OP = OQ$ (வட்டத்தின் ஆரங்கள் சமம்)

$\angle OPQ = \angle OQP = 40^\circ$ ($\triangle OPQ$ ஆனது இரு சமபக்க முக்கோணம்)

$\angle POQ = 180^\circ - \angle OPQ - \angle OQP$

$\angle POQ = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

**எடுத்துக்காட்டு 4.27** அருகிலுள்ள படம் 4.65–யில், $\triangle ABC$ ஆனது ஒரு வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு வட்டத்தைச் சுற்றி அமைந்துள்ளது எனில், $BC$–யின் நீளத்தைக் காண்க.



படம் 4.65

**தீர்வு** $AN = AM = 3$ செ.மீ (ஒரே வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் சமம்)

$BN = BL = 4$ செ.மீ

$CL = CM = AC - AM = 9 - 3 = 6$ செ.மீ

$BC = BL + CL = 4 + 6 = 10$ செ.மீ

**எடுத்துக்காட்டு 4.28** இரண்டு பொது மைய வட்டங்களின் ஆரங்கள் 4 செ.மீ, 5 செ.மீ ஆகும். ஒரு வட்டத்தின் நாணானது மற்றொரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால் அவ்வட்டத்தின் நாணின் நீளம் காண்க.

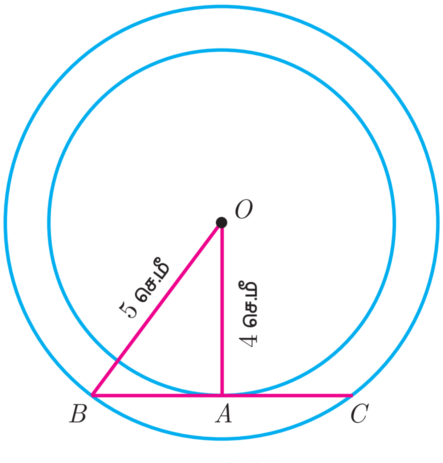
**தீர்வு** $OA = 4$ செ.மீ, OB $= 5$ செ.மீ, மேலும் $OA \perp BC$.

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

$5^2 = 4^2 + AB^2$ –லிருந்து $AB^2 = 9$

எனவே, $AB = 3$ செ.மீ

$BC = 2\text{AB}$ எனவே, $BC = 2 \times 3 = 6$ செ.மீ



படம் 4.66

## 4.5.1 வரைபடம் வரைதல் (Construction)

### வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல் (Construction of tangents to a circle)

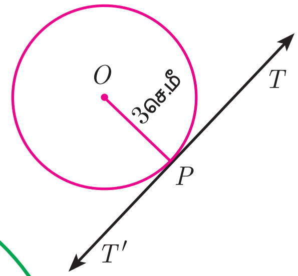
இப்பொழுது கீழ்க்கண்டவற்றை எப்படி வரைய வேண்டும் என்று விவாதிப்போம்.

(i) மையத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல்

(ii) மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல்

(iii) வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைதல்

## வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல் (மையத்தைப் பயன்படுத்தி) (Construction of a tangent to a circle (Using the centre))



உதவிப்படம்

**எடுத்துக்காட்டு 4.29** 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் $P$ என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக

**தீர்வு** ஆரம், $r = 3$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

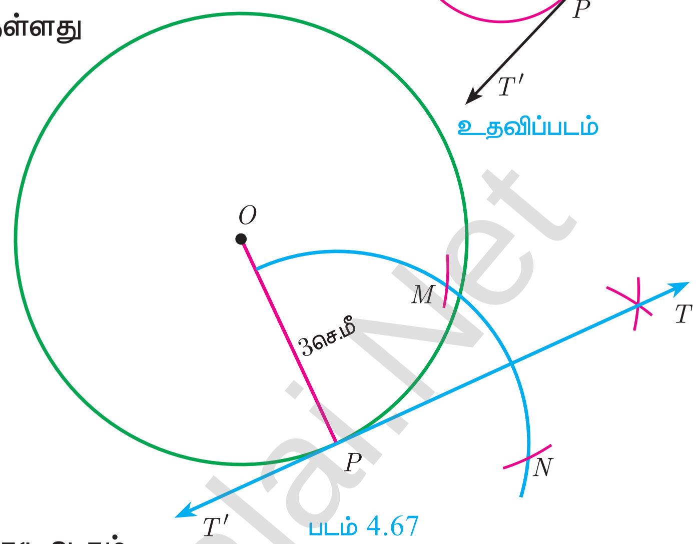
**வரைமுறை**

படி 1 : $O$ –வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

படி 2 : வட்டத்தின் மேல் $P$ என்ற புள்ளியைக் குறித்து $OP$ –ஐ இணைக்கவும்.

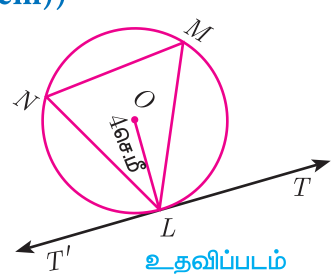
படி 3 : $P$ என்ற புள்ளி வழியே $OP$ –க்கு செங்குத்தாக $TT'$ வரைக

படி 4 : $TT'$ ஆனது தேவையான தொடுகோடு ஆகும்.



படம் 4.67

## வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல் (மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி) (Construct of a tangent to a circle (Using alternate segment theorem))



உதவிப்படம்

**எடுத்துக்காட்டு 4.30** 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீதுள்ள $L$ என்ற புள்ளி வழியாக மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைக.

**தீர்வு** ஆரம் $=4$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

**வரைமுறை**

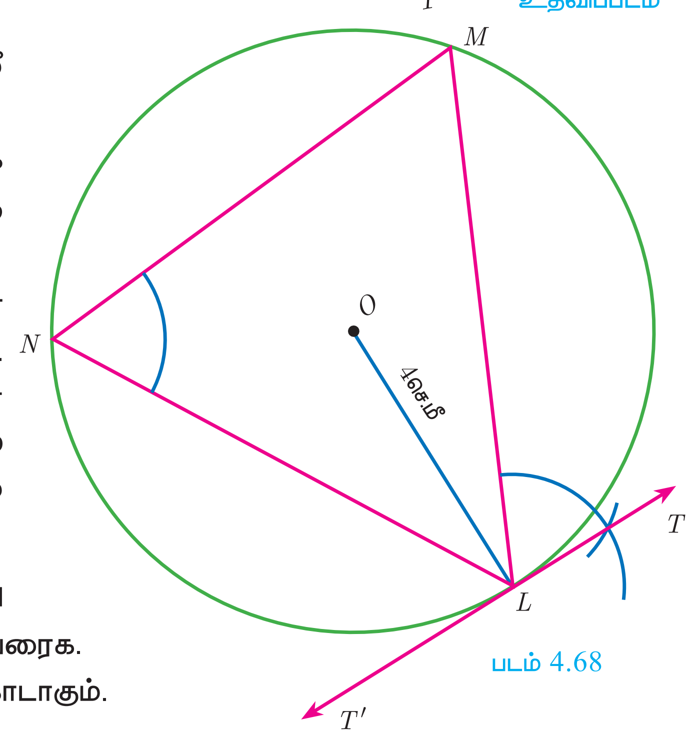
படி 1 : $O$-வை மையமாகக் கொண்டு 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக

படி 2 : வட்டத்தின் மேல் $L$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். $L$ வழியே ஏதேனும் ஒரு நாண் $LM$ வரைக.

படி 3 : $L$ மற்றும் $M$ –ஐ தவிர்த்து வட்டத்தின் மேல் $N$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். $L$,$M$ மற்றும் $N$ என்பன கடிகார முள்ளோட்டத்தின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும். $LN$ மற்றும் $NM$ -ஐ இணைக்கவும்.

படி 4 : $\angle TLM = \angle MNL$ என அமையுமாறு $L$ வழியே $TT'$ என்ற தொடுகோடு வரைக.

படி 5 : $TT'$ என்பது தேவையான தொடுகோடாகும்.

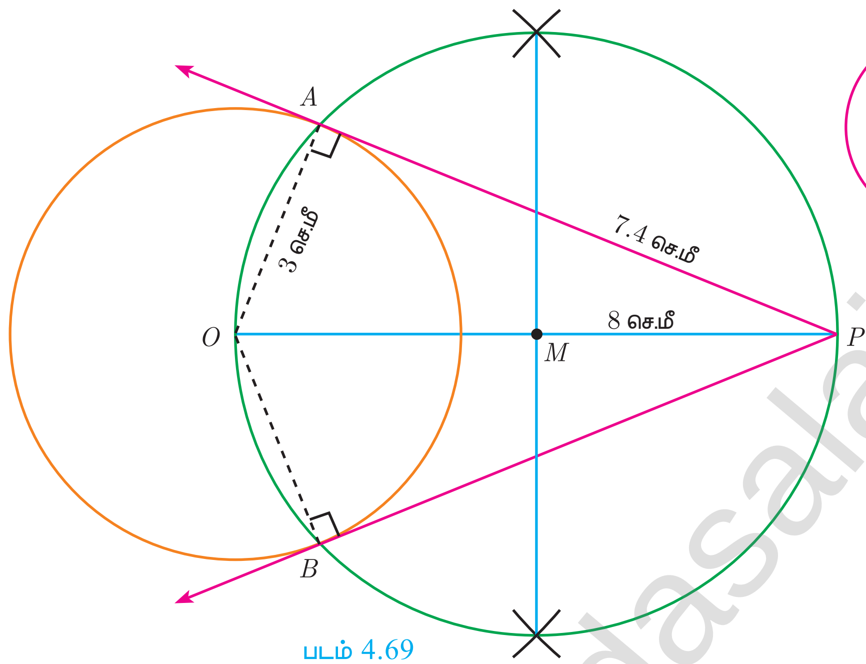


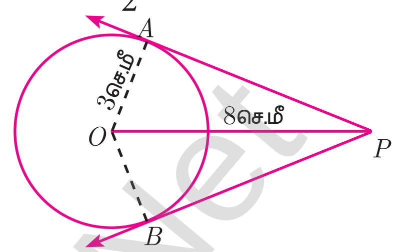
படம் 4.68

### வெளிப்புறப் புள்ளி P –யிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைதல் (Construction of pair of tangents to a circle from an external point $P$)

**எடுத்துக்காட்டு 4.31** 6 செ.மீ விட்டமுள்ள வட்டம் வரைந்து வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ தொலைவில் $P$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். அப்புள்ளியிலிருந்து $PA$ மற்றும் $PB$ என்ற இரு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அளவிடுக.

**தீர்வு** விட்டம் $(d) = 6$ செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரம் $(r) = \frac{6}{2} = 3$ செ.மீ



உதவிப்படம்

படம் 4.69

**வரைமுறை**

படி 1 : $O$–வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக

படி 2 : 8 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற ஒரு கோடு வரைக.

படி 3 : $OP$–க்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைக. அது $OP$–ஐ $M$ –ல் சந்திக்கும்.

படி 4 : $M$–யை மையமாகவும், $MO$–வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை $A$ மற்றும் $B$ –யில் சந்திக்கிறது.

படி 5 : $AP$ மற்றும் $BP$ யை இணைக்கவும். $AP$ மற்றும் $BP$ தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோட்டின் நீளம் $PA = PB = 7.4$ செ.மீ.

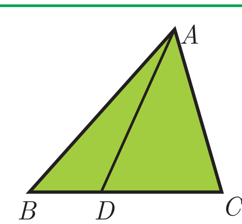
**சரிபார்த்தல் :** செங்கோண முக்கோணம் $OPA$–யில் $PA^2 = OP^2 - OA^2 = 64 - 9 = 55$

$$PA = \sqrt{55} = 7.4 \text{ செ.மீ (தோராயமாக)}.$$

## 4.6 ஒருங்கிசைவுத் தேற்றம் (Concurrency Theorems)

**வரையறை**

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து அதன் எதிர் பக்கத்திற்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டு சீவியன் (cevian) ஆகும். வரைபடத்தில் $AD$ ஆனது ஒரு சீவியன்.



**சிறப்பு சீவியன்கள்**

(i) எதிர் பக்கத்தை இரு சர்வசம பகுதியாக (சமமாக) பிரிக்கும் நடுக்கோடானது (Median) ஒரு சீவியன் ஆகும்.

(ii) எதிர்பக்கத்திற்கு செங்குத்தாக இருக்கும் குத்துக்கோடானது (altitude) ஒரு சீவியன் ஆகும்.

(iii) கோணத்தை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் கோண இருசமவெட்டியானது ஒரு சீவியன் ஆகும்

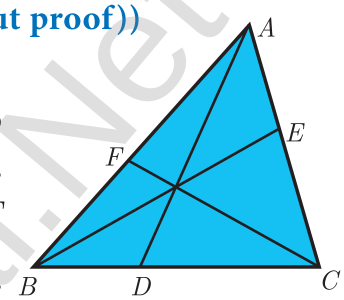
உங்களுக்குத் தெரியுமா?

இத்தாலியைச் சேர்ந்த பொறியியலாளர் ஜியோவானி சீவா (Giovanni Ceva) என்பவரின் பெயரிலிருந்து சீவியன் (cevian) என்ற வார்த்தை பெறப்பட்டது. இவர் சீவியன்கள் பற்றிய தேற்றத்தை நிரூபித்தார்..

### சீவாஸ் தேற்றம் (நிரூபணம் இல்லாமல்) (Ceva's Theorem (without proof))

**கூற்று**

$ABC$ என்பது ஒரு முக்கோணம் என்க. பக்கங்கள் $BC$, $CA$ மற்றும் $AB$-யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே $D, E$ மற்றும் $F$ என்க. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே திசையைப் பொருத்து, $AD$, $BE$, $CF$ என்ற சீவியன்கள் ஒருங்கிசைந்துள்ளது எனில், $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$. ஒவ்வொரு விகிதத்தினையும் தலைகீழியாக மாற்றினாலும் மேற்கூறியது உண்மையே. ஏனெனில் $1$–யின் தலைகீழி ஒன்று ஆகும்.



படம் 4.70

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

**ஜியோவாணி சீவா (டிசம்பர் 7, 1647 – ஜூன் 15, 1734) (Giovanni Ceva)**

1686 –இல் கணிதப் பேராசிரியராக மான்டுவா பல்கலைக்கழகத்தில் பணியில் சேர்ந்த சீவா தனது நிறைவு வாழ்நாள் வரை அங்கேயே பணிபுரிந்தார். 1678–ம் ஆண்டில் இவர் தொகுமுறை வடிவியலில், முக்கோணம் பற்றிய ஒரு முக்கியமானத் தேற்றத்தை வெளியிட்டார். அந்தத் தேற்றம் 'சீவாவின் தேற்றம்' என்று அழைக்கப்படுகிறது.

1692 –ஆம் ஆண்டில் ஒபஸ்குலா மேத்தமைடிக்கா மற்றும் ஜியாமன்ட்ரியா மோட்டஸ் எனும் ஆய்விதழில் மீண்டும் கண்டறிந்து வெளியிட்டார். இயக்கவியல் மற்றும் நீர்மவியல் துறைகளில் சீவா தேற்றக் கருத்துகளைப் பயன்படுத்தினார்.

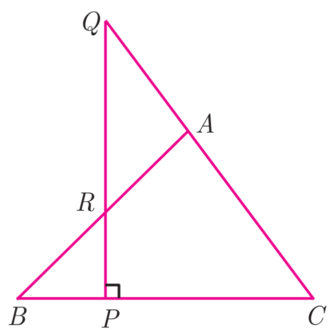
**குறிப்பு**

- பல சீவியன்கள் முக்கோணத்திற்கு உட்புறம் அமைந்தாலும், அனைத்து சீவியன்களும் முக்கோணத்திற்கு உள்ளேயே அமைய வேண்டிய அவசியமில்லை.

### மெனிலாஸ் தேற்றம் (Menelaus Theorem (without proof))

**கூற்று**

$ABC$ என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, $CA$, $AB$ (அல்லது அவற்றின் நீட்சி) –யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே $P$, $Q$, $R$ ஆகியன ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = -1$. இந்தச் சூத்திரத்தில் உள்ள கோட்டுத்துண்டுகள் அனைத்தும் திசை சார்ந்தவையாகும்.



படம் 4.71

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

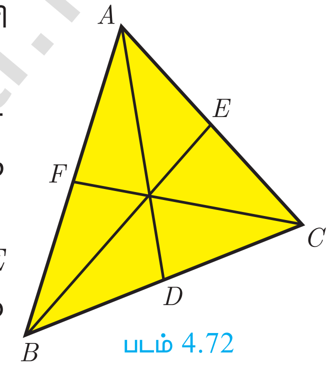
**மெனிலாஸ் (Menelaus)**

இவரது "ஸ்பெரிக்கா" எனும் புத்தகத்தில் முதன்முதலில் மெனிலாஸ் தேற்றத்தைப் பற்றி குறிப்பிட்டுள்ளார். இதைப் பிற்காலத்தில் டாலமி அவரது படைப்பான ஆல்மாகெஸ்ட் எனும் நூலில் குறிப்பிட்டுள்ளார். மெனிலாஸ் தேற்றம் கோள முக்கோணங்களால் கோளங்கள் உருவாக்கப்படுகின்றன என நிரூபிக்கிறது.

**குறிப்பு**

1. $BP \times CQ \times AR = -PC \times QA \times RB$ எனவும், மெனிலாஸ் தேற்றத்தைக் குறிப்பிடலாம்.
2. $BP$ ஆனது $PB$ –யாகவும், $CQ$ ஆனது $QC$ –யாகவும், $AR$ ஆனது $RA$ ஆகவும் மாற்றப்பட்டாலோ அல்லது $BP, PC, CQ, QA, AR, RB$ என்ற ஒரு திசையில் அமைந்த ஆறு கோட்டுத்துண்டுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை பரிமாற்றம் செய்தாலோ மேற்கண்ட பெருக்கற்பலனின் மதிப்பு 1 ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.32** ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டுக.



படம் 4.72

**தீர்வு** முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் அதன் எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டு நடுக்கோடு எனப்படும்.

பக்கங்கள் $BC$, $CA$ மற்றும் $AB$ -யின் மையப்புள்ளிகள் முறையே $D$, $E$ மற்றும் $F$-க்கு வரையப்படும் நடுக்கோடுகளானது சீவியன்களாகவும் இருக்கும்.

$BC$-ன் நடு புள்ளி $D$. எனவே, $BD = DC$ அதாவது, $\dfrac{BD}{DC} = 1$ ...(1)

$CA$-ன் நடு புள்ளி $E$. எனவே, $CE = EA$ அதாவது, $\dfrac{CE}{EA} = 1$ ... (2)

$AB$-ன் நடு புள்ளி $F$. எனவே, $AF = FB$ அதாவது, $\dfrac{AF}{FB} = 1$ ... (3)

(1), (2) மற்றும் (3) – ஐ பெருக்க நாம் பெறுவது,,

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

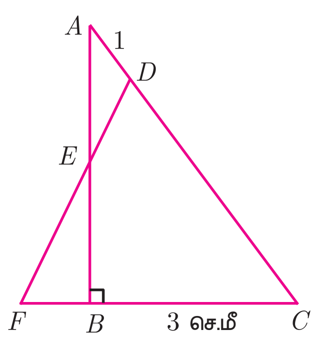
எனவே, சீவாஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஆகையால், நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும்.

**எடுத்துக்காட்டு 4.33** கொடுக்கப்பட்ட படம் 4.73–யில் முக்கோணம் $ABC$–யில் $\angle B = 90^\circ$, $BC = 3$ செ.மீ மற்றும் $AB = 4$ செ.மீ ஆகும். $AD = 1$ செ.மீ என்றவாறு $AC$ –யின் மீது $D$ எனும் புள்ளி உள்ளது. $AB$–யின் மையப்புள்ளி $E$ ஆகும். $D$ மற்றும் $E$ ஐ இணைத்து $CB$ ஐ $F$–யில் சந்திக்குமாறு $DE$ ஐ நீட்டுக. $BF$ ஐ காண்க.



படம் 4.73

**தீர்வு** $ABC$ என்பது ஒரு முக்கோணம். $D$, $E$ மற்றும் $F$ ஆகியன முறையே பக்கங்கள் $CA$, $AB$ மற்றும் $BC$ –யில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். $D$, $E$ மற்றும் $F$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைவன எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி, $\dfrac{AE}{EB} \times \dfrac{BF}{FC} \times \dfrac{CD}{DA} = 1$ ... (1)

$AE = EB = 2$, $DA = 1$ ஆகும்.

மேலும் $FC = FB + BC = BF + 3$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25$. எனவே, $AC = 5$

மேலும், $CD = AC - AD = 5 - 1 = 4$.

$FC$, $AE$, $EB$, $DA$, $CD$ –யின் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட,

$$\frac{2}{2} \times \frac{BF}{BF+3} \times \frac{4}{1} = 1$$

$$4BF = BF + 3$$

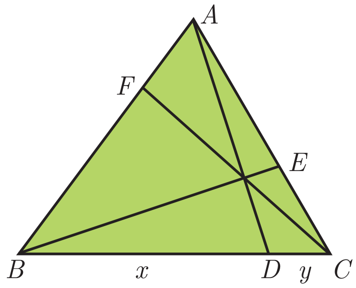
$4BF - BF = 3$ எனவே, $BF = 1$

**எடுத்துக்காட்டு 4.34** $AB$, $AC$ மற்றும் $BC$ ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே $13$, $14$ மற்றும் $15$ ஆகும். $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{2}{5}$ மற்றும் $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{5}{8}$ எனில், $BD$ மற்றும் $DC$ காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டது $AB = 13$, $AC = 14$ மற்றும் $BC = 15$.

$BD = x$ மற்றும் $DC = y$ என்க

சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி, $\dfrac{BD}{DC} \times \dfrac{CE}{EA} \times \dfrac{AF}{FB} = 1$ ...(1)



படம் 4.74

$\dfrac{AF}{FB}$ மற்றும் $\dfrac{CE}{EA}$ –யின் மதிப்புகளை (1) –யில் பிரதியிட,

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = 1$$

$\dfrac{x}{y} \times \dfrac{10}{40} = 1$ –லிருந்து, $\dfrac{x}{y} \times \dfrac{1}{4} = 1$. எனவே, $x = 4y$ ...(2)

$BC = BD + DC = 15$. எனவே, $x + y = 15$ ...(3)

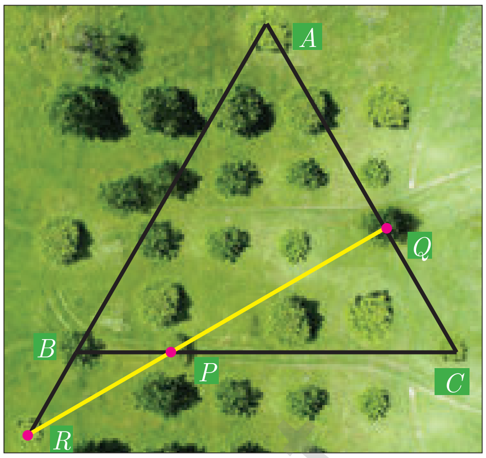
$x = 4y$ –ஐ (3) –யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$4y + y = 15$ –லிருந்து $5y = 15$ எனவே $y = 3$

$y = 3$ –ஐ (3) –யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $x = 12$. எனவே, $BD = 12$, $DC = 3$.

**எடுத்துக்காட்டு 4.35** பல மரங்களைக் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தில் $P$, $Q$, $R$ என்ற மூன்று மரங்கள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன. $ABC$ என்ற முக்கோணத்தில் $BC$ -யின் மீது $P$-யும், $AC$-யின் மீது

$Q$-வும், $AB$-யின் மீது $R$ -ம் புள்ளிகளாக உள்ளன. மேலும் $BP=2$ மீ, $CQ=3$ மீ, $RA=10$ மீ, $PC=6$ மீ, $QA=5$ மீ, $RB=2$ மீ ஆகும். மரங்கள் $P$, $Q$, $R$ ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனச் சோதிக்கவும்.



படம் 4.75

**தீர்வு** மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி $P$, $Q$, $R$ என்ற மரங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைய வேண்டுமெனில்,

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=1 \qquad \ldots(1) \text{ ஆக அமைய வேண்டும்.}$$

கொடுக்கப்பட்டது $BP=2$ மீ, $CQ=3$ மீ, $RA=10$ மீ, $PC=6$ மீ, $QA=5$ மீ மற்றும் $RB=2$ மீ

மதிப்புகளை (1) –யில் பிரதியிட, $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{10}{2}=\frac{60}{60}=1$

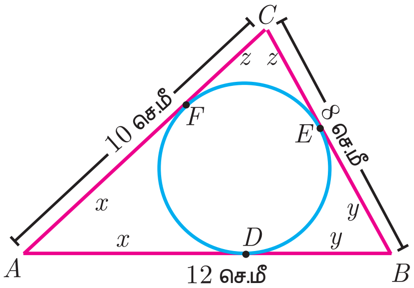
எனவே, மரங்கள் P, $Q$, $R$ ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளன.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. நேர்கோடு, வட்டத்தினைத் தொட்டுச் செல்லும் பொதுவான புள்ளி ________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.
2. ________ –யின் ஒரு பகுதி நாண் ஆகும்.
3. வட்டத்திற்கு ________ உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளங்கள் சமம்.
4. வட்டத்தின் ________ புள்ளியிலிருந்து எந்தத் தொடுகோடும் வரைய இயலாது.
5. ________ என்ற சீவியன் (Cevian) முக்கோணத்தின் கோணங்களை இரு சமபகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.

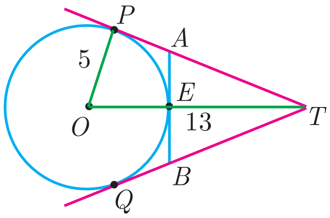
## பயிற்சி 4.4

1. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 25 செ.மீ தொலைவில் உள்ள $P$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் 24 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?
2. செங்கோண முக்கோணம் $LMN$ –யில் $\angle L = 90^\circ$ ஆகும். ஒரு வட்டமானது செங்கோண முக்கோணத்தின் உள்ளே அதன் பக்கங்களைத் தொடுமாறு வரையப்படுகிறது. செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் 6 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.
3. படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, 8 செ.மீ, 10 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ பக்கங்கள் உடைய முக்கோணத்தினுள் ஒரு வட்டம் அமைந்துள்ளது எனில், $AD$, $BE$ மற்றும் $CF$ ஐக் காண்க.




4. $O$ –வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு $P$ –யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு $PQ$. $QOR$ ஆனது விட்டம் ஆகும். வட்டத்தில் $\angle POR = 120^\circ$ எனில், $\angle OPQ$ –ஐக் காண்க.
5. தொடுகோடு $ST$ வட்டத்தினை B என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. $\angle ABT = 65^\circ$. $AB$ என்பது ஒரு நாண் எனில், $\angle AOB$ -ஐ காண்க. இதில் '$O$' என்பது வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $O$ -வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் ஆரம் $5$ செ.மீ ஆகும். $T$-யானது $OT = 13$ செ.மீ என அமைந்த ஒரு புள்ளி மற்றும் $OT$-யானது வட்டத்தை $E$-யில் வெட்டுகிறது. வட்டத்தில் $E$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தொடுகோடு $AB$ எனில், $AB$-யின் நீளம் காண்க.



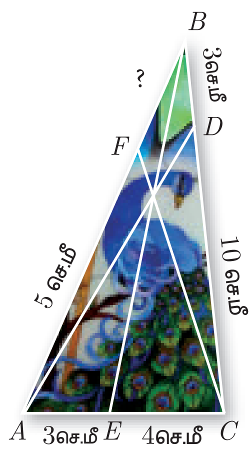

7. இரண்டு பொது மைய வட்டங்களில், $16$ செ.மீ நீளமுடைய பெரிய வட்டத்தின் நாணானது $6$ செ.மீ ஆரமுள்ள சிறிய வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால், பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

8. $O$ மற்றும் $O'$ -ஐ மையப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே $3$ செ.மீ மற்றும் $4$ செ.மீ ஆகும். இவை இரண்டும் $P, Q$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. $OP$ மற்றும் $O'P$ ஆகியவை வட்டங்களின் இரு தொடுகோடுகள் எனில், பொது நாண் $PQ$ -யின் நீளம் காண்க.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

10. $\Delta ABC$ –யில் $\angle B = 90°$, $BC = 6$ செ.மீ மற்றும் $AB = 8$ செ.மீ ஆகும். $AD = 2$ செ.மீ என்றவாறு $AC$-யின் மீதுள்ள புள்ளி $D$ மற்றும் $AB$-யின் மையப்புள்ளி $E$ ஆகும். $DE$ -யின் நீட்சியானது $CB$-யின் நீட்சியை $F$ -யில் சந்திக்கும் எனில், $BF$ ஐக் காண்க.

11. படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு முக்கோண வடிவக் கண்ணாடி ஜன்னலை முழுமையாக உருவாக்க ஒரு சிறிய கண்ணாடித்துண்டு ஒரு கலை நிபுணருக்குத் தேவைப்படும். மற்ற கண்ணாடி துண்டுகளின் நீளங்களைப் பொருத்து அவருக்குத் தேவையான கண்ணாடித் துண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.




12. $P$ ஐ மையமாகக் கொண்ட $3.4$ செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திற்கு $R$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு வரைக.

13. $4.5$ செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தித் தொடுகோடு வரைக.

14. $5$ செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $10$ செ.மீ தொலைவிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரையவும். மேலும் தொடுகோட்டின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

15. $4$ செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து $11$ செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறித்து, அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைக.

16. $6$ செ.மீ விட்டமுள்ள வட்டம் வரைந்து வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $5$ செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும். அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்து, தொடுகோட்டின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

17. $O$ -வை மையமாகக் கொண்ட $3.6$ செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $7.2$ செ.மீ தொலைவிலுள்ள $P$ என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைக.

## பயிற்சி 4.5

44WT5P

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{FD}$ எனில், $ABC$ மற்றும் $EDF$ எப்பொழுது வடிவொத்தவையாக அமையும்.

   (1) $\angle B=\angle E$  (2) $\angle A=\angle D$  (3) $\angle B=\angle D$  (4) $\angle A=\angle F$

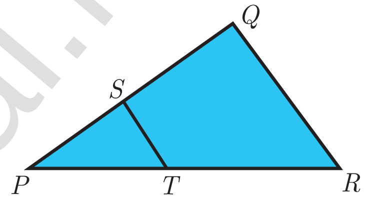
2. $\Delta LMN$ -யில் $\angle L=60^\circ$, $\angle M=50^\circ$ மேலும், $\Delta LMN\sim\Delta PQR$ எனில், $\angle R$ –யின் மதிப்பு

   (1) $40^\circ$  (2) $70^\circ$  (3) $30^\circ$  (4) $110^\circ$

3. இருசமபக்க முக்கோணம் $\Delta ABC$ -யில் $\angle C=90^\circ$ மற்றும் $AC=5$ செ.மீ, எனில் $AB$ ஆனது

   (1) 2.5 செ.மீ  (2) 5 செ.மீ  (3) 10 செ.மீ  (4) $5\sqrt{2}$ செ.மீ

4. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $ST\parallel QR$, $PS=2$ செ.மீ மற்றும் $SQ=3$ செ.மீ. எனில், $\Delta PQR$ –யின் பரப்பளவுக்கும் $\Delta PST$ –யின் பரப்பளவுக்கும் உள்ள விகிதம்




   (1) 25 : 4  (2) 25 : 7

   (3) 25 : 11  (4) 25 : 13

5. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் $\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta PQR$ –யின் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ ஆகும். $PQ=10$ செ.மீ எனில், $AB$–யின் நீளம்

   (1) $6\dfrac{2}{3}$ செ.மீ  (2) $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ செ.மீ  (3) $66\dfrac{2}{3}$ செ.மீ  (4) 15 செ.மீ

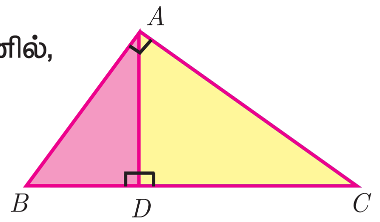
6. $\Delta ABC$ –யில் $DE\parallel BC$. $AB=3.6$ செ.மீ, $AC=2.4$ செ.மீ மற்றும் $AD=2.1$ செ.மீ எனில், AE –யின் நீளம்

   (1) 1.4 செ.மீ  (2) 1.8 செ.மீ  (3) 1.2 செ.மீ  (4) 1.05 செ.மீ

7. $\Delta ABC$ -யில் $AD$ ஆனது, $\angle BAC$ -யின் இருசமவெட்டி. $AB=8$ செ.மீ, $BD=6$ செ.மீ மற்றும் $DC=3$ செ.மீ எனில், பக்கம் $AC$ -யின் நீளம்

   (1) 6 செ.மீ  (2) 4 செ.மீ  (3) 3 செ.மீ  (4) 8 செ.மீ

8. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $\angle BAC=90^\circ$ மற்றும் $AD\perp BC$ எனில்,



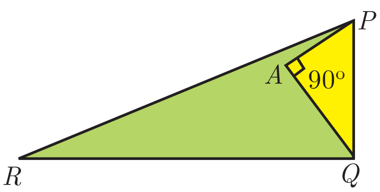

   (1) $BD\cdot CD=BC^2$  (2) $AB.AC=BC^2$

   (3) $BD\cdot CD=AD^2$  (4) $AB\cdot AC=AD^2$

9. 6 மீ மற்றும் 11 மீ உயரமுள்ள இரு கம்பங்கள் சமதளத் தரையில் செங்குத்தாக உள்ளன. அவற்றின் அடிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு 12 மீ எனில் அவற்றின் உச்சிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு என்ன?

   (1) 13 மீ  (2) 14 மீ  (3) 15 மீ  (4) 12.8 மீ

10. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $PR = 26$ செ.மீ, $QR = 24$ செ.மீ, $\angle PAQ = 90^\circ$, $PA$=6 செ.மீ மற்றும் $QA = 8$ செ.மீ எனில் $\angle PQR$ –ஐக் காண்க.




(1) $80^\circ$ (2) $85^\circ$ (3) $75^\circ$ (4) $90^\circ$

11. வட்டத்தின் தொடுகோடும் அதன் ஆரமும் செங்குத்தாக அமையும் இடம்

(1) மையம் (2) தொடு புள்ளி (3) முடிவிலி (4) நாண்

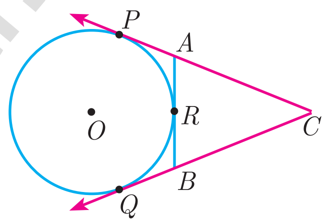
12. வட்டத்தின் வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகோடுகள் வரையலாம்?

(1) ஒன்று (2) இரண்டு (3) முடிவற்ற எண்ணிக்கை (4) பூஜ்ஜியம்

13. $O$ -வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு, வெளியேயுள்ள புள்ளி $P$ -யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் $PA$ மற்றும் $PB$ ஆகும். $\angle APB = 70^\circ$ எனில், $\angle AOB$ -யின் மதிப்பு

(1) $100^\circ$ (2) $110^\circ$ (3) $120^\circ$ (4) $130^\circ$

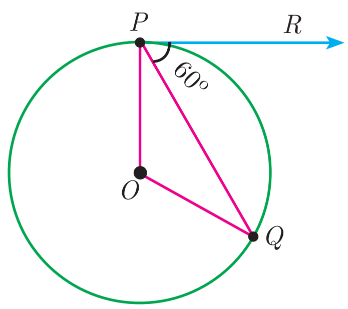
14. படத்தில் $O$ -வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் $CP$ மற்றும் $CQ$ ஆகும். $ARB$ ஆனது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி $R$ வழியாகச் செல்லும் மற்றொரு தொடுகோடு ஆகும். $CP = 11$ செ.மீ மற்றும் $BC = 7$ செ.மீ, எனில் $BR$ –யின் நீளம்




(1) 6 செ.மீ (2) 5 செ.மீ

(3) 8 செ.மீ (4) 4 செ.மீ

15. படத்தில் உள்ளவாறு $O$ -வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடு $PR$ எனில், $\angle POQ$ ஆனது



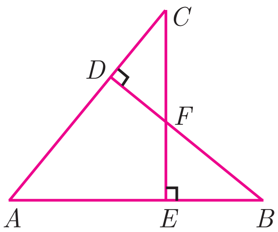

(1) $120^\circ$ (2) $100^\circ$

(3) $110^\circ$ (4) $90^\circ$

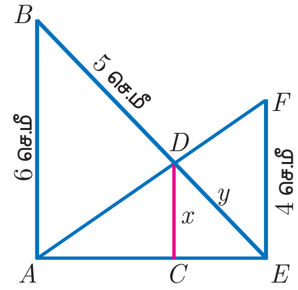
## அலகு பயிற்சி - 4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $BD \perp AC$ மற்றும் $CE \perp AB$, எனில்

(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (ii) $\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{CE}{DB}$ என நிரூபிக்கவும்

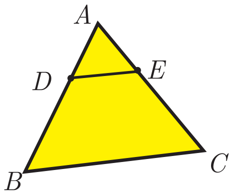



2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $AB \parallel CD \parallel EF$. $AB = 6$ செ.மீ, $CD = x$ செ.மீ, $EF = 4$ செ.மீ, $BD = 5$ செ.மீ மற்றும் $DE = y$ செ.மீ எனில், $x$ மற்றும் $y$ -யின் மதிப்பு காண்க.



3. $O$ ஆனது முக்கோணம் $ABC$–யின் உள்ளே அமைந்த ஒரு புள்ளி ஆகும். $\angle AOB, \angle BOC$ மற்றும் $\angle COA$-யின் இருசமவெட்டிகள், பக்கங்கள் $AB$, BC மற்றும் $CA$ -வை முறையே $D$, $E$ மற்றும் $F$-ல் சந்திக்கின்றன எனில், $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$ எனக் காட்டுக.

4. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் $ABC$-யில் $AB = AC$ ஆகும். $AD = AE$ என இருக்குமாறு $D$ மற்றும் $E$ என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் $AB$ மற்றும் $AC$-யின் மீது அமைந்துள்ளன. $B$, $C$, $E$ மற்றும் $D$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.




5. இரண்டு தொடர்வண்டிகள் ஒரே நேரத்தில் ஒரு தொடர்வண்டி நிலையத்திலிருந்து புறப்படுகின்றன. முதல் வண்டி மேற்கு நோக்கியும், இரண்டாவது வண்டி வடக்கு நோக்கியும் செல்கின்றன. முதல் தொடர்வண்டி 20 கி.மீ/மணி வேகத்திலும், இரண்டாவது வண்டி 30 கி.மீ/மணி வேகத்திலும் செல்கின்றன. இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பின்னர் அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு எவ்வளவு?

6. $BC$ -யின் மையப்புள்ளி $D$ மற்றும் $AE \perp BC$. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $ED = x$, $AD = p$ மற்றும் $AE = h$, எனில்

(i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ (iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$ என நிரூபிக்க

7. 2 மீ உயரமுள்ள மனிதர் ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிட விரும்புகிறார். மரத்தின் அடியிலிருந்து 20 மீ தொலைவில் B என்ற புள்ளியில் ஒரு கண்ணாடி கிடைமட்டமாக மேல் நோக்கி வைக்கப்படுகிறது. கண்ணாடியிலிருந்து 4 மீ தொலைவில் C என்ற புள்ளியில் நிற்கும் மனிதர் மரத்தின் உச்சியின் பிரதிபலிப்பைக் கண்ணாடியில் காண முடிகிறது எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (மரத்தின் அடி, கண்ணாடி, மனிதர் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளதாகக் கொள்க).

8. 30 அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் அடிப்பகுதியிலிருந்து 8 அடி உயரமுள்ள ஒரு ஈமு கோழி விலகி நடந்து செல்கிறது. ஈமு கோழியின் நிழல் அது நடந்து செல்லும் திசையில் அதற்கு முன் விழுகிறது. ஈமு கோழியின் நிழலின் நீளத்திற்கும், ஈமு தூணிலிருந்து இருக்கும் தொலைவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

9. $A$ மற்றும் $B$ என்ற புள்ளிகளில் இரு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்கின்றன. ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி $P$-யிலிருந்து வரையப்படும் $PAC$ மற்றும் $PBD$ என்ற கோடுகள் இரண்டாவது வட்டத்தினை முறையே $C$ மற்றும் $D$-யில் வெட்டுகின்றன எனில், $CD$-யானது $P$ வழியே வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு இணை என நிரூபிக்கவும்.

10. $ABC$ என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $AB$, $BC$, $AC$-யின் (அல்லது பக்கங்களின் நீட்சி) மீது முறையே $D$, $E$, $F$ என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $AD : DB = 5 : 3$, $BE : EC = 3 : 2$ மற்றும் $AC = 21$ எனில், கோட்டுத்துண்டு $CF$ -யின் நீளம் காண்க.

## நினைவில் கொள்ள வேண்டியவை

- இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில்,
  (ii) அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம்
  (iii) அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் சம விகிதத்தில் இருக்கும்.
- சர்வச் சம முக்கோணங்கள் அனைத்தும் வடிவொத்தவை. ஆனால் இதன் மறுதலை உண்மை இல்லை.

- $AA$ வடிவொத்த விதிமுறையானது $AAA$ வடிவொத்த விதிமுறை ஆகும்.
- ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், அவ்விரு முக்கோணங்களில் அக்கோணங்களை உள்ளடக்கிய ஒத்த பக்கங்கள் விகிதச் சமத்திலும் இருந்தால், அவ்விரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும். (SAS)
- இரு முக்கோணங்களில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமானால், இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை. (SSS)
- இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருப்பின், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.
- இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.
- வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, தொடுபுள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.
- வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.
- வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.
- வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட இரண்டு பொதுவான தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்



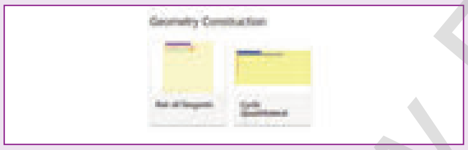
## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

**ICT 4.1**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Geometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Angular bisector theorem" எனும் பயிற்சித் தாளை தேர்வு செய்க.

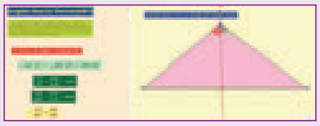
**படி 2:** பயிற்சித் தாளில், புள்ளிகளை மாற்றுவதன் மூலம் முக்கோணம் ABC மற்றும் கோண இரு சமவெட்டி CD ஆகியவற்றில் ஏற்படும் மாற்றங்களை காண்க. இடப்புறத்தில் உள்ள விகிதங்கள் மூலம் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

படி 1



படி 2

முடிவுகள்

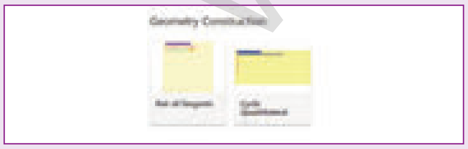


**ICT 4.2**

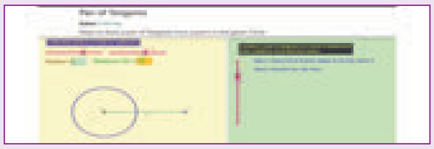
**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் யன்படுத்தி "Geometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Pair of Tangents" எனும் பயிற்சித் தாளை தேர்வு செய்க.

**படி 2:** பயிற்சித் தாளில் ஆரம் மற்றும் தொடுகோடுகளின் நீளங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் காண்க.

படி 1



படி 2



முடிவுகள்

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356194

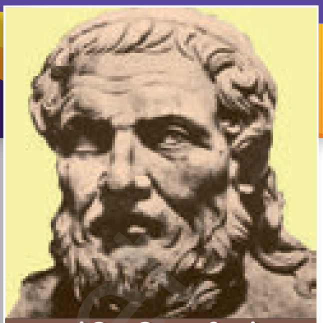
அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

B371_10_MATHS_TM

# 5

# ஆயத்தொலை வடிவியல்

*கோடு என்பது அகலமில்லா நீளமாகும் –யூக்ளிட்*



அப்போலோனியஸ்
262–190 கிமு (பொ.ஆ.மு)

இன்றைய துருக்கியின் பெர்காவில் பிறந்தவர் அப்போலோனியஸ் ஆவார். இவரது சிறந்த படைப்பாகக் கருதப்படும் "கூம்புகள்" மூலம் வட்டங்கள் மற்றும் பரவளையங்களை வடிவியல் ரீதியாக அறிமுகப்படுத்தினார். அவர் அடிப்படை நவீன ஆயத்தொலை வடிவியலோடு தொடர்புடைய ஆறு புத்தங்களை எழுதியுள்ளார்.

கிரகத் தேற்றத்தையும், நடைமுறைக் கணக்குகளையும் தீர்ப்பதற்கு இவரது கருத்துகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. சூரியக் கடிகாரத்தை உருவாக்கித் தனது வடிவியல் திறன்களை அறிவியலின் மற்ற பிரிவுகளுக்கும் பயன்படுத்தினார். அப்போலோனியஸ் வடிவியலைப் பல துறைகளுக்குப் பயன்படுத்திய காரணத்தால் "மாபெரும் வடிவியலாளர்" எனப் போற்றப்படுகிறார்.

EBP4QX

## கற்றல் விளைவுகள்

- கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளால் உருவான முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணுதல்.
- கொடுக்கப்பட்ட நான்கு புள்ளிகளால் உருவான நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காணுதல்.
- ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காணல்.
- பல்வேறு வகைகளில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிதல்.
- $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிதல்.
- $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிதல்.

## 5.1 அறிமுகம் (Introduction)

ஆயத்தொலை வடிவியல் ஆனது பகுமுறை வடிவியல் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இதில் ஒரு தளத்தின் வளைவரையானது இயற்கணிதச் சமன்பாடுகள் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + y^2 = 1$ என்பது தளத்தில் ஓரலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும். இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளை வடிவியல் வளைவரைகள் மூலம் குறிப்பதால் ஆயத்தொலைவு வடிவியல் என்பது வடிவியல் மற்றும் இயற்கணிதத்தை இணைக்கும் பாலமாகக் கருதப்படுகிறது. இந்தத் தொடர்பே வடிவியல் கணக்குகளை இயற்கணிதக் கணக்குகளாகவும், இயற்கணிதக் கணக்குகளை வடிவியல் கணக்குகளாகவும் மறு வடிவமைக்க உதவுகிறது. ஆயத்தொலை வடிவியலில் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைக் காட்சி வடிவில் காண்பதால் ஆழமான

புரிதல் ஏற்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு $ax+by+c=0$ ஒரு தளத்தில் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். மொத்தத்தில் கருத்துகளைக் காட்சி வழியாகப் புரிந்துகொள்ளவும், கணிதத்தில் புதிய கிளைகளை உருவாக்கவும் ஆயத்தொலைவு வடிவியல் ஒரு கருவியாகிறது.

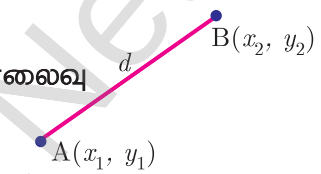
முந்தைய வகுப்புகளில் ஆயத்தொலைவு வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துக்களான ஆயஅச்சு, ஆயதளம், புள்ளிகளைத் தளத்தில் குறித்தல், இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு, பிரிவு சூத்திரம் ஆகியவை பற்றி பயின்றோம். இப்பொழுது, சில அடிப்படைச் சூத்திரங்களை நினைவு கூர்வோம்

### நினைவு கூர்தல்

#### இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

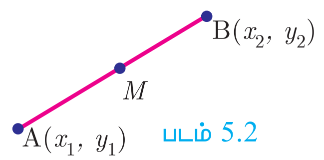
$$\left|AB\right| = d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$



படம் 5.1

#### ஒரு கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $M$ ஆனது $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.



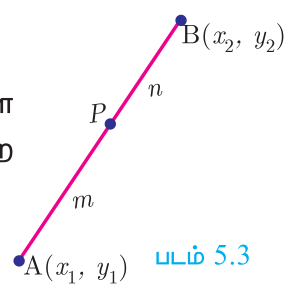
படம் 5.2

### பிரிவு சூத்திரம்

#### உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி

$A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ ஆகிய இருவேறுபட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் $AB$ என்ற கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $m{:}n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x,y)$

என்பது $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ ஆகும்.

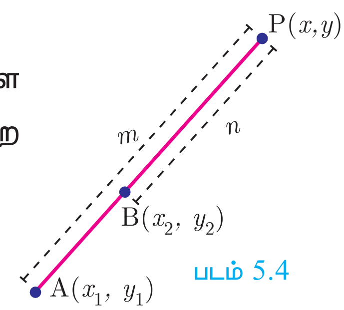


படம் 5.3

#### வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி

$A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ ஆகிய இருவேறுபட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் $AB$ என்ற கோட்டுத்துண்டை வெளிப்புறமாக $m{:}n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x,y)$

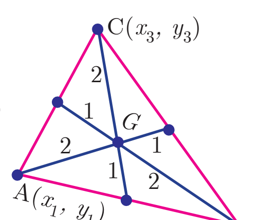
என்பது $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ ஆகும்.



படம் 5.4

#### முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $(G)$ $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ஆகும்.



படம் 5.5

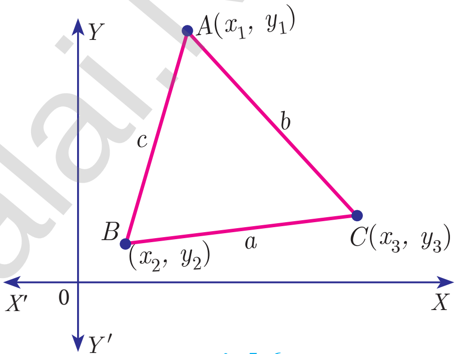
## முன்னேற்றச் சோதனை

1. அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்க.

| எண் | புள்ளிகள் | தொலைவு | நடுப் புள்ளி | உட்புறம் | | வெளிப்புறம் | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | புள்ளி | விகிதம் | புள்ளி | விகிதம் |
| (i) | $(3,4),\ (5,5)$ | | | | 2:3 | | 2:3 |
| (ii) | $(-7,13),(-3,1)$ | | | $\left(-\frac{13}{3},5\right)$ | | $(-13,\ 15)$ | |

2. $A(0,5),\quad B(5,0)$ மற்றும் $C(-4,-7)$ -ஐ முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்____________.

## 5.2 முக்கோணத்தின் பரப்பு (Area of a Triangle)



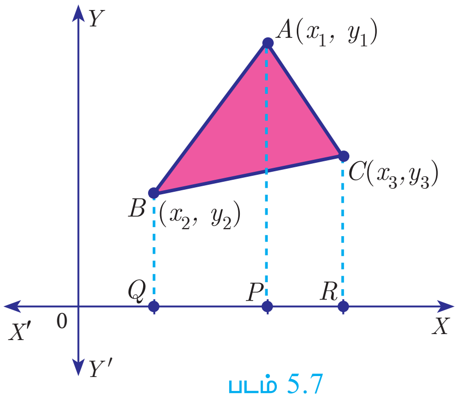
படம் 5.6

முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் (குத்துயரம்) கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பைக் காணும் முறையை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம்.

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ குத்துயரம் ச.அ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினோம். ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகளான $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$–ஐக் கொண்டு $ABC$ என்ற முக்கோணத்தை அமைக்கலாம்.

$a,\ b,\ c$ என்பன முக்கோணம் $ABC$–யின் பக்கங்களின் நீளங்கள் என்க. இங்கு, இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$2S = a + b + c$, எனக் கொண்டு, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ எனும் ஹெரோன்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணம் $ABC$–யின் பரப்பளவைக் காணலாம். இம்முறையில் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்பது சற்று கடினமாகும்.



படம் 5.7

மூன்று முனைப் புள்ளிகளைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் (அதன் பக்க அளவுகள் இல்லாமல்) கணக்கிடும் நேர்த்தியான முறையைப் பற்றி இங்கு விவாதிப்போம்.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்பன முக்கோணம் $ABC$–யின் முனைப் புள்ளிகள் என்க. புள்ளிகள் $A,\ B,\ C$–லிருந்து $X$ அச்சுக்குச் செங்குத்தாக முறையே $AP$, $BQ$ மற்றும் $CR$ வரைக. $ABQP$, $APRC$ மற்றும் $BQRC$ ஆகியவை சரிவகங்கள் ஆகும்.

இப்பொழுது படம் 5.7 –லிருந்து, முக்கோணம் $ABC$ –யின் பரப்பு

= சரிவகம் $ABQP$–யின் பரப்பு $+$ சரிவகம் $APRC$ –யின் பரப்பு–சரிவகம் $BQRC$ –யின் பரப்பு.

சரிவகத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times$ (இணைப் பக்கங்களின் கூடுதல்) $\times$ (இணைப் பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட குத்துயரம்) என்பது நமக்குத் தெரியும்.

எனவே, $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

இதிலிருந்து, $\Delta ABC$ யின் பரப்பானது கீழ்க்காணும் கோவையின் மிகை மதிப்பாகும்..

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ சதுர அலகுகள்

புள்ளிகள் $A, B, C$ –ஐ கடிகாரத்தின் எதிர் திசையில் எடுத்துக்கொண்டால், $\Delta ABC$ –யின் முனைகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்பவை "வரிசையாக எடுக்கப்பட்டவை" எனலாம். இவ்வாறு வரிசையாக எடுக்கப்பட்டால் முக்கோணத்தின் பரப்பு எப்பொழுதும் குறை எண்ணாக அமையாது

### மற்றொரு வடிவம்

கீழ்க்கண்ட பட விளக்கமானது மேற்கண்ட சூத்திரத்தை மிக எளிதாகப் பெறுவதற்கு உதவிகரமாக இருக்கும்.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

**குறிப்பு**

முக்கோணத்தின் பரப்பு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது. எனவே குறை எண்ணாக இருந்தால் அதனை மிகை எண்ணாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$\Delta ABC$ யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\}$ சதுர அலகுகள்.

### முன்னேற்றச் சோதனை

$P(0, -4)$, $Q(3, 1)$ மற்றும் $R(-8, 1)$ என்பன $\Delta PQR$ –யின் முனைப் புள்ளிகள் எனில்

1. வரைபடத்தாளில் $\Delta PQR$ –ஐ வரைக
2. $\Delta PQR$ ஆனது சம பக்கம் உடையதா எனச் சோதிக்க.
3. $\Delta PQR$ –யின் பரப்பைக் காண்க.
4. $QP$ –யின் மையம் $M$ –யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க..
5. $QR$ யின் மையம் $N$–யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க..
6. $\Delta MPN$ –யின் பரப்பைக் காண்க.
7. $\Delta MPN$ மற்றும் $\Delta PQR$ –யின் பரப்புகளின் விகிதம் என்ன?

## 5.2.1 ஒரு கோட்டமைந்த மூன்று புள்ளிகள் (Collinearity of three points)

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்ற வெவ்வேறான மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைந்ததாக இருந்தால் அவைகள் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்காது. ஏனெனில் இம்முக்கோணத்திற்குக் குத்துயரம் (உயரம்) இல்லை. எனவே $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைந்தவை எனில், $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு $= 0$.

இதுபோல, $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு பூச்சியம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

இதிலிருந்து $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்ற மூன்று வெவ்வேறு புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைந்தவையாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு $=0$

**குறிப்பு**

ஒரே கோட்டமை புள்ளிகளுக்கான மற்றொரு நிபந்தனை

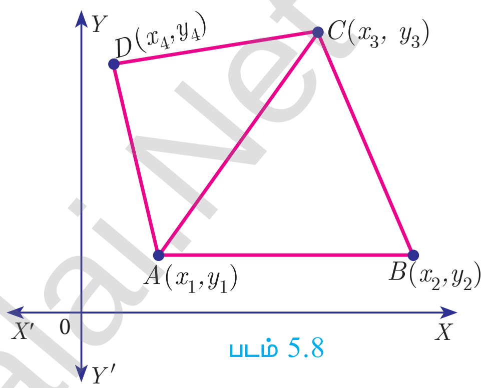
$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்பன ஒரே கோட்டமைந்த புள்ளிகள் எனில்

$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ அல்லது $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1 = x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2$.

## 5.3 நாற்கரத்தின் பரப்பு (Area of a Quadrilateral)

மூலைவிட்டம் $AC$ மூலம் நாற்கரம் $ABCD$–யை $ABC$ மற்றும் $ACD$ என்ற இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரத்தைக் கொண்டு முக்கோணம் $ABC$ மற்றும் $ACD$–யின் பரப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.



படம் 5.8

இப்பொழுது, நாற்கரம் $ABCD$–யின் பரப்பு$=\Delta ABC$ –யின் பரப்பு$+$ $\Delta ACD$ –யின் பரப்பு, இந்த முறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட முனைப் புள்ளிகளை உடைய நாற்கரத்தின் பரப்பைக் கணக்கிடலாம்.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ மற்றும் $D(x_4,y_4)$ என்பன நாற்கரம் $ABCD$–யின் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

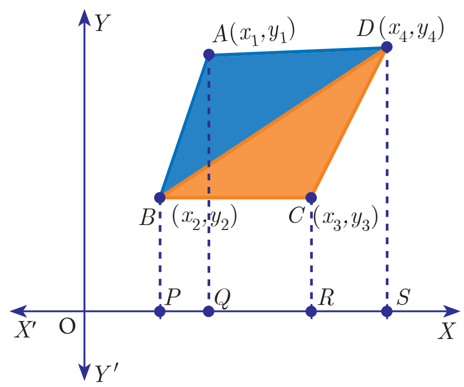
நாற்கரம் $ABCD$ –யின் பரப்பு $=\Delta ABD$ –யின் பரப்பு $+$ $\Delta BCD$ –யின் பரப்பு (படம்5.9)

$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_4y_2+x_1y_4)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{(x_2y_3+x_3y_4+x_4y_2)-(x_3y_2+x_4y_3+x_2y_4)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)\}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.9

மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பின்வரும் படவிளக்கம் மூலம் எளிதில் நினைவிற் கொள்ளலாம். $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ மற்றும் $D(x_4,y_4)$ என்ற புள்ளிகளைக் கடிகார முள்ளின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டு முக்கோணத்தின் பரப்பு காணும் முறை போலப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{array}\right\}$$

**சிந்தனைக்களம்**

பரப்பு பூச்சியமாக உள்ளவாறு எத்தனை முக்காணங்கள் அமைக்க முடியும்?

எனவே, நாற்கரம் ABCD யின் பரப்பு

$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\}$$ **சதுர அலகுகள்.**

**குறிப்பு**

- ஒரு நாற்கரத்தை பொதுவான பரப்பு இல்லாத இரு முக்கோணங்களாகப் பிரித்து அம்முக்கோணங்களின் பரப்புகளைக் கூட்டினால் நாற்கரத்தின் பரப்பு கிடைக்கும்.
- நாற்கரத்தின் பரப்பு ஒருபோதும் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது. எனவே இதன் பரப்பை மிகை எண்ணாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

**சிந்தனைக்களம்**

1. $(a, a), (-a, a), (a, -a)$ மற்றும் $(-a, -a)$, (இங்கு $a \neq 0$) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு $64$ ச. அலகுகள் எனில், அந்த நாற்கரத்தின் பெயர் என்ன?
2. $a$ – யின் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.

**எடுத்துக்காட்டு 5.1** $(-3,5)$, $(5,6)$ மற்றும் $(5,-2)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** படத்தில், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைக் கடிகார முள்ளின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும்.

$A(-3,5)$, $B(5,-2)$, $C(5,6)$ என்பன முக்கோணத்தின் முனைகள் என்க.

$(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$

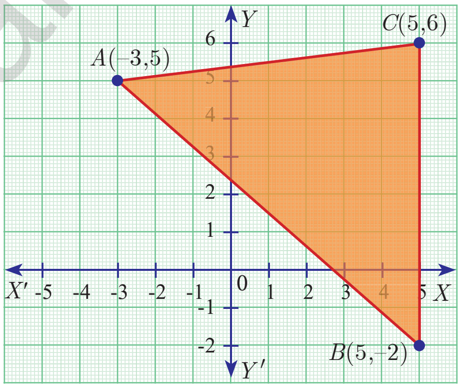
$\Delta ABC$ –யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{61 + 3\}$$

$$= \frac{1}{2}(64) = 32 \text{ சதுர அலகுகள்}$$




படம் 5.10

**எடுத்துக்காட்டு 5.2** $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$ மற்றும் $R(-3,4)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, $R(-3,4)$ ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஆகும்.

$\Delta PQR$ –யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$$= \frac{1}{2}\{(3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6)\} = \frac{1}{2}\{18 - 18\} = 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

**எடுத்துக்காட்டு 5.3** $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ மற்றும் $C(7,4)$ ஆகியவற்றை வரிசையான முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $22$ சதுர அலகுகள் எனில், $k$–யின் மதிப்புக் காண்க.

**தீர்வு** $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ மற்றும் $C(7,4)$ ஆகியன முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்

$\Delta ABC$ –யின் பரப்பு $22$ சதுர அலகுகள்.

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 22$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2 + 4k + 14) - (2k - 14 - 4)\right\} = 22$$

$$2k + 34 = 44$$

ஆகையால், $2k = 10$ எனவே $k = 5$

**எடுத்துக்காட்டு 5.4** $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$ மற்றும் $R(5,-1)$ என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் என்க. மேலும் $2b + c = 4$ எனில், $b$ மற்றும் $c$ –யின் மதிப்பு காண்க.

**தீர்வு** $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$ மற்றும் $R(5,-1)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதால்

$\Delta PQR$ –யின் பரப்பு $= 0$

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{(-c - b - 20) - (-4b + 5c + 1)\right\} = 0$$

$$-c - b - 20 + 4b - 5c - 1 = 0$$

$$b - 2c = 7 \quad \ldots(1)$$

மேலும், $2b + c = 4 \quad \ldots(2)$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$(1)$ மற்றும் $(2)$ –ஐ தீர்ப்பதன் மூலம் நாம் பெறுவது, $b = 3$, $c = -2$

**எடுத்துக்காட்டு 5.5** ஓர் அறையின் தளமானது ஒரே மாதிரியான முக்கோண வடிவத் தரை ஓடுகளைக் கொண்டு (tiles) அமைக்கப்படுகிறது. அதில் ஓர் ஓட்டின் முனைகள் $(-3,2)$,$(-1,-1)$ மற்றும் $(1,2)$ ஆகும். தரைத்தளத்தை முழுமையாக அமைக்க $110$ ஓடுகள் தேவைப்படுகின்றது எனில், அதன் பரப்பைக் காண்க. .

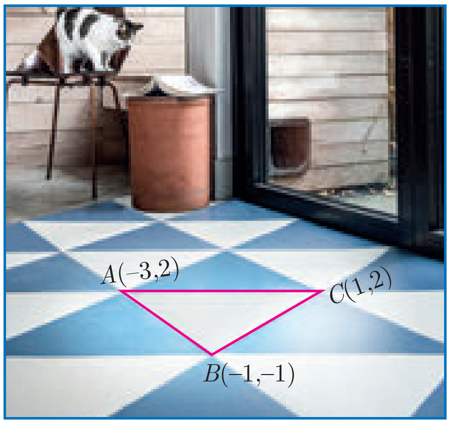
**தீர்வு** ஓர் ஓட்டின் முனைப் புள்ளிகள் $(-3,2)$,$(-1,-1)$ மற்றும் $(1,2)$ ஆகும்.

இந்த ஓட்டின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left\{(3 - 2 + 2) - (-2 - 1 - 6)\right\}$ ச. அலகுகள்

$= \frac{1}{2}(12) = 6$ ச. அலகுகள்

தரைத்தளமானது ஒரே மாதிரியான $110$ ஓடுகளால் நிரப்பப்படுவதால்,

தரைத்தளத்தின் பரப்பு $= 110 \times 6 = 660$ ச. அலகுகள்.



படம் 5.11

**எடுத்துக்காட்டு 5.6** $(8,6)$, $(5,11)$, $(-5,12)$ மற்றும் $(-4,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்பதற்கு முன்பாகக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கவேண்டும்.

$A(8,6)$, $B(5,11)$, $C(-5,12)$ மற்றும் $D(-4,3)$ என்பன முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

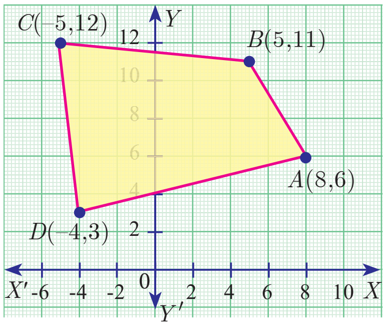
எனவே, நாற்கரம் $ABCD$–யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(88 + 60 - 15 - 24) - (30 - 55 - 48 + 24)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{109 + 49\}$$

$$= \frac{1}{2}\{158\} = 79$$ ச. அலகுகள்

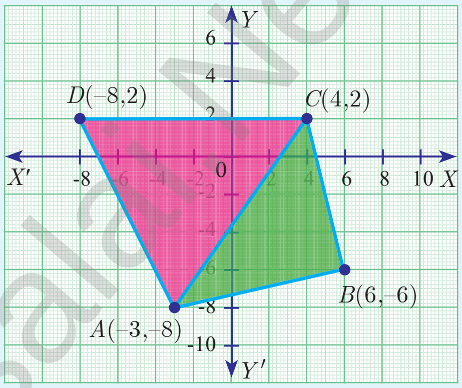



படம் 5.12

## முன்னேற்றச் சோதனை

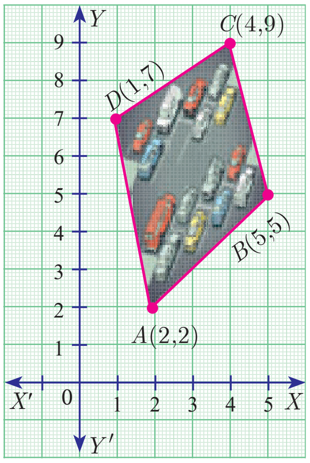
கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரம் $ABCD$ –யின் முனைகள் $A(-3, -8)$, $B(6, -6)$, $C(4, 2)$, $D(-8, 2)$ ஆகும்

1. $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு காண்க.
2. $\Delta ACD$ –யின் பரப்பு காண்க..
3. $\Delta ABC$ –யின் பரப்பு + $\Delta ACD$ –யின் பரப்பு காண்க.
4. நாற்கரம் $ABCD$ –யின் பரப்பு காண்க.
5. கேள்வி 3 மற்றும் 4–யின் விடைகளை ஒப்பிடுக.




படம் 5.13

**எடுத்துக்காட்டு 5.7** கொடுக்கப்பட்ட படமானது ஒரு வளாகத்தில் புதிய வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்த அமைக்கப்பட்ட பகுதியைக் காட்டுகிறது. இதை அமைப்பதற்கு ஒரு சதுர அடிக்கு ₹1300 செலவாகும் என மதிப்பிடப்படுகிறது எனில், வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்துவதற்குத் தேவையான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடவும்.




படம் 5.14

**தீர்வு** $A(2,2)$, $B(5,5)$, $C(4,9)$ மற்றும் $D(1,7)$ என்பது நாற்கர வடிவ வாகன நிறுத்தத்தின் முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்..

எனவே, வாகன நிறுத்தத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left\{(10 + 45 + 28 + 2) - (10 + 20 + 9 + 14)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{85 - 53\}$$

$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 9 & 7 & 2 \end{Bmatrix}$ -யைப் பயன்படுத்து

$$= \frac{1}{2}(32) = 16$$ சதுர அடிகள்.

எனவே, வாகன நிறுத்தத்தின் பரப்பு $= 16$ சதுர அடிகள்

ஒரு சதுர அடி அமைக்க ஆகும் செலவு $= ₹1300$

ஆகையால், வாகன நிறுத்தம் அமைக்க ஆகும் மொத்தச் செலவு $= 16 \times 1300 =$ ₹20800

## செயல்பாடு 1

(i) ஒரு வரைபடத்தாளை எடுத்துக்கொள்க.

(ii) (0,0) மற்றும் (6,0) என்ற புள்ளிகளால் இணைக்கப்பட்ட அடிக்கோட்டினைக் கொண்ட முக்கோணத்தினைக் கருதுக

(iii) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) ஆகியவற்றை, மேற்கூறிய முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனைகளாகக் கொண்டு கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் பரப்பு காண்க. விவரங்களை அட்டவணையில் நிரப்புக:

(iv) $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ –லிருந்து நீங்கள் காணும் அமைப்பை எழுதுக?.

| மூன்றாவது முனை | முக்கோணத்தின் பரப்பு |
|---|---|
| (1,1) | $A_1 =$ |
| (2,2) | $A_2 =$ |
| (3,3) | $A_3 =$ |
| (4,4) | $A_4 =$ |
| (5,5) | $A_5 =$ |

(v) மூன்றாவது முனைப் புள்ளிகளாக (1,2), (2,4), (3,8), (4,16), (5,32) ஆகியவற்றைக் கொண்டு படி (iii) –ஐ மீண்டும் செய்க

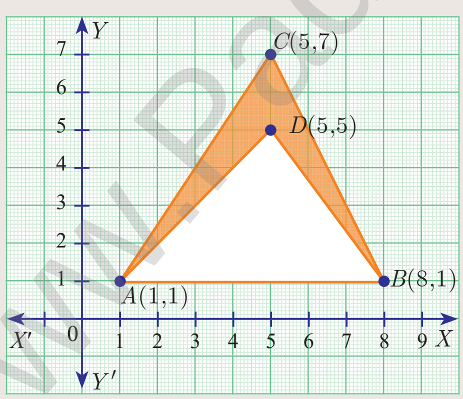
(vi) புதிய விவரங்களைக் கொண்டு அட்டவணையை நிரப்புக.

(vii) $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ உருவாக்கும் அமைப்பு என்ன?

| மூன்றாவது முனை | முக்கோணத்தின் பரப்பு |
|---|---|
| (1,2) | $A_1 =$ |
| (2,4) | $A_2 =$ |
| (3,8) | $A_3 =$ |
| (4,16) | $A_4 =$ |
| (5,32) | $A_5 =$ |

## செயல்பாடு 2

நிழலிட்ட பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.




படம் 5.15

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

1630–களில் நவீன ஆயத் தொலை வடிவியல் பற்றிய கருத்துகளை உருவாக்கியவர்கள் இரு பிரஞ்சு கணிதவியலாளர்களான ரானே டெஸ்கார்டிஸ் மற்றும் பியரி டி ஃபெர்மா ஆவர்.

## பயிற்சி 5.1

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.
   (i) (1,–1), (–4, 6) மற்றும் (–3, –5) (ii) (–10, –4), (–8, –1) மற்றும் (–3, –5)

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனத் தீர்மானிக்கவும்.
   (i) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, (–5, 6) மற்றும் (–8, 8) (ii) $(a,\ b+c)$, $(b,\ c+a)$ மற்றும் $(c,\ a+b)$

3. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளும், அதன் பரப்பளவுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ‘$p$’–யின் மதிப்பைக் காண்க.

| எண் | முனைப் புள்ளிகள் | பரப்பு (சதுர அலகில்) |
|---|---|---|
| (i) | $(0, 0), (p, 8), (6, 2)$ | 20 |
| (ii) | $(p, p), (5, 6), (5, -2)$ | 32 |

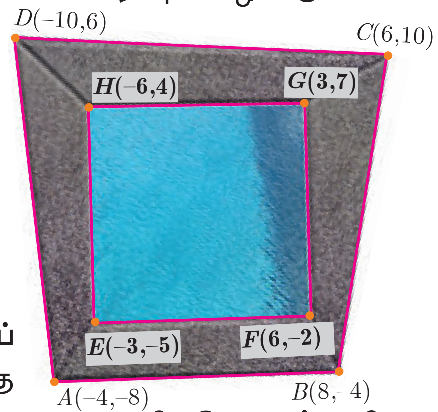
4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தவை எனில், ‘$a$’ –யின் மதிப்பைக் காண்க.
   (i) $(2, 3), (4, a)$ மற்றும் $(6, -3)$
   (ii) $(a, 2-2a), (-a+1, 2a)$ மற்றும் $(-4-a, 6-2a)$

5. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க?
   (i) $(-9, -2), (-8, -4), (2, 2)$ மற்றும் $(1, -3)$ (ii) $(-9, 0), (-8, 6), (-1, -2)$ மற்றும் $(-6, -3)$

6. $(-4, -2), (-3, k), (3, -2)$ மற்றும் $(2, 3)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 28 ச. அலகுகள் எனில், $k$–யின் மதிப்புக் காண்க.

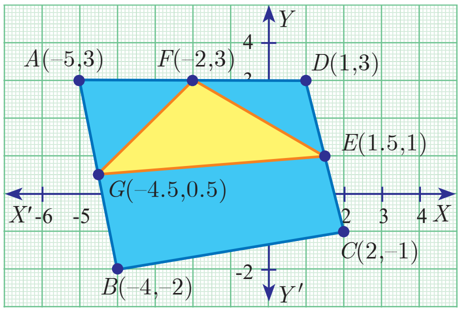
7. $A(-3,9)$, $B(a,b)$ மற்றும் $C(4,-5)$ என்பன ஒரு கோட்டமைந்த புள்ளிகள் மற்றும் $a+b=1$ எனில், $a$ மற்றும் $b$ –யின் மதிப்பைக் காண்க.

8. $\Delta ABC$ –யின் பக்கங்கள் $AB$, $BC$ மற்றும் $AC$ ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $P(11,7)$, $Q(13.5,4)$ மற்றும் $R(9.5,4)$ என்க. முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் $A, B$ மற்றும் $C$ காண்க. மேலும், $\Delta ABC$ –யின் பரப்பை $\Delta PQR$ –யின் பரப்புடன் ஒப்பிடுக.




9. நாற்கர வடிவ நீச்சல் குளத்தின் கான்கிரீட் உள்முற்றமானது படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அமைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், உள்முற்றத்தின் பரப்பு காண்க?

10. $A(-5,-4)$, $B(1,6)$ மற்றும் $C(7,-4)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோண வடிவக் கண்ணாடிக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. 6 சதுர அடி பரப்புக்கு வர்ணம் பூச ஒரு வாளி தேவைப்படுகிறது எனில் கண்ணாடியின் முழுப் பகுதியையும் ஒரு முறை வர்ணம் பூச எத்தனை வாளிகள் தேவைப்படும்?.




11. படத்தைப் பயன்படுத்திப் பரப்பைக் காண்க.
    (i) முக்கோணம் $AGF$ (ii) முக்கோணம் $FED$
    (iii) நாற்கரம் $BCEG$.

## 5.4 கோட்டின் சாய்வு (Inclination of a line)

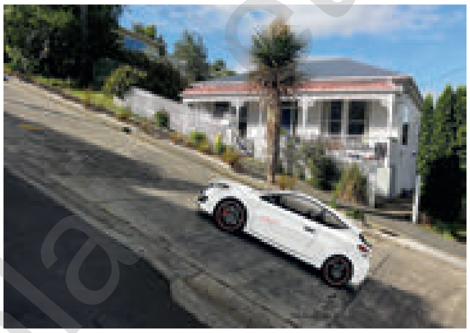
கோட்டின் சாய்வு அல்லது **சாய்வுக் கோணம்** (inclination of a line) என்பது $X$ அச்சின் மிகை திசைக்கும், நேர்கோட்டிற்கும் இடையே, கடிகார முள்ளின் எதிர் திசையில் அமைந்த கோணம் ஆகும். சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. .

**குறிப்பு**

- $X$ அச்சு மற்றும் $X$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோடுகளின் சாய்வுக்கோணம் $0°$ ஆகும்.
- $Y$ அச்சு மற்றும் $Y$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணம் $90°$ ஆகும்.

### 5.4.1 நேர்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a Straight line)

சாலைகளை அமைக்கும்போது, எவ்வளவு சாய்வாகச் சாலை இருக்கவேண்டும் என்பதை அறிந்துகொள்ளவேண்டும். அதேபோல மாடிப் படிக்கட்டுகள் அமைக்கும்போதும், அதன் சாய்வுத் தன்மையைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். இந்தச் சாய்வுத் தன்மையினால் சாதாரணச் சாலையில் பயணிப்பதைவிட மலை அல்லது மேம்பாலம் ஆகியவற்றில் பயணிப்பது கடினமானதாக உணர்கிறோம். இவையாவிலும் முக்கிய அம்சமாக இருப்பது "சாய்வுத் தன்மை" (steepness) ஆகும். இந்தச் சாய்வுத் தன்மையானது **சாய்வு** அல்லது **சாய்வின் அளவு** (Slope or gradiant) என்று அழைக்கப்படுகிறது.



படம் 5.16

சாய்வு என்ற கருத்தானது பொருளாதாரத்தில் முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு பொருளின் விலைக்கேற்ப அதன் தேவை மாறுபடுவதைக் கணக்கிடுவதில் இந்தக் கருத்து பயன்படுகிறது. சாய்வானது சாய்வுத் தன்மை (steepness) மற்றும் திசை (Direction) என்ற இரு காரணிகளை உள்ளடக்கியதாகும்

**வரையறை**

நேர்குத்தற்ற நேர்கோட்டின் (non–vertical line) சாய்வுக் கோணம் $\theta$ எனில், $\tan\theta$ என்பது அக்கோட்டின் சாய்வு ஆகும். இதை $m$ எனக் குறிக்கலாம்.

எனவே, நேர்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$, $0 \le \theta \le 180°$, $\theta \ne 90°$ ஆகும்.

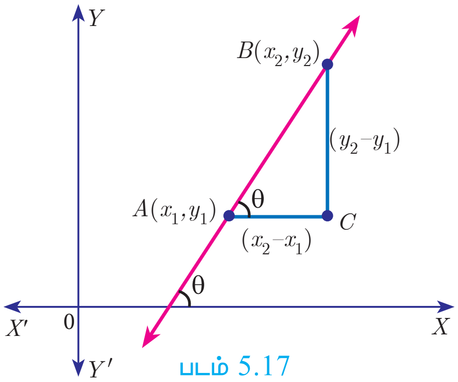
#### இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காணல்

$$\text{சாய்வு } m = \tan\theta$$

$$= \frac{\text{எதிர் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$




படம் 5.17

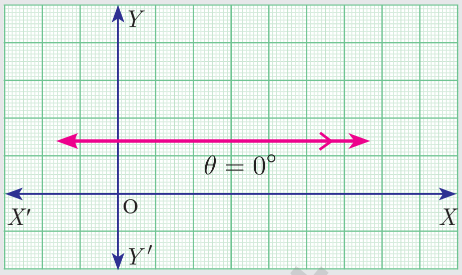
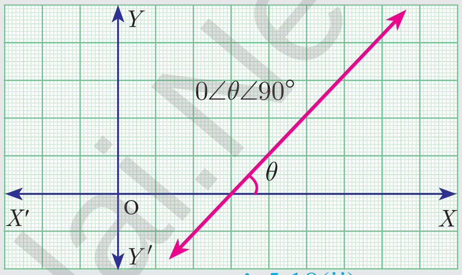
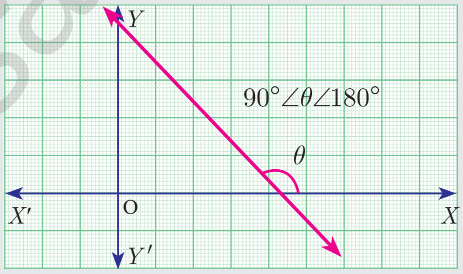
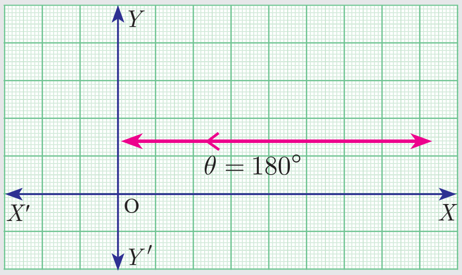
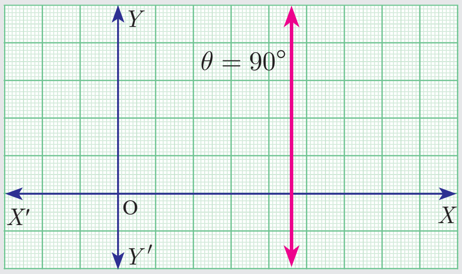
$$\text{சாய்வு } m = \frac{y \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}$$

**குறிப்பு**

செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு வரையறுக்கப்பட இயலாது (Undefined).

$(x_1, y_1)$ மற்றும் $(x_2, y_2)$, $x_1 \ne x_2$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சாய்வு $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ஆகும்.

### சாய்வுகளின் மதிப்புகள்

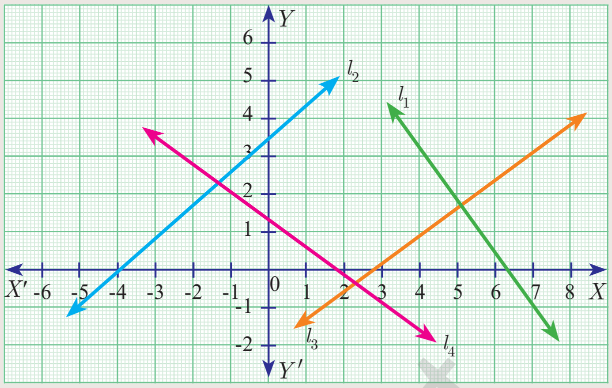
| வ. எண் | நிபந்தனை | சாய்வு | வரைபடம் |
|---|---|---|---|
| (i) | $\theta = 0^\circ$ | நேர்கோடானது $X$ அச்சின் மிகை திசையில் இணையாக அமையும் |   படம் 5.18(i) |
| (ii) | $0 < \theta < 90^\circ$ | நேர்கோட்டின் சாய்வு ஒரு மிகை எண் ஆகும். (நேர்கோடானது இடமிருந்து வலது நோக்கி உயரும்போது சாய்வானது மிகை எண் ஆகும்) |   படம் 5.18(ii) |
| (iii) | $90^\circ < \theta < 180^\circ$ | நேர்கோட்டின் சாய்வு ஒரு குறை எண் ஆகும். (நேர்கோடானது இடமிருந்து வலது நோக்கி இறங்கும் போது சாய்வானது குறை எண் ஆகும்). |   படம் 5.18(iii) |
| (iv) | $\theta = 180^\circ$ | நேர்கோடானது $X$ அச்சின் குறை திசையில் இணையாக இருக்கும் |   படம் 5.18(iv) |
| (v) | $\theta = 90^\circ$ | சாய்வை வரையறுக்க இயலாது. |   படம் 5.18(v) |

## செயல்பாடு 3

வரைபடமானது $l_1$, $l_2$, $l_3$ மற்றும் $l_4$ என்ற நான்கு நேர்கோடுகளைக் கொண்டுள்ளது

(i) மிகைச் சாய்வு கொண்ட நேர்கோடுகள் எவை?

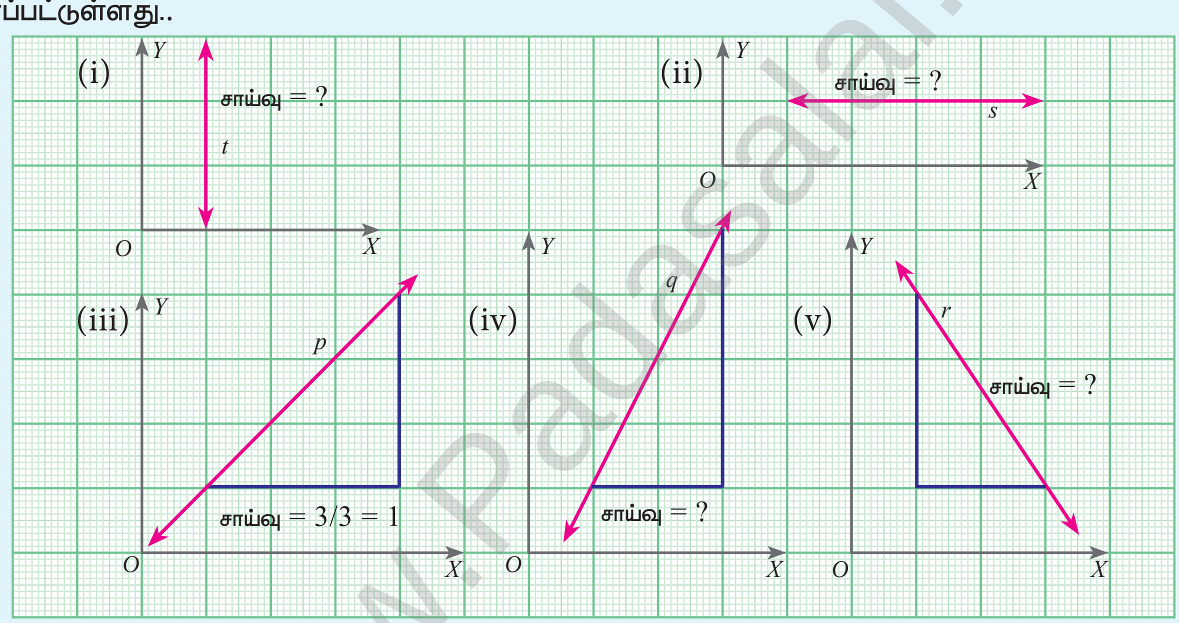
(ii) குறைச் சாய்வு கொண்ட நேர்கோடுகள் எவை?




படம் 5.19

## முன்னேற்றச் சோதனை

கீழே கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சாய்வைக் கண்டுபிடிக்க. கணக்கு (iii)–யின் தீர்வு தரப்பட்டுள்ளது..




படம் 5.20

**தீர்வு** (iii) நேர்கோடு $p$–யின் சாய்வு $= \dfrac{y \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}} = \dfrac{3}{3} = 1$

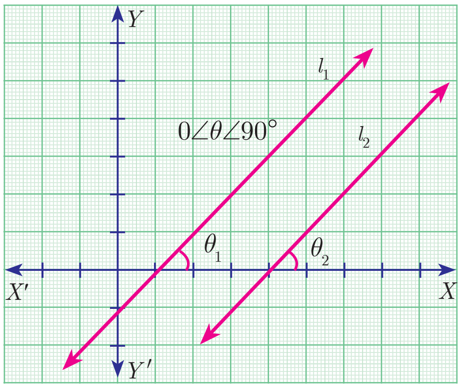
### 5.4.2 இணைகோடுகளின் சாய்வுகள் (Slopes of parallel lines)

இரண்டு நேர்குத்தற்ற கோடுகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை இணையாக இருக்கும்.

$l_1$ மற்றும் $l_2$ என்ற இரு நேர்குத்தற்ற கோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்க.

நேர்கோடுகள் $X$ அச்சின் மிகை திசையில் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் $\theta_1$ மற்றும் $\theta_2$ என்க.

$l_1$ மற்றும் $l_2$ இணை கோடுகள் எனக் கொள்க.




படம் 5.21

$$\theta_1 = \theta_2 \; (\theta_1,\ \theta_2 \text{ என்பன ஒத்த கோணங்கள் என்பதால்})$$
$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$
$$m_1 = m_2$$

ஆகவே, சாய்வுகள் சமம்.

எனவே, நேர்குத்தற்ற இணையான கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம்

LJB867

**மறுதலையாக**

சாய்வுகள் சமம் என்க. ஆகவே $m_1 = m_2$

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$
$$\theta_1 = \theta_2 \; (0 \le \theta_1,\ \theta_2 \le 180^\circ \text{ என்பதால்})$$

அதாவது ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

இதிலிருந்து, $l_1$ மற்றும் $l_2$ இணை கோடுகள் ஆகும்.

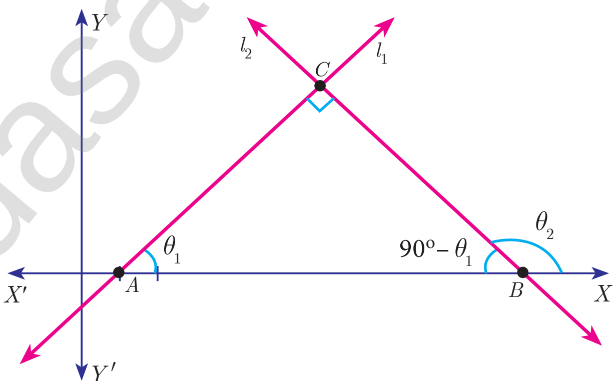
எனவே, இரு நேர்குத்தற்ற கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமெனில் அக்கோடுகள் இணையாகும்.

ஆகையினால் நேர்குத்தற்ற இரு கோடுகள் இணையாக இருக்க வேண்டுமாயின், அக்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

### 5.4.3 செங்குத்துக்கோடுகளின் சாய்வுகள் (Slopes of perpendicular lines)

இரண்டு நேர்குத்தற்ற கோடுகளின் சாய்வுகளான $m_1$ $m_2$ இவற்றின் பெருக்கல் பலன் அதாவது $m_1m_2 = -1$ ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, அக்கோடுகள் செங்குத்தாக இருக்கும்.

$l_1$ மற்றும் $l_2$ ஆகிய நேர்குத்தற்ற இருகோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்க. அவற்றின் சாய்வுக் கோணங்கள் முறையே $\theta_1$ மற்றும் $\theta_2$ என்க.



படம் 5.22

மேலும் $m_1 = \tan\theta_1$ மற்றும் $m_2 = \tan\theta_2$

முதலில், $l_1$ மற்றும் $l_2$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனக் கொள்க.

$\angle ABC = 90^\circ - \theta_1$ ($\Delta$ABC –யின் கோணங்களின் கூடுதல் $180^\circ$)

அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\theta_2$ மற்றும் $90^\circ - \theta_1$ ஆகியவற்றைக் கொண்டு $l_2$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வைக் கணக்கிடுக.

$$\tan\theta_2 = -\tan(90^\circ - \theta_1)$$
$$= \frac{-\sin(90^\circ-\theta_1)}{\cos(90^\circ-\theta_1)} = \frac{-\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = -\cot\theta_1 \quad \text{எனவே, } \tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1}$$
$$\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = -1$$
$$m_1 . m_2 = -1.$$

இதிலிருந்து, $l_1$ , $l_2$ என்ற இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், $m_1m_2 = -1$ ஆகும்.

**மறுதலையாக,**

$l_1$ , $l_2$ என்ற நேர்குத்தற்ற இரு கோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்க. மேலும், $m_1m_2 = -1$ எனக் கொள்க.

$m_1 = \tan\theta_1$ , $m_2 = \tan\theta_2$ என்பதால்

நாம் பெறுவது, $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

$$\tan\theta_1 = -\cot\theta_2$$

$$\tan\theta_1 = -\tan(90^\circ - \theta_2)$$

$$\tan\theta_1 = \tan\left(-(90^\circ - \theta_2)\right) = \tan(\theta_2 - 90^\circ)$$

$\theta_1 = \theta_2 - 90^\circ$ $(0 \le \theta_1, \theta_2 \le 180^\circ$ என்பதால்)

$$\theta_2 = 90^\circ + \theta_1$$

ஆனால், $\Delta ABC$ யில், $\theta_2 = \angle C + \theta_1$

எனவே, $\angle C = 90^\circ$

ஆகவே $l_1$ மற்றும் $l_2$ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆகும்

> **உங்களுக்குத் தெரியுமா?** எந்த ஒரு முக்கோணத்திற்கும் அதன் வெளிக்கோணமானது உள் எதிர் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்

**குறிப்பு**

- நேர்குத்தற்ற இரு நேர்கோடுகள் $l_1$ , $l_2$ ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் முறையே $m_1$ , $m_2$ எனில்,
  - (i) $l_1$ ஆனது $l_2$ –க்கு இணை எனில், எனில் $m_1 = m_2$ .
  - (ii) $l_1$ , $l_2$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், $m_1m_2 = -1$ .

**எடுத்துக்காட்டு 5.8** (i) ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் $30^\circ$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. (ii) ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\sqrt{3}$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் காண்க.

**தீர்வு** (i) இங்கு $\theta = 30^\circ$

சாய்வு $m = \tan\theta$

எனவே, சாய்வு $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) சாய்வு $m = \sqrt{3}$ , $\theta$ என்பது கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் என்க.

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

நாம் பெறுவது, $\theta = 60^\circ$

> **சிந்தனைக் களம்**
> $X$ அச்சு மற்றும் $Y$ அச்சு ஆனது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. இங்கு $m_1m_2 = -1$ என்ற நிபந்தனை உண்மையாகுமா?

**எடுத்துக்காட்டு 5.9** கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

(i) $(-6, 1)$ மற்றும் $(-3, 2)$ (ii) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (iii) $(14, 10)$ மற்றும் $(14, -6)$

**தீர்வு**

(i) $(-6,1)$ மற்றும் $(-3,2)$

சாய்வு $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{2-1}{-3+6} = \dfrac{1}{3}$.

(ii) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7}\right)$

சாய்வு $= \dfrac{\frac{3}{7}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{7}+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{6-7}{14}}{\frac{6+7}{21}}$

$= -\dfrac{1}{14}\times\dfrac{21}{13} = -\dfrac{3}{26}$.

(iii) $(14,10)$ மற்றும் $(14,-6)$

சாய்வு $= \dfrac{-6-10}{14-14} = \dfrac{-16}{0}$.

பூச்சியத்தால் வகுக்க முடியாததால் சாய்வை வரையறுக்க இயலாது.

**முன்னேற்றச் சோதனை**

விடுபட்டவற்றைப் பூர்த்தி செய்க.

| வ எண் | புள்ளிகள் | சாய்வு |
|---|---|---|
| 1 | $A(-a,\ b),\ B(3a,-b)$ | |
| 2 | $A(2,\ 3),\ B(\_,\_)$ | 2 |
| 3 | | 0 |
| 4 | | வரையறுக்கப்பட வில்லை |

**எடுத்துக்காட்டு 5.10** $(-2,\ 2),\ (5,\ 8)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு $r$ மற்றும் $(-8,\ 7),\ (-2,\ 0)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு $s$ ஆகும் எனில், நேர்கோடு $r$–ஆனது நேர்கோடு $s$ -க்கு செங்குத்தாக அமையுமா?

**தீர்வு** நேர்கோடு $r$ -யின் சாய்வு $m_1 = \dfrac{8-2}{5+2} = \dfrac{6}{7}$

நேர்கோடு $s$ –யின் சாய்வு $m_2 = \dfrac{0-7}{-2+8} = \dfrac{-7}{6}$

சாய்வுகளின் பெருக்கல் $= \dfrac{6}{7}\times\dfrac{-7}{6} = -1$

அதாவது, $m_1m_2 = -1$

எனவே, நேர்கோடு $r$ ஆனது, நேர்கோடு $s$ -க்கு செங்குத்தாக அமையும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.11** $(3,-2)$, $(12,4)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு $p$ மற்றும் $(6,-2)$ மற்றும் $(12,2)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு $q$ ஆகும். $p$ ஆனது $q$–க்கு இணையாகுமா?

**தீர்வு** $p$ –யின் சாய்வு $m_1 = \dfrac{4+2}{12-3} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

$q$ –யின் சாய்வு $m_2 = \dfrac{2+2}{12-6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

இதிலிருந்து, நேர்கோடு $p$ –யின் சாய்வு $=$ நேர்கோடு $q$–யின் சாய்வு. எனவே, நேர்கோடு $p$–யானது நேர்கோடு $q$–க்கு இணை ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.12** $(-2,5)$, $(6,-1)$ மற்றும் $(2,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகள் எனக் காட்டு.

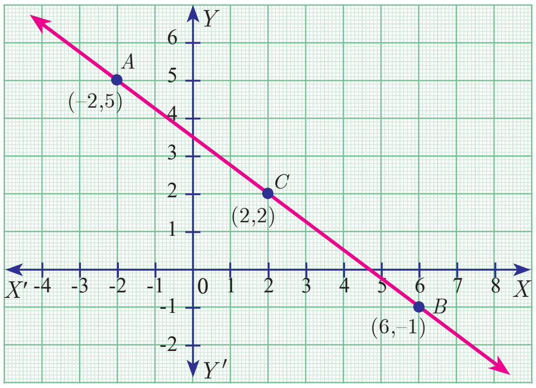
**தீர்வு** $A(-2,5)$, $B(6,-1)$ மற்றும் $C(2,2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஆகும்.

$AB$–யின் சாய்வு $= \dfrac{-1-5}{6+2} = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4}$

$BC$–யின் சாய்வு $= \dfrac{2+1}{2-6} = \dfrac{3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$

$AB$–யின் சாய்வு $=$ $BC$ –யின் சாய்வு

எனவே, $A$, $B$, $C$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளன. ஆகவே, $A$, $B$, $C$ என்பன ஒரு கோட்டமைந்த புள்ளிகள் ஆகும்.




படம் 5.23

**எடுத்துக்காட்டு 5.13** $A(1,-2)$, $B(6,-2)$, $C(5,1)$ மற்றும் $D(2,1)$ என்பன நான்கு புள்ளிகள் எனில்,

(i) (a) $AB$ (b) $CD$ என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க

(ii) (a) $BC$ (b) $AD$ என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க

(iii) விடைகளிலிருந்து நீங்கள் அறிவது என்ன?.

**தீர்வு** (i) (a) $AB$–யின் சாய்வு $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2+2}{6-1} = 0$

(b) $CD$–யின் சாய்வு $= \dfrac{1-1}{2-5} = \dfrac{0}{-3} = 0$

(ii) (a) $BC$–யின் சாய்வு $= \dfrac{1+2}{5-6} = \dfrac{3}{-1} = -3$

(b) $AD$–யின் சாய்வு $= \dfrac{1+2}{2-1} = \dfrac{3}{1} = 3$

(iii) $AB$–யின் சாய்வும், $CD$–ன் சாய்வும் சமமாக இருப்பதால், அவைகள் இணையாகும். இதேபோல் $AD$–யின் சாய்வும், $BC$–யின் சாய்வும் சமம் இல்லை. எனவே, இவை இணை இல்லை.

ஆகையால், நாற்கரம் ABCD ஆனது ஒரு சரிவகம் என அறியலாம்

> உங்களுக்குத் தெரியுமா?
>
> நாற்கரத்தின் எதிரெதிரே உள்ள பக்கங்களின் சாய்வுகள் சமமாக இருந்தால், அந்நாற்கரமானது இணைகரம் ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.14** கீழே கொடுக்கப்பட்ட மக்கள் தொகைப் பெருக்கம் (கோடிகளில்) மற்றும் ஆண்டிற்கான வரைபடத்தில் $AB$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. மேலும் 2030 -ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையையும் கணக்கிடுக

**தீர்வு** $A(2005, 96)$ மற்றும் $B(2015, 100)$ என்பன நேர்கோடு $AB$-யின் புள்ளிகள் ஆகும்.

$AB$ -யின் சாய்வு $= \dfrac{100-96}{2015-2005} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

2030 யில் மக்கள் தொகை வளர்ச்சி $k$ கோடிகள் என்க.

$C(2030, k)$ என்பது $AB$-யின் மீதுள்ள புள்ளி எனக் கொள்க

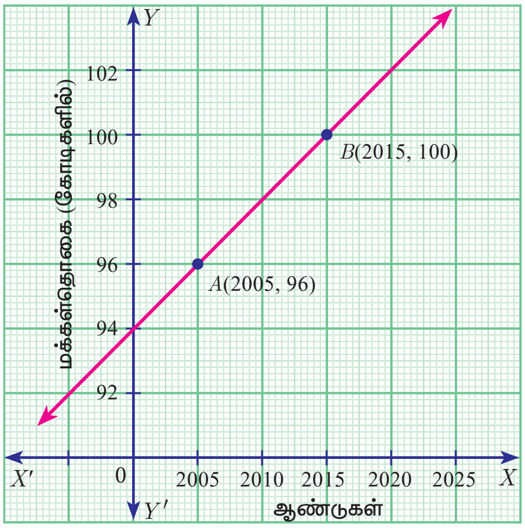
$AC$-யின் சாய்வு $=$ $AB$-யின் சாய்வு

$\dfrac{k-96}{2030-2005} = \dfrac{2}{5}$ இதிலிருந்து $\dfrac{k-96}{25} = \dfrac{2}{5}$

$k - 96 = 10$

$k = 106$

எனவே, 2030 -யில் மக்கள் தொகை 106 கோடிகள்




படம் 5.24

**எடுத்துக்காட்டு 5.15** பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தாமல், $(1,-4)$, $(2,-3)$ மற்றும் $(4,-7)$ என்ற முனைப் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $A(1,-4)$, $B(2,-3)$ மற்றும் $C(4,-7)$ ஆகியன முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

$$AB\text{-யின் சாய்வு} = \frac{-3+4}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$BC\text{-யின் சாய்வு} = \frac{-7+3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$AC\text{-யின் சாய்வு} = \frac{-7+4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$$

$AB$-யின் சாய்வு $\times$ $AC$-யின் சாய்வு $= (1)(-1) = -1$

ஆகவே, $AB$ ஆனது $AC$-க்கு செங்குத்தாகும். $\angle A = 90^\circ$

எனவே, $\Delta ABC$ ஆனது செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

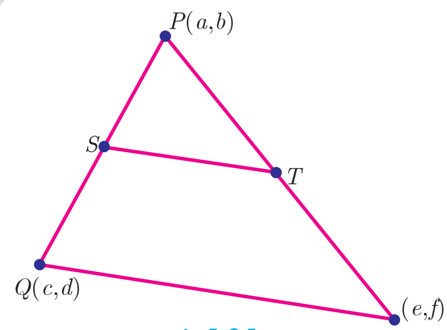
**சிந்தனைக்களம்**

நமது அன்றாட வாழ்வில் சாய்வுகள் பயன்படுத்தப்படும் மூன்று சூழ்நிலைகளைக் குறிப்பிடுக.

**எடுத்துக்காட்டு 5.16** ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டானது, மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மூன்றாவது பக்கத்தின் பாதியாகவும் இருக்கும் எனத் தொலைவு மற்றும் சாய்வு கருத்தைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க.

**தீர்வு** $P(a,b)$ $Q(c,d)$ மற்றும் $R(e,f)$ என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

$PQ$ -யின் மையப்புள்ளி $S$ மற்றும் $PR$-யின் மையப்புள்ளி $T$ என்க.



படம் 5.25

எனவே, $S = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ மற்றும் $T = \left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$

$$\text{இப்பொழுது, } ST\text{-யின் சாய்வு} = \frac{\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}} = \frac{f-d}{e-c}$$

$$\text{மற்றும் } QR \text{ –யின் சாய்வு} = \frac{f-d}{e-c}$$

எனவே, $ST$ ஆனது $QR$-க்கு இணை ஆகும். (ஏனெனில், இவற்றின் சாய்வுகள் சமம்)

மேலும்
$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$$

$$\text{ST} = \frac{1}{2}QR$$

இதிலிருந்து, $ST$ ஆனது $QR$ -க்கு இணையாகவும் அதன் பாதியாகவும் இருக்கிறது.

**குறிப்பு**

வடிவியல் தேற்றத்தினை ஆயத்தொலைவு வடிவியல் மூலம் நிரூபிக்கலாம் என்பதற்கு மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டு ஓர் உதாரணம் ஆகும்.

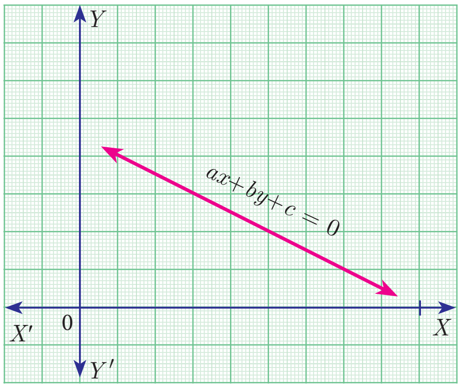
## பயிற்சி 5.2

1. $X$ அச்சுடன் மிகை திசையில் சாய்வு கோணத்தைக் கொண்ட கோட்டின் சாய்வு என்ன?
   (i) $90^\circ$  (ii) $0^\circ$

2. பின்வரும் சாய்வுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணம் என்ன? (i) 0 (ii) 1
3. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.
   (i) $\left(5,\sqrt{5}\right)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி (ii) $(\sin\theta,-\cos\theta)$ மற்றும் $(-\sin\theta,\cos\theta)$
4. $A(5,1)$ மற்றும் $P$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு என்ன? இதில் $P$ என்பது $(4,2)$ மற்றும் $(-6,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஆகும்.
5. $(-3,-4)$, $(7,2)$ மற்றும் $(12,5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனக் காட்டுக.
6. $(3,-1)$, $(a,3)$ மற்றும் $(1,-3)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனில் $a$-யின் மதிப்பு காண்க?
7. $(-2,a)$ மற்றும் $(9,3)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{1}{2}$ எனில் $a$ -யின் மதிப்பு காண்க.
8. $(-2,6)$ மற்றும் $(4,8)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடானது $(8,12)$ மற்றும் $(x,24)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், $x$-யின் மதிப்பு காண்க.
9. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யுமா என ஆராய்க.
   (i) $A(1,-4)$, $B(2,-3)$ மற்றும் $C(4,-7)$ (ii) $L(0,5)$, $M(9,12)$ மற்றும் $N(3,14)$
10. $A(2.5,3.5)$, $B(10,-4)$, $C(2.5,-2.5)$ மற்றும் $D(-5,5)$ ஆகியன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.
11. $A(2,2)$, $B(-2,-3)$, $C(1,-3)$ மற்றும் $D(x,y)$ ஆகிய புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனில், $x$ மற்றும் $y$–யின் மதிப்பைக் காண்க..
12. $A(3,-4)$, $B(9,-4)$, $C(5,-7)$ மற்றும் $D(7,-7)$ ஆகிய புள்ளிகள் $ABCD$ என்ற சரிவகத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.
13. $A(-4,-2)$, $B(5,-1)$, $C(6,5)$ மற்றும் $D(-7,6)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.
14. $PQRS$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் $PR$ மற்றும் $QS$ ஆனது வெட்டும் புள்ளி $M$ ஆகவும் $QS=2PR$ எனவும் உள்ளது. $S$ மற்றும் $M$-யின் ஆயப் புள்ளிகள் முறையே $(1,1)$ மற்றும் $(2,-1)$ எனில், $P$-யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க.

## 5.5 நேர்கோடு (Straight line)

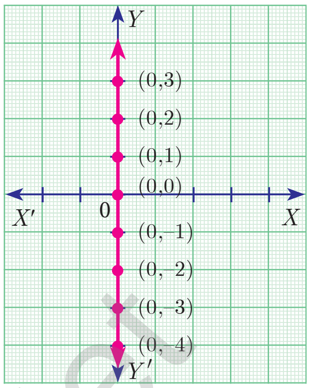
$x$, $y$ எனும் இரு மாறிலிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு $ax+by+c=0$ …(1) என்பது $xy$ தளத்தில் அமைந்த ஒரு நேர்கோடாகும். இங்கு, $a$, $b$, $c$ ஆகியன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a$, $b$ -யில் ஏதேனும் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாகும்.



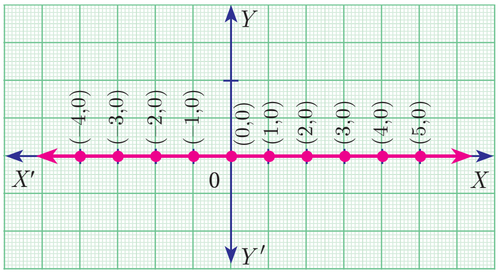

படம் 5.26

### 5.5.1 ஆய அச்சுகளின் சமன்பாடு (Equation of coordinate axes)

$X$ மற்றும் $Y$ அச்சுகளை ஆய அச்சுகள் என அழைக்கிறோம். $OY$-யின் ($Y$ அச்சு) மீதுள்ள $x$ –ஆயப் புள்ளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் பூச்சியம் ஆகும். எனவே, $OY(Y$ அச்சு) -யின் சமன்பாடு $x = 0$ (படம் 5.27)



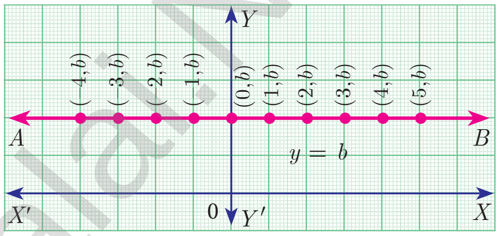
படம் 5.27



படம் 5.28

$OX$ -ன் ($X$ அச்சு) மீதுள்ள $y$ –ஆயப் புள்ளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் பூச்சியம் ஆகும். எனவே, $OX$ ($X$ அச்சு) –யின் சமன்பாடு $y=0$ (படம் 5.28)

### 5.5.2 $X$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a straight line parallel to $X$ axis)



படம் 5.29

$AB$ என்ற நேர்கோடானது $X$ அச்சுக்கு இணையாக, '$b$' அலகு தொலைவில் உள்ளது என்க. $AB$ -யின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் $y$ ஆயத் தொலைவு '$b$'-ஆக இருக்கும். (படம் 5.29)

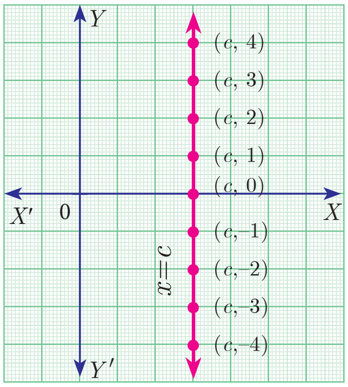
எனவே, $AB$ –யின் சமன்பாடு $y = b$ ஆகும்.

**குறிப்பு**

- $b > 0$ எனில், $y = b$ எனும் கோடானது $X$ அச்சுக்கு மேற்புறம் அமையும்.
- $b < 0$ எனில், $y = b$ எனும் கோடானது $X$ அச்சுக்கு கீழ்ப்புறம் அமையும்
- $b = 0$ எனில், $y = b$ எனும் கோடானது $X$ அச்சு ஆகும்.

### 5.5.3 $Y$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a Straight line parallel to the $Y$ axis)

$CD$ என்ற நேர்கோடானது $Y$ அச்சுக்கு இணையாக, '$c$' அலகு தூரத்தில் உள்ளது என்க. $CD$ -யின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் $x$-ன் ஆயத் தொலைவு '$c$' ஆக இருக்கும். எனவே $CD$-யின் சமன்பாடு $x=c$ ஆகும். (படம் 5.30)



படம் 5.30

**குறிப்பு**

- $c > 0$ எனில், $x = c$ எனும் கோடானது $Y$ அச்சுக்கு வலப்பக்கம் அமையும்.
- $c < 0$ எனில், $x = c$ எனும் கோடானது $Y$ அச்சுக்கு இடப்பக்கம் அமையும்.
- $c = 0$ எனில், $x = c$ எனும் கோடானது $Y$ அச்சு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.17** $(5,7)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும் (i) $X$ அச்சுக்கு இணையாகவும் (ii) $Y$ அச்சுக்கு இணையாகவும் அமைந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** (i) $X$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y=b$.

இது $(5,7)$ வழி செல்வதால், $b = 7$ .

எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y=7$.

(ii) $Y$ அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$

இது $(5,7)$ வழி செல்வதால், $c = 5$

எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x=5$.

### 5.5.4 சாய்வு– வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Slope-Intercept Form)

நேர்குத்தற்ற அனைத்து நேர்கோடுகளும் $Y$ அச்சை ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். இப்புள்ளியின் $y$ ஆயத்தொலைவை $y$ வெட்டுத்துண்டு என்று அழைக்கிறோம். ஒரு **கோட்டின் சாய்வு** $m$ மற்றும் **$y$ வெட்டுத்துண்டு** $c$ எனில், அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx+c$.

இச்சமன்பாடு **சாய்வு– வெட்டுத்துண்டு வடிவம்** ஆகும்.

**குறிப்பு**

- ஒரு கோட்டின் சாய்வு $m$, $m\neq 0$ மற்றும் $x$ வெட்டுத்துண்டு $d$ எனில், அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = m\,(x-d)$.
- சாய்வு $m$ உடைய ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$.

**எடுத்துக்காட்டு 5.18** பின்வரும் விவரங்களைப் பயன்படுத்தி நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(i) சாய்வு $5$ மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு $-9$ (ii) சாய்வு கோணம் $45^\circ$ மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு $11$

**தீர்வு** (i) இங்கு சாய்வு $= 5$, $y$ வெட்டுத்துண்டு $c = -9$

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$

$y = 5x - 9$ –லிருந்து, $5x - y - 9 = 0$

(ii) இங்கு, $\theta = 45^\circ$, $y$ வெட்டுத்துண்டு $c = 11$

சாய்வு $m = \tan\theta = \tan 45^\circ = 1$

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$

$y = x + 11$ –லிருந்து $x - y + 11 = 0$

**எடுத்துக்காட்டு 5.19** $8x - 7y + 6 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $8x - 7y + 6 = 0$

$7y = 8x + 6$ (இதனை $y = mx + c$ வடிவத்திற்கு மாற்றவும்)

$$y = \frac{8}{7}x + \frac{6}{7} \quad \ldots(1)$$

$(1)$ ஐ $y = mx + c$ உடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = \dfrac{8}{7}$ மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு $c = \dfrac{6}{7}$

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

$xy$ தளத்தின் மீதுள்ள $(x,\ y)$ எனும் புள்ளியில் $x$ என்பது "கிடைஅச்சு தொலைவு" (Abscissa) என்றும் $y$ என்பது "செங்குத்து அச்சு தொலைவு" (Ordinate) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.20** வரைபடமானது $y$ அச்சில் பாரன்ஹீட் டிகிரி வெப்பநிலையையும் $x$ அச்சில் செல்சியஸ் டிகிரி வெப்பநிலையையும் குறிக்கிறது எனில், (a) கோட்டின் சாய்வு மற்றும் $y$

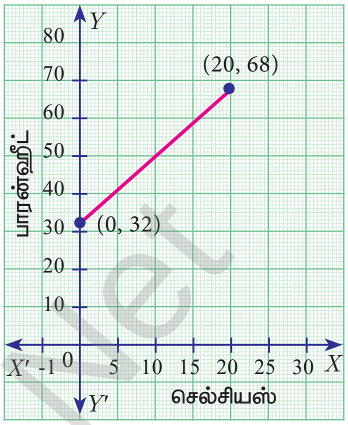
வெட்டுத்துண்டு காண்க. (b) கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக. (c) பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை $25^\circ$ செல்சியஸாக இருக்கும்போது பூமியின் சராசரி வெப்பநிலையைப் பாரன்ஹீட்டில் காணவும்.

**தீர்வு** (a) படத்திலிருந்து, சாய்வு $= \dfrac{y \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}$

$$= \frac{68-32}{20-0} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = 1.8$$

கோடானது $y$–அச்சினை $(0,\ 32)$ –யில் சந்திக்கிறது.

ஆகையால் சாய்வு $\frac{9}{5}$ மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு $32$ ஆகும்.



படம் 5.31

(b) சாய்வு மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி, நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதலாம்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = \frac{9}{5}x + 32$

(c) பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை $25^\circ$ செல்சியஸ் ஆக இருக்கும்போது $y$–ஐ பாரன்ஹீட் டிகிரியில் காண $x = 25$ எனக் கொள்க.

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

$$y = \frac{9}{5}(25) + 32$$

$$y = 77$$

**குறிப்பு**

செல்சியஸைப் பாரன்ஹீட்டாக மாற்றத் தேவையான சூத்திரம் $F = \frac{9}{5}C + 32$ ஆகும். இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் ஒரு நேர்கோட்டினை ஒரு நேரிய சமன்பாடாக எழுதமுடியும் என அறிகிறோம்.

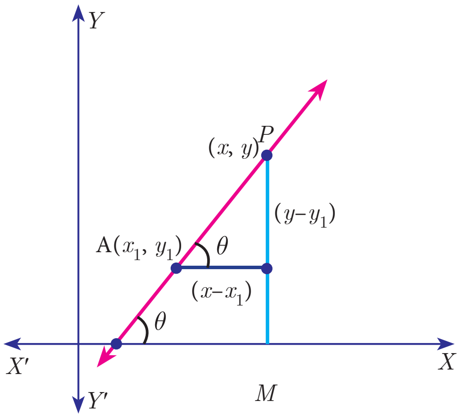
எனவே, பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை $77^\circ$ F ஆகும்.

## 5.5.5 புள்ளி –சாய்வு வடிவம் (Point-Slope form)

$A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் மற்றும் சாய்வு $m$ உடையதுமான ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

கோட்டின்மீது $A$ இல்லாத மற்றொரு புள்ளி $P(x, y)$ என்க. $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $P(x, y)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$



படம் 5.32

எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$ (புள்ளி– சாய்வு வடிவம்)

**எடுத்துக்காட்டு 5.21** $(3, -4)$ என்ற புள்ளியின் வழி செல்வதும், $\frac{-5}{7}$ -ஐ சாய்வாக உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $(x_1, y_1) = (3, -4)$ மற்றும் $m = \frac{-5}{7}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புள்ளி-சாய்வு வடிவில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

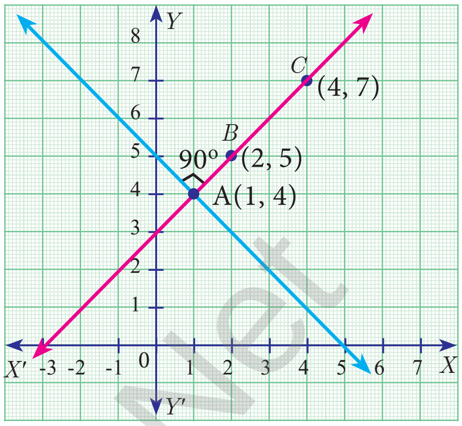
**சிந்தனைக் களம்**

$Y$ அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் நேர்கோட்டினைச் சாய்வு–வெட்டுத்துண்டு வடிவில் எழுத முடியுமா?

$$y+4 = -\frac{5}{7}(x-3) \text{ என எழுதலாம்}$$

இதிலிருந்து $5x+7y+13=0$

**எடுத்துக்காட்டு 5.22** $(2,5)$ மற்றும் $(4,7)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், $A(1,4)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லுவதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.




படம் 5.33

**தீர்வு**

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(1,4)$, $B(2,5)$ மற்றும் $C(4,7)$ .

$$BC \text{ –யின் சாய்வு } = \frac{7-5}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

தேவையான நேர்கோட்டின் சாய்வு $m$ என்க.

இந்த நேர்கோடு $BC$-க்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

எனவே, $m \times 1 = -1$

$m = -1$

இக்கோடானது $A(1,4)$ வழி செல்வதால்,

தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-4 = -1(x-1)$$

$$y-4 = -x+1$$

எனவே, $x+y-5 = 0$

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

மாபெரும் கணிதவியல் மற்றும் இயற்பியல் மேதைகளாகத் திகழ்ந்த கலீலியோ மற்றும் நியூட்டன் போன்றோர் ஒரு தளம் மற்றும் வெளியில் பொருட்களின் இயக்கத்தை விவரிக்க ஆயத்தொலை வடிவியலைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர்

## 5.5.6 இரு புள்ளி வடிவம் (Two Point form)

$A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ என்பன இரு வெவ்வேறான புள்ளிகள் என்க. கொடுக்கப்பட்ட இந்த இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சாய்வு $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $(x_2 \neq x_1)$.

புள்ளி– சாய்வு வடிவத்தின் மூலம், நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ஆகவே, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (இரு புள்ளி வடிவில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்)

**எடுத்துக்காட்டு 5.23** $(5,-3)$ மற்றும் $(7,-4)$ என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

**தீர்வு** $(x_1,y_1)$ மற்றும் $(x_2,y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

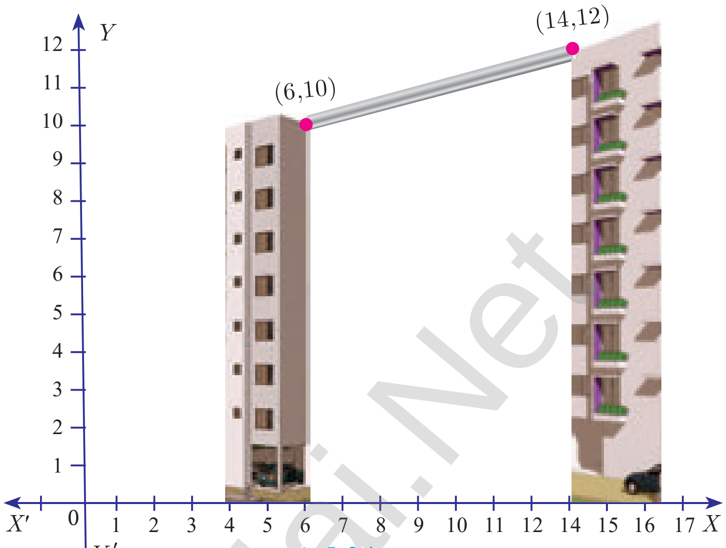
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைப் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{y+3}{-4+3} = \frac{x-5}{7-5}$$

இதிலிருந்து $2y+6 = -x+5$

எனவே, $x+2y+1 = 0$ என்பது தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.24** வெவ்வேறு உயரங்கள் கொண்ட இரண்டு கட்டடங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரெதிராக உள்ளன. ஒரு கனமான கம்பியானது கட்டடங்களின் மேற்புறங்களை $(6,10)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(14,12)$ என்ற புள்ளி வரை இணைக்கிறது எனில், கம்பியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம் 5.34

**தீர்வு** கட்டடங்களின் மேற்புறங்களில் உள்ள புள்ளிகள் $A(6,10)$ மற்றும் $B(14,12)$ என்க.

$A(6,10)$ மற்றும் $B(14,12)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் இரும்புக் கம்பியின் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \text{ ஆகும்}$$

எனவே $$\frac{y-10}{12-10} = \frac{x-6}{14-6}$$

$$\frac{y-10}{2} = \frac{x-6}{8}$$

எனவே, $x-4y+34 = 0$

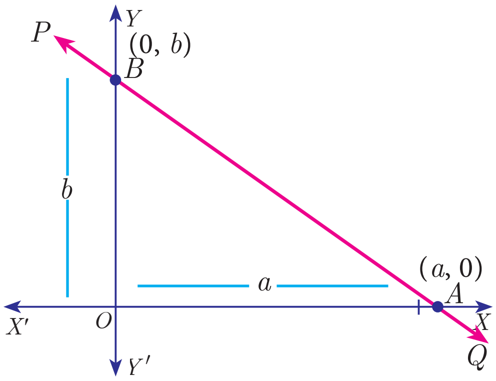
ஆகவே, இரும்புக் கம்பியின் சமன்பாடு $x-4y+34=0$

## 5.5.7 வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Intercept Form)

ஒரு நேர்கோடானது ஆய அச்சுகளில் முறையே $a$ மற்றும் $b$ என்ற வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்படுத்தினால், அந்நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை நாம் கண்டறியலாம்.

$PQ$ என்ற நேர்கோடானது $X$ அச்சை $A$–யிலும், $Y$ அச்சை $B$–யிலும் சந்திக்கிறது. $OA=a,\ OB=b$ என்க.

எனவே, $A$ மற்றும் $B$–யின் ஆயப் புள்ளிகள் முறையே $(a,0)$ மற்றும் $(0,b)$ ஆகும். $A$ மற்றும் $B$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 5.35

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad \text{எனவே, } \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \quad \text{ஆகவே, } \frac{y}{b} = \frac{-x}{a}+1$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$ (ஒரு நேர்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவம் ஆகும்)

**முன்னேற்றச் சோதனை** அட்டவணையில் விடுபட்ட இடங்களைப் பூர்த்தி செய்க

| நேர்கோட்டு வடிவத்தின் சமன்பாடு | கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் | நேர்கோட்டு வடிவத்தின் பெயர் |
|---|---|---|
| $y = mx + c$ | சாய்வு$=m$, $y$ வெட்டுத்துண்டு$=c$ | |
| $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ | | |
| | வெட்டுத்துண்டுகள் | வெட்டுத்துண்டு வடிவம் |

**எடுத்துக்காட்டு 5.25** ஆய அச்சுகளுடன் சமமாகவும், எதிர் குறியும் உடைய வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்படுத்தி, $(5,7)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $x$- வெட்டுத்துண்டு $a$ மற்றும் $y$- வெட்டுத்துண்டு '$-a$' என்க.

வெட்டுத்துண்டு வடிவில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1 \text{ (இங்கே } b=-a)$$

எனவே, $x-y=a$ ...(1)

(1) ஆனது $(5,7)$ வழிச் செல்வதால், $5-7=a$ –லிருந்து $a=-2$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x-y=-2$ அதாவது $x-y+2=0$

**எடுத்துக்காட்டு 5.26** $4x-9y+36=0$ என்ற நேர்கோடு ஆய அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டு சமன்பாடு $4x-9y+36=0$

எனவே $4x-9y=-36$

இருபுறமும் $-36$ ஆல் வகுக்க, $\frac{x}{-9}+\frac{y}{4}=1$ ...(1)

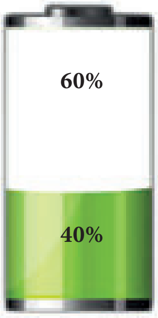
(1)–ஐ வெட்டுத்துண்டு வடிவத்துடன் ஒப்பிட, $x$–வெட்டுத்துண்டு $a=-9$ ;
$y$ – வெட்டுத்துண்டு $b=4$

**எடுத்துக்காட்டு 5.27** ஓர் அலைபேசி மின்கலத்தின் சக்தி $100\%$ இருக்கும்போது (battery power) அலைபேசியைப் பயன்படுத்தத் தொடங்குகிறோம். $x$ மணி நேரம் பயன்படுத்திய பிறகு மீதி இருக்கும் மின்கலத்தின் சக்தி $y$ சதவீதம் (தசமத்தில்) ஆனது $y=-0.25x+1$ ஆகும்.

(i) இந்தச் சமன்பாட்டிற்கான வரைபடம் வரைக.

(ii) எத்தனை மணி நேரத்திற்குப் பிறகு மின்கலத்தின் சக்தி $40\%$ ஆகக் குறைந்திருக்கும் எனக் காண்க.

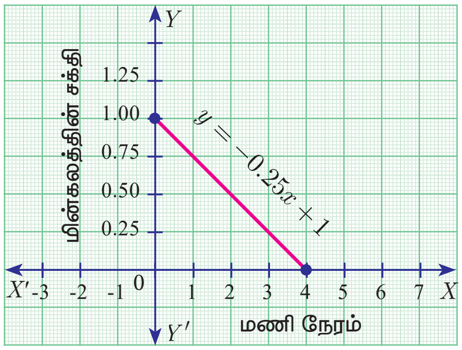
(iii) மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியை இழக்க எடுத்துக்கொள்ளும் கால அளவு எவ்வளவு?



படம் 5.36

**தீர்வு**

(i)








X_Ch 5 TM.indd 233 16-04-2019 10:04:42

(ii) மின்கலச் சக்தி $40\%$ எனில், நேரத்தைக் கணக்கிட, $y = 0.40$ என எடுத்துக் கொள்க.

$0.40 = -0.25x + 1$ -லிருந்து $0.25x = 0.60$

நாம் பெறுவது, $x = \frac{0.60}{0.25} = 2.4$ மணி.

(iii) மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியை இழந்துவிட்டால் $y = 0$ எனக் கிடைக்கும்

எனவே, $0 = -0.25x + 1$ -லிருந்து $0.25x = 1$ எனவே, $x = 4$ மணி.

ஆகவே, நான்கு மணி நேரத்திற்குப் பின்பு அலைபேசியின் மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியையும் இழக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 5.28** $(-3,8)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் மிகை வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 7 உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $a, b$ என்பன வெட்டுத்துண்டுகள் எனில் $a + b = 7$ அல்லது $b = 7 - a$

வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ...(1)

ஆகவே, $\frac{x}{a} + \frac{y}{7-a} = 1$

இக்கோடானது $(-3,8)$, என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$\frac{-3}{a} + \frac{8}{7-a} = 1$ இதிலிருந்து $-3(7-a) + 8a = a(7-a)$

$-21 + 3a + 8a = 7a - a^2$

ஆகவே, $a^2 + 4a - 21 = 0$

இதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம் $(a-3)(a+7) = 0$

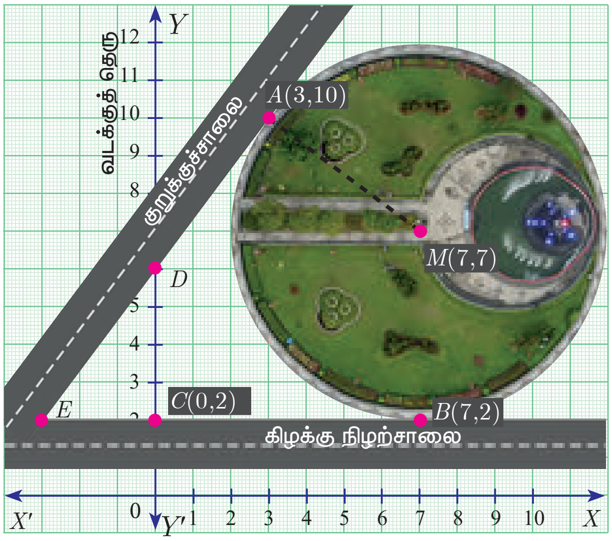
$a = 3$ அல்லது $a = -7$

$a$ என்பது மிகை எண் என்பதால் $a = 3$ மற்றும் $b = 7 - a = 7 - 3 = 4$.

எனவே, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $4x + 3y - 12 = 0$.

**எடுத்துக்காட்டு 5.29** கிழக்கு நிழற்சாலை மற்றும் குறுக்குச் சாலைகளால் ஒரு வட்ட வடிவத் தோட்டம் சூழப்பட்டுள்ளது. குறுக்குச் சாலையானது வடக்கு தெருவை $D$-யிலும், கிழக்குச் சாலையை $E$-யிலும் சந்திக்கிறது. தோட்டத்திற்கு $A(3,10)$ என்ற புள்ளியில் $AD$ ஆனது தொடுகோடாக அமைகிறது. படத்தைப் பயன்படுத்தி



படம் 5.37

(a) பின்வருவனவற்றின் சமன்பாட்டினைக் காண்க

(i) கிழக்கு நிழற்சாலை

(ii) வடக்குத் தெரு

(iii) குறுக்குச்சாலை

(b) குறுக்குச்சாலை கீழ்க்கண்டவற்றைச் சந்திக்கின்ற புள்ளியைக் காண்க

(i) வடக்குத் தெரு (ii) கிழக்கு நிழற்சாலை

**தீர்வு** (a) (i) கிழக்கு நிழற்சாலையானது $C(0,2)$ மற்றும் $B(7,2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடாகும்.

எனவே இரு புள்ளி வடிவத்தைப் பயன்படுத்திக் கிழக்கு நிழற்சாலையின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-2}{2-2} = \frac{x-0}{7-0}$$

$$\frac{y-2}{0} = \frac{x}{7} \quad \text{எனவே} \quad y = 2 \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $D$ மற்றும் $C(0,2)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகிறது எனில் புள்ளி $D$–யின் $x$ ஆயத் தொலைவு $= 0$ ஆகும்.

ஆகவே, வடக்கு தெருவிலுள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் $x$–யின் ஆயத் தொலைவு $= 0$ ஆகும்

எனவே, வடக்கு தெருவின் சமன்பாடு $x = 0$.

(iii) குறுக்குச் சாலையின் சமன்பாட்டைக் காணுதல்.

வட்டவடிவத் தோட்டத்தின் மையம் $M$–யின் ஆயப் புள்ளி $(7,7)$ மற்றும் $A$- யின் ஆயப் புள்ளி $(3,10)$ ஆகும்.

$MA$–யின் சாய்வு $m_1$ எனில், $m_1 = \frac{10-7}{3-7} = \frac{-3}{4}$.

குறுக்குச் சாலையானது $MA$-க்கு செங்குத்தாக உள்ளது. எனவே குறுக்குச் சாலையின் சா ய்வு $m_2$ எனில், $m_1\, m_2 = -1$ லிருந்து $\frac{-3}{4} m_2 = -1$ எனவே, $m_2 = \frac{4}{3}$.

குறுக்குச் சாலையானது, சாய்வு $\frac{4}{3}$ மற்றும் $A(3,10)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்கிறது

எனவே, குறுக்குச் சாலையின் சமன்பாடு $y - 10 = \frac{4}{3}(x-3)$

$$3y - 30 = 4x - 12$$

$$4x - 3y + 18 = 0$$

(b) (i) குறுக்குச் சாலை மற்றும் வடக்குத் தெரு சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணுதல்.

$D(0,k)$ என்பது குறுக்குச் சாலையின் மேல் உள்ள புள்ளி ஆகும்.

எனவே, $x = 0$, $y = k$ என குறுக்கு சாலையின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$0 - 3k + 18 = 0$

$k = 6$

எனவே, $D$ ஆனது $(0,6)$ ஆகும்.

(ii) குறுக்குச் சாலை மற்றும் கிழக்கு நிழற்சாலை சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணுதல்.

$E$–யின் ஆயப் புள்ளி $(q,\ 2)$ என்க.

$x = q$, $y = 2$ எனக் குறுக்குச் சாலை சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$4q - 6 + 18 = 0$$

$$4q = -12 \quad \text{எனவே} \quad q = -3$$

ஆகவே, $E$ என்ற புள்ளி $(-3,2)$ ஆகும்.

7XUUCN

ஆதலால், குறுக்கு சாலையானது வடக்கு தெருவை $D(0,\ 6)$ என்ற புள்ளியிலும், கிழக்கு நிழற்சாலையை E $(-3,2)$ என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கிறது.

## முன்னேற்றச் சோதனை

விடுப்பட்ட பகுதியை பூர்த்தி செய்க

| எண் | சமன்பாடு | சாய்வு | $x$ வெட்டுத்துண்டு | $y$ வெட்டுத்துண்டு |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $3x - 4y + 2 = 0$ | | | |
| 2 | $y = 14x$ | | | 0 |
| 3 | | | 2 | –3 |

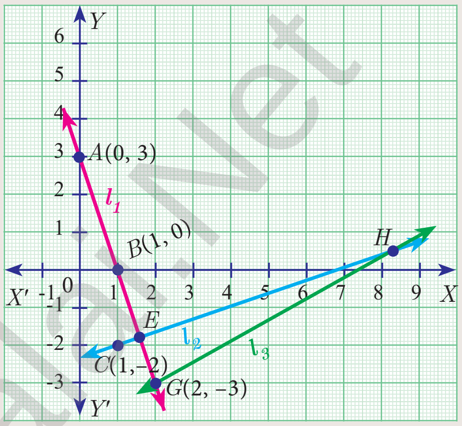
## செயல்பாடு 4

$l_1$ மற்றும் $l_2$ என்ற கோடுகள் செங்குத்தானவை. கோடு $l_3$–யின் சாய்வு 3 எனில்,

(i) $l_1$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) $l_2$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

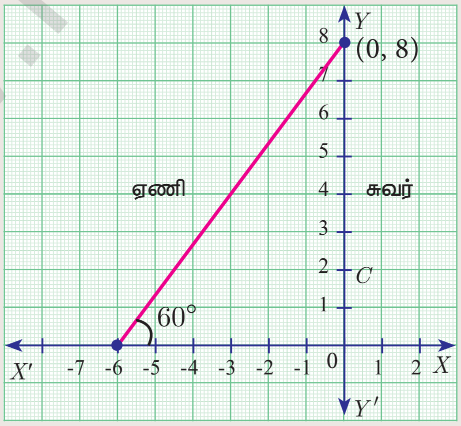
(iii) $l_3$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.




படம் 5.38

## செயல்பாடு 5

ஓர் ஏணியானது செங்குத்துச் சுவரின் மீது அதன் அடிப்பகுதி தரையைத் தொடுமாறு சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. கீழே கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின்படி ஏணியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

| எண் | நிபந்தனை | படம் | ஏணியின் சமன்பாடு |
|---|---|---|---|
| (i) | ஏணியானது தரையுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் $60^\circ$ மற்றும் ஏணி சுவரைத் தொடும் புள்ளி $(0,8)$ |   படம் 5.39 | |
| (ii) | ஏணியின் உச்சி மற்றும் அடிப் புள்ளிகள் முறையே $(2,4)$ மற்றும் $(5,1)$ | | |

## பயிற்சி 5.3

1. $(1,-5)$ மற்றும் $(4,2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு இணையானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (i) $X$ அச்சு (ii) $Y$ அச்சு
2. $2(x-y)+5=0$ என்ற நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, சாய்வு கோணம் மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.
3. சாய்வு கோணம் $30^\circ$ மற்றும் $y$-வெட்டுத்துண்டு $-3$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
4. $\sqrt{3}x+(1-\sqrt{3})y=3$ என்ற நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, y– வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.
5. (–2,3) மற்றும் (8,5) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடானது, $y=ax+2$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது எனில், '$a$' –யின் மதிப்பு காண்க.
6. $(19,3)$ என்ற புள்ளியை அடியாகக் கொண்ட குன்றானது செங்கோண முக்கோண வடிவில் உள்ளது. தரையுடன் குன்று ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் $45^\circ$ எனில், குன்றின் அடி மற்றும் உச்சியை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
7. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{-1}{2},-2\right)$ (ii) $(2,3)$ மற்றும் $(-7,-1)$
8. ஒரு பூனை $xy$-தளத்தில் $(-6,-4)$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது. $(5,11)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு பால் புட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளது. பூனை மிகக் குறுகிய தூரம் பயணித்துப் பால் அருந்த விரும்புகிறது எனில், பாலைப் பருகுவதற்குத் தேவையான பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. $A(6,2)$, $B(-5,-1)$ மற்றும் $C(1,9)$ –ஐ முனைகளாகக் கொண்ட $\Delta ABC$ –யின் முனை $A$–யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோடு மற்றும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. (–1,2) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், சாய்வு $\frac{-5}{4}$ உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
11. நீங்கள் ஒரு பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்யும்போது, $x$ வினாடிகளுக்குப் பிறகு பதிவிறக்கம் செய்யவேண்டிய மீதமுள்ள பாடலின் சதவீதம் (மெகா பைட்டில்) $y$–ஆனது (தசமத்தில்) $y=-0.1x+1$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கப்பட்டால்,
    (i) சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக.
    (ii) பாடலின் மொத்த $MB$ அளவைக் காண்க.
    (iii) $75\%$ பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்ய எவ்வளவு வினாடிகள் ஆகும்?
    (iv) எத்தனை வினாடிகள் கழித்துப் பாடல் முழுமையாகப் பதிவிறக்கம் செய்யப்படும்?
12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x$, $y$ வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

    (i) 4, –6 (ii) $-5, \frac{3}{4}$
13. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஆய அச்சுகளின் மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.

    (i) $3x-2y-6=0$ (ii) $4x+3y+12=0$

14. நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(i) $(1,-4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் $2:5$

(ii) $(-8,4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகள் சமம்

## 5.6 நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் (General Form of a Straight Line)

$x$, $y$ என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax+by+c=0$ –ஐ ஒரு நேரிய சமன்பாடு என அழைக்கலாம் ($a$, $b$, $c$ என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a$, $b$ –யில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றது). இதுவே நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் பொது வடிவமாகும். இப்பொழுது கீழ்க்கண்ட தகவல்களுக்கு ஏற்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

(i) $ax+by+c=0$ –க்கு இணையான கோடு

(ii) $ax+by+c=0$ –க்கு செங்குத்தான கோடு

### 5.6.1 $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line parallel to the line $ax+by+c=0$)

$ax+by+c=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடு $ax+by+k=0$ ஆகும். இங்கு $k$-ன் மதிப்பு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

### 5.6.2 $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line perpendicular to the line $ax+by+c=0$)

$ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடு $bx-ay+k=0$ ஆகும். இங்கு $k$-ன் மதிப்பு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

**உங்களுக்குத் தெரியுமா?**

$a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்ற இரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் பூச்சியமற்றவை எனில், அந்த நேர்கோடுகள்

(i) இணை என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ அதாவது, $a_1b_2-a_2b_1=0$

(ii) செங்குத்து என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $a_1a_2+b_1b_2=0$.

**முன்னேற்றச் சோதனை** விடுபட்ட கட்டங்களைப் பூர்த்தி செய்க

| எண் | சமன்பாடுகள் | இணையானதா அல்லது செங்குத்தானதா? | எண் | சமன்பாடுகள் | இணையானதா அல்லது செங்குத்தானதா? |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $5x+2y+5=0$<br>$5x+2y-3=0$ | | 3 | $8x-10y+11=0$<br>$4x-5y+16=0$ | |
| 2 | $3x-7y-6=0$<br>$7x+3y+8=0$ | | 4 | $2y-9x-7=0$<br>$27y+6x-21=0$ | |

### 5.6.3 நேர்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a straight line)

$ax+by+c=0$ என்பது நேர்க்கோட்டு சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். $(a,\ b$–யில் ஏதேனும் ஒன்றாவது பூச்சியம் அற்றது)

$x$–யின் கெழு $= a$, $y$–யின் கெழு $= b$, மாறிலி $= c$,

மேலே உள்ள சமன்பாட்டை $by=-ax-c$ என மாற்றி எழுதலாம்

எனவே $$y = -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},\ (b\neq 0 \text{ எனில்}) \qquad \ldots(1)$$

(1) ஐ $y=mx+l$ உடன் ஒப்பிட

சாய்வு $m = -\dfrac{a}{b}$

$$m = \frac{-x \text{ -யின் கெழு}}{y\text{–யின் கெழு}}$$

$y$ -வெட்டுத்துண்டு $l = -\dfrac{c}{b}$

$$y \text{ -வெட்டுத்துண்டு} = \frac{\text{மாறிலி}}{y\text{–யின் கெழு}}$$

**சிந்தனைக்களம்**

சாய்வு 1 என இருக்குமாறு எத்தனை நேர்கோடுகள் இருக்கும்?

**எடுத்துக்காட்டு 5.30** $6x+8y+7=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $6x+8y+7=0$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-x\text{-யின் கெழு}}{y\text{–யின் கெழு}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

எனவே நேர்கோட்டின் சாய்வு $-\dfrac{3}{4}$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.31** (i) $3x-7y=11$ –க்கு இணையான (ii) $2x-3y+8=0$ –க்கு செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க

**தீர்வு** (i) கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x-7y=11$

$$3x-7y-11 = 0$$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

இணை கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் என்பதால் $3x-7y=11$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு $\dfrac{3}{7}$ ஆகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $2x-3y+8=0$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நேர்க்கோட்டு சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $-1$ என்பதால் $2x-3y+8=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு = $\dfrac{-1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{-3}{2}$

**எடுத்துக்காட்டு 5.32** $2x+3y-8=0\,,\ 4x+6y+18=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இணை எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $2x+3y-8=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-x\text{-யின் கெழு}}{y\text{-யின் கெழு}}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

$4x+6y+18=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

இங்கு, $m_1 = m_2$

அதாவது, சாய்வுகள் சமம். எனவே இவ்விரு நேர்கோடுகளும் இணையாகும்.

**மாற்று முறை**

$a_1 = 2\,,\ b_1 = 3$

$a_2 = 4\,,\ b_2 = 6$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

எனவே, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

ஆகவே, இவ்விரு நேர்கோடுகளும் இணையாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.33** $x-2y+3=0,\ 6x+3y+8=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

**தீர்வு** $x-2y+3=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$6x+3y+8=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

இங்கு, $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$

சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $-1$ ஆகும்.

ஆகவே, இவ்விரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகும்.

**மாற்று முறை**

$a_1 = 1\,,\ b_1 = -2\,;$

$a_2 = 6\,,\ b_2 = 3$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 6-6 = 0$

ஆகவே, நேர்கோடுகள் செங்குத்தானவையாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.34** $3x-7y=12$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் $(6,4)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $3x-7y-12=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x-7y+k=0$.

இந்த நேர்கோடானது $(6,4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$3(6)-7(4)+k = 0$$

$$k = 28-18 = 10$$

எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x-7y+10=0$.

**எடுத்துக்காட்டு 5.35** $y=\frac{4}{3}x-7$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும், $(7,\ -1)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்லுவதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** $y=\frac{4x}{3}-7$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $4x-3y-21=0$ என மாற்றி எழுதலாம்.

$4x-3y-21=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x+4y+k=0$

இது $(7,\ -1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால் $21-4+k=0$ இதிலிருந்து, $k=-17$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x+4y-17=0$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 5.36** $4x+5y=13,\ \ x-8y+9=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $Y$–அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள் $4x+5y-13=0$ ...(1)

$x-8y+9=0$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) -ஐ தீர்ப்பதின் மூலம் இக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணலாம்.

$$\begin{array}{cccccc} & x & & y & & 1 \\ 5 & & -13 & & 4 & & 5 \\ -8 & & 9 & & 1 & & -8 \end{array}$$

$$\frac{x}{45-104}=\frac{y}{-13-36}=\frac{1}{-32-5}$$

$$\frac{x}{-59}=\frac{y}{-49}=\frac{1}{-37}$$

$$x=\frac{59}{37},\quad y=\frac{49}{37}$$

எனவே, இரு நேர்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$

$Y$–அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$.

இக்கோடானது $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$ வழிச் செல்கிறது. எனவே, $c=\frac{59}{37}$

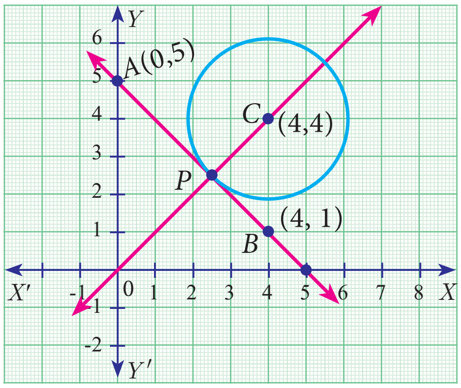
நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x=\frac{59}{37}$. எனவே, $37x-59=0$.

**எடுத்துக்காட்டு 5.37** $A(0,5)$ மற்றும் $B(4,1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடானது $C(4,4)$– ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில்,

(i) $AB$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) $C$ வழியாகவும் $AB$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(iii) $AB$ என்ற கோடானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.




படம் 5.40

**தீர்வு** (i) $A(0,5)$ மற்றும் $B(4,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் $AB$ என்ற கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x-0}{4-0}$$

$4(y-5)=-4x$ ஆகவே, $y-5=-x$

$x+y-5=0$

(ii) $AB$ -என்ற கோட்டின் சமன்பாடு $x+y-5=0$ இந்த நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு $x-y+k=0$ ஆகும்.

இக்கோடானது மையம் $(4,4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$4-4+k=0$ எனவே, $k=0$

$C$ வழியாக $AB$ -க்கு செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x-y=0$ ...(2)

(iii) $x+y-5=0$ மற்றும் $x-y=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியே $AB$ என்ற கோடானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி ஆகும்.

$x+y-5=0$ மற்றும் $x-y=0$ இவற்றைத் தீர்ப்பதின் மூலம்,

$x=\frac{5}{2}$ மற்றும் $y=\frac{5}{2}$

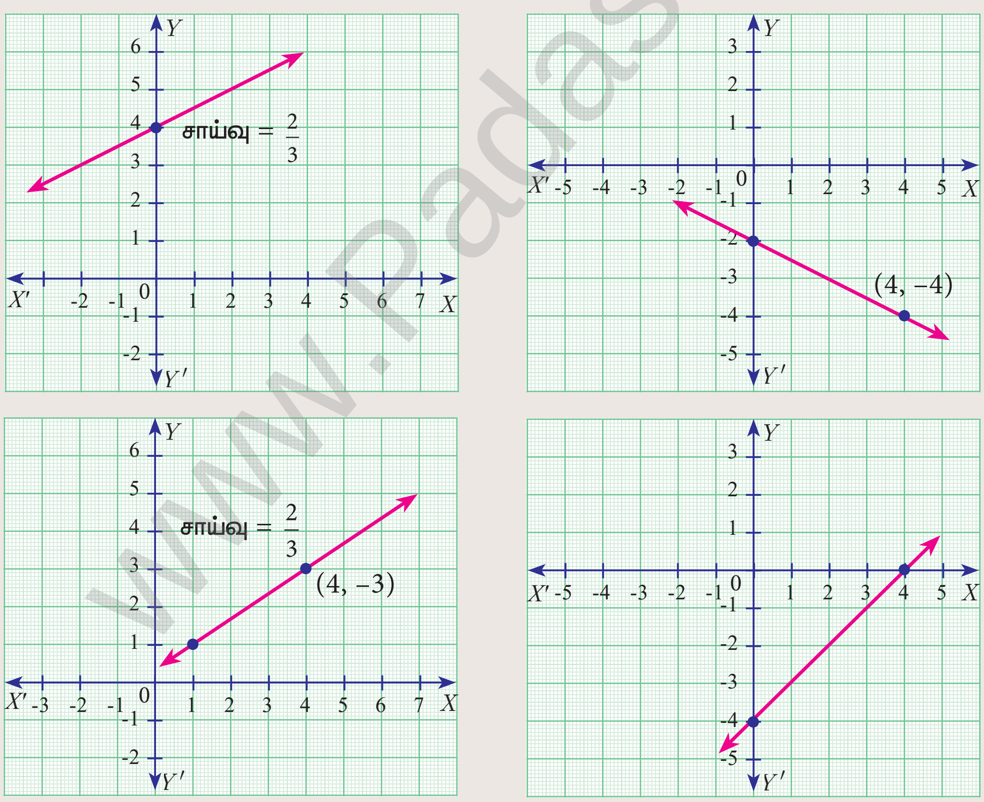
எனவே, தொடுபுள்ளி $P$–யின் ஆயப் புள்ளிகள் $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ ஆகும்.

**சிந்தனைக்களம்**

1. இரு நேர்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
2. $2x-3y+6=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் கோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க..

## செயல்பாடு 6

கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்களில் உள்ள நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.




படம் 5.41

## பயிற்சி 5.4

1. பின்வரும் நேர்கோடுகளின் சாய்வைக் காண்க. (i) $5y-3=0$ (ii) $7x-\frac{3}{17}=0$

2. (i) $y = 0.7x - 11$ க்கு இணையாக (ii) $x = -11$ –க்கு செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

3. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள் இணையானவையா அல்லது செங்குத்தானவையா எனச் சோதிக்கவும்.
   (i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{1}{7} = 0$ மற்றும் $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{1}{10} = 0$
   (ii) $5x + 23y + 14 = 0$ மற்றும் $23x - 5y + 9 = 0$

4. $12y = -(p+3)x + 12$, $12x - 7y = 16$ ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் '$p$'.–யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. $Q(3,-2)$ மற்றும் $R(-5,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிற்கு இணையானதும், $P(-5,2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. $(6,7)$ மற்றும் $(2,-3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(6,-2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. $\Delta ABC$ –யின் முனைகள் $A(-3,0)$ $B(10,-2)$ மற்றும் $C(12,3)$ எனில், $A$ மற்றும் $B$–யிலிருந்து முக்கோணத்தின் எதிர்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

8. $A(-4,2)$ மற்றும் $B(6,-4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் மையக் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $7x + 3y = 10$, $5x - 4y = 1$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $13x + 5y + 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $5x - 6y = 2$, $3x + 2y = 10$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும் $4x - 7y + 13 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. $7x - 3y = -12$ மற்றும் $2y = x + 3$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $3x + y + 2 = 0$ மற்றும் $x - 2y - 4 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $8x + 3y = 18$, $4x + 5y = 9$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் வழியாகவும், $(5,-4)$ மற்றும் $(-7,6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

## பயிற்சி 5.5

I5M5XW

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. (-5,0) , (0,-5) மற்றும் (5,0) ஆகிய புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு
   (1) 0 ச.அலகுகள் (2) 25 ச.அலகுகள் (3) 5 ச.அலகுகள் (4) எதுவுமில்லை

2. ஒரு சுவரின் அருகே நடந்து சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு நபருக்கும் சுவருக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $10$ அலகுகள். சுவரை $Y$ –அச்சாகக் கருதினால், அந்த நபர் செல்லும் பாதை என்பது
(1) $x=10$ (2) $y=10$ (3) $x=0$ (4) $y=0$

3. $x=11$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது
(1) $X$ –அச்சுக்கு இணை (2) $Y$ –அச்சுக்கு இணை
(3) ஆதிப் புள்ளி வழிச் செல்லும் (4) $(0,11)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும்

4. $(5,7)$, $(3,p)$ மற்றும் $(6,6)$ என்பன ஒரு கோட்டமைந்தவை எனில், $p$–யின் மதிப்பு
(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

5. $3x-y=4$ மற்றும் $x+y=8$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி
(1) $(5,3)$ (2) $(2,4)$ (3) $(3,5)$ (4) $(4,4)$

6. $(12,3)$, $(4,a)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{8}$ எனில், '$a$' –யின் மதிப்பு.
(1) 1 (2) 4 (3) $-5$ (4) 2

7. $(0,0)$ மற்றும் $(-8,8)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு
(1) $-1$ (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $-8$

8. கோட்டுத்துண்டு $PQ$ –யின் சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், $PQ$–க்கு செங்குத்தான இரு சம வெட்டியின் சாய்வு
(1) $\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) 0

9. $Y$ அச்சில் அமையும் புள்ளி $A$ –யின் செங்குத்துத் தொலைவு $8$ மற்றும் $X$ அச்சில் அமையும் புள்ளி $B$–யின் கிடைமட்டத் தொலைவு $5$ எனில், $AB$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
(1) $8x+5y=40$ (2) $8x-5y=40$ (3) $x=8$ (4) $y=5$

10. $7x-3y+4=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
(1) $7x-3y+4=0$ (2) $3x-7y+4=0$ (3) $3x+7y=0$ (4) $7x-3y=0$

11. (i) $l_1 : 3y=4x+5$ (ii) $l_2 : 4y=3x-1$ (iii) $l_3 : 4y+3x=7$ (iv) $l_4 : 4x+3y=2$
எனக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு நேர்கோடுகளுக்குக் கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளில் எது உண்மை
(1) $l_1$ மற்றும் $l_2$ செங்குத்தானவை (2) $l_1$ மற்றும் $l_4$ இணையானவை
(3) $l_2$ மற்றும் $l_4$ செங்குத்தானவை (4) $l_2$ மற்றும் $l_3$ இணையானவை

12. $8y=4x+21$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிற்குக் கீழ்க்கண்டவற்றில் எது உண்மை
(1) சாய்வு $0.5$ மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு $2.6$
(2) சாய்வு 5 மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு 1.6
(3) சாய்வு 0.5 மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு 1.6
(4) சாய்வு 5 மற்றும் $y$ வெட்டுத்துண்டு 2.6

13. ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சரிவகமாக அமையத் தேவையான நிபந்தனை
   (i) இரு பக்கங்கள் இணை.
   (ii) இரு பக்கங்கள் இணை மற்றும் இரு பக்கங்கள் இணையற்றவை.
   (iii) எதிரெதிர் பக்கங்கள் இணை.
   (iv) அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம்.

14. சாய்வைப் பயன்படுத்தி நாற்கரமானது ஓர் இணைகரமாக உள்ளது எனக் கூற நாம் காண வேண்டியவை
   (i) இரு பக்கங்களின் சாய்வுகள்
   (ii) இரு சோடி எதிர் பக்கங்களின் சாய்வுகள்
   (iii) அனைத்துப் பக்கங்களின் நீளங்கள்
   (iv) இரு பக்கங்களின் சாய்வுகள் மற்றும் நீளங்கள்

15. $(2,\ 1)$ ஐ வெட்டுப் புள்ளியாகக் கொண்ட இரு நேர்கோடுகள்
   (1) $x-y-3=0;\ \ 3x-y-7=0$ (2) $x+y=3;\ \ 3x+y=7$
   (3) $3x+y=3;\ \ x+y=7$ (4) $x+3y-3=0;\ \ x-y-7=0$

## அலகுப் பயிற்சி- 5

1. $P(-1,-1)$, $Q(-1,4)$, $R(5,4)$ மற்றும் $S(5,-1)$ ஆகிய புள்ளிகளால் ஆன செவ்வகம் $PQRS$–யில் $A,\ B,\ C$ மற்றும் $D$ என்பன முறையே பக்கங்கள் $PQ,\ QR,\ RS$ மற்றும் $SP$–யின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். $ABCD$ என்ற நாற்கரமானது ஒரு சதுரம், செவ்வகம் அல்லது சாய்சதுரமா? உங்கள் விடையைக் காரணத்தோடு விளக்குக.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $5$ ச. அலகுகள். $(2,1)$ மற்றும் $(3,\ -2)$ என்பன முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப் புள்ளிகள் ஆகும். மூன்றாம் முனைப் புள்ளி $(x,\ y)$ என்பதில் $y=x+3$ என இருந்தால் அப்புள்ளியைக் காண்க.

3. $3x+y-2=0$, $5x+2y-3=0$ மற்றும் $2x-y-3=0$ ஆகிய கோடுகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

4. $A(-5,7)$, $B(-4,k)$, $C(-1,-6)$ மற்றும் $D(4,5)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு $72$ ச. அலகுகள் எனில், $k$–யின் மதிப்பைக் காண்க

5. தொலைவு காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாமல், $(-2,-1)$, $(4,0)$, $(3,3)$ மற்றும் $(-3,2)$ என்பன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

6. இரு வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் முறையே $1,\ -6$ எனில், நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஒரு பால்கடை உரிமையாளர் $1$ லிட்டர் ₹$16$ வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு $1220$ லிட்டரும், $1$ லிட்டர் ₹$14$ வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு $980$ லிட்டரும் விற்பனை செய்கிறார். விற்பனை விலையானது தேவையோடு நேரிய தொடர்பு உடையது என ஊகித்துக் கொண்டால், $1$ லிட்டர், ₹$17$ வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு எத்தனை லிட்டர் விற்பனை செய்வார்?

8. $x+3y=7$ என்ற நேர்கோட்டினைச் சமதள ஆடியாகக் கொண்டு $(3,8)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியைக் காண்க.

9. $4x+7y-3=0$ மற்றும் $2x-3y+1=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத் துண்டுகள் சமமானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $2x-3y+4=0$ மற்றும் $3x+4y-5=0$ என்ற நேர்கோடுகளால் குறிக்கப்படும் இரண்டு பாதைகள் சந்திக்கும் புள்ளியில் நிற்கும் ஒருவர் $6x-7y+8=0$ என்ற நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படும் பாதையைக் குறுகிய நேரத்தில் சென்றடைய விரும்புகிறார் எனில், அவர் செல்ல வேண்டிய பாதையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

## நினைவில் கொள்ளவேண்டியவை

- $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ மற்றும் $(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right\}$ ச. அலகுகள்.
- $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளது எனில், எனில் (i) $\triangle ABC$ –யின் பரப்பு $=0$ அல்லது $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1=x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3$
  (ii) $AB$ –யின் சாய்வு $=BC$ –யின் சாய்வு அல்லது $AC$ –யின் சாய்வு
- $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$ மற்றும் $(x_4,y_4)$ ஆகிய நான்கு புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் நாற்கரத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\right\}$ ச. அ
- ஒரு நேர்கோடானது மிகை $X$ அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் $\theta$ எனில், அந்நேர்கோட்டின் சாய்வு $m=\tan\theta$ ஆகும்.
- $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் $AB$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- $ax+by+c=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு $m=\frac{-a}{b}$.

**வெவ்வேறு வடிவில் உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு**

| வடிவம் | பெயர் | வடிவம் | பெயர் |
|---|---|---|---|
| $ax+by+c=0$ | பொது வடிவம் | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ | வெட்டுத்துண்டு வடிவம் |
| $y-y_1=m(x-x_1)$ | புள்ளி–சாய்வு வடிவம் | $x=c$ | $Y$ அச்சுக்கு இணை |
| $y=mx+c$ | சாய்வு–வெட்டுத்துண்டு வடிவம் | $y=b$ | $X$ அச்சுக்கு இணை |
| $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ | இரு புள்ளி வடிவம் | | |

- இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அந்நேர்கோட்டின் சாய்வுகள் சமம்.
- $m_1$, $m_2$ என்ற சாய்வுகள் கொண்ட இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $m_1\times m_2=-1$.

## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

**ICT 5.1**

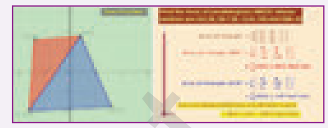
**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி Geogebra–வில் "Co–ordinate Geometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Area of Quadrilateral" எனும் பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க.

**படி 2:** "New problem" ஐ click செய்வதன் மூலம் புதிய கணக்குகளைப் பெற முடியும். கணக்குகளைத் தீர்த்தபின் விடையைச் சரிபார்க்க.

படி 1

படி 2

முடிவுகள்



**ICT 5.2**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Geogebra" –வில் "Co–ordinate Geometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Slope–Equation of a Straight Line" எனும் பக்கத்திற்குச் செல்க.

**படி 2:** வரைபடத் தாளில் A மற்றும் B எனும் புள்ளிகளை நகர்த்துவதன் மூலம் கோட்டை மாற்றி அமைக்கலாம். இடப்புறமுள்ள பல பெட்டிகளை 'Click' செய்து ஒரே நேர்கோட்டின் பல வடிவங்களை காணலாம்.

படி 1

படி 2

முடிவுகள்

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

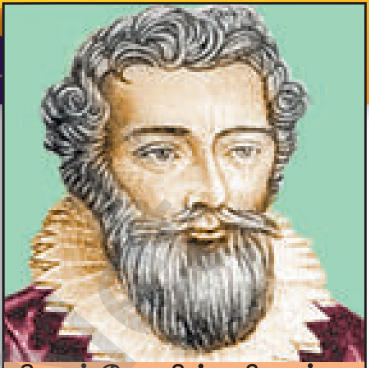
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356195

அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்யவும்.

B371_10_MATHS_TM

# 6 முக்கோணவியல்

*இயற்கையை ஆழமாகப் புரிந்துகொள்வதே கணிதக் கண்டுபிடிப்புகளின் பயன்தரு மூலமாகும். –ஜோசப் ஃபோரியே*



பிரான்கோயிஸ் வியாட்டா
1540–1603 கி.பி (பொ.ஆ)

பிரஞ்சு கணித மேதை பிரான்கோயிஸ் வியாட்டா இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பொருத்தமான முக்கோணவியல் சார்புகளைப் பயன்படுத்தினார். அவருடைய புகழ்பெற்ற $\pi$ சூத்திரமானது முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமாகப் பெறப்பட்டது. அவர் இயற்றிய "Canon Mathematics" என்ற புகழ்மிக்க நூல் முக்கோணவியல் பற்றி விவரிக்கிறது. மேலும் இந்நூல் முக்கோணவியல் சார்ந்த அட்டவணைகளைக் கணித ரீதியாக எவ்வாறு உருவாக்கலாம் என்ற குறிப்பையும் தள மற்றும் கோள முக்கோணங்களின் தீர்வைப்பற்றியும் கூறுகிறது. அதிகபட்சம் அறுபடித்தான சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்பது, மூலங்களைக் கண்டறிவது ஆகிய முறைகளைக் கோயிஸ் அளித்துள்ளார். கணிதத்தில் 'கெழு' என்ற சொல்லை முதன்முதலில் பயன்படுத்தியவர் இவரே. சமன்பாடுகளின் மூலங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை, ஒரு சாதாரணச் சூத்திரத்தின் மூலம் இவர் நமக்கு விளக்கியுள்ளார். மேலும், வடிவியல் முறையில் கனச் சதுரத்தை இரு மடங்காக்குவது, ஒரு கோணத்தை மூன்று சமபாகமாகப் பிரிப்பது போன்ற கணக்குகளையும் இவர் வழங்கியுள்ளார். இரகசியக் குறியீடு செய்திகளிலிருந்து தேவையான செய்தியைக் கண்டறியும் கணித முறையை வழங்கியுள்ளார்.

WR3IRF

## கற்றல் விளைவுகள்

- முக்கோணவியல் விகிதங்களை நினைவு கூர்தல்.
- முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கு இடையேயுள்ள அடிப்படைத் தொடர்புகளை நினைவுபடுத்துதல்.
- நிரப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை நினைவு கூர்தல்.
- முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளைப் புரிந்துகொள்ளல்.
- பல்வேறு வகையான பொருட்களின் உயரம் மற்றும் தொலைவுகள் சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் வழிமுறைகளை அறிதல்.

## 6.1 அறிமுகம் (Introduction)

பழங்காலத்தில் நில அளவையாளர்கள், மாலுமிகள் மற்றும் விண்வெளி ஆராய்ச்சியாளர்கள் ஆகியோர் நேரடியாகக் கண்டறிய முடியாத தொலைவுகளை முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்திக் கண்டறிந்துள்ளனர். இதுவே கணிதவியலின் கிளையான முக்கோணவியல் உருவாகுவதற்குக் காரணமாக அமைந்தது.

ரோட்ஸ் தீவில் கி.மு. (பொ.ஆ.மு) 200 இல் வாழ்ந்த ஹிப்பார்கஸ், மிகப்பெரிய நாணுடைய $360\times 60 = 21600$ அலகுகள் சுற்றளவு (அதாவது, சுற்றளவின் 1 அலகானது வில்லின் ஒவ்வொரு





X_Ch 6 TM.indd 248 16-04-2019 10:14:45

நிமிடத்திற்கும் சமமாக) கொண்ட வட்டத்தை உருவாக்கினார். இது முக்கோணவியலின் வளர்ச்சிக்குப் பெரும் அடித்தளமாக அமைந்தது. எனவே ஹிப்பார்கஸ் "முக்கோணவியலின் தந்தை" என அழைக்கப்படுகிறார்.

கி.பி. (பொ.ஆ) ஐந்தாம் நூற்றாண்டின் இந்திய அறிஞர்கள், அரைக் கோணத்திற்கான அரை நாண்களை எடுத்துக்கொண்டு தீர்வு கண்டபோது அது வானியல் கணிதத்தின் சுருங்கிய வடிவமே என்பதை உணர்ந்தனர். கணித மேதைகளான ஆரியபட்டா, பாஸ்கரா –I, II மற்றும் சிலரும் அரை நாண்களின் (Jya) மதிப்புகளைக் கணக்கிடுவதற்கு எளிய வழிமுறைகளைக் கொண்டு வந்தனர்.

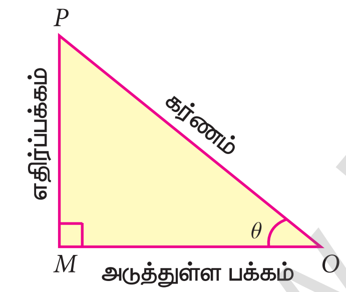
பாக்தாத்தின் கணித மேதை அபு–அல்–வஃபா என்பவர் தொடுகோட்டுச் (tangent) சார்புகளை உருவாக்கினார். அவர் அதை நிழல் (Shadow) என அழைத்தார். அரேபிய அறிஞர்களுக்கு ஜியா (Jya) எனும் சொல்லை எவ்வாறு மொழிபெயர்த்து எழுதுவது எனத் தெரியவில்லை. ஆகவே அவர்கள் தோராயமாக ஜிபா (Jiba) என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்தினர்.

அரேபியச் சொல் ஜிபா (Jiba)வானது காவ் (cove) அல்லது பே (bay) என மாற்றம் பெற்று இலத்தீன் மொழியில் சைனஸ் ('sinus') என அழைக்கப்பட்டது. சைனஸ் என்ற சொல் அரை–நாணைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்டது. இந்தச் சொல்லையே இன்று நாம் சைன் ('sine') என அழைக்கிறோம். "முக்கோணவியல்" என்ற சொல்லானது கி.பி (பொ.ஆ) 17ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில் ஜெர்மன் கணித மேதை பார்தோலோமஸ் பிடிஸ்கஸ் என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

## நினைவு கூர்தல்

## முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

இங்கு $0^\circ < \theta < 90^\circ$ என்க.



படம் 6.1

செங்கோண முக்கோணம் $OMP$-யில்

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{OM}{OP}$$

மேற்கண்ட இரண்டு முக்கோண விகிதங்களிலிருந்து மற்ற நான்கு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta};\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta};\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

**குறிப்பு**

$\theta$ -வை ஒரு கோணமாகக் கொண்ட எல்லா செங்கோண முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாக இருக்கும். எனவே, இவ்வாறான செங்கோண முக்கோணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களானது தேர்ந்தெடுக்கப்படும் முக்கோணங்களைப் பொருத்து அமையாது.

## நிரப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ | $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ | $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$ |
| $\text{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$ | $\sec(90^\circ-\theta)=\text{cosec}\,\theta$ | $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$ |

### முக்கோணவியல் நிரப்பு கோணங்களுக்கான காட்சி மெய்ம்மை நிரூபணம்

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஓர் அலகு ஆரமுடைய அரைவட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\angle QOP = \theta$ என்க.

எனவே, $\angle QOR = 90^\circ - \theta$, இங்கு, $OPQR$ என்பது ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.

முக்கோணம் $OPQ$ -லிருந்து, $\dfrac{OP}{OQ} = \cos\theta$

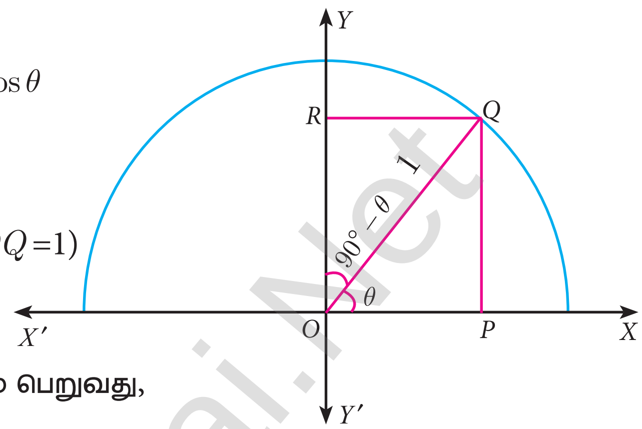
ஆனால், $OQ =$ ஆரம் $= 1$

எனவே, $OP = OQ \times \cos\theta = \cos\theta$

இதேபோல, $\dfrac{PQ}{OQ} = \sin\theta$

எனவே, $PQ = OQ \times \sin\theta = \sin\theta$ (ஏனெனில் $OQ = 1$)

$OP = \cos\theta,\ PQ = \sin\theta \quad \ldots (1)$



படம் 6.2

இப்பொழுது முக்கோணம் $QOR$ -லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\frac{OR}{OQ} = \cos(90^\circ - \theta)$$

எனவே, $OR = OQ\ \cos(90^\circ - \theta)$

ஆகவே, $OR = \cos(90^\circ - \theta)$

இதுபோலவே, $\dfrac{RQ}{OQ} = \sin(90^\circ - \theta)$

மேலும் , $RQ = \sin(90^\circ - \theta)$

$$OR = \cos(90^\circ - \theta),\ RQ = \sin(90^\circ - \theta) \quad \ldots (2)$$

$OPQR$ என்பது செவ்வகம் என்பதால், $OP = RQ$ மற்றும் $OR = PQ$

எனவே (1) , (2) -லிருந்து கிடைக்கப்பெறுவன,

$\boxed{\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta}$ மற்றும் $\boxed{\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta}$

**குறிப்பு**

| | |
|---|---|
| $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ | $(\text{cosec}\theta)^2 = \text{cosec}^2\theta$ |
| $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$ | $(\sec\theta)^2 = \sec^2\theta$ |
| $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$ | $(\cot\theta)^2 = \cot^2\theta$ |

**$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -க்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணை**

| $\theta$ / முக்கோணவியல் விகிதங்கள் | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | வரையறுக்க இயலாது |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{cosec}\theta$ | வரையறுக்க இயலாது | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $1$ |
| $\sec\theta$ | $1$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | வரையறுக்க இயலாது |
| $\cot\theta$ | வரையறுக்க இயலாது | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |

**சிந்தனைக் களம்**

1. $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$ -வின் மதிப்புகள் எப்போது சமமாக இருக்கும்?
2. $\sin\theta = 2$ எனில், $\theta$ -ன் மதிப்பு என்ன?
3. $\theta$ -ன் மதிப்பு $0^\circ$ -லிருந்து $90^\circ$ வரை அதிகரிக்கிறது எனில், ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களில் எவை வரையறுக்கப்படாத மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்?
4. எட்டு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் இருப்பதற்குச் சாத்தியமுண்டா?
5. $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ என்க. $\theta$ -ன் மதிப்புகளுக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையாகும்?
   (i) $\sin\theta > \cos\theta$ (ii) $\cos\theta > \sin\theta$ (iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

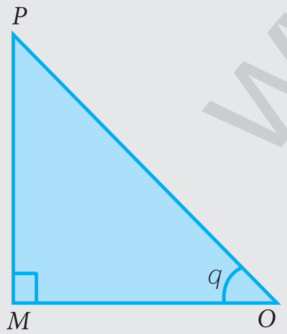
## 6.2 முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Trigonometric Identities)

$\theta$ -ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் பின்வரும் மூன்று முற்றொருமைகளைப் பெறலாம்.

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

மேற்கண்ட மூன்று முற்றொருமைகளும் முக்கோணவியலின் அடிப்படை முற்றொருமைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

இம்முற்றொருமைகளைக் கீழ்க்காணுமாறு நிரூபிக்கலாம்.

| படம் | முற்றொருமை | நிரூபணம் |
|---|---|---|
| <br>படம் 6.3 | $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ | செங்கோண முக்கோணம் $OMP$ -ல்<br>$\frac{OM}{OP} = \cos\theta,\quad \frac{PM}{OP} = \sin\theta$ ...(1)<br>பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,<br>$MP^2 + OM^2 = OP^2$ ...(2)<br>(2) ஐ $OP^2$ -ஆல் இருபுறமும் வகுக்க (இங்கு $OP \neq 0$) நாம் பெறுவது,<br>$\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$<br>$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OP}\right)^2$ என்பதால்<br>(1) -லிருந்து, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$<br>ஆகவே, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ | செங்கோண முக்கோணம் $OMP$-ல் $\frac{MP}{OM}=\tan\theta,\quad \frac{OP}{OM}=\sec\theta \quad ...(3)$ <br> $(2)$ -லிருந்து, $MP^2+OM^2=OP^2$ <br> $(2)$ –ஐ $OM^2$-ஆல் இருபுறமும் வகுக்க (இங்கு $OM\neq 0$) நமக்குக் கிடைப்பது <br> $\frac{MP^2}{OM^2}+\frac{OM^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}$ <br> $\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OM}{OM}\right)^2=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$ என்பதால் <br> $(3)$-லிருந்து $(\tan\theta)^2+1^2=(\sec\theta)^2$ <br> ஆகவே $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ . |
| | $1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$ | செங்கோண முக்கோணம் $OMP$-ல் $\frac{OM}{MP}=\cot\theta,\quad \frac{OP}{MP}=\text{cosec}\,\theta \quad ...(4)$ <br> $(2)$ -லிருந்து, $MP^2+OM^2=OP^2$ <br> $(2)$ –ஐ $MP^2$ -ஆல் இருபுறமும் வகுக்க, (இங்கு $MP\neq 0$) நாம் பெறுவது, <br> $\frac{MP^2}{MP^2}+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$ <br> $\left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$ என்பதால் <br> $(4)$ -லிருந்து, $1^2+(\cot\theta)^2=(\text{cosec}\theta)^2$ <br> ஆகவே, $1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$ |

**இந்த முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.**

| முற்றொருமை | மாற்று அமைப்புகள் |
|---|---|
| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ | $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ (அல்லது) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ |
| $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ | $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ (அல்லது) $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ |
| $1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$ | $\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta-1$ (அல்லது) $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$ |

**குறிப்பு**

- மேற்கண்ட முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் $\theta$ -வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகும். ஆனால், நாம் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதக் கோணங்களை $0°<\theta<90°$ என மட்டும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

## செயல்பாடு 1

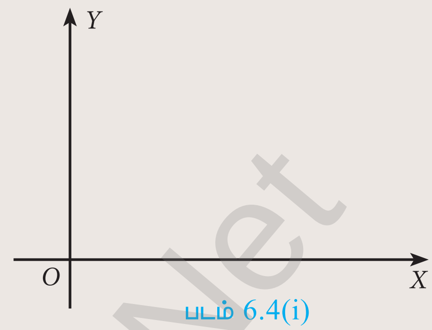
ஒரு வெள்ளைத்தாளில் படம் 6.4 (i) –ல் உள்ளவாறு $OX$, $OY$ என்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகள் $O$ -ல் சந்திக்குமாறு அமைக்கவும்.

$OX$ என்பதை $X$ அச்சாகவும், $OY$ என்பதை $Y$ அச்சாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\theta$ –ன் குறிப்பிட்ட கோணங்களுக்கு $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$ -ன் மதிப்புகளைச் சரிபார்க்கலாம்.

இங்கு, $\theta = 30°$ என்க.

படம் 6.4(ii)-ல் உள்ளவாறு ஏதாவது ஒரு நீளத்திற்கு கோட்டுத் துண்டு $OA$, $\angle AOX = 30°$ என்றவாறு அமைக்க. $B$-யில் சந்திக்குமாறு $A$-யிலிருந்து $OX$-க்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைக.

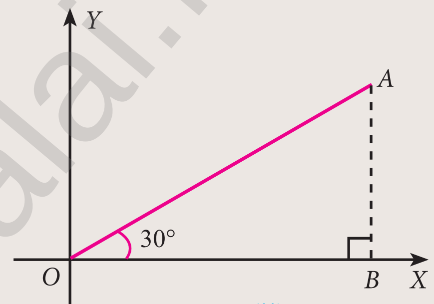


படம் 6.4(i)

இப்பொழுது அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி, $AB$, $OB$ மற்றும் $OA$ –வின் நீளத்தை அளக்கவும்.

விகிதங்கள் $\frac{AB}{OA}, \frac{OB}{OA}$ மற்றும் $\frac{AB}{OB}$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து என்ன கிடைக்கிறது? இந்த மதிப்புகளை முக்கோணவியல் அட்டவணை மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடலாமா? உங்கள் முடிவு என்னவாக இருக்கும்?

இதேபோல, $\theta = 45°$ மற்றும் $\theta = 60°$ ஆகிய கோணங்களுக்கும் மேற்கண்ட மூன்று மதிப்புகளைக் காண்க. இதன் மூலம் நீங்கள் அறிவது என்ன?



படம் 6.4(ii)

**எடுத்துக்காட்டு 6.1** $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** 
$$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\cos^2\theta$$
$$= \tan^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.2** $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு**
$$\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$
[$1+\cos A$ யின் இணையைக் கொண்டு தொகுதி மற்றும் பகுதியைப் பெருக்கவும்]
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.3** $1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \operatorname{cosec}\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** 
$$1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = 1+\frac{\operatorname{cosec}^2\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$
[ஏனெனில் $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$]





X_Ch 6 TM.indd 253 16-04-2019 10:14:55

$$= 1+\frac{(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1)}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$

$$= 1+(\operatorname{cosec}\theta-1)=\operatorname{cosec}\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.4** $\sec\theta-\cos\theta=\tan\theta\sin\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\sec\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad [\text{ஏனெனில் } 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta]$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta=\tan\theta\sin\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.5** $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ [$1-\cos\theta$ யின் இணையைக் கொண்டு தொகுதி மற்றும் பகுதியைப் பெருக்கவும்]

$$=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}=\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} \quad [\text{ஏனெனில் } \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.6** $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\cot\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\cot\theta$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.7** $\sin^2A\cos^2B+\cos^2A\sin^2B+\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\sin^2A\cos^2B+\cos^2A\sin^2B+\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B$

$$=\sin^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B+\cos^2A\sin^2B+\cos^2A\cos^2B$$

$$=\sin^2A(\cos^2B+\sin^2B)+\cos^2A(\sin^2B+\cos^2B)$$

$$=\sin^2A(1)+\cos^2A(1) \quad (\text{ஏனெனில் } \sin^2B+\cos^2B=1)$$

$$=\sin^2A+\cos^2A=1$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.8** $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ எனில், $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ என நிரூபிக்க.

**தீர்வு** இப்பொழுது, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ என்பதை இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்துக.

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\cos\theta)^2$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$$

$$2\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} = \sqrt{2}\sin\theta$$

(ஏனெனில் $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ )

ஆகவே, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$.

**எடுத்துக்காட்டு 6.9** $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta \times 1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.10** $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A}$

$$= \frac{\sin A(1-\cos A) + \sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$= \frac{\sin A - \sin A\cos A + \sin A + \sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A}{1-\cos^2 A} = \frac{2\sin A}{\sin^2 A} = 2\operatorname{cosec} A$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.11** $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ எனில், $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ...(1)

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (முற்றொருமை)

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{P} \quad ...(2)$$

$(1)$ மற்றும் $(2)$ ஆகியவற்றைக் கூட்ட, $2\operatorname{cosec}\theta = P + \dfrac{1}{P}$

$$2\operatorname{cosec}\theta = \frac{P^2+1}{P} \quad ...(3)$$

$(2)$ -லிருந்து $(1)$ -ஐ கழித்தால் கிடைப்பது, $2\cot\theta = P - \dfrac{1}{P}$

$$2\cot\theta = \frac{P^2-1}{P} \quad ...(4)$$

$(4)$ -ஐ $(3)$ -ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது, $\dfrac{2\cot\theta}{2\operatorname{cosec}\theta} = \dfrac{P^2-1}{P} \times \dfrac{P}{P^2+1}$ இதிலிருந்து,

$\cos\theta = \dfrac{P^2-1}{P^2+1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 6.12** $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு**

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.13** $\left(\dfrac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\dfrac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right) = 2\sin A\cos A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\left(\dfrac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\dfrac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right)$

$$= \left(\frac{(\cos A - \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A + \cos A\sin A)}{\cos A - \sin A}\right)$$

$$- \left(\frac{(\cos A + \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A - \cos A\sin A)}{\cos A + \sin A}\right)$$

[ஏனெனில் $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)$ ]

$= (1 + \cos A\sin A) - (1 - \cos A\sin A)$

$= 2\ \cos A\sin A$

**எடுத்துக்காட்டு 6.14** $\dfrac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \dfrac{\cos A}{\operatorname{cosec}A + \cot A - 1} = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\dfrac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \dfrac{\cos A}{\operatorname{cosec}A + \cot A - 1}$

$$= \frac{\sin A(\operatorname{cosec}A + \cot A - 1) + \cos A(\sec A + \tan A - 1)}{(\sec A + \tan A - 1)(\operatorname{cosec}A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{\sin A\ \text{cosec}A + \sin A\cot A - \sin A + \cos A\sec A + \cos A\tan A - \cos A}{(\sec A + \tan A - 1)(\text{cosec}A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{1 + \cos A - \sin A + 1 + \sin A - \cos A}{\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{1 + \sin A - \cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1 + \cos A - \sin A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{(1 + \sin A - \cos A)(1 + \cos A - \sin A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{[1 + (\sin A - \cos A)][1 - (\sin A - \cos A)]} = \frac{2\sin A\cos A}{1 - (\sin A - \cos A)^2}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1 - (\sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A\cos A)} = \frac{2\sin A\cos A}{1 - (1 - 2\sin A\cos A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1 - 1 + 2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A} = 1.$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.15** $\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2$ எனக் காட்டுக.

**தீர்வு**

**இடப்பக்கம்**

$$\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}} = \tan^2 A \ \ldots (1)$$

**வலப்பக்கம்**

$$\left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \frac{1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A \ldots (2)$$

$(1)$, $(2)$ லிருந்து $\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2$

**எடுத்துக்காட்டு 6.16** $\frac{(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A)}{\sec^3 A - \text{cosec}^3 A} = \sin^2 A\cos^2 A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**தீர்வு** $\frac{(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A)}{\sec^3 A - \text{cosec}^3 A}$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sin A - \cos A)}{(\sec A - \text{cosec}A)(\sec^2 A + \sec A\,\text{cosec}A + \text{cosec}^2 A)}$$

$$= \frac{\dfrac{(\sin A\cos A + \cos^2 A + \sin^2 A)(\sin A - \cos A)}{\sin A\cos A}}{(\sec A - \operatorname{cosec} A)\left(\dfrac{1}{\cos^2 A} + \dfrac{1}{\cos A\sin A} + \dfrac{1}{\sin^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A + 1)\left(\dfrac{\sin A}{\sin A\cos A} - \dfrac{\cos A}{\sin A\cos A}\right)}{(\sec A - \operatorname{cosec} A)\left(\dfrac{\sin^2 A + \sin A\cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A + 1)(\sec A - \operatorname{cosec} A)}{(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \sin A\cos A)} \times \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A\cos^2 A$$

**எடுத்துக்காட்டு 6.17** $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p$ மற்றும் $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q$ எனில், $p^2q^2(p^2 + q^2 + 3) = 1$ என நிரூபிக்க.

**தீர்வு** இங்கு $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p \quad ...(1)$ மற்றும் $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q \quad ...(2)$

$$p^2q^2(p^2+q^2+3) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \left[\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 3\right]$$

[(1), (2) -ஐ பயன்படுத்தக் கிடைப்பது]

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \left[\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta} + 3\right]$$

$$= (\cos^2\theta \times \sin^2\theta) \times \left[\left(\frac{\cos^6\theta + \sin^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$= \cos^6\theta + \sin^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3 + (\sin^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= [(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)] + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1 - 3\cos^2\theta\sin^2\theta(1) + 3\cos^2\theta\sin^2\theta = 1$$

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணவியல் விகிதங்களின் எண்ணிக்கையானது ______.
2. $1 - \cos^2\theta$ = ______.
3. $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$ = ______.
4. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ = ______.
5. $\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$ = ______.
6. $\tan 60^\circ \cos 60^\circ + \cot 60^\circ \sin 60^\circ$ = ______.
7. $(\tan 45^\circ + \cot 45^\circ) + (\sec 45^\circ \operatorname{cosec} 45^\circ)$ = ______.
8. (i) $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$ எனில், $\theta$ = ______. (ii) $\cot\theta = \tan\theta$ எனில், $\theta$ = _____.

## பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\,\operatorname{cosec}\theta$  (ii) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$
2. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta - 1} = \tan^2\theta$  (ii) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$
3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$  (ii) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$
4. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$
   (ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$
5. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta) - 2\tan^2\theta = 1$  (ii) $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$
6. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.
   (i) $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$  (ii) $\dfrac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} + \dfrac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 2$
7. (i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ எனில், $\tan\theta + \cot\theta = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
   (ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ எனில், $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ எனக் நிறுவுக.
8. (i) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ மற்றும் $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$, எனக் கொண்டு $(m^2+n^2)\cos^2\beta = n^2$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
   (ii) $\cot\theta + \tan\theta = x$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = y$ எனில், $(x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
9. (i) $\sin\theta + \cos\theta = p$ மற்றும் $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ எனில், $q(p^2-1) = 2p$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
   (ii) $\sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta$ எனில், $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
10. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{1}{a}$ எனில், $\dfrac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

BCIWJY

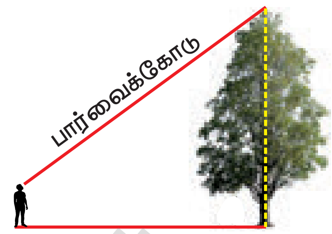
## 6.3 உயரங்களும் தொலைவுகளும் (Heights and Distances)

இந்தப் பாடப்பகுதியில், வெவ்வேறான பொருட்களின் உயரங்களையும், தொலைவுகளையும் நேரிடையாக அளந்து பார்க்காமல் முக்கோணவியலைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கணக்கிடலாம் என்பதைப் பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, கோபுரம், மலை, கட்டிடம் அல்லது மரம் ஆகியவற்றின் உயரத்தையும், கலங்கரை விளக்கத்திலிருந்து கடலில் மிதக்கும் கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு மற்றும் ஆற்றின்

அகலம் போன்றவற்றைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு முக்கோணவியல் சார்ந்த அறிவு பயன்படுகிறது. இதன்படி உயரங்களையும், தொலைவுகளையும் கண்டறிவதற்கு அன்றாட வாழ்வில் முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது என்பதை அறியலாம். இதனை விளக்குவதற்கு ஒருசில எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகளைக் காண்போம். உயரங்களையும் தொலைவுகளையும் கற்பதற்கு முன்னர் நாம் ஒருசில அடிப்படை வரையறைகளை அறிந்துகொள்வோம்.

### பார்வைக் கோடு (Line of Sight)

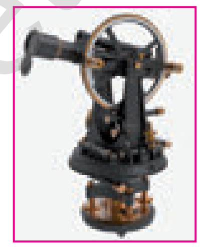
நாம் ஒரு பொருளை உற்று நோக்கும்போது நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு வரையப்படும் நேர்கோட்டை "பார்வை கோடு" என அழைக்கிறோம்.

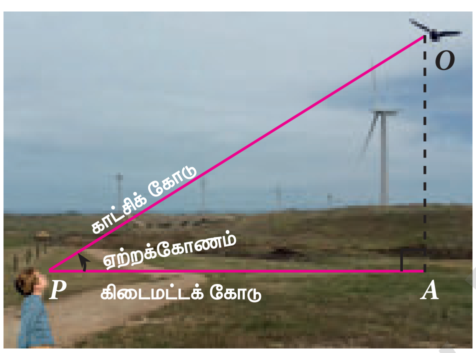


படம் 6.5

### தியோடலைட்

தியோடலைட் என்ற கருவி ஒரு பொருளை உற்று நோக்குபவரின் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும், பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை அளவிடப் பயன்படுகிறது. தியோடலைட்டில் இரண்டு சக்கரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகத் தொலைநோக்கியுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கும். இந்தச் சக்கரங்களைக் கொண்டு கிடைமட்டக்கோணம் மற்றும் நேர்குத்துக் கோணங்களை அளக்க முடியும். விரும்பிய புள்ளியின் கோணத்தை அளப்பதற்கு, தொலைநோக்கியை அப்புள்ளி நோக்கி அமையுமாறு வைத்தால், அக்கோணத்தின் அளவைத் தொலைநோக்கியின் அளவுகோலில் காணமுடியும்.


படம் 6.6



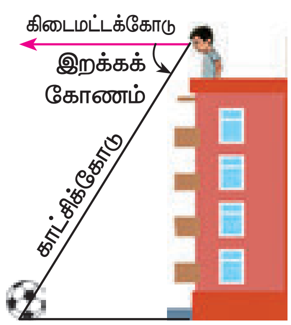
படம் 6.7

### ஏற்றக்கோணம் (Angle of Elevation)

ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கு மேலே இருக்கும்போது, கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும், பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ஏற்றக்கோணம் எனப்படும். அதாவது அப்பொருளைப் பார்க்க, நாம் தலையை சற்றே உயர்த்தும் நிலையே ஆகும் (படம் 6.7ஐ பார்க்கவும்).

### இறக்கக் கோணம் (Angle of Depression)

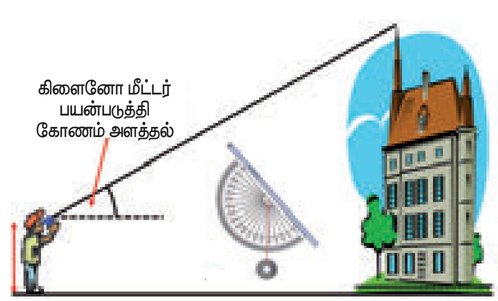
ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்போது, பார்வைக்கோட்டிற்கும் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும். அதாவது அப்பொருளைப் பார்க்க நாம் தலையை சற்றே தாழ்த்தும் நிலையே ஆகும் (படம் 6.8ஐ பார்க்கவும்).



படம் 6.8

### கிளைனோ மீட்டர் (Clinometer)

பொதுவாக ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக் கோணங்களைக் கிளைனோ மீட்டர் என்ற கருவியின் மூலம் கண்டறியலாம்.



படம் 6.9



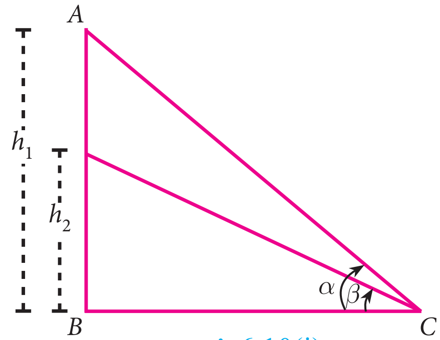


X_Ch 6 TM.indd 260 16-04-2019 10:15:09

**குறிப்பு**

- கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருளின் உயரம் அதிகரிக்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணத்தின் அளவும் அதிகரிக்கும்.

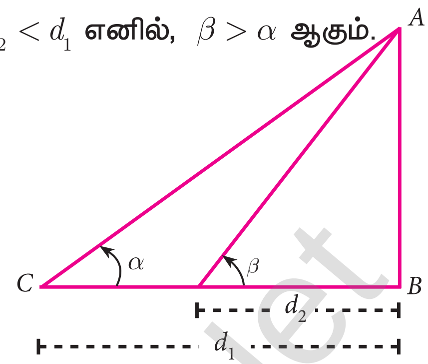
  $h_1 > h_2$ எனில், $\alpha > \beta$ ஆகும்.




படம் 6.10(i)

- செங்குத்தாக உள்ள கோபுரம் அல்லது கட்டிடம் போன்றவற்றின் அடியை நோக்கி நகரும்போது அதன் ஏற்றக்கோணம் அதிகரிக்கும்.

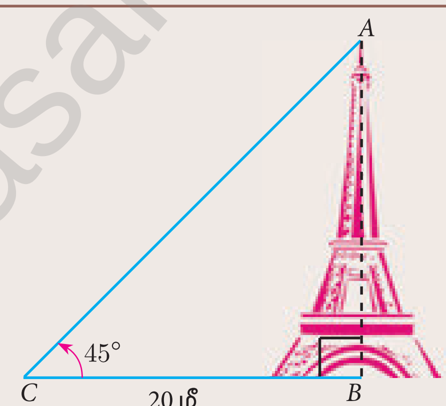
  $d_2 < d_1$ எனில், $\beta > \alpha$ ஆகும்.




படம் 6.10(ii)

## செயல்பாடு 2

கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைக்கு செங்கோண முக்கோணம் வரையவும்.

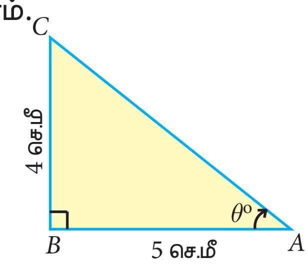
| சூழ்நிலை | செங்கோண முக்கோணம் |
|---|---|
| ஒரு கோபுரம் தரைக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. அக்கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 20 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சிக்கான ஏற்றக்கோணம் $45°$ ஆக இருக்கிறது. |   படம் 6.11 |
| 2.8மீ உயரமுள்ள ஒருவர், 25.2மீ தொலைவில் உள்ள புகை போக்கியைப் பார்க்கிறார். அவரின் பார்வையிலிருந்து புகை போக்கியினுடைய உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $45°$ ஆகும். | ................................. |
| தரையின் மேல் $'P'$ என்ற புள்ளியிலிருந்து 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $30°$ ஆகும். கட்டடத்தின் உச்சியில் கொடி ஒன்று ஏற்றப்பட்டுள்ளது எனில், புள்ளி $P$-லிருந்து கொடிக்கம்பத்தினுடைய உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $55°$ ஆகும். | ................................. |
| சூரியனைக் காணும் ஏற்றக்கோணம் $60°$-லிருந்து $30°$ ஆக மாறும்போது சமதளத்தில் உள்ள ஒரு கோபுர நிழலின் நீளம் 40 மீ அதிகரிக்கிறது. | ................................. |

### 6.3.1 ஏற்றக் கோணக் கணக்குகள் (Problems involving Angle of Elevation)

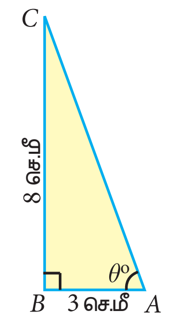
இப்பகுதியில், ஏற்றக் கோணம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அக்கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் முறையை அறிவோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.18**

பின்வரும் முக்கோணங்களில் $\angle BAC$ -ஐ காண்க.




படம் 6.12(i)




படம் 6.12(ii)

**தீர்வு**

(i) செங்கோண முக்கோணம் $ABC$ -ல் ( படம் 6.12 (i) பார்க்கவும்)

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}(0.8)$$

$\theta = 38.7^\circ$ ($\tan\ 38.7^\circ = 0.8011$ என்பதால்)

$\angle BAC = 38.7^\circ$

(ii) செங்கோண முக்கோணம் $ABC$-ல் (படம் 6.12 (ii) பார்க்கவும்)

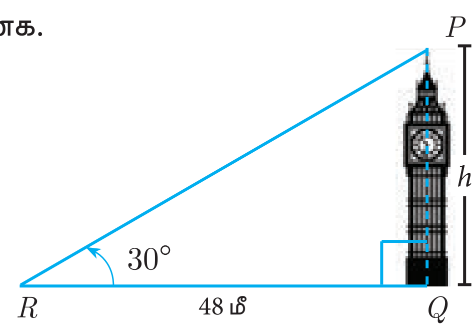
$$\tan\theta = \frac{8}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = \tan^{-1}(2.66)$$

$\theta = 69.4^\circ$ ($\tan\ 69.4^\circ = 2.6604$ என்பதால்)

$\angle BAC = 69.4^\circ$

**எடுத்துக்காட்டு 6.19** ஒரு கோபுரம் தரைக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து தரையில் 48 மீ, தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $30^\circ$ எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.




படம் 6.13

**தீர்வு** கோபுரத்தின் உயரம் $PQ$ என்க. $PQ = h$ என்க. கோபுரத்திற்கும் தரையில் உள்ள புள்ளி $R$ - க்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு $QR$ என்க.

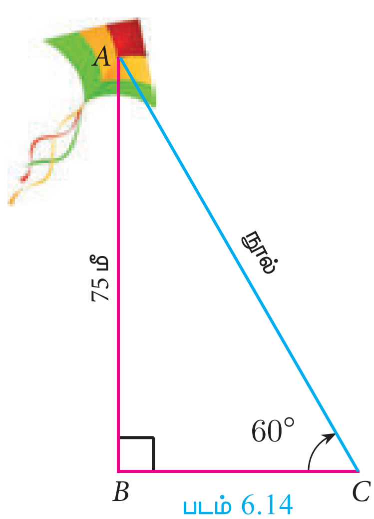
செங்கோண முக்கோணம் $PQR$-ல் $\angle PRQ = 30^\circ$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{QR}\ ;\ \tan 30^\circ = \frac{h}{48}$$

இதிலிருந்து, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{48}$ எனவே, $h = 16\sqrt{3}$

ஆகவே, கோபுரத்தின் உயரம் $16\sqrt{3}$ மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.20** தரையிலிருந்து ஒரு பட்டம் 75 மீ உயரத்தில் பறக்கிறது. ஒரு நூல் கொண்டு தற்காலிகமாகத் தரையின் ஒரு புள்ளியில் பட்டம் கட்டப்பட்டுள்ளது. நூல் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் $60^\circ$ எனில், நூலின் நீளம் காண்க. (நூலை ஒரு நேர்க்கோடாக எடுத்துக்கொள்ளவும்).




படம் 6.14

**தீர்வு** தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம் $AB = 75$ மீ என்க.

நூலின் நீளம் $AC$ என்க.

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$–ல், $\angle ACB = 60^\circ$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

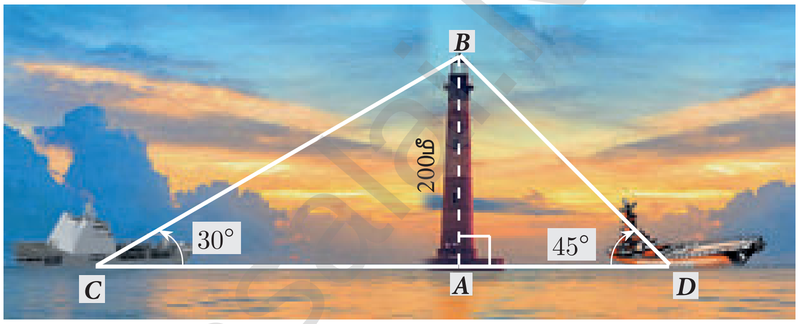
$$\sin 60^\circ = \frac{75}{AC}$$

நாம் பெறுவது $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC}$ ஆகவே, $AC = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$

எனவே, நூலின் நீளம் $50\sqrt{3}$ மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.21** இரு கப்பல்கள் கலங்கரை விளக்கத்தின் இரு பக்கங்களிலும் கடலில் பயணம் செய்கின்றன. இரு கப்பல்களிலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே $30^\circ$ மற்றும் $45^\circ$ ஆகும். கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 200 மீ எனில், இரு கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

**தீர்வு** கலங்கரை விளக்கம் $AB$ என்க. $C$ மற்றும் $D$ என்பன இரு கப்பல்கள் இருக்கும் இடங்கள் என்க.



படம் 6.15

மேலும், $AB = 200$ மீ.

$\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் $BAC$ -ல் $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{AC}$ இதிலிருந்து $AC = 200\sqrt{3}$ ...(1)

செங்கோண முக்கோணம் $BAD$ -ல் $\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD}$

$1 = \frac{200}{AD}$ இதிலிருந்து $AD = 200$ ...(2)

தற்போது, $CD = AC + AD = 200\sqrt{3} + 200$ [(1), (2) -லிருந்து]

$CD = 200(\sqrt{3} + 1) = 200 \times 2.732 = 546.4$

இரு கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 546.4 மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.22** தரையின்மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து 30 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடி மற்றும் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே $45^\circ$ மற்றும் $60^\circ$ எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

**தீர்வு** கோபுரத்தின் உயரம் $AC$ என்க. கட்டடத்தின் உயரம் $AB$ என்க.

மேலும் $AC = h$ மீ, $AB = 30$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் $CBP$–ல் $\angle CPB = 60^\circ$

$$\tan\theta = \frac{BC}{BP}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB+AC}{BP} \quad \text{இதிலிருந்து,} \quad \sqrt{3} = \frac{30+h}{BP} \qquad ...(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் $ABP$–ல், $\angle APB = 45^\circ$

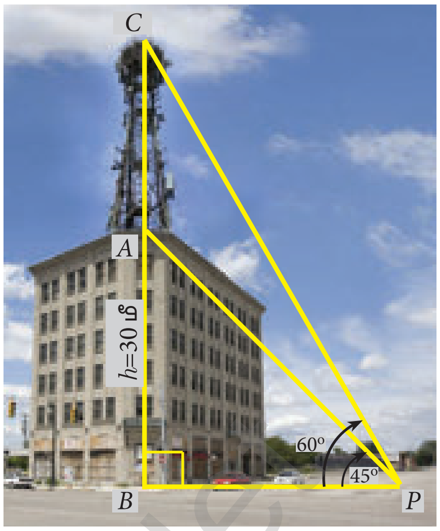
$$\tan\theta = \frac{AB}{BP}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{30}{BP} \quad \text{இதிலிருந்து,} \quad BP = 30 \qquad ...(2)$$

(2) -ஐ (1)–ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பது, $\sqrt{3} = \dfrac{30+h}{30}$

$$h = 30(\sqrt{3}-1) = 30(1.732-1) = 30(0.732) = 21.96$$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 21.96 மீ.




படம் 6.16

**எடுத்துக்காட்டு 6.23** ஒரு கால்வாயின் கரையில் ஒரு தொலைக்காட்சிக் கோபுரம் செங்குத்தாக உள்ளது. கால்வாயின் மறு கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து காணும்பொழுது கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $58^\circ$ ஆக உள்ளது. அப்புள்ளியிலிருந்து விலகி ஒரே நேர்க்கோட்டில் 20 மீ தொலைவில் சென்றவுடன் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $30^\circ$ எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தையும், கால்வாயின் அகலத்தையும் காண்க. ($\tan 58^\circ = 1.6003$)

**தீர்வு** தொலைக்காட்சிக் கோபுரத்தின் உயரம் $AB$ என்க.

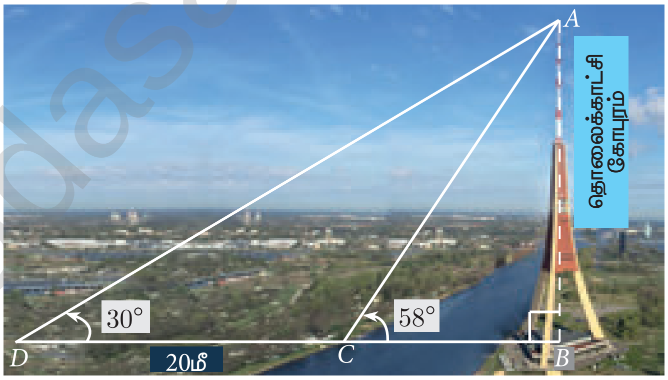
கால்வாயின் அகலம் $BC$ என்க.

இங்கு, $CD = 20$ மீ.

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$ – ல்

$$\tan 58^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1.6003 = \frac{AB}{BC} \qquad ...(1)$$




படம் 6.17

செங்கோண முக்கோணம் $ABD$ – ல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC+CD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC+20} \qquad ...(2)$$

(1)-ஐ (2) -ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது $\dfrac{1.6003}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{BC+20}{BC}$

$$BC = \frac{20}{1.7717} = 11.29\text{ மீ} \qquad ...(3)$$

$$1.6003 = \frac{AB}{11.29} \text{ [ (1), (3) –லிருந்து]}$$

$$AB = 18.07$$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 18.07 மீ கால்வாயின் அகலம் = 11.29 மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6.24** ஒரு விமானம் G–யிலிருந்து $24°$ கோணத்தைத் தாங்கி 250 கி.மீ தொலைவிலுள்ள $H$–ஐ நோக்கிச் செல்கிறது. மேலும் $H$-லிருந்து $55°$ கோணத்தை தாங்கி 180 கி.மீ தொலைவிலுள்ள $J$–ஐ நோக்கிச் செல்கிறது எனில்,

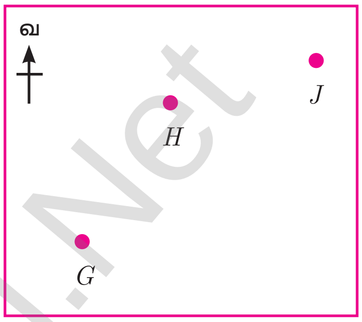
(i) $G$-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து $H$–ன் தொலைவு என்ன?

(ii) $G$-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து $H$-ன் தொலைவு என்ன?

(iii) $H$-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து $J$-ன் தொலைவு என்ன?

(iv) $H$-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து $J$-ன் தொலைவு என்ன?

$$\begin{pmatrix} \sin 24° = 0.4067 & \sin 11° = 0.1908 \\ \cos 24° = 0.9135 & \cos 11° = 0.9816 \end{pmatrix}$$




படம் 6.18 (i)

**தீர்வு**

(i) செங்கோண முக்கோணம் $GOH$-ல் $\cos 24° = \dfrac{OG}{GH}$

$0.9135 = \dfrac{OG}{250}$; $OG = 228.38$ கி.மீ

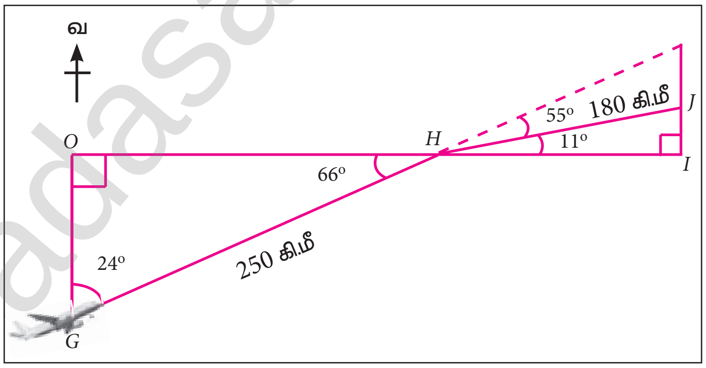
$G$-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து $H$-ன் தொலைவு $= 228.38$ கி.மீ.

(ii) செங்கோண முக்கோணம் $GOH$-ல்,

$\sin 24° = \dfrac{OH}{GH}$

$0.4067 = \dfrac{OH}{250}$ ; $OH = 101.68$

$G$-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து $H$-ன் தொலைவு $= 101.68$ கி.மீ.




படம் 6.18 (ii)

(iii) செங்கோண முக்கோணம் $HIJ$-ல்,

$\sin 11° = \dfrac{IJ}{HJ}$

$0.1908 = \dfrac{IJ}{180}$; $IJ = 34.34$ கி.மீ

$H$-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து $J$-ன் தொலைவு $= 34.34$ கி.மீ.

(iv) செங்கோண முக்கோணம் $HIJ$,

$\cos 11° = \dfrac{HI}{HJ}$

$0.9816 = \dfrac{HI}{180}$; $HI = 176.69$ கி.மீ

$H$-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து $J$-ன் தொலைவு $= 176.69$ கி.மீ.

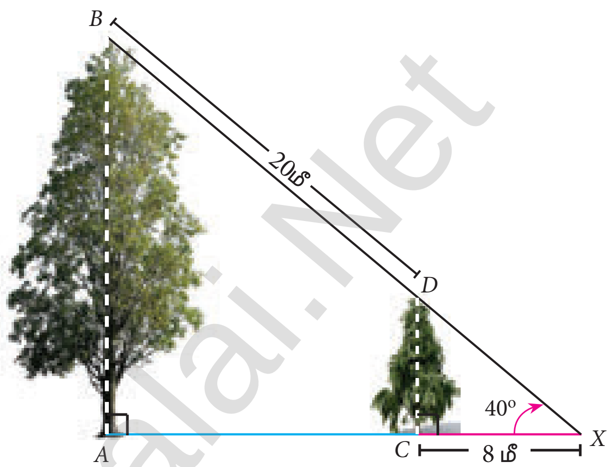
**எடுத்துக்காட்டு 6.25** படம் 6.19 -ல் உள்ளவாறு ஒரு சமதளத் தரையில் இரண்டு மரங்கள் உள்ளன. தரையில் உள்ள $X$ என்ற புள்ளியிலிருந்து இரு மர உச்சிகளின் ஏற்றக்கோணமும் $40°$ ஆகும்.

புள்ளி $X$ –லிருந்து சிறிய மரத்திற்கான கிடைமட்டத் தொலைவு 8 மீ மற்றும் இரண்டு மரங்களின் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு 20 மீ எனில்,

(i) புள்ளி $X$–க்கும் சிறிய மரத்தின் உச்சிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு

(ii) இரண்டு மரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு $(\cos 40^\circ = 0.7660)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** பெரிய மரத்தின் உயரம் $AB$ என்க. சிறிய மரத்தின் உயரம் $CD$ என்க. தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி $X$ என்க.



படம் 6.19

(i) செங்கோண முக்கோணம் $XCD$ -ல்

$$\cos 40^\circ = \frac{CX}{XD}$$

$$XD = \frac{8}{0.7660} = 10.44 \text{ மீ}$$

எனவே, புள்ளி $X$ -க்கும் சிறிய மரத்தின் உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு

$$XD = 10.44 \text{ மீ}$$

(ii) செங்கோண முக்கோணம் $XAB$ -ல்

$$\cos 40^\circ = \frac{AX}{BX} = \frac{AC+CX}{BD+DX}$$

$$0.7660 = \frac{AC+8}{20+10.44}$$ இதிலிருந்து $AC = 23.32 - 8 = 15.32$ மீ

இரண்டு மரங்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு $AC = 15.32$ மீ.

### சிந்தனைக் களம்

1. உயரங்களையும், தொலைவுகளையும் கணக்கிடுவதற்கு எந்த வகையான முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்?
2. கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்குமிடையே உள்ள தொலைவு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அதன் ஏற்றக்கோணம் காண்பதற்கு எந்த முக்கோணவியல் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்?
3. பார்வைக்கோட்டின் நீளம் மற்றும் ஏற்றக்கோணம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,
   (i) கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்பதற்கும்
   (ii) கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து பார்க்கும் இடத்திற்குமிடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்பதற்கும்

   எந்த முக்காணவியல் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

### பயிற்சி 6.2

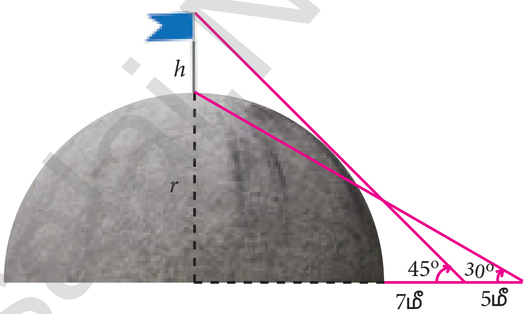
1. $10\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 30 மீ தொலைவில் தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணத்தைக் காண்க.

2. ஒரு சாலையின் இருபுறமும் இடைவெளியே இல்லாமல் வரிசையாக வீடுகள் தொடர்ச்சியாக உள்ளன. அவற்றின் உயரம் $4\sqrt{3}$ மீ. பாதசாரி ஒருவர் சாலையின் மையப் பகுதியில் நின்றுகொண்டு வரிசையாக உள்ள வீடுகளை நோக்குகிறார். $30^\circ$ ஏற்றக்கோணத்தில் பாதசாரி வீட்டின் உச்சியை நோக்குகிறார் எனில், சாலையின் அகலத்தைக் காண்க.

3. ஒருவர் அவருடைய வீட்டிற்கு வெளியில் நின்றுகொண்டு ஒரு ஜன்னலின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றை முறையே $60^\circ$ மற்றும் $45^\circ$ ஆகிய ஏற்றக்கோணங்களில் காண்கிறார். அவரின் உயரம் 180 செ.மீ. மேலும் வீட்டிலிருந்து 5 மீ தொலைவில் அவர் உள்ளார் எனில், ஜன்னலின் உயரத்தைக் காண்க $(\sqrt{3} = 1.732)$.

4. 1.6 மீ உயரமுள்ள சிலை ஒன்று பீடத்தின் மேல் அமைந்துள்ளது. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து $60^\circ$ ஏற்றக்கோணத்தில் சிலையின் உச்சி அமைந்துள்ளது. மேலும் அதே புள்ளியிலிருந்து பீடத்தின் உச்சியானது $40^\circ$ ஏற்றக்கோணத்தில் உள்ளது எனில், பீடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\tan 40^\circ = 0.8391,\ \sqrt{3} = 1.732)$

5. '$r$' மீ ஆரம் கொண்ட அரைக் கோளக் குவிமாடத்தின் மீது '$h$' மீ உயரமுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பம் நிற்கிறது. குவிமாடத்தின் அடியிலிருந்து 7 மீ தொலைவில் ஒருவர் நிற்கிறார். அவர் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சியை $45^\circ$ ஏற்றக் கோணத்திலும் நிற்குமிடத்திலிருந்து மேலும் 5 மீ தொலைவு விலகிச் சென்று கொடிக்கம்பத்தின் அடியை $30^\circ$ ஏற்றக் கோணத்திலும் பார்க்கிறார் எனில், (i) கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் (ii) அரைக் கோளக் குவிமாடத்தின் ஆரம் ஆகியவற்றைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$




6. 15 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரம் உள்ளது. ஒரு மின் கம்பத்தின் அடி மற்றும் உச்சியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியை முறையே $60^\circ$, $30^\circ$ என்ற ஏற்றக்கோணங்களில் பார்த்தால் மின் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

7. தரையில் உள்ள ஒரு செங்குத்து கம்பம் $1:9$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. மேற்பகுதியைக் காட்டிலும் கீழ்ப்பகுதி குறைவாக உள்ளது. கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 25 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, கம்பத்தின் மேல் பகுதியின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் அதன் கீழ்ப்பகுதியின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைப்போல இருமடங்காக இருந்தால் கம்பத்தின் உயரம் என்ன?

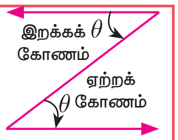
8. ஒரு பயணி மலையை நோக்கி நெடுஞ்சாலையில் பயணிக்கிறார். ஒவ்வொரு மைல் கல்லிலிருந்தும் மலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணத்தை அளவிடுகிறார். இரண்டு தொடர்ச்சியான மைல் கல்லில் இருந்து மலை உச்சிக்கு ஏற்படும் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே $4^\circ$ மற்றும் $8^\circ$ எனவும், இரண்டு மைல்கற்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 1 மைல் என இருந்தால் மலையின் உயரத்தைக் காண்க $(\tan 4^\circ = 0.0699,\quad \tan 8^\circ = 0.1405)$.

### 6.3.2 இறக்கக் கோணக் கணக்குகள் (Problems involving Angle of Depression)

இந்தப் பாடப்பகுதியில், இறக்கக் கோணங்களைக் கொண்டு கொடுக்கப் பட்டுள்ள கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் முறையை அறிவோம்.

**குறிப்பு**

- ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக் கோணமும் ஒன்றுவிட்ட கோணமாக இருப்பதால் அவை இரண்டும் சமமாக இருக்கும்.



படம் 6.20

**எடுத்துக்காட்டு 6.26** 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியில் ஒரு விளையாட்டு வீரர் அமர்ந்துகொண்டு தரையிலுள்ள ஒரு பந்தை $60^\circ$ இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார் எனில், கட்டட அடிப்பகுதிக்கும் பந்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

**தீர்வு** கட்டடத்தின் உயரம் $BC$ என்க. தரையில் பந்து இருக்கும் இடத்தை $A$ என்க. $BC = 20$ மீ, மேலும் $\angle XCA = 60^\circ = \angle CAB$

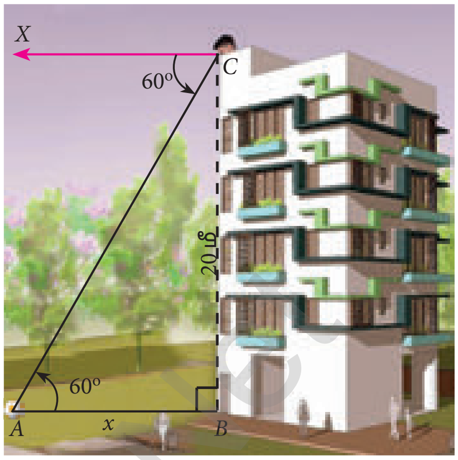
$AB = x$ மீ என்க.

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$ – ல்

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{20\times 1.732}{3} = 11.55 \text{ மீ}$$



படம் 6.21

எனவே, கட்டடத்தின் அடிக்கும் பந்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு = 11.55 மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6.27** இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு 140 மீ. இரண்டாவது கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $30^\circ$ ஆகும். முதல் கட்டடத்தின் உயரம் 60 மீ எனில் இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

**தீர்வு** முதல் கட்டடத்தின் உயரம் $AB = 60$ மீ, மேலும் $AB = MD = 60$ மீ

இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் $CD = h$ என்க.

தொலைவு $BD = 140$ மீ

மேலும், $AM = BD = 140$ மீ

படத்திலிருந்து $\angle XCA = 30^\circ = \angle CAM$

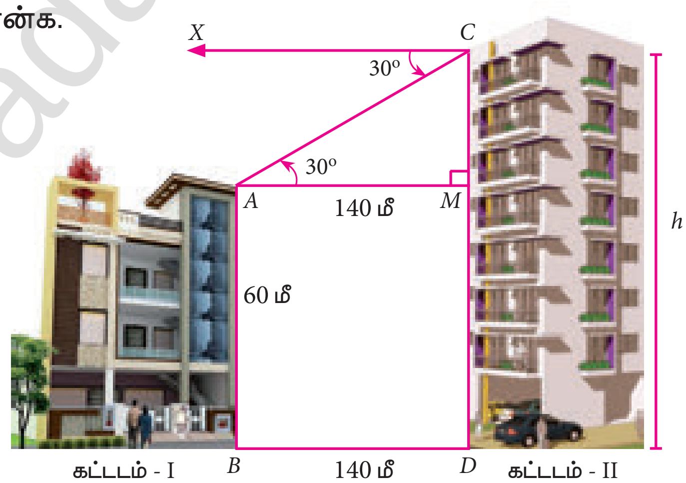
செங்கோண முக்கோணம் $AMC$–ல்

$$\tan 30^\circ = \frac{CM}{AM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{140}$$

$$CM = \frac{140}{\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{140\times 1.732}{3} = 80.83$$



படம் 6.22

மேலும் $h = CD = CM + MD = 80.83 + 60 = 140.83$ மீ

ஆகவே, இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் 140.83 மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.28** 50 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $30^\circ$ மற்றும் $45^\circ$ எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

**தீர்வு** கோபுரத்தின் உயரம் $AB = 50$ மீ

மரத்தின் உயரம் $CD = y$ மற்றும் $BD = x$ என்க.

படத்திலிருந்து, $\angle XAC = 30^\circ = \angle ACM$ மற்றும் $\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$

செங்கோண முக்கோணம் $ABD$–ல்

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$1 = \frac{50}{x}$$ இதிலிருந்து $x = 50$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் $AMC$ – ல்

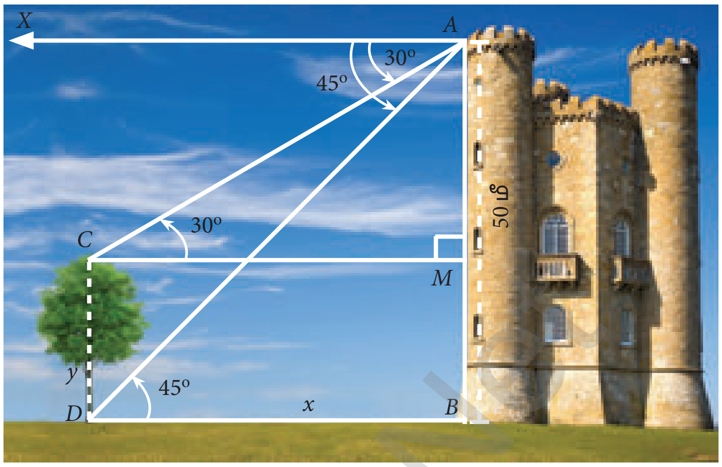
$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{CM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{50}$$ $[DB = CM$ என்பதால்$]$

$$AM = \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{50 \times 1.732}{3} = 28.87 \text{ மீ.}$$

$$CD = MB = AB - AM = 50 - 28.87 = 21.13$$

எனவே, மரத்தின் உயரம் 21.13 மீ ஆகும்.




படம் 6.23

**எடுத்துக்காட்டு 6.29** 60 மீ உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவர் கடல்மட்டத்திலுள்ள இரு கப்பல்களை முறையே $28^\circ$ மற்றும் $45^\circ$ இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கிறார். ஒரு கப்பல் மற்றொரு கப்பலுக்குப் பின்னால் ஒரே திசையில் கலங்கரை விளக்கத்துடன் நேர்கோட்டில் உள்ளது எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. $(\tan 28^\circ = 0.5317)$

**தீர்வு** கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் $CD$ என்க.

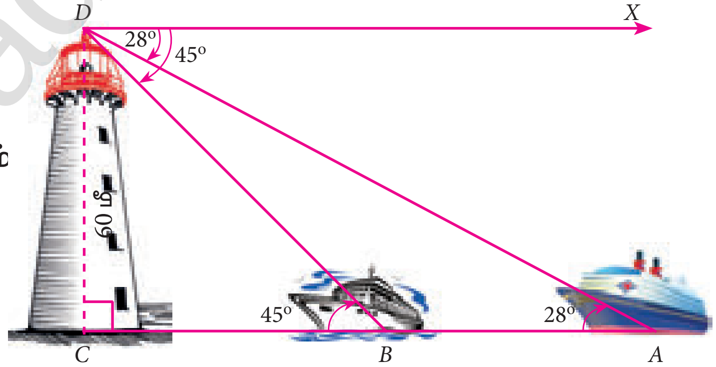
$D$ என்பது உற்று நோக்குபவர் இருக்கும் இடம் என்க.

கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் $CD = 60$ மீ

படத்திலிருந்து,

$$\angle XDA = 28^\circ = \angle DAC$$ மற்றும்

$$\angle XDB = 45^\circ = \angle DBC$$




படம் 6.24

செங்கோண முக்கோணம் $DCB$–ல், $\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$

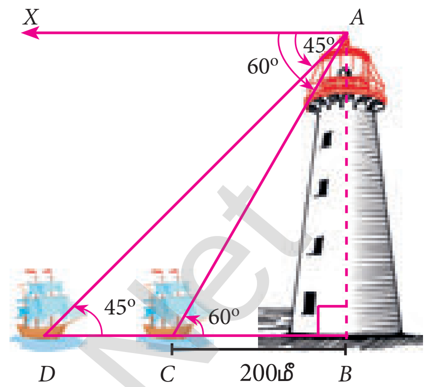
$$1 = \frac{60}{BC}$$ இதிலிருந்து $BC = 60$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் $DCA$-ல், $\tan 28^\circ = \frac{DC}{AC}$

$$0.5317 = \frac{60}{AC}$$ இதிலிருந்து $AC = \frac{60}{0.5317} = 112.85$

இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடையேயான தொலைவு $AB = AC - BC = 52.85$ மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6.30** ஒருவர், கோபுரத்திலிருந்து விலகி கடலில் சென்று கொண்டிருக்கும் படகு ஒன்றை, கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கிறார். கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து $200$ மீ தொலைவில் படகு இருக்கும்போது, படகை அவர் $60°$ இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார். $10$ வினாடிகள் கழித்து இறக்கக்கோணம் $45°$ ஆக மாறுகிறது எனில், படகு செல்லும் வேகத்தினைத் (கி.மீ/மணியில்) தோராயமாகக் கணக்கிடுக. மேலும் படகு நிலையான தண்ணீரில் செல்கிறது எனக் கருதுக. $(\sqrt{3} = 1.732)$



படம் 6.25

**தீர்வு** $AB$ என்பது கோபுரம் என்க.

$C$ மற்றும் $D$ என்பன படகு இருக்கும் நிலைகள் என்க.

படத்திலிருந்து,

$\angle XAC = 60° = \angle ACB$ மற்றும்

$\angle XAD = 45° = \angle ADB$, $BC = 200$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$ -ல் $\tan 60° = \dfrac{AB}{BC}$

$\sqrt{3} = \dfrac{AB}{200}$ இதிலிருந்து $AB = 200\sqrt{3}$ ...(1)

செங்கோண முக்கோணம் $ABD$ -ல்

$\tan 45° = \dfrac{AB}{BD}$ இதிலிருந்து, $1 = \dfrac{200\sqrt{3}}{BD}$ [(1) ... லிருந்து]

எனவே, $BD = 200\sqrt{3}$

இப்போது, $CD = BD - BC$

$$CD = 200\sqrt{3} - 200 = 200(\sqrt{3} - 1) = 146.4$$

$CD$ என்ற தொலைவை பயணிக்கத் தேவைப்படும் நேரம் $10$ வினாடிகள், எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது, $146.4$ மீ தொலைவை $10$ வினாடிகளில் படகு கடக்கிறது.

எனவே, படகின் வேகம் $= \dfrac{\text{தொலைவு}}{\text{காலம்}}$

$= \dfrac{146.4}{10} = 14.64$ மீ/வி. இதிலிருந்து $14.64 \times \dfrac{3600}{1000}$ கி.மீ/மணி $= 52.704$ கி.மீ/மணி.

## பயிற்சி 6.3

1. $50\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள ஒரு பாறையின் உச்சியிலிருந்து $30°$ இறக்கக்கோணத்தில் தரையிலுள்ள மகிழுந்து ஒன்று பார்க்கப்படுகிறது எனில், மகிழுந்திற்கும் பாறைக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.
2. இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு $70$ மீ ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $45°$ ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் $120$ மீ எனில் முதல் கட்டடத்தின் உயர்தைக் காண்க.
3. $60$ மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்தாக உள்ள ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $38°$ மற்றும் $60°$ எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\tan 38° = 0.7813, \ \sqrt{3} = 1.732)$

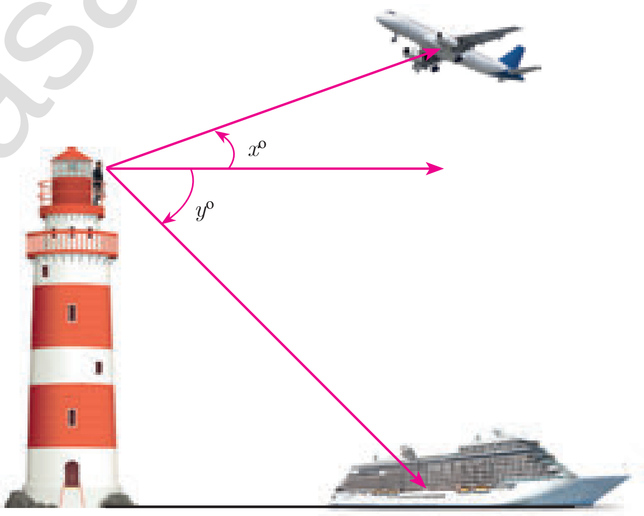
4. 1800 மீ உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு விமானத்திலிருந்து ஒரே திசையில் விமானத்தை நோக்கிச் செல்லும் இரு படகுகள் பார்க்கப்படுகிறது. விமானத்திலிருந்து இரு படகுகளை முறையே $60^\circ$ மற்றும் $30^\circ$ இறக்கக்கோணங்களில் உற்று நோக்கினால், இரண்டு படகுகளுக்கும் இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

5. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள இரண்டு கப்பல்கள் $30^\circ$ மற்றும் $60^\circ$ இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கப்படுகின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் $h$ மீ. இரு கப்பல்கள் மற்றும் கலங்கரை விளக்கத்தின் அடிப்பகுதி ஆகியவை ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\dfrac{4h}{\sqrt{3}}$ மீ என நிரூபிக்க.

6. 90 அடி உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலிருந்து ஒளி ஊடுருவும் கண்ணாடிச் சுவர் கொண்ட மின் தூக்கியானது கீழ் நோக்கி வருகிறது. கட்டடத்தின் உச்சியில் மின் தூக்கி இருக்கும்போது பூந்தோட்டத்தில் உள்ள ஒரு நீரூற்றின் இறக்கக்கோணம் $60^\circ$ ஆகும். இரண்டு நிமிடம் கழித்து அதன் இறக்கக்கோணம் $30^\circ$ ஆக குறைகிறது. மின்தூக்கியின் நுழைவு வாயிலிருந்து நீரூற்று $30\sqrt{3}$ அடி தொலைவில் உள்ளது எனில் மின்தூக்கி கீழே வரும் வேகத்தைக் காண்க.

### 6.3.3 ஏற்றக்கோணமும் இறக்கக்கோணமும் கொண்ட கணக்குகள் (Problems involving Angle of Elevation and Depression)

பின்வரும் சூழ்நிலையைக் கருத்தில் கொள்வோம். கடற்கரையில் அமைந்துள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின்மீது ஒருவர் நின்றுகொண்டு வானில் பறந்து கொண்டிருக்கின்ற விமானத்தைப் பார்க்கிறார். அதே வேளையில், கடலில் சென்று கொண்டிருக்கின்ற கப்பல் ஒன்றையும் பார்க்கிறார். அவர் விமானத்தை ஏற்றக்கோணத்திலும், கப்பலை இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார். இந்த எடுத்துக் காட்டிலிருந்து ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக் கோணம் ஒரே சூழ்நிலையில் பயன்படுகிறது என்பதை அறிகிறோம்.



படம் 6.26

படம் 6.26 -ல் $x^o$ என்பது ஏற்றக்கோணம் மற்றும் $y^\circ$ என்பது இறக்கக்கோணம் ஆகும்.

இந்தப் பகுதியில் ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக்கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அவ்வகைக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண முயல்வோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 6.31** 12 மீ உயரமுள்ள கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து மின்சாரக் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $60^\circ$ மற்றும் அதன் அடியின் இறக்கக்கோணம் $30^\circ$ எனில், மின்சாரக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க

**தீர்வு** படம் 6.27 -ல் $AO$ என்பது கட்டடம். $O$ என்பது கட்டடத்தின் உச்சிப் புள்ளி என்க. மேலும், $OA = 12$ மீ.

$PP'$ என்பது மின்சாரக் கோபுரம். இதில் $P$ என்பது மின் கோபுரத்தின் உச்சி, $P'$ என்பது மின் கோபுரத்தின் அடி.





X_Ch 6 TM.indd 271 16-04-2019 10:15:26

$P$-யின் ஏற்றக்கோணம் $\angle MOP = 60^\circ$ மற்றும்

$P'$ -ன் இறக்கக்கோணம் $\angle MOP' = 30^\circ$

மின் கோபுரத்தின் உயரம் $PP' = h$ மீ என்க.

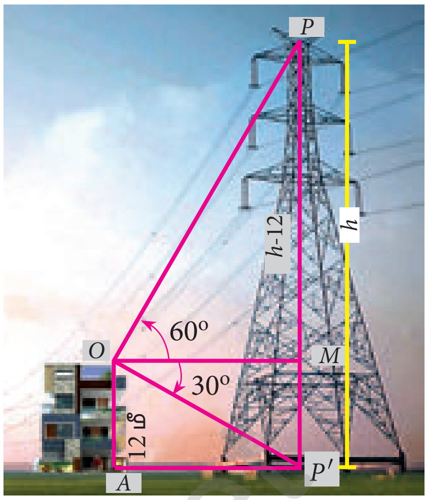
$O$ வழியாக $OM \perp PP'$ வரைக.

$MP = PP' - MP' = h - OA = h - 12$

செங்கோண முக்கோணம் $OMP$-ல் $\frac{MP}{OM} = \tan 60^\circ$

எனவே, $\frac{h-12}{OM} = \sqrt{3}$

ஆகவே, $OM = \frac{h-12}{\sqrt{3}}$ ...(1)



படம் 6.27

செங்கோண முக்கோணம் $OMP'$ –ல் $\frac{MP'}{OM} = \tan 30^\circ$

எனவே, $\frac{12}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ஆகவே, $OM = 12\sqrt{3}$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நாம் பெறுவது $\frac{h-12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

எனவே, $h - 12 = 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ஆகவே, $h = 48$

எனவே, மின் கோபுரத்தின் உயரம் = 48 மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6.32** ஒரு கோபுர உச்சியின் மீது 5 மீ உயரமுள்ள கம்பம் பொருத்தி வைக்கப் பட்டுள்ளது. தரையில் உள்ள '$A$' என்ற புள்ளியிலிருந்து கம்பத்தின் உச்சியை $60^\circ$ ஏற்றக்கோணத்திலும், கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து '$A$' என்ற புள்ளியை $45^\circ$ இறக்கக் கோணத்திலும் பார்த்தால், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

**தீர்வு** கோபுரத்தின் உயரம் $BC$ என்க. கம்பத்தின் உயரம் $CD$ எனக் கொள்க.

உற்று நோக்குப் புள்ளி $A$ என்க

மேலும் $BC = x$ மற்றும் $AB = y$ என்க.

படத்தில் ,

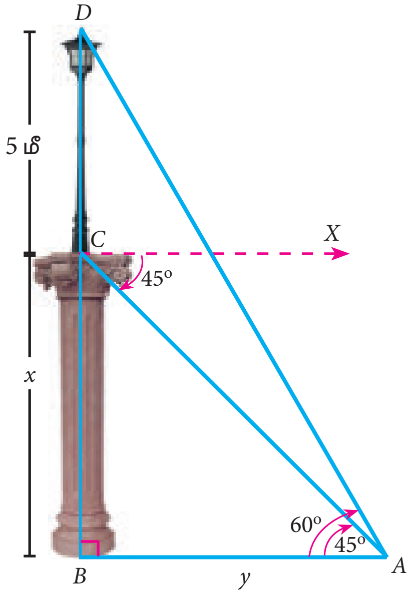
$\angle BAD = 60^\circ$ மற்றும் $\angle XCA = 45^\circ = \angle BAC$

செங்கோண முக்கோணம் $ABC$ –ல் $\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}$

எனவே, $1 = \frac{x}{y}$ ஆகவே, $x = y$ ...(1)

செங்கோண முக்கோணம் $ABD$ –ல்

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{BC + CD}{AB}$$



படம் 6.28

$$\sqrt{3} = \frac{x+5}{y} \quad , \sqrt{3}\,y = x+5$$

எனவே, $\sqrt{3}\;x = x+5$ [ (1) -லிருந்து]

ஆகவே, $x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5(1.732+1)}{2} = 6.83$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 6.83 மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6.33** ஒரு தெருவில் உள்ள ஒரு வீட்டின் சன்னலிலிருந்து, (சன்னல் தரைக்கு மேல் $h$ மீ உயரத்தில் உள்ளது) தெருவின் எதிர்ப் பக்கத்தில் உள்ள மற்றொரு வீட்டின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக்கோணம், இறக்கக்கோணம் முறையே $\theta_1$ மற்றும் $\theta_2$ எனில், எதிர்ப்பக்கத்தில் அமைந்த வீட்டின் உயரம் $h\left(1+\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ என நிரூபிக்க.

**தீர்வு** படத்தில் $W$ என்பது சன்னலிலுள்ள ஒரு புள்ளி என்க. இப்புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக்கோணமும் கணக்கிடப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். $PQ$ என்பது எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ள வீடு என்க.

$WA$ என்பது சன்னலிலிருந்து வீட்டிற்கு உள்ள தொலைவாகும்.

சன்னலின் உயரம் = $h = AQ\ (WR = AQ)$

$PA = x$ மீ என்க.

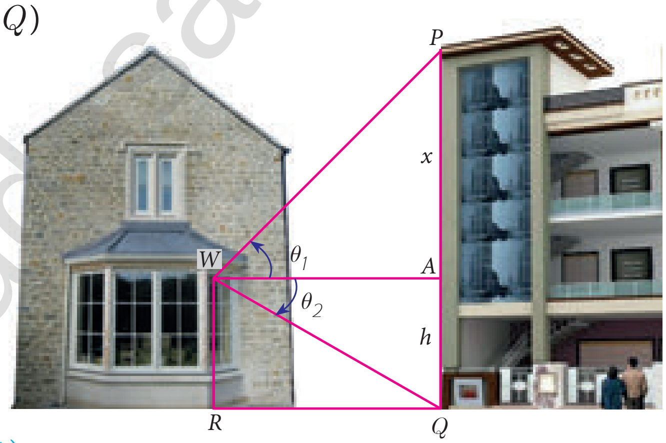
செங்கோண முக்கோணம் $PAW$ –ல்

$$\tan\theta_1 = \frac{AP}{AW}$$

எனவே $$\tan\theta_1 = \frac{x}{AW}$$

இதிலிருந்து , $$AW = \frac{x}{\tan\theta_1}$$

ஆகவே , $$AW = x\cot\theta_1 \quad ...(1)$$



படம் 6.29

செங்கோண முக்கோணம் $QAW$ –ல் $\tan\theta_2 = \frac{AQ}{AW}$

எனவே $$\tan\theta_2 = \frac{h}{AW}$$

$$AW = h\cot\theta_2 \quad ...(2)$$

**சிந்தனைக் களம்**

உயரம், தொலைவு மற்றும் ஏற்றக்கோணம் காண்பதற்குக் குறைந்தது எத்தனை அளவுகள் தேவை?

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது, $x\cot\theta_1 = h\cot\theta_2$

இதிலிருந்து, $$x = h\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}$$

ஆகவே, எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ள வீட்டின் உயரம்

$$= PA+AQ = x+h = h\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1} + h = h\left(1+\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. உற்றுநோக்குபவரின் கண்ணிலிருந்து பொருளின் ஒரு புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோடு __________ ஆகும்.
2. ஒரு பொருளை உற்றுநோக்கும்போது கிடைமட்டக் கோட்டிற்கும் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் எக்கருவி மூலம் அளவிடப்படுகிறது?
3. பார்வைக் கோடானது கிடைமட்டக் கோட்டிற்கு மேலே இருக்கும்போது ஏற்படும் கோணம் __________ ஆகும்.
4. செங்குத்தாக உள்ள ஒரு பொருளின் (கோபுரம்) அடியை நோக்கிச் செல்லும்போது அதன் ஏற்றக்கோணம் __________.
5. பார்வைக்கோடானது கிடைமட்டக் கோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்போது ஏற்படும் கோணம் __________ ஆகும்

## பயிற்சி 6.4

1. 13 மீ உயரமுள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருந்து மற்றொரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே $45^\circ$ மற்றும் $30^\circ$ எனில், இரண்டாவது மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

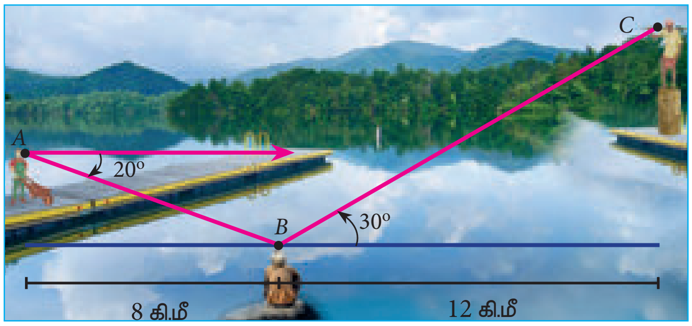
2. கடலின் நீர் மட்டத்திலிருந்து 40 மீட்டருக்கு மேலே உள்ள ஒரு கப்பலின் மேல் பகுதியில் நின்று கொண்டிருக்கிற ஒருவர், குன்றின் உச்சியை $60^\circ$ எற்றக்கோணத்திலும் அடிப்பகுதியை $30^\circ$ இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில், கப்பலிலிருந்து குன்றுக்கு உள்ள தொலைவையும், குன்றின் உயரத்தையும் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

3. ஏரியின் நீர் மட்டத்திலிருந்து $h$ மீ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மேகத்தின் ஏற்றக்கோணம் $\theta_1$ மற்றும் ஏரி நீரில் விழும் மேகப் பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் $\theta_2$ எனில், தரையிலிருந்து மேகத்தின் உயரம் $\dfrac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ என நிரூபிக்கவும்

4. உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் அடியிலிருந்து அலைபேசி கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $60^\circ$ மற்றும் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து கோபுர அடியின் இறக்கக்கோணம் $30^\circ$ ஆகும். அடுக்குமாடி குடியிருப்பின் உயரம் 50 மீ எனில் அலைபேசிக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. கதிர்வீச்சுக் கட்டுப்பாடு விதியின்படி அலைபேசிக் கோபுரத்தின் குறைந்தபட்ச உயரம் 120 மீ இருக்க வேண்டும். மேற்கண்ட அலைக்கோபுரம் இந்தக் கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்படுகிறதா?

5. 66 மீ உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே $60^\circ$, $30^\circ$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (i) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம்.
   (ii) விளக்குக் கம்ப உயரத்திற்கும் அடுக்குமாடியின் உயரத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.
   (iii) விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு. $(\sqrt{3} = 1.732)$

6. $A$, $B$ மற்றும் $C$ என்ற மூன்று கிராமவாசிகள் ஒரு பள்ளத்தாக்கில் ஒருவருக்கொருவர் பார்க்குமாறு உள்ளனர். $A$–க்கும், $B$–க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 8 கி.மீ மற்றும் $B$–க்கும், $C$–க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 12 கி.மீ. $A$-லிருந்து $B$-க்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $20^\circ$ மற்றும் $B$–லிருந்து $C$–க்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் $30^\circ$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக. (i) $A$-க்கும் $B$–க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம். (ii) $B$–க்கும் $C$–க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம். $(\tan 20^\circ = 0.3640,\ \sqrt{3} = 1.732)$




## பயிற்சி 6.5


### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ –ன் மதிப்பு

(1) $\tan^2\theta$ (2) 1 (3) $\cot^2\theta$ (4) 0

2. $\tan\theta \operatorname{cosec}^2\theta - \tan\theta$ –ன் மதிப்பு

(1) $\sec\theta$ (2) $\cot^2\theta$ (3) $\sin\theta$ (4) $\cot\theta$

3. $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ எனில் $k$ –ன் மதிப்பு

(1) 9 (2) 7 (3) 5 (4) 3

4. $\sin\theta + \cos\theta = a$ மற்றும் $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = b$ எனில் $b(a^2-1)$ –ன் மதிப்பு

(1) $2a$ (2) $3a$ (3) 0 (4) $2ab$

5. $5x = \sec\theta$ மற்றும் $\dfrac{5}{x} = \tan\theta$ எனில் $x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ –ன் மதிப்பு

(1) 25 (2) $\dfrac{1}{25}$ (3) 5 (4) 1

6. $\sin\theta = \cos\theta$ எனில் $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ –ன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{-3}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{2}{3}$ (4) $\dfrac{-2}{3}$

7. $x = a\tan\theta$ மற்றும் $y = b\sec\theta$ எனில்

(1) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

8. $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ –ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $-1$

9. $a\cot\theta + b\operatorname{cosec}\theta = p$ மற்றும் $b\cot\theta + a\operatorname{cosec}\theta = q$ எனில் $p^2 - q^2$ –ன் மதிப்பு

(1) $a^2-b^2$ (2) $b^2-a^2$ (3) $a^2+b^2$ (4) $b-a$

10. ஒரு கோபுரத்தின் உயரத்திற்கும் அதன் நிழலின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $\sqrt{3}:1$, எனில் சூரியனைக் காணும் ஏற்றக்கோண அளவானது

(1) $45^\circ$ (2) $30^\circ$ (3) $90^\circ$ (4) $60^\circ$

11. ஒரு மின் கம்பமானது அதன் அடியில் சமதளப் பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் $30^\circ$ கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. முதல் புள்ளிக்கு '$b$' மீ உயரத்தில் உள்ள இரண்டாவது புள்ளியிலிருந்து மின்கம்பத்தின் அடிக்கு இறக்கக்கோணம் $60^\circ$ எனில் மின் கம்பத்தின் உயரமானது

(1) $\sqrt{3}\, b$ (2) $\frac{b}{3}$ (3) $\frac{b}{2}$ (4) $\frac{b}{\sqrt{3}}$

12. ஒரு கோபுரத்தின் உயரம் 60 மீ ஆகும். சூரியனை காணும் ஏற்றக்கோணம் $30^\circ$ –லிருந்து $45^\circ$ ஆக உயரும்போது கோபுரத்தின் நிழலானது $x$ மீ குறைகிறது எனில், $x$–ன் மதிப்பு

(1) 41.92 மீ (2) 43.92 மீ (3) 43 மீ (4) 45.6 மீ

13. பல அடுக்குக் கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $30^\circ$ மற்றும் $60^\circ$ எனில் பல அடுக்குக் கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் இரு கட்டடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது (மீட்டரில்)

(1) $20,\ 10\sqrt{3}$ (2) $30,\ 5\sqrt{3}$ (3) $20,\ 10$ (4) $30,\ 10\sqrt{3}$

14. இரண்டு நபர்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $x$ மீ ஆகும். முதல் நபரின் உயரமானது இரண்டாவது நபரின் உயரத்தைப் போல இரு மடங்காக உள்ளது. அவர்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு நேர்கோட்டின் மையப் புள்ளியிலிருந்து இரு நபர்களின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் நிரப்புக்கோணங்கள் எனில், குட்டையாக உள்ள நபரின் உயரம் (மீட்டரில்) காண்க.

(1) $\sqrt{2}\, x$ (2) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ (3) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (4) $2x$

15. ஓர் ஏரியின் மேலே $h$ மீ உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து மேகத்திற்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் $\beta$. மேக பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் $45^\circ$ எனில், ஏரியில் இருந்து மேகத்திற்கு உள்ள உயரமானது

(1) $\frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$ (2) $\frac{h(1-\tan\beta)}{1+\tan\beta}$ (3) $h\tan(45^\circ-\beta)$ (4) இவை ஒன்றும் இல்லை

## அலகு பயிற்சி - 6

1. நிரூபிக்கவும் (i) $\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)=0$ (ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta$

2. $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்

3. $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta$ மற்றும் $x\sin\theta=y\cos\theta$ எனில் $x^2+y^2=1$ என நிரூபிக்கவும்.

4. $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ எனில் $(a\sin\theta+b\cos\theta)=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

5. 80 மீ உயரமுள்ள மரத்தின் உச்சியில் ஒரு பறவை இருக்கிறது. தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் $45°$. பறவை ஒரே உயரத்தில் கிடைமட்டத்தில் பறந்து செல்கிறது. 2 வினாடிகள் கழித்து அதே புள்ளியிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் $30°$ எனில், பறவை பறக்கும் வேகத்தினைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

6. விமானம் ஒன்று புவிப் பரப்பிற்கு இணையாக 600 மீ உயரத்தில் 175 மீ/வி வேகத்தில் செல்கிறது. புவியின் மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து விமானத்திற்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் $37°$ ஆகும். அதே புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக்கோணம் $53°$-க்கு அதிகரிக்க எவ்வளவு நேரம் தேவைப்படும்? $(\tan 53° = 1.3270,\ \tan 37° = 0.7536)$

7. ஒரு பறவை $A$ என்ற இடத்திலிருந்து 30 கி.மீ தொலைவில் $B$ என்ற இடத்திற்கு $35°$ கோணத்தில் பறக்கிறது. $B$-ல் $48°$ கோணத்தைத் தாங்கி 32 கி.மீ தொலைவில் உள்ள $C$ என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது,
(i) $A$ -ன் வடக்குப் புறமாக $B$-ன் தொலைவு எவ்வளவு?
(ii) $A$ -ன் மேற்குப் புறமாக $B$-ன் தொலைவு எவ்வளவு?
(iii) $B$ -ன் வடக்குப் புறமாக $C$-ன் தொலைவு எவ்வளவு?
(iv) $B$ -ன் கிழக்குப் புறமாக $C$-ன் தொலைவு எவ்வளவு?
$(\sin 55° = 0.8192,\ \cos 55° = 0.5736,\ \sin 42° = 0.6691,\ \cos 42° = 0.7431)$

8. கலங்கரை விளக்கம் இருக்கும் இடத்திலிருந்து கடலில் எதிரெதிர் திசையில் இரு கப்பல்கள் பயணம் செய்கின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து இரு கப்பல்களின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $60°$ மற்றும் $45°$. கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ மீ எனில், கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் காண்க.

9. ஒரு தெருவில் கட்டடமும், சிலையும் எதிரெதிர்த் திசையில் 35 மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து, சிலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $24°$ மற்றும் சிலை அடியின் இறக்கக்கோணம் $34°$ எனில், சிலையின் உயரம் என்ன? $(\tan 24° = 0.4452,\ \tan 34° = 0.6745)$

## நினைவில் கொள்ளவேண்டியவை

- முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கொண்ட சமன்பாடானது வரையறுக்கப்பட்ட கோணங்களின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் மெய்யெனில் அச்சமன்பாட்டை முக்கோணவியல் முற்றொருமை என்கிறோம்.
- முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்

  (i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$
- நாம் ஒரு பொருளை உற்றுநோக்கும்போது நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு வரையப்படும் நேர்கோடு பார்வைக்கோடு எனப்படும்.
- கிடைநிலைக் கோட்டிற்கு மேல் பொருள் இருக்கும்போது, பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைநிலைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ஏற்றக்கோணம் எனப்படும்.
- கிடைநிலைக் கோட்டிற்குக் கீழ் பொருள் இருக்கும்போது, பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைநிலைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக்கோணம் எனப்படும்.
- முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மூலம் பொருட்களின் உயரம் அல்லது நீளம் அல்லது பொருட்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் கணக்கிடலாம்.

## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

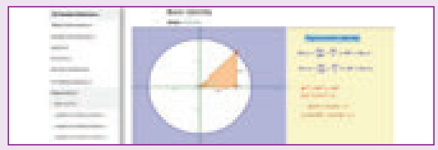
**ICT 6.1**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Trigonometry" பக்கத்திற்கு செல்க. "Basic identity" எனும் பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க.

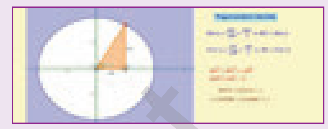
**படி 2:** பயிற்சி தாளில் B என்ற புள்ளியை மாற்றுவதன் மூலம், முக்கோணத்தை மாற்றி அமைக்கலாம்.

படி 1

படி 2



முடிவுகள்

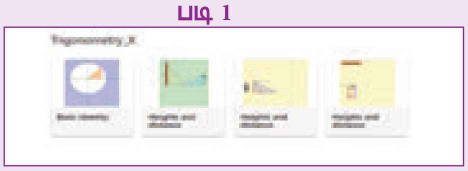


**ICT 6.2**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Trigonometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. "heights and distance problem–1" எனும் பயிற்சித் தாளை தேர்வு செய்க.

**படி 2:** "New problem" –ஐ click செய்வதன் மூலம் புதிய கணக்குகளைப் பெற முடியும். கணக்குகளை தீர்த்த பின் விடையை சரிபார்க்க.

படி 1



படி 2

முடிவுகள்

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356196

அல்லது விரைவுச் செயலியை ஸ்கேன் செய்யவும்

B371_10_MATHS_TM

7

# அளவியல்

*•அனைத்து இடங்களில் மையத்தைக் கொண்டு எல்லையில்லா சுற்றளவைக் கொண்ட முடிவற்ற கோளமே இயற்கையாகும்*

–பிளைஸ் பாஸ்கல்

**பாப்பஸ்**
290 – 350 கிபி (பொ.ஆ.)

எகிப்தில் உள்ள அலெக்ஸ்சான்ட்ரியாவில் பிறந்த பாப்பஸ் மிகச் சிறந்த கிரேக்க வடிவியல் மேதையாவார். எட்டுப் புத்தகங்களில் அமைந்த "சைனகோஜ்" (Synagoge) எனும் 'கணிதத் தொகுப்பே' இவரது சிறப்பான படைப்பாகும்.

நெம்புகோல், கப்பி, ஆப்புகள், அச்சுகள் மற்றும் திருகுக் கோட்பாடுகளையும் பாப்பஸ் விளக்கியுள்ளார். இயற்பியல் மற்றும் நவீனப் பொறியியல் துறைகளில் மேற்கண்ட கோட்பாடுகள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன.

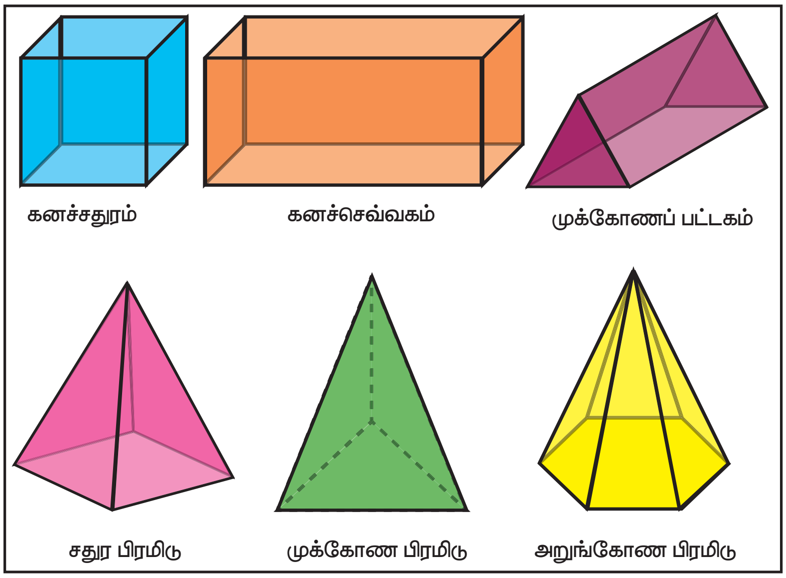
F6GXRX

## கற்றல் விளைவுகள்

- உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம் மற்றும் இடைக்கண்டம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைக் காணுதல்.
- இணைந்த திண்ம உருவங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைக் கணக்கிடுதல்.
- திண்ம உருவங்களை அவற்றின் கனஅளவுகள் மாறாத வகையில் ஒன்றிலிருந்து மற்றொரு திண்ம உருவமாக மாற்றுதல் சார்ந்த கணக்குகளைத் தீர்த்தல்.

## 7.1 அறிமுகம் (Introduction)

அளவியலின் கருத்துகள் பண்டைய காலம் தொட்டு உலகின் அனைத்துக் கலாச்சாரங்களிலும் நடைமுறை வாழ்வியலில் பயன் பட்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, விவசாயம் மற்றும் வணிகத் துறைகளில் முக்கிய முடிவுகள் எடுப்பதற்கு பயிரிட வேண்டிய நிலப்பரப்பு, ஒரு கலனின் கொள்ளளவு போன்ற விவரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. கணிதவியல் வல்லுநர்கள் வடிவியலை வாழ்வியல் சூழல்களில் மிகத் திறமையாகப் பயன்படுத்திப் பல கண்டுபிடிப்புகளை நிகழ்த்தினர். இதுவே அளவியலின் துவக்கப் புள்ளியாக அமைந்தது. எனவே பயன்பாட்டு வடிவியலை அளவியல் எனக் கருதலாம்.




படம் 7.1







X_Ch 7 TM.indd 279 16-04-2019 10:19:28

சதுரம், செவ்வகம், முக்கோணம் மற்றும் வட்டம் ஆகியவற்றின் பரப்புகளைப் பற்றி கடந்த வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். இவைகள் தள உருவங்கள் ஆகும். எனவே, இவைகளை இருபரிமாண உருவங்கள் என்கிறோம். நாம் நடைமுறை வாழ்வில் காணும் பல பொருட்களை ஒரு தளத்தில் குறிக்க இயலாது. அன்றாடம் நாம் காணும் உருவங்களான குழாய்கள், தண்ணீர்த் தொட்டிகள், பனிக்கட்டிக் கூழ் கூம்புகள், கால்பந்துகள் போன்றவை திண்ம உருவங்களாகும். இவைகளை முப்பரிமாண உருவங்கள் என அழைக்கிறோம்.

கனச்சதுரம், கனச்செவ்வகம், முப்பட்டகம் மற்றும் பிரமிடு போன்ற முப்பரிமாண உருவங்களுக்குப் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவு போன்ற அளவீடுகள் உண்டு.

இப்பாடப் பகுதியில் உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம் மற்றும் இடைக்கண்டம் ஆகிய முப்பரிமாண உருவங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கனஅளவு பற்றி விரிவாக அறியலாம்.

4YPM6P

## 7.2 புறப்பரப்பு (Surface Area)

ஒரு திண்ம உருவத்தின் அனைத்து வெளிப்பக்கப் பகுதிகளின் பரப்பு அதன் புறப்பரப்பு எனப்படும்.

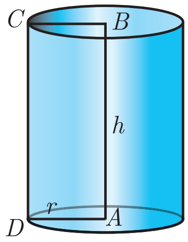
### 7.2.1 நேர் வட்ட உருளை (Right Circular Cylinder)

படம் 7.2–ல் தரப்பட்ட உருவங்களை அடையாளம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட உருவங்கள் ஓர் உருளையின் வடிவத்தை ஒத்துள்ளன.

படம் 7.2

> **வரையறை :** ஒரு செவ்வகத்தை அதன் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றும்போது உண்டாகும் திண்ம உருவம் நேர்வட்ட உருளை எனப்படும்.

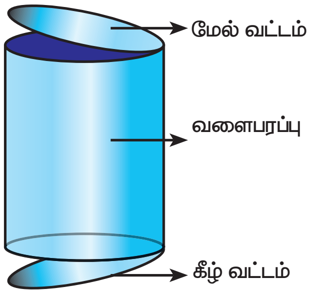


படம் 7.3

உருளையின் அச்சானது அதன் ஆரத்துக்குச் செங்குத்தாக இருப்பின் அது நேர்வட்ட உருளை (Right Circular Cylinder) ஆகும்.

(படம் 7.3–ல்), உயரம் $AB=h$, மற்றும் ஆரம் $AD=r$.

இரு தள வட்டப் பரப்புகளாலும் ஒரு வளைபரப்பாலும் உருவாக்கபடுவது ஒரு திண்ம உருளை எனப்படும். இரு வட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியை "மேற்பரப்பு" அல்லது "வளைபரப்பு" எனலாம்.

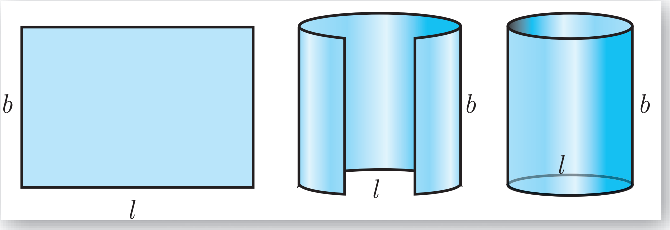


படம் 7.4

### நேர்வட்ட உருளை உருவாக்கம் – செயல் விளக்கம். (Formation of a Right Circular Cylinder – Demonstration)

(i) நீளம் $l$ மற்றும் அகலம் $b$ உடைய செவ்வகத் தாளை எடுத்துக்கொள்க.

(ii) அகலப் பக்கங்கள் $(b)$ இரண்டும் இணையுமாறு செவ்வகத் தாளைச் சுழற்றி மடிக்க (மேற்பொருந்தாதவாறு).



படம் 7.5

(iii) அடிச்சுற்றளவு $l$ மற்றும் உயரம் $b$ உடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளை கிடைக்கிறது

### நேர்வட்ட உருளையின் புறப்பரப்பு (Surface Area of a Right Circular Cylinder)

**(i) வளைபரப்பு (Curved Surface Area)**

நேர் வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு $=$ செவ்வகத்தின் பரப்பு

$= l \times b$

$= 2\pi r \times h$ (இங்கு, $l$ என்பது அடிப்பக்கத்தின் சுற்றளவு, $b$ என்பது உயரம். படம் 7.5-ஐ பார்க்க)

$= 2\pi rh$

**உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$ சதுர அலகுகள்**

**(ii) மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total Surface Area)**

மொத்தப் புறப்பரப்பு என்பது ஒரு திண்ம உருளையின் வளைபரப்போடு, அதன் அடிப்பக்க மற்றும் மேற்பக்க வட்டப் பரப்புகளைக் கூட்டக் கிடைப்பதாகும்.

அதாவது, நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$=$ வளைபரப்பு + மேல்வட்டத்தின் பரப்பு + கீழ் வட்டத்தின் பரப்பு

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$ (படம்.7.4 -ஐ பார்க்க)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

**உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h + r)$ ச. அ**

**குறிப்பு**

- மதிப்புக் கொடுக்கப்படாத போது π –யின் தோராய மதிப்பை $\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.
- புறப்பரப்பு / மேற்பரப்பு எனும் சொல் மொத்தப் புறப்பரப்பை குறிக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.1** ஓர் உருளை வடிவப் பீப்பாயின் உயரம் 20 செ.மீ மற்றும் அடிப்புற ஆரம் 14 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, $h = 20$ செ.மீ ; $r = 14$ செ.மீ

உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$ ச. அ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 20 = 2 \times 22 \times 2 \times 20 = 1760$ செ.மீ$^2$

உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r\left(h + r\right)$ ச. அ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times \left(20 + 14\right) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 34$

$= 2992$ செ.மீ$^2$

ஆகவே, உருளையின் வளைபரப்பு $= 1760$ செ.மீ$^2$ , மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2992$ செ.மீ$^2$

**எடுத்துக்காட்டு 7.2** 88 ச. செ.மீ வளைபரப்புடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் உயரம் 14 செ.மீ எனில், உருளையின் விட்டம் காண்க.

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, உருளையின் வளைபரப்பு $= 88$ ச. செ.மீ

$$2\pi rh = 88$$
$$2\times\frac{22}{7}\times r\times 14 = 88 \qquad (\text{உயரம் } h=14 \text{ செ.மீ})$$
$$2r = \frac{88\times 7}{22\times 14} = 2$$

ஆகவே, உருளையின் விட்டம் $= 2$ செ.மீ

**எடுத்துக்காட்டு 7.3** நீளம் 3 மீ மற்றும் விட்டம் 2.8 மீ உடைய ஒரு சமன்படுத்தும் உருளையைக் கொண்டு ஒரு தோட்டம் சமன்படுத்தப் படுகிறது. 8 சுற்றுகளில் எவ்வளவு பரப்பை உருளை சமன் செய்யும்?

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, விட்டம் $d = 2.8$ மீ, உயரம் $h = 3$ மீ, ஆரம் $r = 1.4$ மீ

படம் 7.6

உருளை ஒரு சுற்றில் சமன்படுத்தும் பரப்பு = சமன் படுத்தும் உருளையின் வளைபரப்பு

$= 2\pi rh$ ச. அ

$= 2\times\frac{22}{7}\times 1.4\times 3 = 26.4$

உருளை ஒரு சுற்றில் சமன்படுத்தும் பரப்பு $= 26.4$ ச.மீ

ஆகவே, 8 சுற்றுகளில் சமன்படுத்தப்படும் மொத்தப் பரப்பு $= 8\times 26.4 = 211.2$

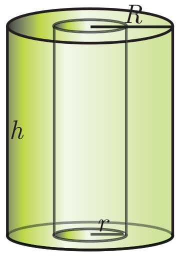
எனவே, உருளை சமன் படுத்தும் பரப்பு 211.2 மீ$^2$ ஆகும்.

**சிந்தனைக் களம்**

1. ஓர் அலகு தடிமனும், $r$ அலகுகள் ஆரமும் கொண்ட $h$ வட்ட வில்லைகளை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக அடுக்கும்போது தோன்றும் திண்ம உருவத்தின் வடிவம் என்ன? அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.
2. ஓர் உருளையின் ஆரம் அதன் உயரத்தின் இரு மடங்கு எனில், வளைபரப்பிற்கும் அடிப்புறப் பரப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.
3. 12 மீ நீளமும், 5 மீ அகலமும் கொண்ட இரண்டு செவ்வக வடிவ அலுமினியத் தாள்களை, ஒன்று நீளத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும், மற்றொன்று அகலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும் சுழற்றுவதன் மூலம் இரு நேர்வட்ட உருளைகள் உருவாக்கப்படுகின்றன எனில் அவற்றின் வளைப்பரப்புகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

### 7.2.2 உள்ளீடற்ற உருளை (Hollow Cylinder)

சம உயரமும் வேறுபட்ட ஆரமும் கொண்ட இணை அச்சு (co–axial) உருளைகளுக்கு இடைப்பட்ட வெளி உள்ளீடற்ற உருளை ஆகும்.




படம் 7.7

$R$ மற்றும் $r$ என்பன உருளையின் வெளிப்புற மற்றும் உட்புற ஆரம் என்க. $h$ என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைபரப்பு = உருளையின் வெளிப்புற வளைபரப்பு + உருளையின் உட்புற வளைபரப்பு.

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

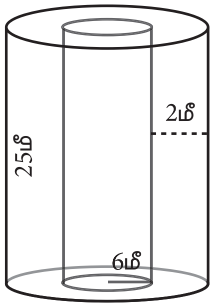
**உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi(R+r)h$ ச. அ.**

உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப்பரப்பு = வளைபரப்பு + மேற்புற மற்றும் கீழ்ப்புற வட்டப் பாதைகளின் பரப்பு

$= 2\pi(R+r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$

**உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ச. அ.**

**எடுத்துக்காட்டு 7.4** தடிமன் $2$ மீ, உட்புற ஆரம் $6$ மீ மற்றும் உயரம் $25$ மீ உடைய ஓர் உருளை வடிவக் சுரங்கப்பாதையின் உள் மற்றும் வெளிப்புறப் பரப்புகளுக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் வர்ணத்தைக் கொண்டு $10$ ச. மீ பூச முடியுமானால், சுரங்கப்பாதைக்கு வர்ணம் பூச எத்தனை லிட்டர் வர்ணம் தேவை?



படம் 7.8

**தீர்வு** $h, r$ மற்றும் $R$ என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற ஆரம் மற்றும் வெளிப்புற ஆரம் என்க.

இங்கு, உயரம் $h = 25$ மீ; தடிமன் $= 2$ மீ.

உட்புற ஆரம் $r = 6$ மீ

தற்போது, வெளிப்புற ஆரம் $R = 6 + 2 = 8$ மீ

சுரங்கப்பாதையின் வளைபரப்பு $=$ உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைபரப்பு

$= 2\pi(R+r)h$ ச.அ

$$= 2 \times \frac{22}{7}(8+6) \times 25$$

எனவே, சுரங்கப்பாதையின் வளைபரப்பு $= 2200$ ச.மீ

ஒரு லிட்டர் வர்ணம் பூசக்கூடிய பரப்பு $= 10$ ச.மீ

எனவே, தேவைப்படும் வர்ணம் $= \frac{2200}{10} = 220$ லி.

ஆகவே, சுரங்கப்பாதைக்கு வர்ணம் பூச $220$ லிட்டர் வர்ணம் தேவைப்படும்..

**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. ஒரு __________ ஐ, அதன் __________ மைய அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றுவதன் மூலம் ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையைப் பெறலாம்.
2. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் அச்சு அதன் விட்டத்துக்கு __________ அமையும்.
3. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பு மற்றும் வளைபரப்பிற்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் __________ ஆகும்.
4. சமமான ஆரமும் உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு அதன் அடிப்பரப்பைப்போல் __________ ஆக இருக்கும்.

### 7.2.3 நேர்வட்டக் கூம்பு (Right Circular Cone)

படம் 7.9ல் கொடுக்கப்பட்ட உருவங்களை உற்று நோக்கி வடிவங்களின் அடையாளம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட உருவங்கள் ஒரு கூம்பின் வடிவத்தை ஒத்துள்ளன.

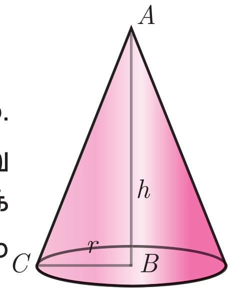

கிறிஸ்துமஸ் மரம் — பிறந்தநாள் தொப்பி — பனிக்கூழ்க் கூம்பு — பம்பரம்

படம் 7.9

**வரையறை :** செங்கோணத்தைத் தாங்கும் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை மைய அச்சாகக் கொண்டு செங்கோண முக்கோணத்தை முழுச்சுற்று சுழற்றும்போது உண்டாகும் திண்ம உருவம் நேர்வட்டக் கூம்பு எனப்படும்..

### நேர்வட்டக் கூம்பு உருவாக்கம் – செயல் விளக்கம்

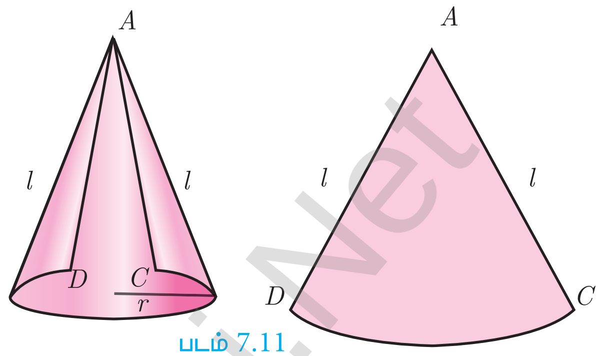
படம் 7.10 –ல் $ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். இம்முக்கோணமானது $AB$ என்ற பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றப்படுகிறது. இச்சுழற்சியானது, படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பை உருவாக்குகிறது. இங்கு அச்சு $AB$ கூம்பின் உயரம் எனவும், கர்ணம் $AC$ கூம்பின் சாயுயரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.



படம் 7.10

### நேர்வட்டக் கூம்பின் புறப்பரப்பு

படத்தில் காட்டியவாறு கூம்பின் மேற்பரப்பை சாயுயரம் $AC$ வழியாக வெட்டினால் $ACD$ என்ற வட்டக்கோணப் பகுதி கிடைக்கிறது. வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம் $AC$ என்பது கூம்பின் சாயுயரம் ஆகவும் வட்டக்கோணப் பகுதியின் வில் $DC$ கூம்பின் அடிச்சுற்றளவாகவும் கிடைக்கப்பெறும்.



படம் 7.11

இங்கு, வில்லின் நீளம் '$s$' மற்றும் ஆரம் '$l$' உடைய வட்டக்கோணப் பகுதியும், '$l$' ஆரம் கொண்ட வட்டமும் வடிவொத்தவையாகும்.

### (i) வளைபரப்பு (Curved surface area)

$$\frac{\text{வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு}}{\text{வட்டத்தின் பரப்பு}} = \frac{\text{வட்டக்கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்}}{\text{வட்டத்தின் சுற்றளவு}}$$

$$\text{வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு} = \frac{\text{வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம்}}{\text{வட்டத்தின் சுற்றளவு}} \times \text{வட்டத்தின் பரப்பு}$$

$$= \frac{s}{2\pi l} \times \pi l^2 = \frac{s}{2} \times l = \frac{2\pi r}{2} \times l \quad (\text{ஏனெனில்} \; s = 2\pi r)$$

மேலும் கூம்பின் வளைபரப்பு = வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு = $\pi rl$ ச. அ.

**நேர்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi rl$ ச. அ**

#### சிந்தனைக் களம்

1. நீங்கள் அன்றாடம் பயன்படுத்தும் திண்ம கூம்பு வடிவப் பொருட்கள் சிலவற்றைக் குறிப்பிடுக.
2. சம ஆரத்தையும், உயரத்தையும் கொண்ட ஒரு கூம்பின் புறப்பரப்பை ஆரத்தின் வழியே எழுதுக.
3. மேலே கூறப்பட்ட பரப்பைக் கூம்பின் அடிப்புறப் பரப்புடன் ஒப்பிடுக.

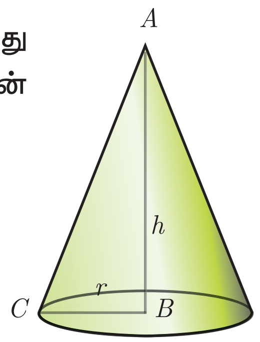
#### செயல்பாடு 1

(i) 7 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் அரைவட்ட வடிவத்தாளை ஒரு கூம்பாக மாற்றுக. கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க.

(ii) 3.5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு கால் வட்ட வடிவத்தாளை ஒரு கூம்பாக மாற்றுக. கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க.

### சாயுயரம் '$l$' –ஐ தருவித்தல் (Derivation of Slant Height '$l$')

$ABC$ என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் கோணம் $B$ என்பது செங்கோணம் ஆகும். '$l$', '$r$' மற்றும் '$h$' என்பன முறையே முக்கோணத்தின் கர்ணம், அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் என்க.



படம் 7.12

தற்போது, முக்கோணம் $ABC$ -ல் பித்தாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \text{ அலகுகள்}$$

### மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total surface area)

கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = கூம்பின் வளைபரப்பு + கூம்பின் அடிப்பரப்பு

$= \pi rl + \pi r^2$ (ஏனெனில் கூம்பின் அடிப்பகுதி ஒரு வட்டமாகும்)

**நேர்வட்டக் கூம்பின் மொத்தப்பரப்பு $= \pi r(l + r)$ ச.அ**

**எடுத்துக்காட்டு 7.5** கித்தானைக் கொண்டு 7 மீ ஆரமும் 24 மீ உயரமும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கூடாரம் உருவாக்கப்படுகிறது. செவ்வக வடிவக் கித்தானின் அகலம் 4 மீ எனில், அதன் நீளம் காண்க.

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க..

இங்கு, ஆரம் $r = 7$ மீ, உயரம் $h = 24$ மீ

தற்போது, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{49 + 576}$

$l = \sqrt{625} = 25$ மீ

கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi rl$ ச.அ

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550$ மீ$^2$

மேலும், கூம்பின் வளைபரப்பு = கித்தானின் பரப்பு

கித்தானின் நீளம் $= \frac{\text{கித்தானின் பரப்பு}}{\text{கித்தானின் அகலம்}} = \frac{550}{4} = 137.5$ மீ

ஆகவே, கித்தானின் நீளம் 137.5 மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.6** 704 ச.செ.மீ மொத்தப் புறப்பரப்பு கொண்ட ஒரு கூம்பின் ஆரம் 7 செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க.

**தீர்வு** கூம்பின் ஆரம் $r = 7$ செ.மீ

கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r(l + r)$ ச. அ

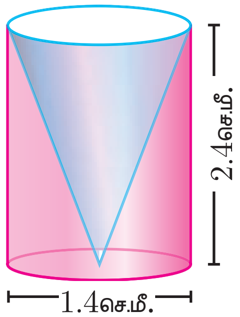
மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 704$ ச. செ.மீ

$$704 = \frac{22}{7} \times 7(l + 7)$$

$32 = l + 7$ எனவே, $l = 25$ செ.மீ.

ஆகவே, கூம்பின் சாயுயரம் 25 செ.மீ. ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.7** $2.4$ செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையின் விட்டம் 1.4 செ.மீ ஆகும். உருளையினுள் அதே ஆரமுள்ள கூம்பு வடிவக் குழிவு (படம் 7.13) உருளையின் உயரத்திற்கு ஏற்படுத்தப்படுகிறது எனில், மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு காண்க.



படம் 7.13

**தீர்வு** $h$ மற்றும் $r$ என்பன கூம்பு மற்றும் உருளை ஆகியவற்றின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க..

$l$ என்பது கூம்பின் சாயுயரம் என்க.

இங்கு, $h = 2.4$ செ.மீ , $d = 1.4$ செ.மீ ; $r = 0.7$ செ.மீ

மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = உருளையின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு + அடிப்பரப்பு

$$=(2\pi rh + \pi rl + \pi r^2) \text{ ச. அ.}$$

தற்போது, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{0.49 + 5.76} = \sqrt{6.25} = 2.5$ செ.மீ

$$l = 2.5 \text{ செ.மீ}$$

மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r(2h + l + r)$ ச. அ.

$$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times \left[(2 \times 2.4) + 2.5 + 0.7\right]$$

$$= 17.6$$

ஆகவே, மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $17.6$ ச. செ.மீ ஆகும்.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு _______ ஐ, அதன் _______ ஐ மைய அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றுவதன் மூலம் ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பினைப் பெறலாம்.
2. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் அச்சு அதன் விட்டத்துக்கு _______ அமையும்.
3. ஒரு கூம்பின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் _______.
4. ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதி கூம்பாக மாறும்போது ஏற்படும் மாற்றங்களைச் சரியாகப் பொருத்துக.

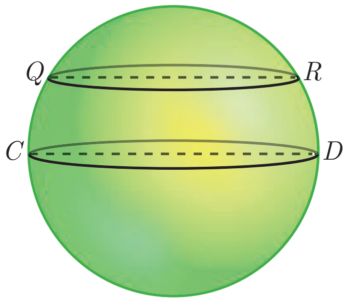
| வட்டக்கோணப் பகுதி | கூம்பு |
|---|---|
| ஆரம் | அடிப்புறச் சுற்றளவு |
| பரப்பு | சாயுயரம் |
| வில்லின் நீளம் | வளைபரப்பு |

### 7.2.4 கோளம் (Sphere)

**வரையறை :** ஓர் அரைவட்டத்தை அதன் விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றும்போது உண்டாகும் திண்ம உருவம் கோளம் ஆகும்.

ஒரு கோளத்தை எங்குக் குறுக்காக வெட்டினாலும் ஒரு வட்டம் கிடைக்கும். ஒரு கோள மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளக் குறுக்குவெட்டு மீப்பெரு வட்டமாகும். மற்ற தளக் குறுக்கு வெட்டுகள் சிறிய வட்டங்களாகும்.

படத்தில் உள்ளவாறு $CD$ -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் மீப்பெரு வட்டம் மற்றும் $QR$ -ஐ விட்டமாகச் கொண்ட வட்டம் சிறிய வட்டமாகும்



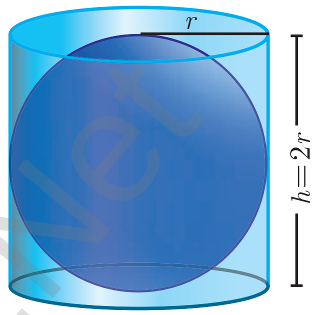
படம் 7.14

## கோளத்தின் புறப்பரப்பு (Surface area of a sphere)

### ஆர்க்கிமெடிஸ் நிரூபணம்

ஒரு கோளம் அதன் விட்டத்திற்குச் சமமான உயரம் உள்ள உருளையினுள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு வைக்கப்படுகிறது.

கோளத்தின் புறப்பரப்பு உருளையின் வளைபரப்புக்குச் சமம் என ஆர்க்கிமெடிஸ் நிறுவினார்.



படம் 7.15

எனவே, கோளத்தின் புறப்பரப்பு $=$ உருளையின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi rh$$

$$= 2\pi r(2r)$$

**கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$ ச. அ .**

### செயல்பாடு 2

(i) $'r'$ –ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு கோளத்தை எடுத்துக்கொள்க.

(ii) $'r'$ ஆரமும், '2r' உயரமும் கொண்ட ஓர் உருளையை எடுத்துக்கொள்க.

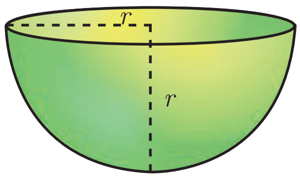
(iii) கோளம் மற்றும் உருளையின் முழுப் புறப்பரப்பையும் ஒரு சீரான நூலால் இடைவெளியின்றியும் ஒன்றின்மீது ஒன்றாக இல்லாமலும் சுற்றுக.

(iv) சுற்றுவதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட நூலின் நீளங்களை அளந்து ஒப்பிடுக.

(v) கோளத்தின் புறப்பரப்பைக் காண மேற்கண்ட கருத்தைப் பயன்படுத்துக.

## 7.2.5 அரைக்கோளம் (Hemisphere)

ஒரு திண்மக் கோளத்தை அதன் ஏதேனும் ஒரு மீப்பெரு வட்டம் வழியாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது கிடைக்கும் கோளத்தின் ஒரு பகுதி அரைக்கோளம் எனப்படும்.



படம் 7.16

ஒரு கோளத்தின் சரிபாதியை ஓர் அரைக்கோளம் என்கிறோம்.

$$\text{ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு} = \frac{\text{கோளத்தின் வளைபரப்பு}}{2} = \frac{4\pi r^2}{2}$$

**அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r^2$ ச. அ.**

மேலும், அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $=$ வளைபரப்பு + மேல்வட்டத்தின் பரப்பு

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

**அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 3\pi r^2$ ச. அ.**

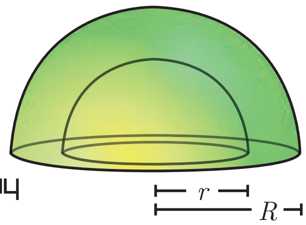
### 7.2.6 உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம் (Hollow Hemisphere)

$r$ என்பது உட்புற ஆரம் என்க. $R$ என்பது வெளிப்புற ஆரம் என்க

எனவே, தடிமன் $= R\text{-}r$

ஆகவே, வளைபரப்பு = அரைக்கோளத்தின் வெளிப்புறப் பரப்பு + அரைக்கோளத்தின் உட்புறப் பரப்பு

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$




படம் 7.17

**உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi(R^2 + r^2)$ ச. அ.**

மொத்தப் புறப்பரப்பு = வளைபரப்பு + வளையத்தின் பரப்பு

$$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi\left[2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2\right]$$

**உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi(3R^2 + r^2)$ ச. அ.**

**எடுத்துக்காட்டு 7.8** ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 154 ச. மீ எனில், அதன் விட்டம் காண்க.

**தீர்வு** கோளத்தின் ஆரம் '$r$' என்க.

புறப்பரப்பு $=154$ ச. மீ

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4\times\frac{22}{7}\times r^2 = 154$$

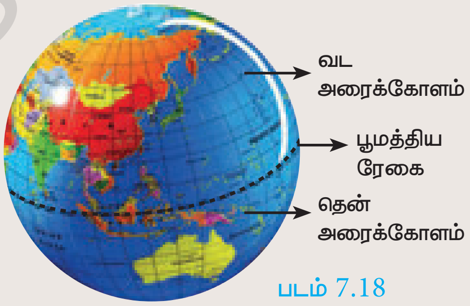
$$r^2 = 154\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{22}$$

எனவே, $r^2 = \frac{49}{4}$ லிருந்து $r = \frac{7}{2}$

ஆகவே, விட்டம் 7 மீ ஆகும்.

**செயல்பாடு 3**

உலக உருண்டையின் வட மற்றும் தென் அரைக்கோளப் பகுதிகளில் தலா இரு நாடுகளின் பெயர்களைக் குறிக்க.




படம் 7.18

**எடுத்துக்காட்டு 7.9** ஒரு கோள வடிவ வளிக்கூண்டினுள் (balloon) காற்று உந்தப்படும்போது அதன் ஆரம் 12 செ.மீ–லிருந்து 16 செ.மீ ஆக உயருகிறது. இரு புறப்பரப்புகளின் விகிதம் காண்க.

**தீர்வு** $r_1$ மற்றும் $r_2$ என்பன வளிக்கூண்டுகளின் ஆரங்கள் என்க.

இங்கு, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

எனவே, புறப்பரப்புகளின் விகிதம் $= \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

ஆகவே, புறப்பரப்புகளின் விகிதம் 9:16 ஆகும்.

**சிந்தனைக் களம்**

1. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு $36\pi$ ச. அலகுகள் எனில், ஆரத்தின் மதிப்பைக் காண்க
2. ஒரு கோளத்தில் எத்தனை மீப்பெரு வட்டங்கள் உள்ளன?
3. பூமியின் விட்டம் 12756 கி.மீ எனில், அதன் புறப்பரப்பைக் காண்க.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. கோளத்தின் ஒவ்வொரு தளக் குறுக்கு வெட்டும், ஒரு ________ ஆகும்.
2. மீப்பெரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி, கோளத்தின் ________ ஆகும்.
3. ஓர் அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பிற்கும் வளைபரப்பிற்கும் இடையேயான வித்தியாசம் ________ஆகும்.
4. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு மற்றும் அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு ஆகியவற்றின் விகிதமானது ________ஆகும்.
5. ஒரு கோளத்தை அதன் மீப்பெரு வட்டம் வழியாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது கிடைக்கும் ஒரு பகுதியை ________ என்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.10** ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு $1386$ ச. மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $r$ என்பது அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்க.

இங்கு, அடிப்பரப்பு $= \pi r^2$ ச. அ. $= 1386$ ச. மீ.

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு $= 3\pi r^2$ ச. அ.

$= 3 \times 1386 = 4158$

ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $4158$ ச.மீ ஆகும்.

**குறிப்பு**

➢ உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் பரப்புக் காண, கோளத்தின் புறப்பரப்பு காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

## சிந்தனைக் களம்

1. ஒரு கோளத்தை அதன் சிறிய வட்டம் வழியே ஒரு தளத்தைக் கொண்டு வெட்டும்போது அரைக்கோளம் கிடைக்குமா?
2. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு, அதன் அடிப்பரப்பின் எத்தனை மடங்காகும்?
3. ஒரு கோளத்திலிருந்து எத்தனை அரைக்கோளங்கள் கிடைக்கும்?

**எடுத்துக்காட்டு 7.11** ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே $3$ மீ மற்றும் $5$ மீ ஆகும். ஓட்டின் மொத்தப் புறப்பரப்பு மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க.

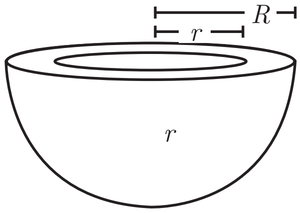
**தீர்வு** ஓட்டின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே, $r$ மற்றும் $R$ என்க.

இங்கு, $R = 5$ மீ, $r = 3$ மீ

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi(R^2 + r^2) \text{ ச.அ}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (25 + 9) = 213.71$$



படம் 7.19

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

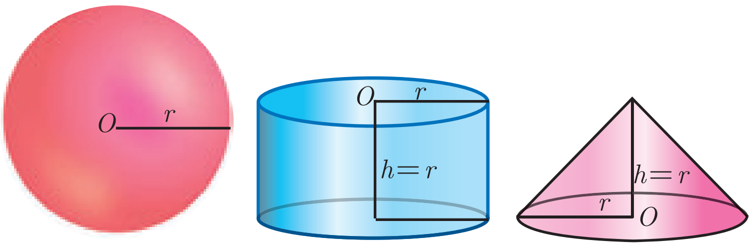
$$= \pi(3R^2 + r^2) \text{ ச.அ}$$

$$= \frac{22}{7}(75 + 9) = 264$$

ஆகவே, வளைபரப்பு $213.71$ ச. மீ மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு $264$ ச. மீ ஆகும்.

### எடுத்துக்காட்டு 7.12

ஒரு கோளம், உருளை மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் ஆரங்கள் சமம். படம் 7.20-ல் உள்ளபடி கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரங்கள் ஆரத்திற்குச் சமம் எனில், அவற்றின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் காண்க.



படம் 7.20

**தீர்வு** இங்கு, தேவையான விகிதம்

$$= \text{கோளத்தின் வளைபரப்பு : உருளையின் வளைபரப்பு : கூம்பின் வளைபரப்பு}$$

$$= 4\pi r^2 : 2\pi rh : \pi rl\,,\ (l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r)$$

$$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \pi r\sqrt{2}\,r$$

$$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \sqrt{2}\pi r^2$$

$$= 4 : 2 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$$

### 7.2.7 ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்டம் (Frustum of a Right Circular Cone)

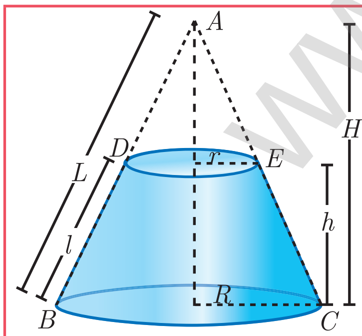
கடந்த காலங்களில், தீ விபத்து ஏற்படும்போது நீர் / மண் நிரப்பப்பட்ட (படம் 7.21(i)) கூம்பு வடிவத் தீயணைப்பு வாளிகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. பின்னர் அவற்றின் வடிவம் படம் 7.21(ii)-ல் உள்ளவாறு மாற்றப்பட்டு அதிகக் கொள்ளளவு கொண்டதாக மாற்றம் பெற்றது.

படம் 7.21(i) படம் 7.21(ii) படம் 7.21(iii)

வாளியை ஒத்த வடிவம் கொண்ட படம் 7.21(iii)-ல் உள்ள உருவத்தை ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டம் என்றழைக்கிறோம். நாம் தினமும் பயன்படுத்தும் கண்ணாடி டம்ளர், வாளி மற்றும் சாலை கூம்பு (road cone) ஆகியவை இடைக்கண்டத்துக்கான சில உதாரணங்களாகும் (படம் 7.22).


வாளி சாலைக்கூம்பு கண்ணாடி டம்ளர்

படம் 7.22



படம் 7.23

**வரையறை**

$ABC$ என்ற கூம்பை அதன் அடிப்பகுதிக்கு இணையாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது அதன் வெட்டு தளத்திற்கும் அடிப்புறத்திற்கும் இடைப்பட்ட $DECB$ என்னும் பகுதியைக் கூம்பின் இடைக்கண்டம் என்கிறோம்.

### இடைக்கண்டத்தின் புறப்பரப்பு (Surface area of a Frustum)

$R$ மற்றும் $r$ என்பன முறையே இடைக்கண்டம் $DECB$ -ன் கீழ் மற்றும் மேற்புற ஆரங்கள் என்க. மேலும், $h$ மற்றும் $l$ ஆகியவை முறையே அதன் உயரம் மற்றும் சாயுயரம் என்க.

எனவே, இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு

$$= \frac{1}{2} \text{ (மேல் மற்றும் கீழ் வட்டங்களின் சுற்றளவுகளின் கூடுதல்)} \times \text{சாயுயரம்}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l$$

**இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= \pi(R+r)l$ ச. அ** இங்கு, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$ அ

மேலும், இடைக்கண்டத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $=$ இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு + மேல் வட்டப்பரப்பு + கீழ் வட்டப்பரப்பு.

இங்கு $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

**இடைக்கண்டத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ ச. அ**

**எடுத்துக்காட்டு 7.13** ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டச் சாயுயரம் $5$ செ.மீ ஆகும். அதன் இரு ஆரங்கள் $4$ செ.மீ மற்றும் $1$ செ.மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $l$, $R$ மற்றும் $r$ ஆகியவை முறையே இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம், மேற்புற மற்றும் கீழ்ப்புற ஆரங்கள் என்க.

இங்கு, $l = 5$ செ.மீ, $R = 4$ செ.மீ, $r = 1$ செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= \pi\left(R+r\right)l$ ச. அ

$$= \frac{22}{7} \times \left(4+1\right) \times 5$$

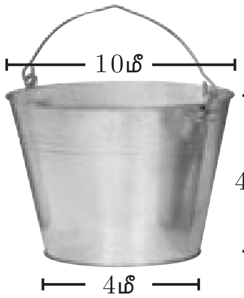
$$= \frac{550}{7}$$

ஆகவே, இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= 78.57$ ச. செ.மீ

**சிந்தனைக் களம்**

1. கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவிலான ஏதேனும் இரு பொருட்களைக் குறிப்பிடுக.
2. ஓர் அரைக்கோளத்தைக் கோளத்தின் இடைக்கண்டமாகக் கருத முடியுமா?

**எடுத்துக்காட்டு 7.14** ஒரு தொழிற்சாலையின் உலோக வாளி, கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் உள்ளது. அதன் மேற்புற, அடிப்புற விட்டங்கள் முறையே 10 மீ மற்றும் 4 மீ ஆகும். அதன் உயரம் 4 மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.




படம் 7.24

**தீர்வு** இங்கு $h$, $l$, $R$ மற்றும் $r$ என்பன முறையே இடைக்கண்டத்தின் உயரம், சாயுயரம், மேற்புற மற்றும் அடிப்புற வட்டத்தின் ஆரங்கள் என்க.

இங்கு, மேல் விட்டம் $=10$ மீ, R$=$ 5 மீ; கீழ் விட்டம் $=$ 4 மீ, $r=$ 2 மீ ; உயரம் $h=$ 4 மீ

சாயுயரம், $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$ அ

$$= \sqrt{4^2 + (5-2)^2}$$

$$l = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{மீ}$$

வளைபரப்பு $= \pi(R+r)l$ ச.அ

$$= \frac{22}{7}(5+2) \times 5 = 110$$

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= [\pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2]$ ச.அ

$$= \frac{22}{7}\left[(5+2)5+25+4\right] = \frac{1408}{7} = 201.14$$

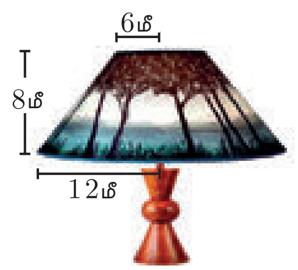
ஆகவே, வளைபரப்பு $= 110$ மீ$^2$ மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 201.14$ மீ$^2$

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. இரு இணை தளங்களால் வெட்டப்படும் கூம்பின் ஒரு பகுதியை __________ எனலாம்.
2. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பில் எத்தனை இடைக்கண்டங்கள் உள்ளன?

## பயிற்சி 7.1

1. ஓர் உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரங்களின் விகிதம் $5:7$ ஆகும். அதன் வளைபரப்பு $5500$ ச. செ.மீ எனில், உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காண்க.
2. ஒரு திண்ம இரும்பு உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $1848$ ச. மீ மேலும் அதன் வளைபரப்பு, மொத்தப் புறப்பரப்பில் ஆறில் ஐந்து பங்காகும் எனில், இரும்பு உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காணவும்.
3. ஓர் உள்ளீடற்ற மர உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் மற்றும் நீளம் முறையே $16$ செ.மீ மற்றும் $13$ செ.மீ ஆகும். அதன் தடிமன் $4$ செ.மீ எனில் உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு எவ்வளவு?
4. $PQR$ என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $QR=16$ செ.மீ, $PR=20$ செ.மீ மற்றும் $\angle Q = 90^\circ$ ஆகும். $QR$ மற்றும் $PQ$ -ஐ மைய அச்சுகளாகக்கொண்டு சுழற்றும்போது உருவாகும் கூம்புகளின் வளைபரப்புகளை ஒப்பிடுக.
5. சாயுயரம் $19$ செ.மீ கொண்ட கூம்பு வடிவக் கூடாரத்தில் நால்வர் உள்ளனர். ஒருவருக்கு $22$ ச. செ.மீ பரப்பு தேவை எனில், கூடாரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடவும்.
6. ஒரு சிறுமி தனது பிறந்த நாளைக் கொண்டாடக் கூம்பு வடிவத் தொப்பிகளை $5720$ ச. செ.மீ பரப்புள்ள காகிதத்தாளை பயன்படுத்தித் தயாரிக்கிறாள். $5$ செ.மீ ஆரமும், $12$ செ.மீ உயரமும் கொண்ட எத்தனை தொப்பிகள் தயாரிக்க முடியும்?
7. சம உயரங்களையுடைய இரு நேர் வட்டக் கூம்புகளின் ஆரங்கள் $1:3$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. கூம்புகளின் உயரம் சிறிய கூம்பின் ஆரத்தின் மூன்று மடங்கு எனில், வளைபரப்புகளின் விகிதம் காண்க.
8. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் $25\%$ அதிகரிக்கும்போது, அதிகமாகும் புறப்பரப்பின் சதவீதம் காண்க.
9. உள்ளீடற்ற ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்திற்கு ஒரு சதுர செ.மீ-க்கு வர்ணம் பூச ₹ $0.14$ வீதம் செலவாகும். அதன் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே $20$ செ.மீ மற்றும் $28$ செ.மீ எனில், அதனை முழுமையாக வர்ணம் பூச எவ்வளவு செலவாகும்?
10. ஒரு மேஜை விளக்கின் வெளிப்புறத்திற்கு (மேல்பகுதியுடன்) மட்டும் வர்ணம் பூசப்படுகிறது. $1$ ச. செ.மீ வர்ணம் பூச ₹2 செலவாகுமெனில் விளக்கிற்கு வர்ணம் பூசுவதற்கான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.




## 7.3 கன அளவு (Volume)

IK5ZZ8

இதுவரை உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம் மற்றும் இடைக்கண்டம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்புகள் பற்றி விவாதித்தோம். இனி அந்தத் திண்மங்களின் கன அளவுகள் பற்றி காண்போம்.

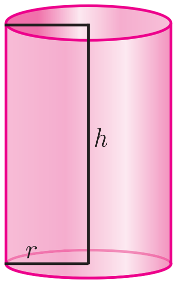
ஒரு பொருள் ஆக்கிரமித்துள்ள வெளியின் அளவே அதன் கன அளவு எனப்படும். கன அளவைக் 'கன அலகுகள்' எனும் அலகில் கணக்கிடுவோம்.





X_Ch 7 TM.indd 292 16-04-2019 10:19:40

### 7.3.1 ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் கன அளவு (Volume of a Solid Right Circular Cylinder)



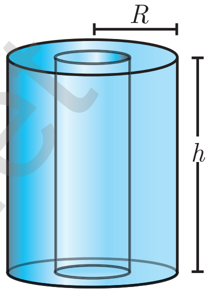

படம் 7.25

'$r$' அலகுகள் ஆரமும், '$h$' அலகுகள் உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் கன அளவு

$$V = \text{(அடிப்பரப்பு)} \times \text{(உயரம்)} = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h \text{ க. அ}$$

எனவே, **உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$ க. அ**

### 7.3.2 உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட பொருளின் கன அளவு) (Volume of a Hollow Cylinder)




படம் 7.26

$R$ மற்றும் $r$ என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க. மேலும் $h$ என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

கன அளவு $V$= (வெளி உருளையின் கன அளவு) – (உள் உருளையின் கன அளவு)

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

**உள்ளீடற்ற உருளையின் கனஅளவு $= \pi(R^2 - r^2)h$ க. அ**

**எடுத்துக்காட்டு 7.15** உயரம் 2 மீ மற்றும் அடிப்பரப்பு 250 ச.மீ கொண்ட ஓர் உருளையின் கனஅளவைக் காண்க.

**தீர்வு** உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே $r$ மற்றும் $h$ என்க.

இங்கு, உயரம் $h = 2$ மீ, அடிப்பரப்பு $= 250$ ச.மீ

உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$ க.அ

$=$ அடிப்பரப்பு $\times h$

$= 250 \times 2 = 500$ மீ$^3$

எனவே, உருளையின் கனஅளவு $= 500$ க.மீ

**சிந்தனைக் களம்**

1. ஓர் உருளையின் உயரம் அதன் ஆரத்தின் வர்க்கத்தோடு எதிர் விகிதத் தொடர்பு உடையது எனில், அதன் கன அளவு __________ ஆகும்.
2. '$r$' ஆரமும் '$h$' உயரமும் உடைய ஒரு உருளையின் கன அளவை, அதன் (அ) ஆரம் பாதியாகும்போது காண்க. (ஆ) உயரம் பாதியாகும்போது காண்க.

**எடுத்துக்காட்டு 7.16** ஓர் உருளை வடிவ தண்ணீர் தொட்டியின் கன அளவு $1.078 \times 10^6$ லிட்டர் ஆகும். தொட்டியின் விட்டம் 7 மீ எனில், அதன் உயரம் காண்க.

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

தொட்டியின் கனஅளவு $= 1.078 \times 10^6 = 1078000$ லிட்டர்

$= 1078$ மீ$^3$ (ஏனெனில் $1l = \frac{1}{1000}$ மீ$^3$)

இங்கு, விட்டம் $= 7$ மீ எனில், ஆரம் $= \frac{7}{2}$ மீ

தொட்டியின் கன அளவு $= \pi r^2 h$ க. அ

$$1078 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$$

ஆகவே, தொட்டியின் உயரம் 28 மீ ஆகும்.





X_Ch 7 TM.indd 293 16-04-2019 10:19:41

**எடுத்துக்காட்டு 7.17** ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 9 செ.மீ, 21 செ.மீ மற்றும் 28 செ.மீ ஆகும். உருளையை உருவாக்கத் தேவைப்படும் இரும்பின் கன அளவைக் காண்க.

**தீர்வு** உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற ஆரம் மற்றும் வெளிப்புற ஆரம் முறையே $h, r$ மற்றும் $R$ என்க.

இங்கு, $r = 21$செ.மீ, $R = 28$ செ.மீ, $h = 9$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு $= \pi(R^2 - r^2)h$ க.அ

$$= \frac{22}{7}(28^2 - 21^2) \times 9$$

$$= \frac{22}{7}(784 - 441) \times 9 \ = 9702$$

ஆகவே, தேவையான இரும்பின் கன அளவு $= 9702$ க. செ.மீ

**எடுத்துக்காட்டு 7.18** படம் 7.27-ல் உள்ள உருளை $A$ மற்றும் $B$ -ல்

(i) எந்த உருளையின் கன அளவு அதிகமாக இருக்கும்?

(ii) அதிகக் கன அளவு கொண்ட உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பு அதிகமாக இருக்குமா எனச் சோதிக்க.

(iii) உருளை A மற்றும் B–ன் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க.

**தீர்வு**

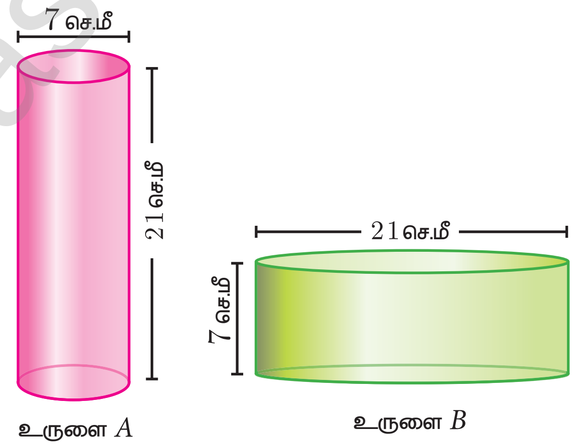
(i) உருளையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$ க.அ

உருளை $A$ -ன் கனஅளவு $= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 21$

$= 808.5$ செ.மீ$^3$

உருளை $B$ -ன் கனஅளவு $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 7$

$= 2425.5$ செ.மீ$^3$




படம் 7.27

ஆகவே, உருளை B–ன் கன அளவு உருளை $A$-ன் கன அளவை விட அதிகம் ஆகும்.

(ii) உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h + r)$ ச.அ

உருளை $A$ -ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times (21 + 3.5) = 539$ செ.மீ$^2$

உருளை $B$ -ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times (7 + 10.5) = 1155$ செ.மீ$^2$

ஆகவே, கன அளவு அதிகம் கொண்ட உருளை $B$-ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு அதிகமாக உள்ளது.

(iii) $\frac{\text{உருளை} A\text{-ன் கனஅளவு}}{\text{உருளை } B\text{-ன் கன அளவு}} = \frac{808.5}{2425.5} = \frac{1}{3}$

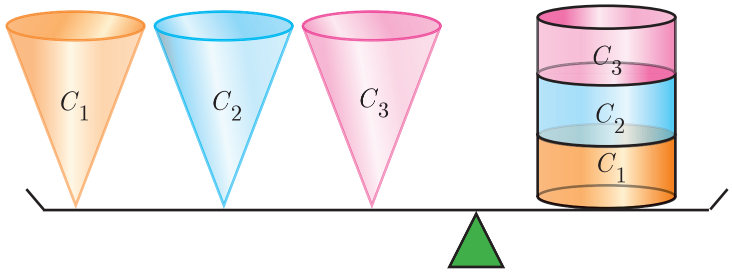
ஆகவே, உருளை $A$ மற்றும் $B$ -ன் கன அளவுகளின் விகிதம் 1:3.

### 7.3.3 நேர்வட்டக் கூம்பின் கன அளவு (Volume of a right circular cone)

ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தை $r$ மற்றும் $h$ என்க.

கூம்பின் கனஅளவு, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ க.அ

**செயல் விளக்கம்**




- சமஅளவு ஆரம் மற்றும் உயரம் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையையும், மூன்று நேர்வட்டக் கூம்புகளையும் எடுத்துக் கொள்க.
- இடப்பக்கத்தில் மூன்று கூம்புகளில் உள்ள பொருட்கள் அனைத்தும் சரியாக வலப்பக்கத்தில் இருக்கும் உருளையில் அடைபடுகிறது.

படம் 7.28

படம் 7.28-லிருந்து, $3\times$ (ஒரு கூம்பின் கன அளவு) $=$ உருளையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$ க.அ.

**கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ க.அ.**

**எடுத்துக்காட்டு 7.19** ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு $11088$ க. செ.மீ ஆகும். கூம்பின் உயரம் $24$ செ.மீ எனில், அதன் ஆரம் காண்க.

**தீர்வு** கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம், $h$ மற்றும் $r$ என்க..

இங்கு, $h=24$ செ.மீ, கன அளவு $=11088$ க.செ.மீ

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 11088$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 24 = 11088$$

$$r^2 = 441$$

ஆகவே, கூம்பின் ஆரம் $r = 21$ செ.மீ.

**சிந்தனைக் களம்**

1. கீழ்க்கண்டவைகள் சமமாக அமையுமாறு ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பைக் காண முடியுமா?
   (i) உயரம் மற்றும் சாயுயரம் (ii) ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் (iii) உயரம் மற்றும் ஆரம்
2. இரு கூம்புகளின் கன அளவுகள் சமம் எனில், அவற்றின் ஆரம் மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றின் விகிதம் காண்க.

**எடுத்துக்காட்டு 7.20** இரு கூம்புகளுடைய கன அளவுகளின் விகிதம் $2:3$ ஆகும். இரண்டாம் கூம்பின் உயரம் முதல் கூம்பின் உயரத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில், அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதம் காண்க.

**தீர்வு** $r_1$ $h_1$ என்பன முதல் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. $r_2$ மற்றும் $h_2$ என்பன இரண்டாம் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, $h_2 = 2h_1$ மற்றும் $\dfrac{\text{முதல் கூம்பின் கனஅளவு}}{\text{இரண்டாம் கூம்பின் கனஅளவு}} = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

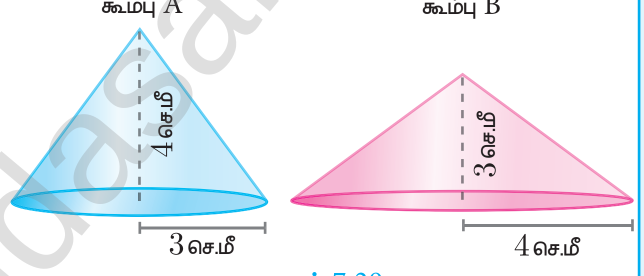
$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \times \frac{h_1}{2h_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{3} \quad \text{இதிலிருந்து} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ஆகவே, ஆரங்களின் விகிதம் $= 2 : \sqrt{3}$

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு கூம்பின் கன அளவு என்பது அதன் அடிப்புறப்பரப்பு மற்றும் _______ -ன் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.
2. ஒரு கூம்பின் ஆரம் இரு மடங்கானால் அதன் கன அளவு _______ மடங்காகும்.
3. படம் 7.29-ல் உள்ள கூம்புகளைக் கருதுக.
   (i) கணக்கீடுகள் செய்யாமல் எந்தக் கூம்பின் கன அளவு அதிகம் எனக் காண்க.
   (ii) அதிகக் கன அளவு உடைய கூம்பின் புறப்பரப்பு அதிகம் என்பதைச் சரிபார்க்க.
   (iii) கூம்பு $A$-ன் கனஅளவு : கூம்பு $B$-ன் கன அளவு = ?

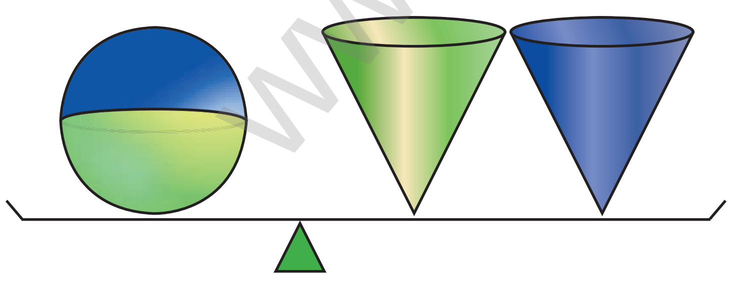


படம் 7.29

### 7.3.4 கோளத்தின் கன அளவு (Volume of sphere)

ஒரு கோளத்தின் ஆரம் $r$ எனில், அதன் கன அளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ க.அ

**செயல்விளக்கம்**



- சமமான ஆரத்தையும், உயரத்தையும் கொண்ட இரு நேர்வட்டக் கூம்புகளையும் அக்கூம்புகளின் உயரத்துக்குச் சமமான விட்டம் கொண்ட ஒரு கோளத்தையும் கருதுக.
- வலப்பக்கத்திலுள்ள இரு கூம்புகளின் பொருள்கள் முழுவதுமாக சரியாக இடப்பக்கத்திலுள்ள கோளத்தினுள் அடைபடுகிறது.

படம் 7.30

படம் 7.30–லிருந்து,

கோளத்தின் கனஅளவு $= 2 \times$ (கூம்பின் கனஅளவு)

(கோளம் மற்றும் கூம்பின் விட்டங்கள் கூம்பின் உயர்த்திற்குச் சமம்)

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 \left(2r\right), \quad (\text{ஏனெனில் } h = 2r)$$

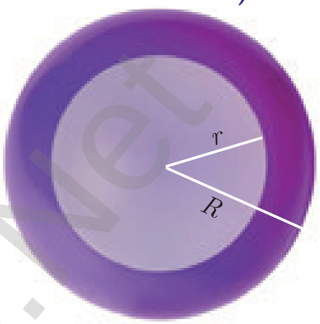
கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$ க.அ

### 7.3.5 உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட பொருளின் கனஅளவு) Volume of a hollow sphere / spherical shell (volume of the material used)

$r$ மற்றும் $R$ என்பன ஓர் உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் என்க.

உட்புற மற்றும் வெளிப்புறக் கோளங்களுக்கிடையேயான கனஅளவு

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$



படம் 7.31

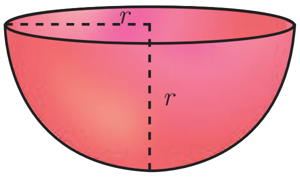
உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அ

### 7.3.6 திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of solid hemisphere)

$r$ என்பது திண்ம அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்க.

அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{1}{2}$ (கோளத்தின் கன அளவு)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$



படம் 7.32

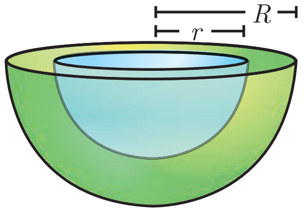
அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ க.அ

### 7.3.7 உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட பொருளின் கனஅளவு) [Volume of Hollow Hemisphere (volume of the material used)]

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே $r$ மற்றும் $R$ என்க.

உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் கன அளவு = வெளி அரைக் கோளத்தின் கன அளவு − உள் அரைக் கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$



படம் 7.33

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அ

**சிந்தனைக் களம்**

ஒரு கூம்பு, ஓர் அரைக்கோளம் மற்றும் ஓர் உருளை ஆகியவற்றின் அடிப்புறப் பரப்புகள் சமம் ஆகும். உருளை மற்றும் கூம்பின் உயரங்கள் ஆரத்துக்குச் சமம் எனில், இவை மூன்றின் கன அளவுகள் சமமா?

**எடுத்துக்காட்டு 7.21** ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு 29106 க. செ.மீ. மூன்றில் இரண்டு பங்கு கன அளவுள்ள மற்றோர் அரைக்கோளம் இதிலிருந்து செதுக்கப்படுமானால் புதிய அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்ன?

**தீர்வு** $r$ என்பது செதுக்கப்பட்ட அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்க.

அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= 29106$ க.செ.மீ

புதிய அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}$ (முந்தைய அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு)

$$= \frac{2}{3} \times 29106$$

புதிய அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= 19404$ க.செ.மீ

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404$$

$$r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261$$

$$r = \sqrt[3]{9261} = 21 \text{ செ.மீ}$$

ஆகவே, புதிய அரைக்கோளத்தின் ஆரம் $21$ செ.மீ ஆகும்.

**சிந்தனைக் களம்**

1. கோளம் மற்றும் அரைக்கோள வடிவில் உள்ள ஏதேனும் இரு பொருட்களைக் குறிப்பிடுக.
2. ஒரு கோளத்தின் மீப்பெரு வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் தளம் கோளத்தை _________ பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.
3. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு ஆகியவை சம அளவில் இருக்குமெனில், கோளத்தின் ஆரம் _________.

**எடுத்துக்காட்டு 7.22** ஓர் உள்ளீடற்ற பித்தளை கோளத்தின் உள்விட்டம் $14$ செ.மீ, தடிமன் $1$ மி.மீ மற்றும் பித்தளையின் அடர்த்தி $17.3$ கிராம் / க. செ.மீ எனில், கோளத்தின் எடையைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** $r$, $R$ என்பன முறையே உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உள் ஆரம் மற்றும் வெளி ஆரம் என்க.

இங்கு, உள்விட்டம் $d = 14$ செ.மீ; உள் ஆரம் $r = 7$ செ.மீ; தடிமன் $= 1$ மி.மீ $= \frac{1}{10}$ செ.மீ

வெளி ஆரம் $R = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10} = 7.1$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$ க.அ.

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}\left(357.91 - 343\right) = 62.48 \text{ க. செ.மீ}$$

ஆனால், $1$ க.செ.மீ பித்தளையின் எடை $= 17.3$ கி

மொத்த எடை $= 17.3 \times 62.48 = 1080.90$ கி.

எனவே, மொத்த எடை $1080.90$ கிராம் ஆகும்

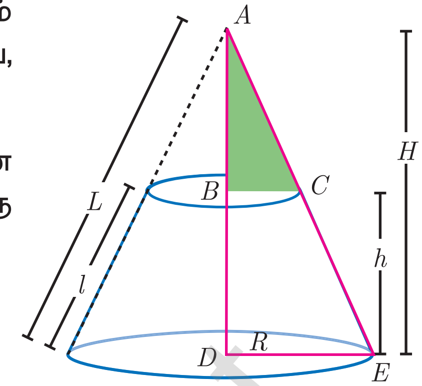
**முன்னேற்றச் சோதனை**

1. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றின் விகிதம் என்ன?
2. ஓர் அரைக்கோளத்தின் உயரம் மற்றும் ஆரத்திற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு _______ ஆகும்.
3. ஒரு கோளத்தின் கனஅளவு என்பது அதன் புறப்பரப்பு மற்றும் ____ன் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

### 7.3.8 கூம்பினுடைய இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு (Volume of frustum of a cone)

$H$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே கூம்பு மற்றும் இடைக்கண்டத்தின் உயரம் என்க. இவற்றின் சாயுயரம் முறையே, $L$ மற்றும் $l$ என்க.

$R$ மற்றும் $r$ ஆகியவை இடைக்கண்டத்தின் இருபுறங்களின் ஆரங்கள் எனில், இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு என்பது இரு கூம்புகளின் கன அளவுகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.




படம் 7.34

எனவே $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$

முக்கோணங்கள் $ABC$ மற்றும் $ADE$ ஆகியவை வடிவொத்தவை. எனவே, ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

எனவே, $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$

$$H = \frac{hR}{R-r} \qquad \ldots(1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$$

$$= \frac{\pi}{3} H(R^2 - r^2) + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{hR}{R-r}(R^2 - r^2) + \frac{\pi}{3} r^2 h \quad [(1) \text{ ஐப் பயன்படுத்த}]$$

$$= \frac{\pi}{3} hR(R+r) + \frac{\pi}{3} r^2 h$$

**சிந்தனைக் களம்**

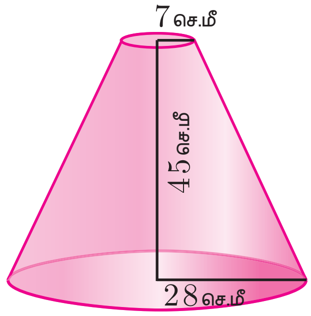
ஒரு கூம்பின் இடைக் கண்டத்தின் கன அளவைக் கொண்டு முழுக் கூம்பின் கன அளவைக் காண முடியுமா?

**இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு $= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ க.அ**

**எடுத்துக்காட்டு 7.23** 45 செ.மீ உயரமுள்ள ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு புற ஆரங்கள் முறையே 28 செ.மீ மற்றும் 7 செ.மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் கன அளவைக் காண்க..

**தீர்வு** இடைக்கண்டத்தின் உயரம் $h$ எனவும் அதன் இருபுற ஆரங்கள் $R$ மற்றும் $r$ எனவும் கொள்க..

இங்கு, $h = 45$ செ.மீ, $R = 28$ செ.மீ, $r = 7$ செ.மீ




படம் 7.35

எனவே, இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi h\left[R^2 + Rr + r^2\right]$ க.அ

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45 \times \left[28^2 + (28 \times 7) + 7^2\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 1029 = 48510$$

எனவே, இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு 48510 க. செ.மீ ஆகும்.

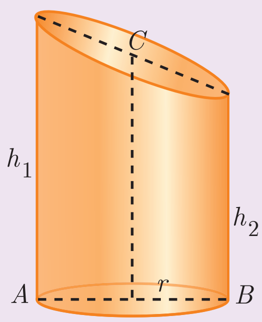
உங்களுக்குத் தெரியுமா?

ஓர் உருளையின் சாய்ந்த இடைக்கண்டத்தின் படம் தரப்பட்டுள்ளது. உருளையை, $C$ வழியாக $AB$ என்ற அடிப்பரப்பிற்கு இணையில்லாத ஒரு தளம் வெட்டினால், கிடைக்கும்

இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r \times \dfrac{h_1 + h_2}{2}$ ச.அ

$h_1$ மற்றும் $h_2$ என்பன சாய்ந்த இடைக்கண்டத்தின் அதிகபட்ச மற்றும் குறைந்தபட்ச உயரங்கள் ஆகும்.

மேலும், இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு $= \pi r^2 \times \left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right)$ க.அ



படம் 7.36

## பயிற்சி 7.2

1. 10 மீ உட்புற விட்டம் மற்றும் 14 மீ ஆழம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவக் கிணற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மண் கொண்டு 5 மீ அகலத்தில் கிணற்றைச் சுற்றி மேடை அமைக்கப்படுகிறது எனில், மேடையின் உயரத்தைக் காண்க.

2. விட்டம் 20 செ.மீ உள்ள ஓர் உருளை வடிவக் கண்ணாடிக் குவளையில் 9 செ.மீ உயரத்திற்கு நீர் உள்ளது. ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 4 செ.மீ உடைய ஓர் சிறிய உலோக உருளை, நீரில் முழுமையாக மூழ்கும்போது ஏற்படும் நீரின் உயர்வைக் கணக்கிடுக.

3. 484 செ.மீ சுற்றளவுள்ள ஒரு மரக்கூம்பின் உயரம் 105 செ.மீ எனில், கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

4. ஆரம் 10 மீட்டரும், உயரம் 15 மீட்டரும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கொள்கலன் முழுமையாகப் பெட்ரோலால் நிரம்பியுள்ளது. நிமிடத்திற்கு 25 கன மீட்டர் பெட்ரோல் கொள்கலனின் அடிப்புறம் வழியாக வெளியேற்றப்பட்டால் எத்தனை நிமிடங்களில் கொள்கலன் காலியாகும். விடையை நிமிடத் திருத்தமாகத் தருக.

5. 6 செ.மீ, 8 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அதன் செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களை மைய அச்சுகளாகக் கொண்டு சுழற்றும்போது ஏற்படும் திண்மங்களின் கன அளவுகளின் வித்தியாசம் காண்க.

6. சம ஆரங்கள் கொண்ட இரு கூம்புகளின் கன அளவுகள் 3600 க. செ.மீ மற்றும் 5040 க. செ.மீ எனில், உயரங்களின் விகிதம் காண்க.

7. இரு கோளங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 4:7 எனில், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க.

8. ஒரு திண்மக் கோளம் மற்றும் திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு சமமானதாக இருக்குமானால் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் $3\sqrt{3} : 4$ என நிரூபி.

9. ஓர் உள்ளீடற்ற தாமிரக் கோளத்தின் வெளிப்புற, உட்புறப் புறப்பரப்புகள் முறையே $576\pi$ ச. செ.மீ மற்றும் $324\pi$ ச. செ.மீ எனில், கோளத்தை உருவாக்கத் தேவையான தாமிரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

10. உயரம் 16 செ.மீ உடைய ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் அமைந்த கொள்கலன் ஒன்றின் மேற்புறம் திறந்த நிலையில் உள்ளது. கீழ்ப்புற ஆரம் 8 செ.மீ மற்றும் மேற்புற ஆரம் 20 செ.மீ கொண்ட கொள்கலனில் முழுமையாகப் பால் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை ₹40 எனில், நிரப்பப்படும் பாலின் மொத்த விலையைக் காண்க.

## 7.4 இணைந்த உருவங்களின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு (Volume and Surface Area of Combined Solids)

படம் 7.37

படம் 7.37–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உருவங்களை உற்று நோக்குக. இவைகள் இணைந்த உருவங்கள் ஆகும். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட திண்மங்களை இணைப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் ஒரு திண்மம் 'இணைந்த உருவம்' எனப்படும்.

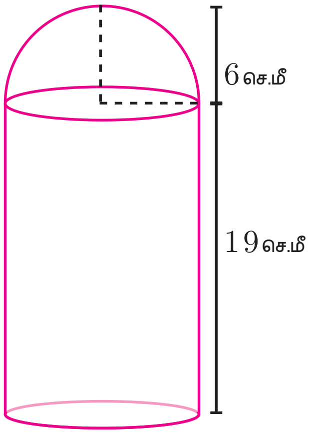
இணைந்த உருவங்கள் எனும் கருத்து பொம்மைகள் செய்தல், கட்டுமானம் மற்றும் தச்சு போன்ற துறைகளில் பயன்படுகிறது.

இணைந்த உருவங்களின் புறப்பரப்பு என்பது அவற்றின் வெளியே கண்ணுக்குப் புலப்படும் புறப்பரப்பு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கூம்பு மீது ஓர் அரைக்கோளம் பொருந்தினால் அமையும் திண்மத்தின் புறப்பரப்பு என்பது கூம்பின் வளைபரப்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஆகும். இங்குக் கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் ஆகிய இரண்டின் அடிப்பரப்புகள் சேர்க்கப்படவில்லை. ஏனெனில், கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இரண்டும் இணைந்தபின் அவற்றின் அடிப்புறப்பரப்புகள் கண்ணுக்குத் தெரிவதில்லை.

ஆனால், இரு திண்ம உருவங்களின் கன அளவுகளின் கூடுதல் இணைந்த உருவத்தின் கன அளவு ஆகும் என்பதை நினைவில் கொள்க.

**எடுத்துக்காட்டு 7.24** ஓர் உருளையின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் இணைந்தவாறு உள்ள ஒரு பொம்மையின் மொத்த உயரம் 25 செ.மீ ஆகும். அதன் விட்டம் 12 செ.மீ எனில், பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** $r$ மற்றும் $h$ என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.



படம் 7.38

இங்கு, விட்டம் $d = 12$ செ.மீ அதாவது, ஆரம் $r = 6$ செ.மீ

மொத்த உயரம் $h = 25$ செ.மீ

எனவே, உருளையின் உயரம் $= 25 - 6 = 19$ செ.மீ

பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = உருளையின் வளைபரப்பு
+ அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு
+ உருளையின் அடிப்பரப்பு

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + 3r) \text{ ச. அ}$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times (38 + 18)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 56 = 1056$$

ஆகவே, பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1056 ச. செ.மீ ஆகும்.

படம் 7.39

**எடுத்துக்காட்டு 7.25** ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் மீது அரை உருளை உள்ளவாறு ஒரு நகைப்பெட்டி (படம் 7.39) உள்ளது. கனச் செவ்வகத்தின் பரிமாணங்கள் 30 செ.மீ $\times$ 15 செ.மீ $\times 10$ செ.மீ எனில், நகைப்பெட்டியின் கன அளவு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

**தீர்வு** கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே $l,\ b$ மற்றும் $h_1$ என்க.

உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே $r$ மற்றும் $h_2$ என்க.

பெட்டியின் கனஅளவு $=$ கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு + $\frac{1}{2}$(உருளையின் கன அளவு)

$$= \left[(l \times b \times h_1) + \frac{1}{2}(\pi r^2 h_2)\right] \text{ க. அ}$$

$$= (30 \times 15 \times 10) + \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times 30\right)$$

$$= 4500 + 2651.79 = 7151.79$$

ஆகவே, பெட்டியின் கன அளவு $7151.79$ க. செ.மீ ஆகும்.

பெட்டியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு= கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப்பரப்பு

+ $\frac{1}{2}$(உருளையின் வளைபரப்பு) + கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பரப்பு

$$= \left[2(l+b)h_1 + \frac{1}{2}(2\pi r h_2) + l \times b\right] \text{ ச.அ}$$

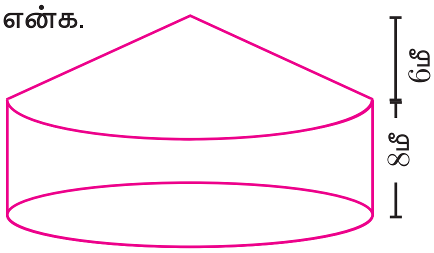
$$= 2(45 \times 10) + \left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times 30\right) + 30 \times 15$$

$$= 900 + 707.14 + 450 = 2057.14$$

ஆகவே, பெட்டியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $2057.14$ ச. செ.மீ

**எடுத்துக்காட்டு 7.26** அருள் தனது குடும்ப விழாவிற்கு $150$ நபர்கள் தங்குவதற்கு ஒரு கூடாரம் அமைக்கிறார். கூடாரத்தின் அடிப்பகுதி உருளை வடிவிலும் மேற்பகுதி கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. ஒருவர் தங்குவதற்கு $4$ ச. மீ அடிப்பகுதி பரப்பும் $40$ க. மீ காற்றும் தேவைப்படுகிறது. கூடாரத்தில் உருளையின் உயரம் $8$ மீ எனில், கூம்பின் உயரம் காண்க.

**தீர்வு** உருளை மற்றும் கூம்பின் உயரம் முறையே $h_1$ மற்றும் $h_2$ என்க.




படம் 7.40

இங்கு, ஒருவருக்குத் தேவையான பரப்பு $= 4$ ச.மீ.

நபர்களின் எண்ணிக்கை $= 150$

தேவையான மொத்த அடிப்பரப்பு $= 150 \times 4$

$$\pi r^2 = 600$$

$$r^2 = 600 \times \frac{7}{22} = \frac{2100}{11} \quad \ldots (1)$$

ஒருவருக்குத் தேவையான காற்றின் கனஅளவு $= 40$ க.மீ.

$150$ நபர்களுக்குத் தேவையான காற்றின் கன அளவு$= 150 \times 40 = 6000$ க. மீ.

$$\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = 6000 \quad \text{இதிலிருந்து, } \pi r^2\left(h_1 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000$$

$$\frac{22}{7} \times \frac{2100}{11}\left(8 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000 \qquad [\,(1) \text{ ஐப் பிரதியிட}]$$

$$8 + \frac{1}{3}h_2 = \frac{6000 \times 7 \times 11}{22 \times 2100}$$

$$\frac{1}{3}h_2 = 10 - 8 = 2 \ ; \ h_2 = 6$$

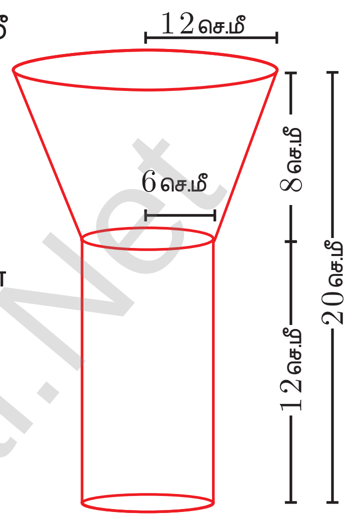
ஆகவே, கூம்பின் உயரம் $6$ மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.27** ஓர் உருளையின் மீது ஓர் இடைக்கண்டம் இணைந்தவாறு அமைந்த ஒரு புனலின் (funnel) மொத்த உயரம் $20$ செ.மீ. உருளையின் உயரம் $12$ செ.மீ மற்றும் விட்டம் $12$ செ.மீ ஆகும். இடைக்கண்டத்தின் மேற்புற விட்டம் $24$ செ.மீ எனில், புனலின் வெளிப்புறப் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

**தீர்வு** $h_1$ மற்றும் $h_2$ என்பன முறையே இடைக்கண்டம் மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க.

$R$ மற்றும் $r$ என்பன இடைக்கண்டத்தின் மேல் மற்றும் கீழ்ப்புற ஆரங்கள் என்க.

இங்கு, $R = 12$ செ.மீ, $r = 6$ செ.மீ, $h_2 = 12$ செ.மீ $h_1 = 20-12 = 8$ செ.மீ



படம் 7.41

இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம் $l = \sqrt{(R-r)^2 + h_1^2}$ அலகுகள்

$= \sqrt{36+64}$

$l = 10$ செ.மீ

வெளிப்புறப் பரப்பு $= 2\pi r h_2 + \pi(R+r)l$ ச.அலகுகள்

$= \pi\left[2rh_2 + (R+r)l\right]$

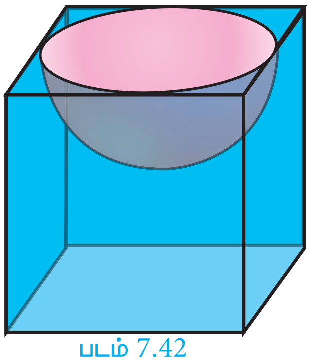
$= \pi\left[(2\times 6\times 12) + (18\times 10)\right]$

$= \pi\left[144+180\right]$

$= \frac{22}{7}\times 324 = 1018.28$

எனவே, புனலின் வெளிப்புறப் பரப்பு $1018.28$ ச. செ.மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.28** கனச்சதுரத்தின் ஒரு பகுதியில் $l$ அலகுகள் விட்டமுள்ள (கனசதுரத்தின் பக்கஅளவிற்குச் சமமான) ஓர் அரைக்கோளம் (படத்தில் உள்ளதுபோல) வெட்டப்பட்டால், மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.


படம் 7.42

**தீர்வு** அரைக்கோளத்தின் ஆரம் $r$ என்க.

இங்கு, அரைக்கோளத்தின் விட்டம் $=$ கனச்சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $= l$ ஆகும்.

ஆரம் $r = \frac{l}{2}$ அலகு

தற்போது, மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப்பரப்பு $=$ கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு

$+$ அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$-$ அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு

$= 6\times(\text{பக்கம்})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 6\times(\text{பக்கம்})^2 + \pi r^2$

$= 6\times(l)^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(24+\pi)l^2$

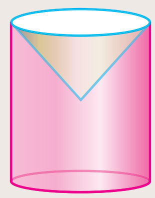
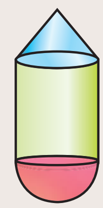
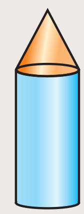
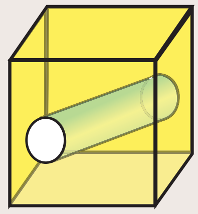
ஆகவே, மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப்பரப்பு $= \frac{1}{4}(24+\pi)l^2$ ச. அ.





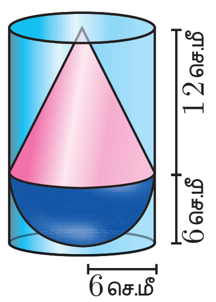
X_Ch 7 TM.indd 303 16-04-2019 10:19:51

## செயல்பாடு 4

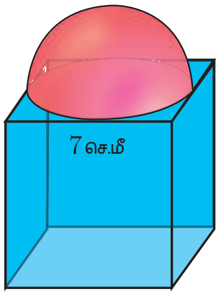
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| இணைந்த உருவங்கள் |  |  |  |  |
| இணைக்கப்பட்டுள்ள திண்மங்கள் | | | | |
| இணைந்த உருவத்தின் புறப்பரப்பு | | | | |

## பயிற்சி 7.3

1. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மேல் ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையைப் பொருத்திய வடிவத்தில் அமைந்த ஒரு கிண்ணத்தின் விட்டம் $14$ செ.மீ மற்றும் உயரம் $13$ செ.மீ எனில், அதன் கொள்ளளவைக் காண்க.
2. நாதன் என்ற பொறியியல் மாணவர் ஓர் உருளையின் இருபுறமும் கூம்புகள் உள்ளவாறு மாதிரி ஒன்றை உருவாக்கினார். மாதிரியின் நீளம் $12$ செ.மீ மற்றும் விட்டம் $3$ செ.மீ ஆகும். ஒவ்வொரு கூம்பின் உயரமும் $2$ செ.மீ இருக்குமானால் நாதன் உருவாக்கிய மாதிரியின் கனஅளவைக் காண்க
3. உயரம் $2.4$ செ.மீ மற்றும் விட்டம் $1.4$ செ.மீ கொண்ட ஒரு திண்ம உருளையில் இருந்து அதே விட்டமும் உயரமும் உள்ள ஒரு கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டால் மீதமுள்ள திண்மத்தின் கனஅளவு எவ்வளவு கன செ.மீ ஆகும்?
4. ஒரு திண்மத்தின் அடிப்புறம் $6$ செ.மீ ஆரம் உடைய அரைக்கோள வடிவிலும் மேற்புறம் $12$ செ.மீ உயரமும் $6$ செ.மீ ஆரமும் கொண்ட கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. முழுவதும் நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஓர் உருளையின் அடிப்புறத்தைத் தொடுமாறு அத்திண்மம் வைக்கப்படும்போது வெளியேறும் நீரின் கனஅளவைக் காண்க. உருளையின் ஆரம் $6$ செ.மீ மற்றும் உயரம் $18$ செ.மீ எனக் கொள்க.




5. ஒரு மருந்து குப்பி, ஓர் உருளையின் இருபுறமும் அரைக் கோளம் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. குப்பியின் மொத்த நீளம் $12$ மி.மீ மற்றும் விட்டம் $3$ மி.மீ எனில், அதில் அடைக்கப்படும் மருந்தின் கனஅளவைக் காண்க?
6. $7$ செ.மீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரத்தின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் படத்தில் உள்ளவாறு பொருந்தியுள்ளது. திண்மத்தின் புறப்பரப்பு காண்க.




7. ஆரம் $r$ அலகுகள் கொண்ட ஒரு கோளம் ஒரு நேர் வட்ட உருளையினுள் மிகச் சரியாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் கணக்கிடுக.
   (i) கோளத்தின் புறப்பரப்பு (ii) உருளையின் வளைபரப்பு
   (iii) (i) மற்றும் (ii) –ல் பெறப்பட்ட பரப்புகளின் விகிதம்
8. ஓர் இறகுப்பந்தின், மேற்புறம் கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவிலும், கீழ்ப்புறம் அரைக்கோள வடிவிலும் உள்ளது. இடைக்கண்டத்தின் விட்டங்கள் $5$ செ.மீ மற்றும் $2$ செ.மீ ஆகவும் இறகுபந்தின் மொத்த உயரம் $7$ செ.மீ ஆகவும் இருக்குமானால், இறகுப் பந்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

## 7.5 திண்மங்களை கனஅளவுகள் மாறாமல் மற்றொரு உருவத்திற்கு மாற்றி அமைத்தல் (Conversion of Solids from one shape to another with no change in Volume)

உருமாற்றம் அல்லது மாற்றத்தை நாம் அன்றாட வாழ்வில் பல சூழ்நிலைகளில் சந்திக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொற்கொல்லர் தங்க வில்லைகளை உருக்கி அணிகலன்களாக மாற்றுகிறார். ஒரு குழந்தை களிமண்ணைப் பல பொம்மைகளாக உருவாக்குகிறது. தச்சர் மரத்துண்டுகளைப் பல வீட்டு உபயோகப் பொருட்களாக உருமாற்றுகிறார். இதுபோல ஓர் உருவத்தை மற்றோர் உருவமாக மாற்றும் கருத்தானது பல்வேறு வகைகளில் நமக்குத் தேவைப்படுகிறது.

இந்தப் பகுதியில் மாறாக் கனஅளவுகளுடன் ஓர் உருவத்தை மற்றொரு உருவமாக மாற்றுவது பற்றிக் காண்போம்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.29** 16 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உலோகப் பந்து, உருக்கப்பட்டு 2 செ.மீ ஆரமுள்ள சிறு பந்துகளாக்கப்பட்டால், எத்தனை பந்துகள் கிடைக்கும்?

**தீர்வு** சிறிய உலோகப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $n$ என்க.

சிறிய மற்றும் பெரிய உலோகப் பந்துகளின் ஆரங்கள் முறையே $r$ மற்றும் $R$ என்க.

இங்கு, $R = 16$ செ.மீ, $r = 2$ செ.மீ.

தற்போது, $n \times$ (ஒரு சிறிய உலோகப் பந்தின் கனஅளவு) $=$ பெரிய உலோகப் பந்தின் கனஅளவு

$$n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$n\left(\frac{4}{3}\pi \times 2^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 16^3$$

$$8n = 4096 \quad \text{எனவே} \quad n = 512$$

ஆகவே, சிறிய உலோகப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 512 ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.30** களிமண் கொண்டு செய்யப்பட்ட 24 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு கூம்பை ஒரு குழந்தை அதே ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றுகிறது எனில் உருளையின் உயரம் காண்க.

**தீர்வு** $h_1$ மற்றும் $h_2$ என்பன முறையே கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க.

$r$ என்பது கூம்பின் ஆரம் என்க.

இங்கு கூம்பின் உயரம் $h$=24 செ.மீ, கூம்பு மற்றும் உருளையின் ஆரம் $r$ செ.மீ

இங்கு, உருளையின் கனஅளவு $=$ கூம்பின் கன அளவு

$$\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \times h_1 \text{-லிருந்து } h_2 = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

எனவே, உருளையின் உயரம் 8 செ. மீ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 7.31** 6 செ.மீ ஆரம் மற்றும் 15 செ.மீ உயரம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவப் பாத்திரத்திம் முழுவதுமாக பனிக்கூழ் (Ice–cream) உள்ளது. அந்தப் பனிக்கூழானது, கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவத்தில் நிரப்பப்படுகிறது. கூம்பின் உயரம் 9 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 3 செ.மீ எனில், பாத்திரத்தில் உள்ள பனிக்கூழை நிரப்ப எத்தனைக் கூம்புகள் தேவை?

**தீர்வு** $h$ மற்றும் $r$ என்பன முறையே உருளையின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க.

இங்கு, $h$=15 செ.மீ, $r$=6 செ.மீ

உருளையின் கனஅளவு $V = \pi r^2 h$ க. அ

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15$$

$r_1 = 3$ செ.மீ மற்றும் $h_1 = 9$ செ.மீ என்பன கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் ஆகும்.

$r_1 = 3$ செ.மீ என்பது அரைக்காளத்தின் ஆரம் ஆகும்.

பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கனஅளவு = கூம்பின் கனஅளவு + அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r_1^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3$$

ஒரு பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{22}{7} \times 45$

எனவே, தேவையான கூம்புகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{\text{உருளையின் கனஅளவு}}{\text{ஒரு பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கனஅளவு}}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15}{\frac{22}{7} \times 45} = 12$$

ஆகவே, தேவையான கூம்புகளின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

### செயல்பாடு 5

ஓர் உருளையினுள் இரு பந்துகள் படத்தில் உள்ளவாறு சரியாகப் பொருந்தியுள்ளன. ஒரு பந்தின் ஆரம் 3 செ.மீ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

(i) உருளையின் உயரம்

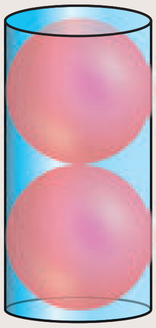
(ii) உருளையின் ஆரம்

(iii) உருளையின் கன அளவு

(iv) இரு பந்துகளின் கனஅளவு

(v) பந்துகளால் அடைபடாத உருளையின் கனஅளவு

(vi) உருளையில் பந்துகளின் கனஅளவின் சதவீதம்



படம் 7.43

### பயிற்சி 7.4

1. 12 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் அலுமினியக் கோளம் உருக்கப்பட்டு 8 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் உயரம் காண்க.

2. 14 செ.மீ விட்டமுள்ள குழாயிலிருந்து 15 கி.மீ / மணி என்ற வேகத்தில் 50 மீ நீளம் மற்றும் 44 மீ அகலம் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவத் தொட்டியினுள் தண்ணீர் பாய்கிறது. எவ்வளவு நேரத்தில் தண்ணீரின் மட்டம் 21 செ.மீ-க்கு உயரும்.

3. முழுமையாக நீரால் நிரம்பியுள்ள ஒரு கூம்பு வடிவக் குடுவையின் ஆரம் $r$ அலகுகள் மற்றும் உயரம் $h$ அலகுகள் ஆகும். நீரானது $xr$ அலகுகள் ஆரமுள்ள மற்றொரு உருளை வடிவக் குடுவைக்கு மாற்றப்பட்டால் நீரின் உயரம் காண்க.

4. விட்டம் $14$ செ.மீ, உயரம் $8$ செ.மீ உடைய ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு, ஓர் உள்ளீடற்ற கோளமாக உருமாற்றப்படுகிறது. கோளத்தின் வெளிவிட்டம் $10$ செ.மீ எனில், உள்விட்டத்தைக் காண்க.

5. சீனு வீட்டின் மேல்நிலை நீர்த்தொட்டி உருளை வடிவில் உள்ளது. அதன் ஆரம் $60$ செ.மீ மற்றும் உயரம் $105$ செ.மீ. $2$ மீ $\times$ $1.5$ மீ $\times$ $1$ மீ பரிமாணங்களை உடைய ஒரு கனச்செவ்வகக் கீழ்நிலை நீர் தொட்டியிலிருந்து நீர் உந்தப்பட்டு மேலேயுள்ள உருளை வடிவத் தொட்டி முழுமையாக நிரப்பப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் கீழ்த் தொட்டியில் நீர் முழுமையாக இருப்பதாகக் கருதுக. மேல் தொட்டிக்கு நீர் ஏற்றிய பிறகு மீதமுள்ள நீரின் கனஅளவைக் காண்க.

6. ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே $6$ செ.மீ மற்றும் $10$ செ.மீ ஆகும். அது உருக்கப்பட்டு $14$ செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையாக்கப்பட்டால், அவ்வுருளையின் உயரம் காண்க.

7. $6$ செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம் உருக்கப்பட்டுச் சீரான தடிமனுள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் வெளி ஆரம் $5$ செ.மீ மற்றும் உயரம் $32$ செ.மீ எனில், உருளையின் தடிமனைக் காண்க.

8. ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் விளிம்பு வரையில் பழச்சாறு நிரம்பியுள்ளது. உயரத்தைவிட $50\%$ அதிக ஆரம் கொண்ட உருளை வடிவப் பாத்திரத்திற்குப் பழச்சாறு மாற்றப்படுகிறது. அரைக்கோளம் மற்றும் உருளை ஆகியவற்றின் விட்டங்கள் சமமானால் கிண்ணத்திலிருந்து எவ்வளவு சதவீதப் பழச்சாறு உருளை வடிவ பத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்?

## பயிற்சி 7.5

LYU37I

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $15$ செ.மீ உயரமும் $16$ செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பு

   (1) $60\pi$ ச.செ.மீ (2) $68\pi$ ச.செ.மீ (3) $120\pi$ ச.செ.மீ (4) $136\pi$ ச.செ.மீ

2. $r$ அலகுகள் ஆரம் உடைய இரு சம அரைக்கோளங்களின் அடிப்பகுதிகள் இணைக்கப்படும் போது உருவாகும் திண்மத்தின் புறப்பரப்பு

   (1) $4\pi r^2$ ச. அ (2) $6\pi r^2$ ச. அ (3) $3\pi r^2$ ச. அ (4) $8\pi r^2$ ச. அ

3. ஆரம் $5$ செ.மீ மற்றும் சாயுயரம் $13$ செ.மீ உடைய நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம்

   (1) $12$ செ.மீ (2) $10$ செ.மீ (3) $13$ செ.மீ (4) $5$ செ.மீ

4. ஓர் உருளையின் உயரத்தை மாற்றாமல் அதன் ஆரத்தைப் பாதியாகக் கொண்டு புதிய உருளை உருவாக்கப்படுகிறது. புதிய மற்றும் முந்தைய உருளைகளின் கன அளவுகளின் விகிதம்

   (1) 1:2 (2) 1:4 (3) 1:6 (4) 1:8

5. ஓர் உருளையின் ஆரம் அதன் உயரத்தில் மூன்றில் ஒரு பங்கு எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு

   (1) $\dfrac{9\pi h^2}{8}$ ச. அ (2) $24\pi h^2$ ச. அ (3) $\dfrac{8\pi h^2}{9}$ ச. அ (4) $\dfrac{56\pi h^2}{9}$ ச. அ

6. ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளிப்புற மற்றும் உட்புற ஆரங்களின் கூடுதல் $14$ செ.மீ மற்றும் அதன் தடிமன் $4$ செ.மீ ஆகும். உருளையின் உயரம் $20$ செ.மீ எனில், அதனை உருவாக்கப் பயன்பட்ட பொருளின் கன அளவு

   (1) $5600\pi$ க. செ.மீ (2) $11200\pi$ க. செ.மீ (3) $56\pi$ க. செ.மீ (4) $3600\pi$ க. செ.மீ

7. ஒரு கூம்பின் அடிப்புற ஆரம் மும்மடங்காகவும் உயரம் இரு மடங்காகவும் மாறினால் கன அளவு எத்தனை மடங்காக மாறும்?
(1) 6 மடங்கு (2) 18 மடங்கு (3) 12 மடங்கு (4) மாற்றமில்லை

8. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு அதன் ஆரத்தினுடைய வர்க்கத்தின் _____ மடங்காகும்.
(1) $\pi$ (2) $4\pi$ (3) $3\pi$ (4) $2\pi$

9. $x$ செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம் அதே ஆரமுள்ள ஒரு கூம்பாக மாற்றப்படுகிறது எனில், கூம்பின் உயரம்
(1) $3x$ செ.மீ (2) $x$ செ.மீ (3) $4x$ செ.மீ (4) $2x$ செ.மீ

10. 16 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்ட ஆரங்கள் 8 செ.மீ மற்றும் 20 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு
(1) $3328\pi$ க. செ.மீ (2) $3228\pi$ க. செ.மீ (3) $3240\pi$ க. செ.மீ (4) $3340\pi$ க. செ.மீ

11. கீழ்க்காணும் எந்த இரு உருவங்களை இணைத்தால் ஓர் இறகுபந்தின் வடிவம் கிடைக்கும்.
(1) உருளை மற்றும் கோளம் (2) அரைக்கோளம் மற்றும் கூம்பு
(3) கோளம் மற்றும் கூம்பு (4) கூம்பின் இடைக்கண்டம் மற்றும் அரைக்கோளம்

12. $r_1$ அலகுகள் ஆரமுள்ள ஒரு கோளப்பந்து உருக்கப்பட்டு $r_2$ அலகுகள் ஆரமுடைய 8 சமகோள பந்துகளாக ஆக்கப்படுகிறது எனில், $r_1 : r_2$
(1) 2:1 (2) 1:2 (3) 4:1 (4) 1:4

13. 1 செ.மீ ஆரமும் 5 செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு மர உருளையிலிருந்து அதிகபட்சக் கன அளவு கொண்ட கோளம் வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது எனில், அதன் கன அளவு (க. செ.மீ–ல்)
(1) $\frac{4}{3}\pi$ (2) $\frac{10}{3}\pi$ (3) $5\pi$ (4) $\frac{20}{3}\pi$

14. இடைக்கண்டத்தை ஒரு பகுதியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம் முறையே $h_1$ அலகுகள் மற்றும் $r_1$ அலகுகள் ஆகும். இடைக்கண்டத்தின் உயரம் மற்றும் சிறிய பக்க ஆரம் முறையே $h_2$ அலகுகள் மற்றும் $r_2$ அலகுகள் மற்றும் $h_2 : h_1 = 1 : 2$ எனில், $r_2 : r_1$ –ன் மதிப்பு
(1) $1:3$ (2) $1:2$ (3) $2:1$ (4) $3:1$

15. சமமான விட்டம் மற்றும் உயரம் உடைய ஓர் உருளை, ஒரு கூம்பு மற்றும் ஒரு கோளத்தின் கன அளவுகளின் விகிதம்
(1) 1:2:3 (2) 2:1:3 (3) 1:3:2 (4) 3:1:2

## அலகுப் பயிற்சி - 7

1. 7 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளை வடிவ மை குடுவையின் விட்டம் 5 மி.மீ ஆகும். மை முழுமையாகவுள்ள உருளையைக் கொண்டு சராசரியாக 330 வார்த்தைகள் எழுதலாம். ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மை ஒரு பாட்டிலில் உள்ளது எனில், அதனைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகள் எழுதலாம்?

2. ஆரம் 1.75 மீ உள்ள ஓர் அரைக்கோள வடிவத் தொட்டி முற்றிலும் நீரால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. ஒரு குழாயின் மூலம் விநாடிக்கு 7 லிட்டர் வீதம் தொட்டியிலிருந்து நீர் வெளியேற்றப்படுமானால், தொட்டியை எவ்வளவு நேரத்தில் முழுவதுமாகக் காலி செய்யலாம்?

3. $r$ அலகுகள் ஆரம் கொண்ட ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்திலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படும் கூம்பின் மீப்பெரு கனஅளவு என்ன?

4. ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டம், 10 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளையுடன் இணைக்கப்பட்ட எண்ணெய்ப் புனலின் மொத்த உயரம் 22 செ.மீ ஆகும். உருளையின் விட்டம் 8 செ.மீ மற்றும்

புனலின் மேற்புற விட்டம் $18$ செ.மீ எனில், புனலை உருவாக்கத் தேவையான தகர அட்டையின் பரப்பைக் காண்க.

5. உயரம் $10$ செ.மீ மற்றும் விட்டம் $4.5$ செ.மீ உடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையை உருவாக்க $1.5$ செ.மீ விட்டமும், $2$ மி.மீ தடிமன் கொண்ட எத்தனை வட்ட வில்லைகள் தேவை?

6. ஓர் உள்ளீடற்ற உலோக உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் $4.3$ செ.மீ, உட்புற ஆரம் $1.1$ செ.மீ மற்றும் நீளம் $4$ செ.மீ. உலோக உருளையை உருக்கி $12$ செ.மீ நீளமுள்ள வேறொரு திண்ம உருளை உருவாக்கப்பட்டால் புதிய உருளையின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக.

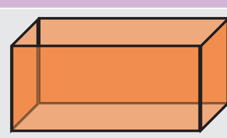
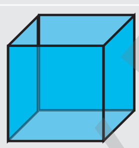
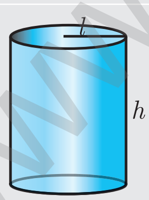
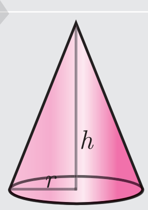
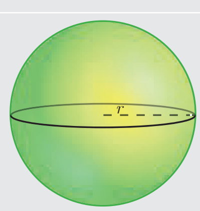
7. ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு முனைகளின் சுற்றளவுகள் $18$ மீ, $16$ மீ மற்றும் அதன் சாயுயரம் $4$ மீ ஆகும். ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ $100$ வீதம் இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பில் வர்ணம் பூச ஆகும் மொத்தச் செலவு என்ன?

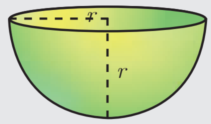
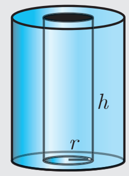
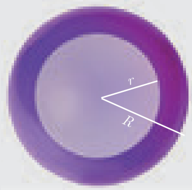
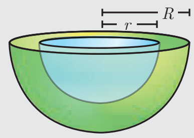
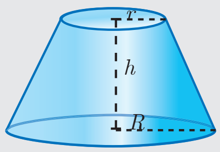
8. ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோளக் கிண்ணத்தை உருவாக்கப் பயன்பட்ட பொருளின் கனஅளவு $\frac{436\pi}{3}$ க. செ.மீ ஆகும். கிண்ணத்தின் வெளிவிட்டம் $14$ செ.மீ எனில் அதன் தடிமனைக் கணக்கிடுக.

9. ஒரு கூம்பின் கன அளவு $1005\frac{5}{7}$ க. செ.மீ மற்றும் கீழ் வட்டப்பரப்பு $201\frac{1}{7}$ ச. செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க.

10. ஒரு வட்டக்கோண வடிவில் உள்ள உலோகத் தகட்டின் ஆரம் $21$ செ.மீ மற்றும் மையக் கோணம் $216°$ ஆகும். வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை இணைத்து உருவாக்கப்படும் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

## நினைவில் கொள்ளவேண்டியவை

| திண்மம் | படம் | வளைபரப்பு / பக்கப்பரப்பு (ச.அ) | மொத்தப் புறப்பரப்பு (சதுர அலகுகள்) | கனஅளவு (கன அலகுகள்) |
|---|---|---|---|---|
| கனச் செவ்வகம் |  | $2h(l+b)$ | $2(lb+bh+lh)$ | $l\times b\times h$ |
| கனச் சதுரம் |  | $4a^2$ | $6a^2$ | $a^3$ |
| நேர் வட்ட உருளை |  | $2\pi rh$ | $2\pi r(h+r)$ | $\pi r^2h$ |
| நேர் வட்டக் கூம்பு |  | $\pi rl$<br>$l=\sqrt{r^2+h^2}$<br>$l=$ சாயுயரம் | $\pi r(l+r)$ | $\frac{1}{3}\pi r^2h$ |
| கோளம் |  | $4\pi r^2$ | $4\pi r^2$ | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |

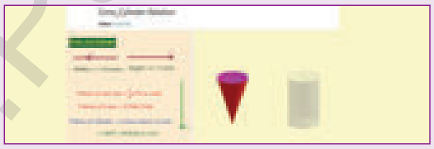
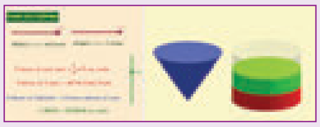
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| அரைக் கோளம் |  | $2\pi r^2$ | $3\pi r^2$ | $\frac{2}{3}\pi r^3$ |
| உள்ளீடற்ற உருளை |  | $2\pi(R+r)h$ | $2\pi(R+r)(R-r+h)$ | $\pi(R^2-r^2)h$ |
| உள்ளீடற்ற கோளம் |  | $4\pi R^2 =$ வெளிப்புற வளைபரப்பு | $4\pi(R^2+r^2)$ | $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$ |
| உள்ளீடற்ற அரைக் கோளம் |  | $2\pi(R^2+r^2)$ | $\pi(3R^2+r^2)$ | $\frac{2}{3}\pi(R^3-r^3)$ |
| நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக் கண்டம் |  | $\pi(R+r)l$ இங்கு $l=\sqrt{h^2+(R-r)^2}$ | $\pi(R+r)l+\pi R^2+\pi r^2$ | $\frac{1}{3}\pi h\left[R^2+r^2+Rr\right]$ |

## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

**ICT 7.1**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Geogebra" –வின் "Mensuration_X" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Cone–cylinder relation" எனும் பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க.

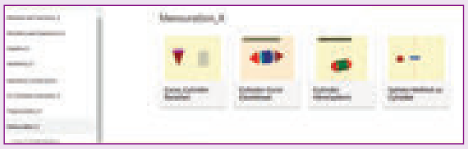
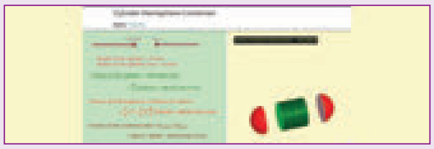
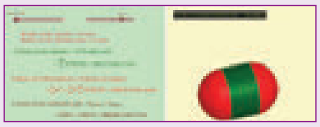
**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சித் தாளில் இடப்புறமுள்ள 'slider' –ஐப் பயன்படுத்திக் கூம்பு–உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தை மாற்றுக. கூம்பு உருளையை நிரப்புவதைக் காண 'Vertical Slider' –ஐ நகர்த்துக. ஆரம் மற்றும் உயரம் சமமெனில், உருளையின் கனஅளவானது கூம்பின் கன அளவைப் போல் மூன்று மடங்கு என நிரூபணமாகிறது.

படி 1  படி 2  முடிவுகள் 

**ICT 7.2**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி "Geogebra" –வின் "Mensuration_X" பக்கத்திற்குச் செல்க. "Cylinder–Hemisphere" எனும் பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க.

**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சித் தாளில் இடப்புறமுள்ள "Slider" –ஐ பயன்படுத்தி உருளை மற்றும் அரைக்கோளத்தின் ஆரத்தைமாற்றுக. 'Slider' –ஐமுன்பின் நகர்த்தி இணைந்த திண்மங்கள் உருவாவதைக் காண்க. திண்ம உருவங்களை முழுமையாகக் காண அவற்றைச் சுழற்றவும். இடப்புறமுள்ள படிநிலைகள் விடைகளைச் சரிபார்க்க உதவும்.

படி 1  படி 2  முடிவுகள் 

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356197

அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

B371_10_MATHS_TM



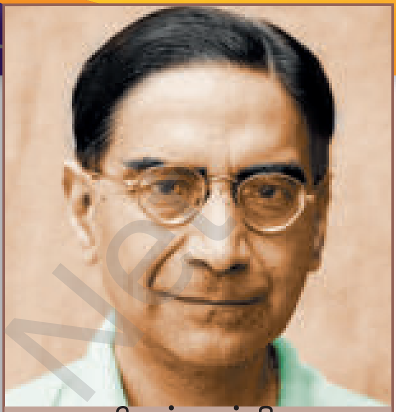


X_Ch 7 TM.indd 310 16-04-2019 10:20:00

# 8 புள்ளியியலும் நிகழ்தகவும்

*வாழ்க்கையே ஒரு நிகழ்தகவின் கருத்தாக்கம்தான்*
–வால்டர் பேகாட்


பிரசந்த சந்திர மகலெனோபிஸ்

கொல்கத்தாவில் பிறந்த பிரசந்த சந்திர மகலெனோபிஸ் ஓர் இந்தியப் புள்ளியிலாளர் ஆவார். இரு தரவுத் தொகுப்புகளுக்கிடையே உள்ள ஒப்புமை அளவீட்டைக் கண்டறியும் முறையை உருவாக்கினார். அதிகளவிலான மாதிரி கொண்ட கணக்கெடுப்புகளை மேற்கொள்ளப் புதிய வழிமுறைகளை அறிமுகப்படுத்தினார். சமவாய்ப்பு மாதிரி முறையைப் பயன்படுத்திப் பயிர் உற்பத்தி அளவைக் கணக்கிடும் முறையை வழங்கினார். இவருடைய அளப்பரிய பணிகளுக்காக, இந்திய அரசின் மிக உயரிய விருதுகளில் ஒன்றான பத்மவிபூஷன் விருது 1968 ஆம் ஆண்டு இந்திய அரசால் வழங்கப்பட்டது. இந்திய புள்ளியியல் துறையில் இவர் நிகழ்த்திய சாதனைகளுக்காக "இந்தியப் புள்ளியியலின் தந்தை" எனப் போற்றப்படுகிறார். மேலும் இவரது பிறந்த நாளான ஜூன் மாதம் 29 -ஆம் தேதியை ஒவ்வோர் ஆண்டும் தேசியப் புள்ளியியல் தினமாகக் கொண்டாடும்படி இந்திய அரசாங்கம் அறிவித்துள்ளது.

X6LDSR

## கற்றல் விளைவுகள்

- மையப் போக்கு அளவைகளை நினைவு கூர்தல்.
- தொகுக்கப்பட்ட, தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் சராசரியைப் பற்றி நினைவு கூர்தல்.
- பரவலின் கருத்தினைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- வீச்சு, திட்ட விலக்கம், விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுதலைப் புரிந்து கொள்ளல்.
- சமவாய்ப்புச் சோதனைகள், கூறுவெளி மற்றும் மர வரைபடப் பயன்பாடு ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளல்.
- சமவாய்ப்புச் சோதனையின் பல்வேறு வகையான நிகழ்ச்சிகளை வரையறுத்தல் மற்றும் விளக்குதல்.
- நிகழ்தகவு கூட்டல் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல். மேலும் அதைச் சில எளிய கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்துதல்

## 8.1 அறிமுகம் (Introduction)

புள்ளியியல் (statistics) என்ற வார்த்தையானது இலத்தீன் மொழியின் 'நிலைமை' (state) அதாவது அரசியல் நிலைமை (political state) என்ற வார்த்தையில் இருந்து வந்தது. இன்று, புள்ளியியலானது ஒவ்வொருவருடைய வாழ்க்கையிலும் எதிர்காலத் திட்டமிடுதலுக்கு, வியாபாரத்திற்கு, சந்தை ஆராய்ச்சிக்கு, பொருளாதார அறிக்கை தயாரிப்பதற்கு எனப் பல சூழல்களில்





X_Ch 8 TM.indd 311 15-04-2019 16:17:52

முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றது. மேலும் கருத்துக் கணிப்பு மற்றும் ஆழமான ஆய்வு முடிவுகளுக்கும் புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

புள்ளியியல் என்பது அறிவியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தித் தரவுகளைச் சேகரித்தல், ஒருங்கமைத்தல், தொகுத்தல், வழங்குதல், பகுப்பாய்வு செய்தல், அர்த்தமுள்ள முடிவுகளை ஏற்படுத்துதல் ஆகியவைகளை உள்ளடக்கியது ஆகும்.

சென்ற வகுப்பில், தரவுகளைச் சேகரித்தல், அட்டவணைப்படுத்துதல், வரைபடத்தில் குறித்தல் மற்றும் மையப்போக்கு அளவைகளைக் கணக்கிடுதல் ஆகியவற்றைக் கற்றோம். தற்போது இந்த வகுப்பில், பரவல் அளவைகளைப் பற்றி கற்போம்.

## நினைவு கூறல்

### மையப்போக்கு அளவைகள்

மையப்போக்கு அளவைகள் என்பது முழுப் புள்ளி விவரங்களையும் குறிக்கத்தக்கதான ஒரு தனி மதிப்பீட்டு எண்ணாகும். இந்த எண்ணை மையப் போக்கு அளவு அல்லது சராசரி எனவும் கூறலாம்.

வழக்கமாக மையப்போக்கு அளவைகள் அனைத்தும் புள்ளி விவரத்தின் மைய அளவிற்கு நெருக்கமாக இருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கான பல்வேறு வகையான மையப்போக்கு அளவைகளில் பொதுவானவை,

• கூட்டுச் சராசரி • இடைநிலை அளவு • முகடு

**சிந்தனைக் களம்**

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்குச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவை ஒரே மதிப்பைக் கொண்டிருக்குமா?
2. கூட்டுச்சராசரிக்கும் சராசரிக்கும் இடையேயான வித்தியாசம் என்ன?

**குறிப்பு**

- தரவு : ஒரு கோட்பாட்டைத் தகுந்த எண்ணளவில் குறிப்பிடுவதைத் தரவு என்கிறோம்.
- தரவுப்புள்ளி : தரவின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் தரவுப்புள்ளி என்கிறோம்.
- மாறி : ஓர் கணக்கெடுப்பில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் அளவுகள் மாறிகள் எனப்படுகின்றன. மாறிகள் பொதுவாக $x_i$, $i=1,2,3,\ldots,n.$ எனக் குறிக்கப்படுகின்றன.
- நிகழ்வெண்கள் : ஒரு தரவில், ஒரு மாறி எவ்வளவு முறை வருகிறதோ, அந்த எண்ணிக்கையை நாம் மாறியின் நிகழ்வெண் என்கிறோம்.

பொதுவாக நிகழ்வெண் என்பது $f_i$, $i=1,2,3,\ldots,n$ எனக் குறிக்கப்படுகின்றது.

இந்த வகுப்பில் கூட்டுச் சராசரியை நினைவு கூர்வோம்.

### கூட்டுச் சராசரி

கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி என்பது கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதலை தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மதிப்பு ஆகும். இதனை $\bar{x}$ எனக் குறிப்பிடுவோம் ($x$ பார் என உச்சரிப்போம்).

$$\bar{x} = \frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

**சிந்தனைக் களம்**

$n$ தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரியானது $\bar{x}$, மேலும் முதல் உறுப்புடன் ஒன்றையும், இரண்டாம் உறுப்புடன் இரண்டையும் கூட்டி என இவ்வாறு தொடர்ந்து கூட்டிக் கொண்டே போனால் புதிய சராசரி என்னவாக இருக்கும்?

**கூட்டுச் சராசரி காணும் முறைகள்**

**தொகுக்கப்படாத தரவு**

- நேரடி முறை: $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

**தொகுக்கப்பட்ட தரவு**

- நேரடி முறை: $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$
- ஊகச் சராசரி முறை: $\bar{X} = A + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ இங்கு $d_i = x_i - A$
- படி விலக்க முறை: $\bar{X} = A + C \times \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ இங்கு $d_i = \dfrac{x_i - A}{c}$

கணக்கீட்டில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தகவல்களைப் பொருத்து ஏற்ற சூத்திரங்களை நாம் பயன்படுத்துவோம்.

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. எல்லாத் தரவுப் புள்ளிகளையும் கூட்டி, தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையினால் வகுத்தால் கிடைப்பது ________.
2. 10 தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 265 எனில், அவற்றின் சராசரியானது ________.
3. குறிப்பிட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மற்றும் சராசரி ஆகியவை முறையே 407 மற்றும் 11 எனில், தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையானது ________.

## 8.2 பரவல் அளவைகள் (Measures of Dispersion)

கடந்த 10 போட்டிகளில் இரண்டு மட்டைப் பந்தாட்ட வீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையை பின்வரும் தரவுப் புள்ளிகள் குறிக்கின்றன.

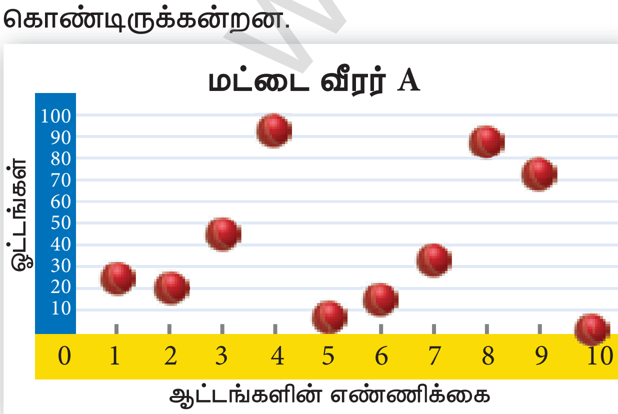
மட்டை வீரர் A: 25, 20, 45, 93, 8, 14, 32, 87, 72, 4

மட்டை வீரர் B: 33, 50, 47, 38, 45, 40, 36, 48, 37, 26

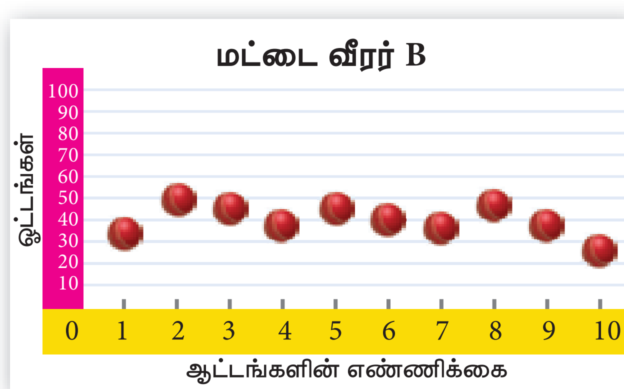
$$\text{மட்டை வீரர் A -யின் சராசரி} = \frac{25+20+45+93+8+14+32+87+72+4}{10} = 40$$

$$\text{மட்டை வீரர் B -யின் சராசரி} = \frac{33+50+47+38+45+40+36+48+37+26}{10} = 40$$

இரண்டு தரவுகளின் சராசரி 40 ஆகும். ஆனால் அவை குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டினைக் கொண்டிருக்கின்றன.




படம் 8.1(i)




படம் 8.1(ii)

மேலேயுள்ள வரைபடத்திலிருந்து மட்டைப் பந்தாட்ட வீரர் $B$-யின் சராசரி ஓட்டங்கள் சராசரிக்கு அருகில் காணப்படுகின்றன. ஆனால் மட்டைப் பந்தாட்ட வீரர் $A$-யின் ஓட்டங்கள் $0$ முதல் $100$ வரை சிதறியிருக்கின்றன. எனினும் இவ்விருவரின் சராசரி சமமாகவே உள்ளது.

இதனால் தரவுகளின் மதிப்புகள் எவ்வாறு பரவுகின்றன என்பதைத் தீர்மானிக்கச் சில கூடுதல் புள்ளியியல் தகவல்கள் தேவைப்படுகின்றது. இதற்காக நாம் பரவல் அளவைகளைப் பற்றி விவாதிக்கலாம்.

பரவல் அளவையானது மதிப்புகள் பரவியுள்ளதைப் பற்றி அறிய உதவும். மேலும், ஒரு தரவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுப் புள்ளிகள் இந்தத் தரவில் எவ்வாறு பரவியுள்ளன என்ற கருத்தைத் தெரிவிக்கும்.

### பரவல்களின் பல்வேறு அளவைகள்

1. வீச்சு
2. சராசரி விலக்கம்
3. கால்மான விலக்கம்
4. திட்ட விலக்கம்
5. விலக்க வர்க்க சராசரி
6. மாறுபாட்டுக் கெழு

### 8.2.1 வீச்சு (Range)

தரவில் கொடுக்கப்பட்ட மிகப் பெரிய மதிப்பிற்கும் மிகச் சிறிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு வீச்சு எனப்படும்.

$$\text{வீச்சு } R = L - S$$

$$\text{வீச்சின் குணகம் (அ) கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

இங்கு $L$ - தரவுப் புள்ளிகளின் மிகப் பெரிய மதிப்பு ;

$S$ - தரவுப் புள்ளிகளின் மிகச் சிறிய மதிப்பு

**முன்னேற்றச் சோதனை**

முதல் பத்து பகா எண்களின் வீச்சு _________ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.1** கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க: $25, 67, 48, 53, 18, 39, 44$.

**தீர்வு** மிகப் பெரிய மதிப்பு, $L = 67$; மிகச் சிறிய மதிப்பு, $S = 18$

$$\text{வீச்சு } \mathrm{R} = L - S = 67 - 18 = 49$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{67-18}{67+18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.2** கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் வீச்சு காண்க.

| வயது (வருடங்களில்) | 16-18 | 18-20 | 20-22 | 22-24 | 24-26 | 26-28 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 0 | 4 | 6 | 8 | 2 | 2 |

**தீர்வு** இங்கு மிகப் பெரிய மதிப்பு $L = 28$

மிகச் சிறிய மதிப்பு $S = 18$

வீச்சு $R = L - S$

$R = 28 - 18 = 10$ வருடங்கள்.

**குறிப்பு**

- முதல் இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆனது பூச்சியம் எனில், அடுத்த இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணைப் பயன்படுத்தி வீச்சு கணக்கிட வேண்டும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.3** ஒரு தரவின் வீச்சு 13.67 மற்றும் மிகப் பெரிய மதிப்பு 70.08 எனில் மிகச் சிறிய மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு**

வீச்சு, $R = 13.67$

மிகப் பெரிய மதிப்பு, $L = 70.08$

வீச்சு, $R = L - S$

$13.67 = 70.08 - S$

$S = 70.08 - 13.67 = 56.41$

எனவே, மிகச் சிறிய மதிப்பு 56.41.

**குறிப்பு**

- வீச்சின் மூலமாக மையப் போக்கு அளவைகளிலிருந்து தரவுகளின் பரவலைத் துல்லியமாக அறிய முடியாது. எனவே, மையப்போக்கு அளவைகளிலிருந்து விலகல் சார்ந்த அளவு நமக்கு தேவைப்படுகிறது.

### 8.2.2 சராசரியிலிருந்து விலகல் (Deviations from the mean)

கொடுக்கப்பட்ட $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற $n$ தரவுப்புள்ளிகளுக்கு $x_1 - \overline{x},\ x_2 - \overline{x},\ \ldots,\ x_n - \overline{x}$ என்பன சராசரி $\overline{x}$ -லிருந்து உள்ள விலகல்கள் ஆகும்.

### 8.2.3 சராசரியிலிருந்து விலக்க வர்க்கம் (Squares of deviations from the mean)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவைகளின் சராசரி $\overline{x}$ -லிருந்து உள்ள விலகல்களின் வர்க்கங்கள் $(x_1 - \overline{x})^2, (x_2 - \overline{x})^2, \ldots, (x_n - \overline{x})^2$ அல்லது $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ஆகும்.

**குறிப்பு**

- எல்லா $x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ மதிப்புகளுக்கும் $\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \geq 0$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. சராசரியிலிருந்து உள்ள விலகல் $(x_i - \overline{x})$ சிறியது எனில், சராசரி விலக்கங்களின் வர்க்கம் மிகச்சிறியது ஆகும்.

### 8.2.4 விலக்க வர்க்கச் சராசரி (Variance)

தரவுத் தொகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளிக்கும், அதன் கூட்டு சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்தி, அந்த வர்க்கங்களுக்கு சராசரி காண்பது விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஆகும். இதை $\sigma^2$ என்று குறிக்கலாம்.

விலக்க வர்க்கச் சராசரி = விலக்கத்தின் வர்க்கத்தின் சராசரி

$$= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

**சிந்தனைக் களம்**

விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஒரு குறை எண்ணாக இருக்க முடியுமா?

### 8.2.5 திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் மிகை வர்க்கமூலம் திட்டவிலக்கம் எனப்படும்.

திட்ட விலக்கமானது, எவ்வாறு ஒவ்வொரு மதிப்பு கூட்டு சராசரியிலிருந்து பரவி அல்லது விலகி உள்ளது என்பதைத் தெளிவுபடுத்துகிறது..

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

**உங்களுக்குத் தெரியுமா**

கார்ல் பியர்சன், முதன்முதலில் "திட்டவிலக்கம்" என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தியவராவார். "சராசரி பிழை" என்ற வார்த்தையை முதன்முதலில் பயன்படுத்தியவர் ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் கவுஸ் ஆவார்.

- திட்ட விலக்கக் கணக்கீடு
  - தொகுக்கப்படாத தரவுகள்
    - நேரடி முறை
    - கூட்டுச் சராசரி முறை
    - ஊகச் சராசரி முறை
    - படி விலக்க முறை
  - தொகுக்கப்பட்ட தரவுகள் (தனி மற்றும் தொடர்ச்சியான)
    - கூட்டுச் சராசரி முறை
    - ஊகச் சராசரி முறை
    - படி விலக்க முறை

## தொகுக்கப்படாத தரவுகளின் திட்ட விலக்கம் காணுதல்

### (i) நேரடி முறை

**குறிப்பு**

- கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்குத் திட்டவிலக்கம் மற்றும் சராசரி ஒரே அலகில் அமையும்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\Sigma x_i}{n} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times (1 + 1 + \cdots n \text{ முறைகள்})}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x} \times \overline{x} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times n} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

8DDPDZ

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

**குறிப்பு**

- திட்டவிலக்கம் காணும்போது, தரவுப் புள்ளிகள் ஏறுவரிசையில் இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
- தரவுப் புள்ளிகள் நேரடியாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் திட்ட விலக்கம் காண

  $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.
- தரவுப் புள்ளிகள் நேரடியாகக் கொடுக்கப்படவில்லை, ஆனால் சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், நாம் திட்ட விலக்கம் காண

  $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்

**எடுத்துக்காட்டு 8.4** ஒரு வாரத்தின் ஒவ்வொரு நாளிலும் விற்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு $13,\ 8,\ 4,\ 9,\ 7,\ 12,\ 10$. இந்தத் தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

**தீர்வு**

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 13 | 169 |
| 8 | 64 |
| 4 | 16 |
| 9 | 81 |
| 7 | 49 |
| 12 | 144 |
| 10 | 100 |
| $\Sigma x_i = 63$ | $\Sigma x_i^2 = 623$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{89 - 81} = \sqrt{8}$$

எனவே, $\sigma \simeq 2.83$

**சிந்தனைக் களம்**

திட்டவிலக்கம், விலக்க வர்க்கச் சராசரியை விடப் பெரிதாக இருக்க முடியுமா?

**முன்னேற்றச் சோதனை**

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $0.49$ எனில் திட்ட விலக்கமானது _________

**(ii) கூட்டு சராசரி முறை**

திட்ட விலக்கத்தை காண கீழ்க்காணும் மற்றொரு சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தலாம்.

திட்ட விலக்கம் (கூட்டு சராசரி முறை) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

இங்கு, $d_i = x_i - \bar{x}$ எனில், $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

**எடுத்துக்காட்டு 8.5** ஒரு குறிப்பிட்ட பருவத்தில் 6 நாட்களில் பெய்யும் மழையின் அளவானது $17.8$ செ.மீ, $19.2$ செ.மீ, $16.3$ செ.மீ, $12.5$ செ.மீ, $12.8$ செ.மீ, $11.4$ செ.மீ எனில், இந்த தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட தரவின் ஏறுவரிசையில் எழுதக்கிடைப்பது $11.4, 12.5, 12.8, 16.3, 17.8, 19.2$ ஆகும்.

தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை $n = 6$

சராசரி $= \frac{11.4 + 12.5 + 12.8 + 16.3 + 17.8 + 19.2}{6} = \frac{90}{6} = 15$

| $x_i$ | $d_i = x_i - \bar{x}$ $= x - 15$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|
| 11.4 | –3.6 | 12.96 |
| 12.5 | –2.5 | 6.25 |
| 12.8 | –2.2 | 4.84 |
| 16.3 | 1.3 | 1.69 |
| 17.8 | 2.8 | 7.84 |
| 19.2 | 4.2 | 17.64 |
| | | $\Sigma d_i^2 = 51.22$ |

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{51.22}{6}} = \sqrt{8.53}$$

ஆகவே, $\sigma \simeq 2.9$

**(iii) ஊகச் சராசரி முறை**

சராசரியின் மதிப்பு முழுக்களாக இல்லாதபோது, ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி திட்ட விலக்கம் காண்பது சிறந்தது (ஏனெனில் தசமக் கணக்கீடுகள் சற்று கடினமாக இருக்கும் என்பதால்).

தரவுப் புள்ளிகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் $\bar{x}$ -ஐ அதன் சராசரியாக கொள்ளலாம்.

$x_i$ -யிலிருந்து ஊகச் சராசரி $(A)$ யின் விலகலே $d_i$ ஆகும். ($A$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளின் இடைப்பட்ட ஒரு தரவுப்புள்ளி).

$d_i = x_i - A$ -யிலிருந்து, $x_i = d_i + A$ ...(1)

$$\Sigma d_i = \Sigma(x_i - A)$$
$$= \Sigma x_i - (A + A + A + \cdots to \quad n \text{ முறைகள்})$$
$$\Sigma d_i = \Sigma x_i - A \times n$$
$$\frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} - A$$
$$\bar{d} = \bar{x} - A \text{ (அல்லது) } \quad \bar{x} = \bar{d} + A \qquad \ldots(2)$$

திட்ட விலக்கமானது,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i + A - \bar{d} - A)^2}{n}} \qquad ((1), (2) \text{பயன்படுத்த})$$
$$= \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i^2 - 2d_i \times \bar{d} + \bar{d}^2)}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d}\frac{\Sigma d_i}{n} + \frac{\bar{d}^2}{n}(1 + 1 + 1 + \cdots n \text{ முறைகள்})}$$
$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d} \times \bar{d} + \frac{\bar{d}^2}{n} \times n} \qquad (\text{காரணம் } \bar{d} \text{ ஆனது ஒரு மாறிலி})$$
$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \bar{d}^2}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

**சிந்தனைக் களம்**

$n$ -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (i) $\Sigma(x_i - \bar{x})$ (ii) $(\Sigma x_i) - \bar{x}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண முடியுமா?

**எடுத்துக்காட்டு 8.6** ஒரு வகுப்புத் தேர்வில், $10$ மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் $25, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 44, 48$ ஆகும். மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** மதிப்பெண்களின் சராசரி $= 35.9$ . இந்த மதிப்பானது தரவுகளின் நடுமதிப்பாக அமையும். அதனால் நாம் ஊகச் சராசரி $A = 35$, என எடுத்துக் கொள்கிறோம், மேலும், $n = 10$ .

| $x_i$ | $d_i = x_i - A$<br>$d_i = x_i - 35$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|
| 25 | −10 | 100 |
| 29 | −6 | 36 |
| 30 | −5 | 25 |
| 33 | −2 | 4 |
| 35 | 0 | 0 |
| 37 | 2 | 4 |
| 38 | 3 | 9 |
| 40 | 5 | 25 |
| 44 | 9 | 81 |
| 48 | 13 | 169 |
| | $\Sigma d_i = 9$ | $\Sigma d_i^2 = 453$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{453}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$
$$= \sqrt{45.3 - 0.81}$$
$$= \sqrt{44.49}$$
$$\sigma \simeq 6.67$$

**(iv) படி விலக்க முறை**

கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ எனக் கருதுவோம். இதன் ஊகச் சராசரியை $A$ எனக் கொள்ளலாம்.

$x_i - A$ -ன் பொது வகுத்தி $c$ என்க.

இப்பொழுது $d_i = \dfrac{x_i - A}{c}$ எனில், $x_i = d_i c + A$ $\quad\ldots(1)$

$$\Sigma x_i = \Sigma\left(d_i c + A\right) = c\Sigma d_i + A \times n$$

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = c\frac{\Sigma d_i}{n} + A$$

$$\bar{x} = c\bar{d} + A \quad \ldots(2)$$

$$x_i - \bar{x} = cd_i + A - c\bar{d} - A = c(d_i - \bar{d}) \quad ((1),(2) \text{ ஐப் பயன்படுத்த})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(c(d_i - \bar{d}))^2}{n}} = \sqrt{\frac{c^2\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

**குறிப்பு**

- மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தித் திட்ட விலக்கத்தைக் காணலாம்.

**செயல்பாடு 1**

காலாண்டுத் தேர்வு மற்றும் முதல் இடைத் தேர்வு ஆகியவற்றில் ஐந்து பாடங்களில் நீங்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் கொண்டு தனித்தனியாகத் திட்டவிலக்கம் காண்க. விடைகளிலிருந்து நீங்கள் என்ன தெரிந்து கொண்டீர்கள் ?

**எடுத்துக்காட்டு 8.7** ஒரு பள்ளி சுற்றுலாவில் குழந்தைகள் தின்பண்டங்கள் வாங்குவதற்காக செலவு செய்த தொகையானது முறையே $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ ஆகும். படி விலக்க முறையை பயன்படுத்தி அவர்கள் செய்த செலவிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட எல்லா தரவுப் புள்ளிகளும் $5$ ஆல் வகுபடும் எண்கள். அதனால் நாம் ஊகச் சராசரி முறையைப் பின்பற்றலாம் $A = 20$, $n = 8$.

| $x_i$ | $d_i = x_i - A$<br>$d_i = x_i - 20$ | $d_i = \dfrac{x_i - A}{c}$<br>$c = 5$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 5 | −15 | −3 | 9 |
| 10 | −10 | −2 | 4 |
| 15 | −5 | −1 | 1 |
| 20 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 5 | 1 | 1 |
| 30 | 10 | 2 | 4 |
| 35 | 15 | 3 | 9 |
| 40 | 20 | 4 | 16 |
| | | $\Sigma d_i = 4$ | $\Sigma d_i^2 = 44$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2} \times 5 = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{4}} \times 5$$

$$= \sqrt{5.5 - 0.25} \times 5 = 2.29 \times 5$$

$$\sigma \simeq 11.45$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.8** கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க. $7, 4, 8, 10, 11$. இதன் எல்லா மதிப்புகளுடனும் $3$-யை கூட்டும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் ஏறு வரிசை $4, 7, 8, 10, 11$ மற்றும் அவற்றின் எண்ணிக்கை $n = 5$

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 4 | 16 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| $\Sigma x_i = 40$ | $\Sigma x_i^2 = 350$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{350}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

அனைத்து தரவுப் புள்ளிகளையும் $3$ ஆல் கூட்டும் போது, நமக்கு கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகள் $7,10,11,13,14$ ஆகும்.

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 7 | 9 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 13 | 169 |
| 14 | 196 |
| $\Sigma x_i = 55$ | $\Sigma x_i^2 = 635$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{635}{5} - \left(\frac{55}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

இதிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளுடன் ஏதேனும் மாறிலியைக் கூட்டினால், திட்ட விலக்கம் மாறாது எனப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.9** கொடுக்கப்பட்ட தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க $2,3,5,7,8$. ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் $4$ -ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் மதிப்பிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** கொடுக்கப்பட்டவை, $n = 5$

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 2 | 49 |
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| $\Sigma x_i = 25$ | $\Sigma x_i^2 = 151$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2} = \sqrt{30.2 - 25} = \sqrt{5.2} \simeq 2.28$$

அனைத்து தரவுப் புள்ளிகளையும் $4$ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகள் $8,12,20,28,32$ ஆகும்.

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 8 | 64 |
| 12 | 144 |
| 20 | 400 |
| 28 | 784 |
| 32 | 1024 |
| $\Sigma x_i = 100$ | $\Sigma x_i^2 = 2416$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2416}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{483.2 - 400} = \sqrt{83.2}$$

$$\sigma = \sqrt{16 \times 5.2} = 4\sqrt{5.2} \simeq 9.12$$

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் $4$-ஆல் பெருக்கும் போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் $4$ மடங்காக அதிகரிக்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 8.10** முதல் $n$ இயல் எண்களின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளைக் காண்க.

**தீர்வு**

$$\text{சராசரி } \overline{x} = \frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n}$$

$$\text{சராசரி } \overline{x} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி } \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \left[\begin{array}{l}\Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ (\Sigma x_i)^2 = (1+2+3+\ldots+n)^2\end{array}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} - \left[\frac{n(n+1)}{2 \times n}\right]^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி } \sigma^2 = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

## தொகுக்கப்பட்ட தரவின் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல்

(i) **சராசரி முறை**

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}}$

$d_i = x_i - \overline{x}$ என்க

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$ இங்கு, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

($f_i$ என்பது $x_i$ எனும் தரவுப் புள்ளிகளின் நிகழ்வெண் மதிப்புகளாகும்)

**எடுத்துக்காட்டு 8.11** ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் $48$ மாணவர்கள் தொலைக்காட்சி பார்ப்பதற்காகச் செலவிட்ட நேரம் கேட்டறியப்பட்டது. அந்தத் தகவலின் அடிப்படையில், கீழ்க்காணும் தரவின் திட்டவிலக்கம் காண்க.

| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | 6 | 9 | 13 | 8 | 5 | 4 |





X_Ch 8 TM.indd 321 15-04-2019 16:18:06

**தீர்வு**

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i f_i$ | $d_i = x_i - \overline{x}$ | $d_i^2$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 18 | –3 | 9 | 27 |
| 7 | 6 | 42 | –2 | 4 | 24 |
| 8 | 9 | 72 | –1 | 1 | 9 |
| 9 | 13 | 117 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 8 | 80 | 1 | 1 | 8 |
| 11 | 5 | 55 | 2 | 4 | 20 |
| 12 | 4 | 48 | 3 | 9 | 36 |
| | $N = 48$ | $\Sigma x_i f_i = 432$ | $\Sigma d_i = 0$ | | $\Sigma f_i d_i^2 = 124$ |

சராசரி

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{432}{48} = 9$$ (இங்கு $N = \sum f_i$ )

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$$

$$\sigma \simeq 1.6$$

**(ii) ஊகச் சராசரி முறை**

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ஆகிய தரவுப் புள்ளிகளின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ என்றும் $\overline{x}$ என்பது சராசரி மற்றும் $A$ என்பது ஊகச் சராசரி என்க.

$$d_i = x_i - A$$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

**எடுத்துக்காட்டு 8.12** வகுப்புத் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் மதிப்பெண்ணிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

| $x$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 7 | 3 | 5 | 9 | 5 |

**தீர்வு**

ஊகச்சராசரி $A = 8$ என்க.

| $x_i$ | $f_i$ | $d_i = x_i - A$ | $f_i d_i$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | –4 | –28 | 112 |
| 6 | 3 | –2 | –6 | 12 |
| 8 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 9 | 2 | 18 | 36 |
| 12 | 5 | 4 | 20 | 80 |
| | $N = 29$ | | $\Sigma f_i d_i = 4$ | $\Sigma f_i d_i^2 = 240$ |

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240}{29} - \left(\frac{4}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{240 \times 29 - 16}{29 \times 29}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6944}{29 \times 29}} \; ; \quad \sigma \simeq 2.87$$

## தொடர் நிகழ்வெண் பரவலின் திட்ட விலக்கத்தினைக் கணக்கடுதல்

**(i) சராசரி முறை**

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N}}$ இங்கு, $x_i$ என்பது $i$-ஆவது இடைவெளியின் மைய மதிப்பு $f_i$ என்பது $i$-ஆவது இடைவெளியின் நிகழ்வெண்.

**(ii) எளிய முறை (அல்லது) படி விலக்க முறை**

கணக்கீட்டைச் சுலபமாகச் செய்யக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு, $A$ என்பது ஊகச் சராசரி, $x_i$ என்பது $i$ -ஆம் இடைவெளியின் மைய மதிப்பு, மேலும் $c$ என்பது இடைவெளியின் அகலம் ஆகும்.

$$d_i = \frac{x_i - A}{c} \text{ என்க.}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.13** ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள், குறிப்பிட்ட பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| மதிப்பெண்கள் | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 8 | 12 | 17 | 14 | 9 | 7 | 4 |

இத்தரவிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** ஊகச் சராசரி, $A = 35,\ c = 10$

| மதிப்பெண்கள் | மைய மதிப்பு $(x_i)$ | $f_i$ | $d_i = x_i - A$ | $d_i = \frac{x_i - A}{c}$ | $f_i d_i$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 8 | -30 | $-3$ | $-24$ | 72 |
| 10-20 | 15 | 12 | -20 | $-2$ | $-24$ | 48 |
| 20-30 | 25 | 17 | -10 | $-1$ | $-17$ | 17 |
| 30-40 | 35 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40-50 | 45 | 9 | 10 | 1 | 9 | 9 |
| 50-60 | 55 | 7 | 20 | 2 | 14 | 28 |
| 60-70 | 65 | 4 | 30 | 3 | 12 | 36 |
| | | $N = 71$ | | | $\Sigma f_i d_i = -30$ | $\Sigma f_i d_i^2 = 210$ |

திட்ட விலக்கம் $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \left(-\frac{30}{71}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.779}\ ; \quad \sigma \simeq 16.67$$

**சிந்தனைக் களம்**

(i) ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கமானது $2.8$ அனைத்துத் தரவுப் புள்ளிகளுடன் $5$-ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய திட்ட விலக்கமானது ______.

(ii) $p,\ q,\ r$ ஆகியவற்றின் திட்ட விலக்கமானது $S$ எனில், $p{-}3,\ q{-}3,\ r{-}3$ -யின் திட்ட விலக்கமானது ______ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.14** 15 தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே $10,\ 5$ என கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அதை சரிபார்க்கும்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தரவுப் புள்ளி $8$ என தவறுதலாக குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சரியான தரவுப்புள்ளி $23$ என இருந்தால் சரியான தரவின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க.

**தீர்வு** $n = 15\,,\ \bar{x} = 10\,,\ \sigma = 5\,;\quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n};\ \ \Sigma x = 15 \times 10 = 150$

தவறான மதிப்பு = $8$, சரியான மதிப்பு = $23$.

| | |
|---|---|
| திருத்தப்பட்ட கூடுதல் | $= 150 - 8 + 23 = 165$ |
| திருத்தப்பட்ட சராசரி $\overline{x}$ | $= \dfrac{165}{15} = 11$ |
| திட்ட விலக்கம் $\sigma$ | $= \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ |
| தவறான திட்ட விலக்கம் $\sigma$ | $= 5 = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{15} - (10)^2}$ |
| $25$ | $= \dfrac{\Sigma x^2}{15} - 100$ எனவே, $\dfrac{\Sigma x^2}{15} = 125$ |
| $\Sigma x^2$ -ன் தவறான மதிப்பு | $= 1875$ |
| $\Sigma x^2$ -ன் திருத்தப்பட்ட மதிப்பு | $= 1875 - 8^2 + 23^2 = 2340$ |
| திருத்தப்பட்ட திட்ட விலக்கம் $\sigma$ | $= \sqrt{\dfrac{2340}{15} - (11)^2}$ |
| $\sigma$ | $= \sqrt{156 - 121} = \sqrt{35} \quad \sigma \simeq 5.9$ |

## பயிற்சி 8.1

1. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க.
   (i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68
   (ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8
2. ஒரு தரவின் வீச்சு மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்பு ஆகியன முறையே 36.8 மற்றும் 13.4 எனில், மிகப்பெரிய மதிப்பைக் காண்க?
3. கொடுக்கப்பட்ட தரவின் வீச்சைக் காண்க.

| வருமானம் | 400-450 | 450-500 | 500-550 | 550-600 | 600-650 |
|---|---|---|---|---|---|
| ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை | 8 | 12 | 30 | 21 | 6 |

4. ஓர் ஆசிரியர் மாணவர்களை, அவர்களின் செய்முறைப் பதிவேட்டின் 60 பக்கங்களை நிறைவு செய்து வருமாறு கூறினார். எட்டு மாணவர்கள் முறையே 32, 35, 37, 30, 33, 36, 35, 37 பக்கங்கள் மட்டுமே நிறைவு செய்திருந்தனர். மாணவர்கள் நிறைவு செய்யாதப் பக்கங்களின் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.
5. 10 ஊழியர்களின் ஊதியம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஊதியங்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க.
   ₹310, ₹290, ₹320, ₹280, ₹300, ₹290, ₹320, ₹310, ₹280.
6. ஒரு சுவர் கடிகாரம் 1 மணிக்கு 1 முறையும், 2 மணிக்கு 2 முறையும், 3 மணிக்கு 3 முறையும் ஒலி எழுப்புகிறது எனில், ஒரு நாளில் அக்கடிகாரம் எவ்வளவு முறை ஒலி எழுப்பும்? மேலும் கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கைகளின் திட்ட விலக்கம் காண்க.
7. முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.
8. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் 4.5 ஆகும். அதில் இருக்கும் தரவுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் 5-ஐ கழிக்க கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.
9. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் 3.6 ஆகும். அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் 3 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.

10. ஒரு வாரத்தில் ஐந்து மாவட்டங்களில் வெவ்வேறு இடங்களில் பெய்த மழையின் அளவானது பதிவு செய்யப்பட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| மழையளவு (மி.மீ) | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| இடங்களின் எண்ணிக்கை | 5 | 13 | 4 | 9 | 5 | 4 |

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மழையளவின் தரவிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

11. வைரஸ் காய்ச்சலைப் பற்றிய கருத்துக் கணிப்பில், பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

| வயது (வருடங்களில்) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை | 3 | 5 | 16 | 18 | 12 | 7 | 4 |

இத்தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

12. ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட தட்டுகளின் விட்ட அளவுகள் (செ.மீ-ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதன் திட்ட விலக்கம் காண்க.

| விட்டங்கள் (செ.மீ) | 21-24 | 25-28 | 29-32 | 33-36 | 37-40 | 41-44 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| தட்டுகளின் எண்ணிக்கை | 15 | 18 | 20 | 16 | 8 | 7 |

13. 50 மாணவர்கள் 100 மீட்டர் தூரத்தை கடக்க எடுத்துக்கொண்ட கால அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

| எடுத்துக்கொண்ட நேரம் (வினாடியில்) | 8.5-9.5 | 9.5-10.5 | 10.5-11.5 | 11.5-12.5 | 12.5-13.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 6 | 8 | 17 | 10 | 9 |

14. 100 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில், அவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கமானது முறையே 60 மற்றும் 15 ஆகும். பின்னர் 45 மற்றும் 72 என்ற இரு மதிப்பெண்களுக்குப் பதிலாக முறையே 40 மற்றும் 27 என்று தவறாகப் பதிவு செய்யப்பட்டது தெரிய வந்தது. அவற்றைச் சரி செய்தால் கிடைக்கப்பெறும் புதிய தரவின் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் காண்க.

15. ஏழு தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி முறையே 8, 16 ஆகும். அதில் ஐந்து தரவுப் புள்ளிகள் 2, 4, 10, 12 மற்றும் 14 எனில் மீதம் உள்ள இரு தரவுப் புள்ளிகளைக் கண்டறிக.

## 8.3 மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation)

இரண்டு தரவுகளின், மையப்போக்கு அளவைகள் மற்றும் பரவல் அளவைகளை ஒப்பிடும்போது அவை அர்த்தமற்றதாக உள்ளது. ஏனெனில் தரவில் கருதும் மாறிகள் வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்த இரண்டு தரவுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்

| | எடை | விலை |
|---|---|---|
| சராசரி | 8 கி.கி | ₹ 85 |
| திட்ட விலக்கம் | 1.5 கி.கி | ₹ 21.60 |

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவுகளின் ஒத்த மாற்றங்களை ஒப்பிட திட்டவிலக்கத்திற்கு தொடர்புடைய அளவான, மாறுபாட்டுக் கெழு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

ஒரு தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது, அதன் திட்டவிலக்கத்தை சராசரியினால் வகுக்கும்போது கிடைப்பதாகும். இதைப் பொதுவாகச் சதவீதத்தில் குறிப்பிடலாம். இந்தக் கருத்தை நமக்கு அளித்தவர் மிகவும் புகழ்பெற்ற புள்ளியியலாளர் கார்ல் பியர்சன் ஆவார்.

எனவே, முதல் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு $(\mathrm{C.V}_1) = \dfrac{\sigma_1}{\overline{x}_1} \times 100\%$

மற்றும் இரண்டாம் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு $(\mathrm{C.V}_2) = \dfrac{\sigma_2}{\overline{x}_2} \times 100\%$

எந்தத் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக உள்ளதோ அது அதிகச் சீர்மைத் தன்மை உடையது அல்லது அதிக நிலைத் தன்மை உடையது எனலாம்.

இரண்டு தரவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 500 | 900 | 800 | 900 | 700 | 400 |
| B | 300 | 540 | 480 | 540 | 420 | 240 |

| | சராசரி | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|
| A | 700 | 191.5 |
| B | 420 | 114.9 |

இந்த இரண்டு தரவுகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கங்களை ஒப்பிடும்போது, அவை முற்றிலும் வேறுபட்டது என நினைக்கத் தோன்றும். ஆனால் $B$ -யின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கமானது $A$ -ஐப் போல் $60\%$ ஆக இருக்கிறது. எனவே இரு தரவுகளுக்கும் வேறுபாடு இல்லை. சிறிய சராசரி, சிறிய திட்ட விலக்கமானது தவறான முடிவிற்கு வழிவகுக்கின்றன.

இரண்டு தரவுகளின் விலக்கங்களை ஒப்பிடும்போது, மாறுபாட்டுக் கெழு $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100\%$ எனும் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்

$A$ -யின் மாறுபாட்டுக் கெழு $= \dfrac{191.5}{700} \times 100\% = 27.4\%$

$B$ -யின் மாறுபாட்டுக் கெழு $= \dfrac{114.9}{420} \times 100\% = 27.4\%$

எனவே, இரண்டு தரவுகளும் ஒரே மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் கொண்டுள்ளன. இரண்டு தரவுகளின் மாறுபாட்டுக் கெழுக்கள் சமமாக இருந்தால், அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்துள்ளன என்ற முடிவிற்கு வரலாம். இங்கு, $B$-யின் தரவுப்புள்ளி மதிப்புகள் $A$-யின் தரவுப்புள்ளி மதிப்புகளுக்குச் $60\%$ சரியாக உள்ளன. எனவே அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை. ஆனால் இரு தரவுகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்க மதிப்புகளைக் கருதினால் ஒன்றையொன்று சார்ந்தவையல்ல என்ற முடிவிற்கு வருவோம். எனவே, நமக்கு மிகவும் குழப்பமான ஒரு சூழ்நிலை ஏற்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளைப் பற்றிய தகவல்களை மிகச் சரியாகத் தெரிந்துகொள்ள நாம் மாறுபாட்டுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம். இதற்காகவே, நமக்கு மாறுபாட்டுக் கெழு அவசியமாகின்றது.

## முன்னேற்றச் சோதனை

(i) மாறுபாட்டுக் கெழுவானது _________ சார்ந்த மாற்றத்தை கணக்கிட உதவும்.

(ii) திட்டவிலக்கத்தை, சராசரியால் வகுத்தால் கிடைப்பது _________.

(iii) மாறுபாட்டுக் கெழுவானது ________ மற்றும் ________ ஆகியவற்றைச் சார்ந்து இருக்கும்.

(iv) ஒரு தரவின், சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கமானது $8$ மற்றும் $2$ எனில், அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது ________ ஆகும்.

(v) இரண்டு தரவுகளை ஒப்பிடும்போது, எந்தத் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு _________ இருக்குமோ அது சீர்மைத் தன்மையற்றதாக இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.15** தரவின் சராசரியானது $25.6$ மற்றும் அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது $18.75$ எனில், அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

**தீர்வு** சராசரி $\overline{x} = 25.6$ , மாறுபாட்டுக் கெழு , C.V. $= 18.75$

மாறுபாட்டுக் கெழு , C.V. $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100\%$

$$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100$$ இதிலிருந்து, $\sigma = 4.8$

**எடுத்துக்காட்டு 8.16** பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு பள்ளியின் பத்தாம் வகுப்பு மாணவர்களின் உயரம் மற்றும் எடைகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்க சராசரி ஆகிய மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | உயரம் | எடை |
|---|---|---|
| சராசரி | 155 செ.மீ | 46.50 கி.கி |
| விலக்க வர்க்கச் சராசரி | 72.25 செ.மீ$^2$ | 28.09 கி.கி$^2$ |

இவற்றில் எது மற்றொன்றை விட அதிக வேறுபாடுடையது?

**தீர்வு** இரண்டு தரவுகளை ஒப்பிட, முதலில் இரண்டிற்கும் மாறுபாட்டு கெழு காண வேண்டும்

சராசரி $\overline{x}_1 = 155$ செ.மீ, விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma_1^2 = 72.25$ செ.மீ$^2$

எனவே திட்ட விலக்கம் $\sigma_1 = 8.5$

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V_1 = \dfrac{\sigma_1}{\overline{x}_1} \times 100\%$

$$C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\% = 5.48\%$$ (உயரங்களுக்கானது)

சராசரி $\overline{x}_2 = 46.50$ கி.கி

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma_2^2 = 28.09$ கி.கி$^2$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_2 = 5.3$ கி.கி

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V_2 = \dfrac{\sigma_2}{\overline{x}_2} \times 100\%$

$$C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\% = 11.40\%$$ (எடைகளுக்கானது)

$C.V_1 = 5.48\%$ மற்றும் $C.V_2 = 11.40\%$

$C.V_2 > C.V_1$ என்பதால், மாணவர்களின் எடையானது, உயரத்தை விட அதிக மாறுபாட்டுடன் உள்ளது.

**எடுத்துக்காட்டு 8.17** ஒரு குடும்பத்தில் குறிப்பிட்ட வாரத்தில் உட்கொள்ளப்பட்ட கொய்யா மற்றும் ஆரஞ்சு பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| கொய்யாப் பழங்களின் எண்ணிக்கை | 3 | 5 | 6 | 4 | 3 | 5 | 4 |
| ஆரஞ்சு பழங்களின் எண்ணிக்கை | 1 | 3 | 7 | 9 | 2 | 6 | 2 |

இங்கு, எந்த பழம் சீராக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது?

**தீர்வு** முதலில் கொய்யா மற்றும் ஆரஞ்சு பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைத் தனித்தனியாக காணவேண்டும்.

கொய்யாப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு:

இங்கு, $n = 7$

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 4 | 16 |
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |
| 4 | 16 |
| $\Sigma x_i = 30$ | $\Sigma x_i^2 = 136$ |

சராசரி $\bar{x}_1 = \frac{30}{7} = 4.29$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{136}{7} - \left(\frac{30}{7}\right)^2} = \sqrt{19.43 - 18.40} \simeq 1.01$$

கொய்யாப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு

$$\text{C.V}_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\% = \frac{1.01}{4.29} \times 100\% = 23.54\%$$

ஆரஞ்சுப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு:

இங்கு, $n = 7$

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 3 | 9 |
| 7 | 49 |
| 9 | 81 |
| 2 | 4 |
| 6 | 36 |
| 2 | 4 |
| $\Sigma x_i = 30$ | $\Sigma x_i^2 = 184$ |

சராசரி $\bar{x}_2 = \frac{30}{7} = 4.29$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{184}{7} - \left(\frac{30}{7}\right)^2} = \sqrt{26.29 - 18.40} = 2.81$$

ஆரஞ்சு பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு

$$C.V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\% = \frac{2.81}{4.29} \times 100\% = 65.50\%$$

$C.V_1 = 23.54\%$, $C.V_2 = 65.50\%$. இங்கு, $C.V_1 < C.V_2$ ஆக இருப்பதால், ஆரஞ்சை விட கொய்யாப் பழங்கள் சீராக உட்கொள்ளப்படுகின்றன என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

## பயிற்சி 8.2

1. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் சராசரி ஆகியன முறையே $6.5$ மற்றும் $12.5$ எனில் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.
2. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு ஆகியன முறையே $1.2$ மற்றும் $25.6$ எனில் அதன் சராசரியைக் காண்க.
3. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே $15$ மற்றும் $48$ எனில் அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.
4. $n = 5$, $\bar{x} = 6$, $\Sigma x^2 = 765$ எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.
5. $24, 26, 33, 37, 29, 31$ ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.
6. $8$ மாணவர்கள் ஒரு நாளில் வீட்டுப் பாடத்தை முடிப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவுகள் (நிமிடங்களில்) பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $38,\ 40,\ 47,\ 44,\ 46,\ 43,\ 49,\ 53$. இத்தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.
7. சத்யா மற்றும் வித்யா இருவரும் $5$ பாடங்களில் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்கள் முறையே $460$ மற்றும் $480$ ஆகும். மேலும் அதன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே $4.6$ மற்றும் $2.4$ எனில், யாருடைய செயல்திறன் மிகுந்த நிலைத் தன்மை கொண்டது?

8. ஒரு வகுப்பில் உள்ள $40$ மாணவர்கள், கணிதம், அறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியல் ஆகிய மூன்று பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| பாடங்கள் | சராசரி | திட்ட விலக்கம் |
|---|---|---|
| கணிதம் | 56 | 12 |
| அறிவியல் | 65 | 14 |
| சமூக அறிவியல் | 60 | 10 |

இந்த மூன்று பாடங்களில் எது அதிக நிலைத் தன்மை கொண்டது மற்றும் எது குறைந்த நிலைத்தன்மை கொண்டது?

9. இரண்டு நகரங்கள் A மற்றும் B –யின் குளிர் காலத்தில் நிலவும் வெப்பநிலை அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| நகரம் $A$ -ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்) | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
| நகரம் $B$ -ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்) | 11 | 14 | 15 | 17 | 18 |

எந்த நகரமானது வெப்பநிலை மாறுபாடுகளில் அதிகமான நிலைத்தன்மை கொண்டது?

## 8.4 நிகழ்தகவு (Probability)


பிளெய்ஸ் பாஸ்கல்

சில நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்பு, சூதாட்டம் மற்றும் கேமிங் போன்றவை நாகரிகமாகக் கருதப்பட்டுப் பல ஆண்டுகள் மக்கள் மத்தியில் பரவலாகப் பிரபலமடைந்தன. அவ்வாறு விளையாடுபவர்கள் குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தங்களது வெற்றி தோல்வி வாய்ப்புகளை அறிந்து கொள்ள மிகவும் ஆர்வம் கொண்டதால் இந்த விளையாட்டுகள் மாறத் தொடங்கின. 1654ஆம் ஆண்டில் செவாலியர் டீ மெரி என்பார் சூதாட்டத்தில் ஆர்வம் கொண்ட ஒரு பிரெஞ்சு மேலதிகாரி. அக்காலத்தில் மிகவும் முக்கியக் கணிதவியலாளராக திகழ்ந்த பிளெய்ஸ் பாஸ்கல் அவர்களுக்குக் கடிதம் எழுதினார். அதில் சூதாட்டத்தின் மூலம் எவ்வளவு லாபத்தைப் பெற முடியும் என்ற முடிவைத் தெரிவிக்குமாறு குறிப்பிட்டிருந்தார். பாஸ்கல் இந்தப் புதிரைக் கணிதமுறையில் செய்துபார்த்து, அவரது நல்ல நண்பரும் கணிதவியலாளருமான பியரி டி ஃபெர்மா எப்படித் தீர்ப்பார் எனக் கண்டறிய முற்பட்டு அவரிடம் தெரிவித்தார். இவர்கள் இருவரிடையே ஏற்பட்ட கணிதச் சிந்தனைகளே "நிகழ்தகவு" எனும் கணித உட்பிரிவு தோன்ற வழிவகுத்தது.

### சமவாய்ப்புச் சோதனை

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை என்பதில்

(i) மொத்த வாய்ப்புகள் அறியப்படும் (ii) குறிப்பிட்ட வாய்ப்புகள் அறியப்படாது

**எடுத்துக்காட்டு :** 1. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல். 2. பகடையை உருட்டுதல்.
3. 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டில் இருந்து ஒரு சீட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

### கூறுவெளி (Sample space)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக்கப்பெறும் அனைத்துச் சாத்தியமான விளைவுகளின் தொகுப்பு கூறுவெளி எனப்படுகிறது. இதைப் பொதுவாக $S$ என்று குறிப்பிடலாம்.


படம் 8.2

**எடுத்துக்காட்டு :** நாம் ஒரு பகடையை உருட்டும்போது, அனைத்துச் சாத்தியமான விளைவுகள் அதன் முக மதிப்புகளாக $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ எனக் கிடைக்கும். எனவே, கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

### கூறு புள்ளி (Sample point)

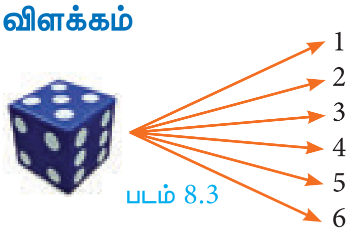
ஒரு கூறுவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கூறு புள்ளி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

### 8.4.1 மர வரைபடம் (Tree diagram)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் அனைத்துச் சாத்தியமான விளைவுகளையும் மர வரைபடம் மூலம் எளிதாக வெளிப்படுத்தலாம். ஒரு மரவரை படத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கிளையும் சாத்தியமான விளைவைப் பிரதிபலிக்கிறது.

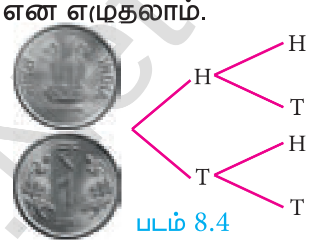
QSS4EH

**விளக்கம்**



படம் 8.3

(i) நாம் ஒரு பகடையை உருட்டும் போது, மர வரைபடத்திலிருந்து கூறுவெளியை, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ (படம்.8.3) என எழுதலாம்.

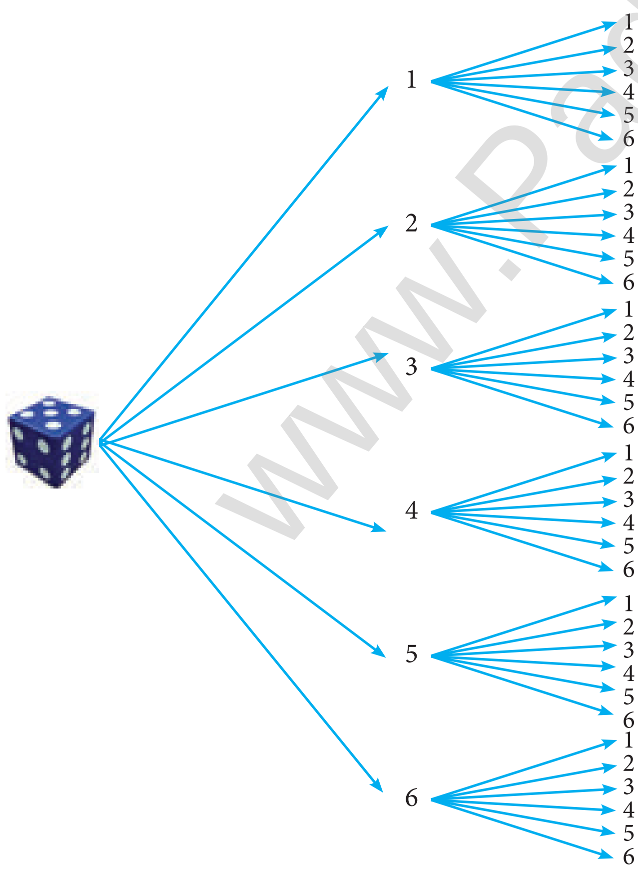


படம் 8.4

(ii) நாம் இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது, மர வரைபடத்திலிருந்து கூறுவெளியை $S=\{HH, HT, TH, TT\}$ என எழுதலாம். (படம்.8.4)

**எடுத்துக்காட்டு 8.18** மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியை எழுதுக.

**தீர்வு** இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது, ஒவ்வொரு பகடையிலும் $6$ முக மதிப்புகள் $1, 2, 3, 4, 5, 6$ என உள்ளதால் கீழ்க்காணும் மர வரைபடத்தைப் பெறலாம்




அதனால் கூறுவெளியை

$$S= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

என எழுதலாம்.

## முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவைக் கணிக்க முடியாமல் இருக்கும் ஒரு சோதனையை ________ என்போம்.
2. அனைத்துச் சாத்தியமானக் கூறுகளின் தொகுப்பையும் ________ என அழைக்கிறோம்.

**நிகழ்ச்சி** : ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக்கும் ஒவ்வொரு விளைவும் நிகழ்ச்சி என்கிறோம். எனவே, ஒரு நிகழ்ச்சி கூறுவெளியின் உட்கணமாக இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு** : இரண்டு நாணயங்களை சுண்டும்பொழுது, இரண்டும் தலைகளாக கிடைக்கப் பெறுவது ஒரு நிகழ்ச்சி.

**முயற்சி** : ஒரு சோதனையை ஒரு முறை செய்வது முயற்சியாகும்.

**எடுத்துக்காட்டு** : ஒரு நாணயத்தை மூன்றுமுறை சுண்டும்பொழுது, ஒவ்வொருமுறை சுண்டுதலும் ஒரு முயற்சியாகும்.

| நிகழ்ச்சி | விளக்கம் | எடுத்துக்காட்டு |
|---|---|---|
| சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் | இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கு சமவாய்ப்புகள் இருந்தால் அவற்றைச் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். | ஒரு நாணயத்தை சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலை மற்றும் பூ ஆகியவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள். |
| உறுதியான நிகழ்ச்சிகள் | ஒரு சோதனையில் நிச்சயமாக நிகழும் நிகழ்ச்சியை உறுதியான நிகழ்ச்சி என்கிறோம். | ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1-லிருந்து 6 வரை உள்ள இயல் எண்களில் ஏதேனும் ஒரு எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி உறுதியான நிகழ்ச்சியாகும். |
| இயலா நிகழ்ச்சிகள் | ஒரு சோதனையில், ஒரு போதும் நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும். | இரண்டு நாணயங்களை சுண்டும் போது மூன்று தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சியாகும். |
| ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் | இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கு பொதுவான கூறுபுள்ளிகள் இருக்காது. அந்த நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். $A, B$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்றால் $A \cap B = \phi$. | ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றைப்படை எண்கள் மற்றும் இரட்டைப்படை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். |
| நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் | நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ப்பு கணம் கூறுவெளியாக இருப்பின் அவற்றை நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். | ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டும்போது இரண்டு தலைகள் ஒரே ஒரு தலை, தலை இல்லாமல் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள். |

| | | |
|---|---|---|
| நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் | $A$-யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியானது $A$-யில் இல்லாத மற்ற விளைவுகளைக் கொண்ட கூறு புள்ளிகள் ஆகும். இதை $A'$ அல்லது $A^c$ அல்லது $\overline{A}$ எனக் குறிக்கலாம்.<br><br>$A$ மற்றும் $A'$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவு செய்யும் நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும். | ஒரு பகடையை உருட்டும்போது $5$, $6$ கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியும் மற்றும் $1, 2, 3, 4$ கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியும் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளாகும். |

**குறிப்பு**

- **ஒரே ஒரு விளைவு நிகழ்ச்சி:** $E$ என்ற நிகழ்ச்சியில் ஒரேயொரு விளைவு மட்டும் இருந்தால் அதற்கு ஒரேயொரு விளைவு நிகழ்ச்சி என்று பெயர்

**உங்களுக்குத் தெரியுமா**

1713–ல் பெர்னோலி முதன்முதலில் நிகழ்தகவைச் சூதாட்டத்தைத் தவிரப் பல இடங்களில் மிகப்பெரிய அளவில் பயன்படுத்திக்காட்டினார்

### 8.4.2 ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு (Probability of an Event)

ஒரு சம வாய்ப்பு சோதனையில், $S$ என்பது கூறுவெளி மற்றும் $E \subseteq S$ . இங்கு, $E$ ஆனது ஒரு நிகழ்ச்சி. $E$ என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவானது,

$$P(E) = \frac{E \text{ நிகழ்வதற்கு சாதகமான வாய்ப்புகள்}}{\text{மொத்த வாய்ப்புகள்}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

நிகழ்தகவின் இந்த வரையறையானது முடிவுறு கூறுவெளிகளுக்கு மட்டுமே பொருந்தும். எனவே இந்தப் பாடப்பகுதியில் முடிவுறு கூறுவெளியை உடைய கணக்குகளையே கருத்தில் கொள்கிறோம்.

**குறிப்பு**

- $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$
- $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$ . உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது $1$ ஆகும்.
- $P(\phi) = \dfrac{n(\phi)}{n(s)} = \dfrac{0}{n(s)} = 0$ . இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது $0$ ஆகும்.
- $E$ ஆனது, $S$ -ன் உட்கணமாகும். மேலும் $\phi$ ஆனது எல்லா கணங்களின் உட்கணமாகும். எனவே $\phi \subseteq E \subseteq S$

$$P(\phi) \leq P(E) \leq P(S)$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

ஆகையால், நிகழ்தகவு மதிப்பு எப்பொழுதும் $0$ முதல் $1$ வரை இருக்கும்.

- $E$ -ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி $\bar{E}$ ஆகும்.

$P(E) = \dfrac{m}{n}$ என்க. ($m$ -ஆனது $E$ -யின் சாதகமான வாய்ப்புகள் மற்றும் $n$ -ஆனது மொத்த வாய்ப்புகள்).

$$P(\bar{E}) = \frac{E \text{ நிகழ சாதகமற்ற வாய்ப்புகள்}}{\text{மொத்த வாய்ப்புகள்}}$$

$$P(\bar{E}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(\text{E})$$


- $P(E) + P(\bar{\text{E}}) = 1$

## முன்னேற்றச் சோதனை

கொடுக்கப்பட்ட எண்களில் எவை நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?

(a) $-0.0001$ (b) $0.5$ (c) $1.001$ (d) $1$

(e) $20\%$ (f) $0.253$ (g) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (h) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

**எடுத்துக்காட்டு 8.19** ஒரு பையில் 5 நீல நிறப்பந்துகளும், 4 பச்சை நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் பந்தானது (i) நீலமாக (ii) நீலமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு** மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(\text{S}) = 5 + 4 = 9$

(i) $A$ என்பது நீல நிறப்பந்தை பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

A நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை, $n(\text{A}) = 5$

நீலநிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{9}$

(ii) $\bar{A}$ ஆனது நீல நிறப்பந்து கிடைக்காமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி. எனவே,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.20** இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. கிடைக்கப்பெறும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் (i) 4 -க்குச் சமமாக (ii) 10 -ஐ விடப் பெரிதாக (iii) 13 -ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

**தீர்வு** இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்பொழுது, கூறுவெளியானது

$$\begin{aligned} S = \{ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \} \end{aligned}$$

என இருக்கும். எனவே, $n\left(S\right) = 36$

(i) $A$ ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4-ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$; $n(A) = 3$ .

முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 4 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

(ii) $B$ ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $10$-ஐ விட பெரிய எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$\text{B} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\};\ n(B) = 3\,.$$

கூடுதல் $10$ ஐ விட பெரிதாக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

(iii) $C$ ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $13$-ஐ விட குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. எனவே $C = S$ .

ஆகவே, $n(C) = n(S) = 36$

ஆகையால், முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $13$ -ஐ விடக் குறைவானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{36}{36} = 1\,.$

**எடுத்துக்காட்டு 8.21** இரண்டு நாணயங்கள் ஒன்றாகச் சுண்டப்படுகின்றன. இரண்டு நாணயங்களிலும் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு** இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டப்படும்பொழுது அதன் கூறுவெளியானது

$$S = \{HH, HT, TH, TT\};\quad n(S) = 4$$

$A$ ஆனது நாணயங்களில் வெவ்வேறு முகங்கள் கொண்ட நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{HT, TH\};\qquad n(A) = 2$$

நாணயங்களில் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.22** நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட $52$ சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது (i) சிவப்பு நிறச் சீட்டு (ii) ஹார்ட் சீட்டு (iii) சிவப்பு நிற இராசா (iv) முக சீட்டு (v) எண் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

**தீர்வு** $n(S) = 52$

(i) $A$ என்பது சிவப்புச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(A) = 26$$

சிவப்பு சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) $B$ என்பது ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(B) = 13$$

ஹார்ட் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(iii) $C$ என்பது சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(C) = 2$$

| சீட்டுகளின் வகைகள் | ஸ்பேட் ♠ | ஹார்ட் ♥ | கிளாவர் ♣ | டைமண்ட் ♦ |
|---|---|---|---|---|
| ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள் | A | A | A | A |
| | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 8 | 8 | 8 | 8 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 |
| | J | J | J | J |
| | Q | Q | Q | Q |
| | K | K | K | K |
| ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகளின் தொகுப்பு | **13** | **13** | **13** | **13** |

படம் 8.5

எனவே, சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(iv) $D$ என்பது முகச்சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. முகச்சீட்டுகளாவன மந்திரி $(J)$ அரசி $(Q)$ மற்றும் இராசா $(K)$.

$$n(D) = 4 \times 3 = 12$$

முகச்சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(v) $E$ என்பது எண் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. எண் சீட்டுகளாவன $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ மற்றும் $10$.

$$n(E) = 4 \times 9 = 36$$

எண் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.23** ஒரு நெட்டாண்டில் (leap year) $53$ சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (குறிப்பு: $366 = 52 \times 7 + 2$)

**தீர்வு** ஒரு நெட்டாண்டில் $366$ நாட்கள் உள்ளன. எனவே $52$ முழு வாரங்களும் மற்றும் $2$ நாட்களும் உள்ளன.

$52$ வாரங்களில், $52$ சனிக்கிழமைகள் கிடைத்து விடும். மீதமுள்ள இரண்டு நாட்களுக்கான வாய்ப்புகள் கீழ்க்காணும் கூறுவெளியில் கிடைக்கும்.

$S=$ {(ஞாயிறு–திங்கள், திங்கள்–செவ்வாய், செவ்வாய்–புதன், புதன்–வியாழன், வியாழன்– வெள்ளி, வெள்ளி–சனி, சனி–ஞாயிறு )}.

$$n(S) = 7$$

$A$ என்பது $53$-வது சனிக்கிழமை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

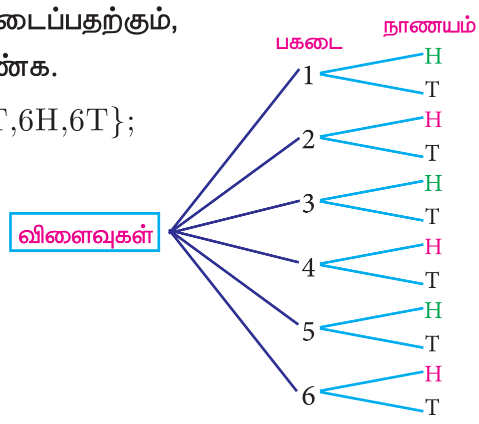
**சிந்தனைக் களம்**

சாதாரண ஆண்டில், $53$ சனிக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

எனவே $A =$ {வெள்ளி–சனி, சனி–ஞாயிறு }; $n(A) = 2$

53 சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

**எடுத்துக்காட்டு 8.24** ஒரு பகடை உருட்டப்படும் அதே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் சுண்டப்படுகிறது. பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கும், நாணயத்தில் தலைக் கிடைப்பதற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.




**தீர்வு** கூறுவெளி, $S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$;

$$n(S) = 12$$

$A$ ஆனது ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் தலைக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{1H, 3H, 5H\};\ n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

| செயல்பாடு 3 | செயல்பாடு 4 |
|---|---|
| மதுவின் வீட்டிலிருந்து அவள் பணியாற்றும் இடத்திற்கு செல்ல மூன்று வழிகள் $R_1$, $R_2$ மற்றும் $R_3$ உள்ளன. அவளுடைய அலுவலகத்தில் $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ என்ற நான்கு வாகன நிறுத்துமிடங்களும், $B_1$, $B_2$, $B_3$ என்ற மூன்று நுழைவாயில்களும் உள்ளன. அங்கிருந்து அவள் பணிபுரியும் தளத்திற்குச் செல்ல $E_1$, $E_2$ என்ற இரண்டு மின்தூக்கிகள் உள்ளன. மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி அவளுடைய வீட்டிலிருந்து அலுவலகத் தளத்தை அடைய எத்தனை வழிகள் உள்ளன எனக் காண்க? | தேவையான தகவல்களைச் சேகரித்துக் கீழ்க்கண்டவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.<br>(i) உன்னுடைய வகுப்பிலுள்ள ஒரு மாணவனைத் தேர்ந்தெடுக்க.<br>(ii) உன்னுடைய வகுப்பிலுள்ள ஒரு மாணவியைத் தேர்ந்தெடுக்க.<br>(iii) உனது பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பு பயில்பவர்களில் ஒருவரைத் தேர்வு செய்ய.<br>(iv) உனது பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பில் பயிலும் ஒரு மாணவனைத் தேர்வு செய்ய.<br>(v) உனது பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பில் பயிலும் ஒரு மாணவியைத் தேர்வு செய்ய. |

**எடுத்துக்காட்டு 8.25** ஒரு பையில் 6 பச்சை நிறப்பந்துகளும், சில கருப்பு மற்றும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை, சிவப்பு பந்துகளைப் போல் இருமடங்காகும். பச்சை பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சிவப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப் போல் மூன்று மடங்காகும். இவ்வாறெனில், (i) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை (ii) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு** பச்சை பந்துகளின் எண்ணிக்கை $n(G) = 6$

சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை $n(R) = x$ என்க

எனவே, கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை $n(B) = 2x$

மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 6+x+2x = 6+3x$

கொடுக்கப்பட்டது, $P(G) = 3\times P(R)$

$$\frac{6}{6+3x} = 3\times\frac{x}{6+3x}$$

$3x = 6$ லிருந்து, $x=2$

(i) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 2\times 2 = 4$

(ii) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 6+(3\times 2) = 12$

**எடுத்துக்காட்டு 8.26** படத்தில் காட்டியுள்ள அம்புக்குறி சுழற்றும் விளையாட்டில் 1, 2, 3, …12 என்ற எண்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் கிடைக்க வாய்ப்புள்ளது. அம்புக்குறியானது (i) 7 (ii) பகா எண் (iii) பகு எண் ஆகியவற்றில் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டறிக.

**தீர்வு** கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $n(S) = 12$

(i) $A$ ஆனது, அம்புக்குறி எண் 7-ல் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n(A)=1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

(ii) $B$ ஆனது அம்புக்குறி பகா எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$B = \{2,3,5,7,11\};\ n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) $C$ ஆனது அம்புக்குறி பகு எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$C = \{4,6,8,9,10,12\};\ n(C) = 6$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

**சிந்தனைக் களம்**

இயலா நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி எது?

## பயிற்சி 8.3

1. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளியை மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதுக.

2. ஒரு பையிலுள்ள $1$ முதல் $6$ வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட பந்துகளிலிருந்து, இரண்டு பந்துகள் எடுப்பதற்கான கூறுவெளியை மர வரைபடம் மூலமாகக் குறிப்பிடுக.

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. இங்கு $P(A) : P(\bar{A}) = 17:15$ மற்றும் $n(S) = 640$ எனில், (i) $P(\bar{A})$ (ii) $n(A)$ –ஐக் காண்க.

4. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. இரண்டு அடுத்தடுத்த பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

5. ஒரு பொது விழாவில், $1$ முதல் $1000$ வரை எண்களிட்ட அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. விளையாடும் ஒவ்வொருவரும் ஒரு அட்டையைச் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கிறார்கள். எடுத்த அட்டை திரும்ப வைக்கப்படவில்லை. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அட்டையில் எண் $500$-ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண் இருந்தால், அவர் வெற்றிக்கான பரிசைப் பெறுவார். (i) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற (ii) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

6. ஒரு பையில் $12$ நீல நிறப்பந்துகளும், $x$ சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. (i) அது சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க (ii) $8$ புதிய சிவப்பு நிறப்பந்துகள் அப்பையில் வைத்த பின்னர், ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது (i)–யில் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்கு எனில், $x$-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

7. இரண்டு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன.
   (i) இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்க
   (ii) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க
   (iii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க
   (iv) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $1$–ஆக இருக்க
   
   ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

8. மூன்று சீரான நாணயங்கள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.
   (i) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க (ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க
   (ii) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க (iv) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

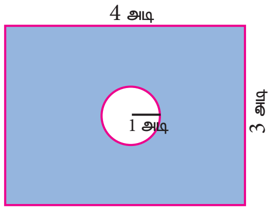
9. இரண்டு பகடைகளில் ஒன்றில் $1,2,3,4,5,6$ என்றும் மற்றொரு பகடையில் $1,1,2,2,3,3$ என்றும் முக மதிப்புகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அவை இரண்டும் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $2$ முதல் $9$ வரை ஒவ்வொரு மதிப்பும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

10. ஒரு பையில் $5$ சிவப்பு நிறப் பந்துகளும், $6$ வெள்ளை நிறப் பந்துகளும், $7$ பச்சை நிறப்பந்துகளும் $8$ கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பந்து (i) வெள்ளை (ii) கருப்பு அல்லது சிவப்பு (iii) வெள்ளையாக இல்லாமல் (iv) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

11. ஒரு பெட்டியில் $20$ குறைபாடில்லாத விளக்குகளும் ஒரு சில குறைபாடுடைய விளக்குகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு விளக்கானது குறைபாடுடையதாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{3}{8}$ எனில், குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட $52$ சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில், டைமண்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராசா மற்றும் இராணி சீட்டுகளும், ஹார்ட் சீட்டுகளிலிருந்து, இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகளும், ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து, மந்திரி மற்றும் இராசா சீட்டுகளும் நீக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள சீட்டுகளிலிருந்து, ஒரு சீட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. அந்த சீட்டானது (i) க்ளாவர் ஆக (ii) சிவப்பு இராணியாக (iii) கருப்பு இராசாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

13. மாணவர்கள் விளையாடும் ஒரு விளையாட்டில் அவர்களால் எறியப்படும் கல்லானது வட்டப்பரிதிக்குள் விழுந்தால் அதைத் வெற்றியாகவும், வட்டப்பரிதிக்கு வெளியே விழுந்தால் அதை தோல்வியாகவும் கருதப்படுகிறது. விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



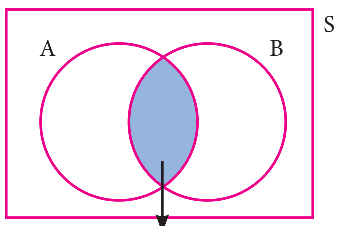

14. இரண்டு நுகர்வோர்கள், பிரியா மற்றும் அமுதன் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடிக்கு, குறிப்பிட்ட வாரத்தில் (திங்கள் முதல் சனி வரை) செல்கிறார்கள். அவர்கள் அங்காடிக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நாளும் செல்கிறார்கள். இருவரும் அங்காடிக்கு, (1) ஒரே நாளில் (2) வெவ்வேறு நாட்களில் (3) அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

15. ஒரு விளையாட்டிற்கான, நுழைவுக் கட்டணம் ₹ $150$. அந்த விளையாட்டில் ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. தனா, ஒரு நுழைவுச் சீட்டு வாங்கினாள். அவ்விளையாட்டில் ஒன்று அல்லது இரண்டு தலைகள் விழுந்தால் அவள் செலுத்திய நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பக் கிடைத்துவிடும். மூன்று தலைகள் கிடைத்தால் அவளது நுழைவுக் கட்டணம் இரண்டு மடங்காகக் கிடைக்கும். இல்லையென்றால் அவளுக்கு எந்தக் கட்டணமும் திரும்பக் கிடைக்காது. இவ்வாறெனில், (i) இரண்டு மடங்காக (ii) நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பப்பெற (iii) நுழைவுக் கட்டணத்தை இழப்பதற்கு, ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

## 8.5 நிகழ்ச்சிகளின் செயல்பாடுகள் (Algebra of Events)

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் $S$ ஆனது கூறுவெளி என்க. $A \subseteq S$ மற்றும் $B \subseteq S$ ஆகியவை, கூறுவெளி $S$ -ன் நிகழ்ச்சிகள் என்க. மேலும்,

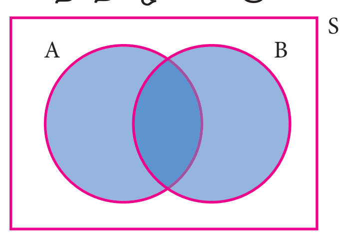
(i) $A$ மற்றும் $B$ ஆகிய இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சேர்ந்து நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $(A \cap B)$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.



$A \cap B$

படம் 8.7(i)

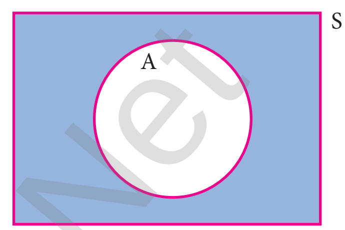
(ii) $A$ அல்லது $B$-யில் ஏதாவது ஒன்று நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $(A \cup B)$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.



$A \cup B$

படம் 8.7(ii)

(iii) $\bar{A}$ என்ற நிகழ்ச்சியானது, $A$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாத பொழுது நடைபெறும் நிகழ்ச்சியாகும்.



$\bar{A}$

படம் 8.7(iii)

**குறிப்பு**

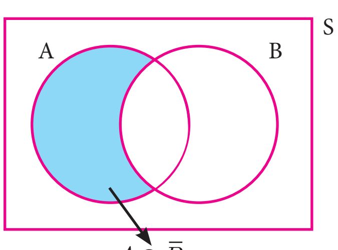
- $A \cap \bar{A} = \phi$    $A \cup \bar{A} = S$
- $A,\ B$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P$(ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ப்பு) $= \sum$(நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு)

### தேற்றம் 1

$A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

(i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ மட்டும்$) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B$ மட்டும்$) = P(B) - P(A \cap B)$ என நிறுவுக.



$A \cap \bar{B}$

படம் 8.8

### நிரூபணம்

(i) கணங்களின் பங்கீட்டுப் பண்பின் படி,

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$

2. $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \phi = \phi$

எனவே, $A \cap B$ மற்றும் $A \cap \bar{B}$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் அவைகளின் சேர்ப்பு $A$ ஆகும்.

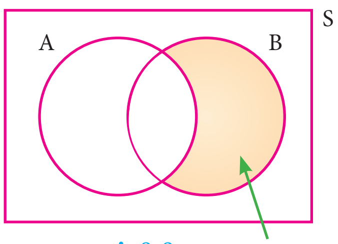
ஆகையால்,
$$P(A) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\right]$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

அதாவது, $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ மட்டும்$) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) கணங்களின் பங்கீட்டுப் பண்பின் படி,

1. $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) = (A\cup\bar{A})\cap B = S\cap B = B$

2. $(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B) = (A\cap\bar{A})\cap B = \phi\cap B = \phi$



படம் 8.9

எனவே, $A\cap B$ மற்றும் $\bar{A}\cap B$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் அவைகளின் சேர்ப்பு $B$ ஆகும்.

ஆகையால், 
$$P(B) = P\left[(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)\right]$$
$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$$
$$P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$$

அதாவது, $P(\bar{A}\cap B) = P(B$ மட்டும்$) = P(B) - P(A\cap B)$

### முன்னேற்றச் சோதனை

1. $P(A$ மட்டும்$)=$ ________.   2. $P(\bar{A}\cap B) =$ ________.
3. $A\cap B$ மற்றும் $\bar{A}\cap B$ ஆகியவை ________ நிகழ்ச்சிகள்.
4. $P(\bar{A}\cap\bar{B}) =$ ________.
5. $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A\cap B) =$ ______.
6. $P(A\cap B) = 0.3,\ P(\bar{A}\cap B) = 0.45$ எனில், $P(B) =$________.

## 8.6 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம் (Addition Theorem of Probability)

(i) $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்,
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

(ii) $A, B$ மற்றும் $C$ ஆகியவை ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,
$$P\left(A\cup B\cup C\right) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C)$$
$$-P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

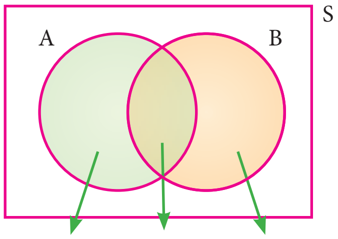
**நிரூபணம்**

(i) S- ஐ கூறுவெளியாக உடைய ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் $A$ மற்றும் $B$ ஆகியன ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் என்க.

வென் படத்திலிருந்து $A$ மட்டும், $A\cap B$ மற்றும் $B$ மட்டும் ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் அவைகளின் சேர்ப்பு ஆனது $A\cup B$ ஆகும்.

ஆகையால், $P(A\cup B) = P[\,(\text{A மட்டும்})\cup(A\cap B)\cup(B \text{ மட்டும்})]$
$$= P(A \text{ மட்டும்}) + P(A\cap B) + P(B \text{ மட்டும்})$$
$$= [P(A) - P(A\cap B)] + P(A\cap B) + [P(B) - P(A\cap B)]$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$




(ii) $A,\ B,\ C$ ஆகியன சமவாய்ப்பு சோதனையில் $S$ என்ற கூறுவெளியின் ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க.

$D = B\cup C$ என்க.

$$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup D)$$

$$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$
$$= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$
$$= P(A) + P(\text{B}) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

### செயல்பாடு 5

நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை பின்வரும் முறைகளில் சுலபமாக எழுதலாம்.

$$P(A \cup B) = S_1 - S_2$$
$$P(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3$$

இங்கே, $S_1 \to$ ஒரு நிகழ்ச்சி மட்டும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்.

$S_2 \to$ இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் மட்டும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்.

$S_3 \to$ மூன்று நிகழ்ச்சிகள் மட்டும் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல்.

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{S_1} \ \underbrace{-P(A \cap B)}_{S_2}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{S_1} \ \underbrace{-(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C))}_{S_2} \ \underbrace{+P(A \cap B \cap C)}_{S_3}$$

மேற்கண்ட அமைப்பு முறையில் $P(A \cup B \cup C \cup D)$ -யின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

**எடுத்துக்காட்டு 8.27** $P(\text{A}) = 0.37$, $P(\text{B}) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$ எனில், $P(A \cup B)$ ஐக் காண்க.

**தீர்வு** $P(\text{A}) = 0.37$, $P(\text{B}) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.28** நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும்போது ஓர் இராசா அல்லது ஓர் இராணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு** மொத்தச் சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 52$

இராசா சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 4$

இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{4}{52}$

இராணி சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 4$

இராணி சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{4}{52}$

**சிந்தனைக் களம்**

$P(A \cup B) + P(A \cap B)$ என்பது ____.

இராசா மற்றும் இராணி சீட்டுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

எனவே, இராசா சீட்டு அல்லது இராணி சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{2}{13}$

**எடுத்துக்காட்டு 8.29** இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. இரண்டு முக மதிப்புகளும் சமமாக இருக்க அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $4$ ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

**தீர்வு** இரண்டு பகடைகள் ஒன்றாக உருட்டப்படும் பொழுது அதன் கூறுவெளியில் $6\times6 = 36$ உறுப்புகள் இருக்கும். எனவே, $n(S) = 36$

$A$–ஆனது இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்புகள் மற்றும் $B$–ஆனது இரண்டு பகடைகளின் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $4$– ஆக கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

எனவே, $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

ஆகவே, $A \cap B = \{(2,2)\}$

எனவே, $n(A) = 6$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 1$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

எனவே, $P$ (ஒரே முக மதிப்புகள் அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $4$ கிடைக்க) $= P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $\frac{2}{9}$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8.30** $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ மற்றும் $P(A$ மற்றும் $B) = \frac{1}{8}$ என இருக்குமாறு அமையும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $P(A$ அல்லது $B)$ (ii) $P(A$-ம் இல்லை மற்றும் $B$–ம் இல்லை)

**தீர்வு** (i) $P(A$ அல்லது $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A$ அல்லது $B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

(ii) $P(A$-ம் இல்லை மற்றும் $B$-ம் இல்லை) $= P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= P\left(\overline{A \cup B}\right)$$

$$= 1 - P\left(A \cup B\right)$$

$$P(A \text{ -ம் இல்லை மற்றும் } B\text{–ம் இல்லை}) \quad = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.31** 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றது. அந்தச் சீட்டு இராசா அல்லது ஹார்ட் அல்லது சிவப்பு நிறச் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

| சீட்டுகளின் வகைகள் | ஸ்பேட் | ஹார்ட் | கிளாவர் | டைமண்ட் |
|---|---|---|---|---|
| ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள் | A | A | A | A |
| | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 8 | 8 | 8 | 8 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 |
| | 10 | 10 | 10 | 10 |
| | J | J | J | J |
| | Q | Q | Q | Q |
| | K | K | K | K |
| ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகளின் தொகுப்பு | 13 | 13 | 13 | 13 |

**தீர்வு** மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 52$; $n(S) = 52$

$A$ ஆனது இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n\left(A\right) = 4$

$$P\left(A\right) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$$

$B$ ஆனது ஹார்ட் சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n\left(B\right) = 13$

$$P\left(B\right) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52}$$

$C$ ஆனது சிவப்பு நிறச் சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n\left(C\right) = 26$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{52}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{ஹார்ட் மற்றும் இராசா சீட்டு கிடைக்க}) = \frac{1}{52}$$

$$P(B \cap C) = P(\text{சிவப்பு நிற ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்க}) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap C) = P(\text{சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைக்க}) = \frac{2}{52}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\text{ஹார்ட், இராசா சீட்டு சிவப்பு நிறத்தில் கிடைக்க}) = \frac{1}{52}$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவானது

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - \frac{1}{52} - \frac{13}{52} - \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

**எடுத்துக்காட்டு 8.32** 50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 28 பேர் NCC-யிலும், 30 பேர் NSS-லும் மற்றும் 18 பேர் NCC மற்றும் NSS-லும் சேர்கிறார்கள். ஒரு மாணவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர்

(i) NCC -யில் இருந்து, ஆனால் NSS–ல் இல்லாமல்

(ii) NSS -ல் இருந்து, ஆனால் NCC–யில் இல்லாமல்

(iii) ஒன்றே ஒன்றில் மட்டும் சேர்ந்து

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

**தீர்வு** மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 50$.

$A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை முறையே $NCC$ மற்றும் $NSS$ –யில் சேர்ந்த மாணவர்கள் என்க.

$n(A) = 28$, $n(B) = 30$, $n(A \cap B) = 18$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

(i) NCC யில் சேர்ந்து NSS–யில் சேராமல் உள்ள மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{1}{5}$$

(ii) NSS –யில் சேர்ந்து NCC–யில் சேராமல் உள்ள மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{50} - \frac{18}{50} = \frac{6}{25}$$

(iii) ஏதாவது ஒன்றில் மட்டுமே சேர்ந்த மாணவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A$ மட்டும் அல்லது $B$ மட்டும்$)$

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

(குறிப்பு : $(A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B)$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்)

**எடுத்துக்காட்டு 8.33** $A$ மற்றும் $B$ ஆகிய இரு விண்ணப்பதாரர்கள் IIT -யில் சேர்வதற்காகக் காத்திருப்பவர்கள். இவர்களில் $A$ தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $0.5$, $A$ மற்றும் $B$ இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $0.3$ எனில், $B$ தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான அதிகபட்ச நிகழ்தகவு $0.8$ என நிரூபிக்க.

**தீர்வு** $P(A) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.3$

$P(A \cup B) \leq 1$ என அறிவோம்.

$$P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

எனவே, $B$ தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான அதிகபட்ச நிகழ்தகவு $0.8$ ஆகும்.

## பயிற்சி 8.4

1. $P(A)=\dfrac{2}{3},\ P(B)=\dfrac{2}{5},\ P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$ எனில், $P(A\cap B)$ காண்க.

2. $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை இரு நிகழ்ச்சிகள். மேலும், $P(A)=0.42,\ P(B)=0.48$ மற்றும் $P(A\cap B)=0.16$ எனில்
(i) $P(A$ இல்லை$)$ (ii) $P(B$ இல்லை$)$ (iii) $P(A$ அல்லது $B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் $A,\ B$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் $P(A$ இல்லை$)=0.45,\ P(A\cup B)=0.65$ எனில், $P(B)$ -ஐக் காண்க.

4. $A$ மற்றும் $B$ -யில், குறைந்தது ஏதாவது ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $0.6$. $A$ மற்றும் $B$ ஒரே நேரத்தில் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $0.2$ எனில், $P(\bar{A})+P(\bar{B})$ –ஐக் காண்க.

5. நிகழ்ச்சி A -க்கான நிகழ்தகவு $0.5$ மற்றும் $B$ -க்கான நிகழ்தகவு $0.3$. $A$ மற்றும் $B$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A$ -ம், $B$ -ம் நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. இரண்டு பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. முதல் பகடையில் முக மதிப்பு இரட்டைப் படை எண் அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் $8$ ஆகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. நன்கு கலைத்து அடுக்கிய $52$ சீட்டுகளைக் கொண்ட கட்டிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது சிவப்பு இராசாவாக அல்லது கருப்பு இராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. ஒரு பெட்டியில் $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ 35,\ 37$ என்ற எண்கள் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு ஆனது $7$ -ன் மடங்காக அல்லது பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

9. சீரான மூன்று நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. அதிகபட்சம் $2$ பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் $2$ தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

10. ஒருவருக்கு மின்சார ஒப்பந்தம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{3}{5}$ மற்றும் குழாய்கள் பொருத்துவதற்கான ஒப்பந்தம் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{5}{8}$ ஆகும். மேலும் குறைந்தபட்சம் ஏதாவது ஒரு ஒப்பந்தம் கிடைக்கப்பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{5}{7}$ எனில், இரண்டு ஒப்பந்தங்களும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

11. $8000$ மக்கள்தொகை கொண்ட ஒரு நகரத்தில், $1300$ பேர் $50$ வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள் மற்றும் $3000$ பேர் பெண்கள். மேலும் 50 வயதிற்கு மேற்பட்ட பெண்கள் $30\%$ உள்ளனர் எனவும் தெரியவருகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு நபர், பெண்ணாக அல்லது $50$ வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

12. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. சரியாக இரண்டு தலைகள் அல்லது குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ அல்லது அடுத்தடுத்து இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

13. $A,\ B,\ C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள். மேலும் B கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $A$ -ன் நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்காகவும், $C$ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $A$-ஐ விட

மூன்று மடங்காகவும் உள்ளன. மேலும் $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$ எனில், $P(A), P(B)$ மற்றும் $P(C)$ -ஐக் காண்க?

14. 35 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவருக்கும் 1 முதல் 35 வரை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் உள்ள விகிதமானது 4:3 ஆகும். வரிசை எண்கள் மாணவர்களில் தொடங்கி மாணவிகளில் முடிவடைகிறது. ஒருவர் வகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர் பகா எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவராகவோ அல்லது பகு எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவியாகவோ அல்லது இரட்டை எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்டவராகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

## பயிற்சி 8.5

FKZST9

### பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது பரவல் அளவை இல்லை?

   (1) வீச்சு (2) திட்டவிலக்கம் (3) கூட்டுச் சராசரி (4) விலக்க வர்க்கச் சராசரி

2. 8, 8, 8, 8, 8. . ., 8 ஆகிய தரவின் வீச்சு

   (1) 0 (2) 1 (3) 8 (4) 3

3. சராசரியிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற தரவுப் புள்ளிகளுடைய விலக்கங்களின் கூடுதலானது ______.

   (1) எப்பொழுதும் மிகை எண் (2) எப்பொழுதும் குறை எண் (3) பூச்சியம் (4) பூச்சியமற்ற முழுக்கள்

4. 100 தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி 40 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 எனில், விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலானது

   (1) 40000 (2) 160900 (3) 160000 (4) 30000

5. முதல் 20 இயல் எண்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது

   (1) 32.25 (2) 44.25 (3) 33.25 (4) 30

6. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கமானது 3. ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 5-ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது

   (1) 3 (2) 15 (3) 5 (4) 225

7. $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் திட்டவிலக்கம் $p$-எனில், $3x+5$, $3y+5$, $3z+5$ ஆகியவற்றின் திட்டவிலக்கமானது

   (1) $3p+5$ (2) $3p$ (3) $p+5$ (4) $9p+15$

8. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே 4 மற்றும் 87.5% எனில் திட்டவிலக்கமானது

   (1) 3.5 (2) 3 (3) 4.5 (4) 2.5

9. கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது தவறானது?

(1) $P(A) > 1$  (2) $0 \le P(A) \le 1$  (3) $P(\phi) = 0$  (4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

10. $p$ சிவப்பு, $q$ நீல, $r$ பச்சை நிறக் கூழாங்கற்கள் உள்ள ஒரு குடுவையில் இருந்து ஒரு சிவப்பு கூழாங்கல் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{q}{p+q+r}$  (2) $\frac{p}{p+q+r}$  (3) $\frac{p+q}{p+q+r}$  (4) $\frac{p+r}{p+q+r}$

11. ஒரு புத்தகத்திலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பக்கம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பக்க எண்ணின் ஒன்றாம் இட மதிப்பானது 7-ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{3}{10}$  (2) $\frac{7}{10}$  (3) $\frac{3}{9}$  (4) $\frac{7}{9}$

12. ஒரு நபருக்கு வேலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $\frac{x}{3}$. வேலை கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனில் $x$-யின் மதிப்பானது

(1) 2  (2) 1  (3) 3  (4) 1.5

13. கமலம், குலுக்கல் போட்டியில் கலந்துகொண்டாள். அங்கு மொத்தம் 135 சீட்டுகள் விற்கப்பட்டன. கமலம் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{9}$ எனில், கமலம் வாங்கிய சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை,

(1) 5  (2) 10  (3) 15  (4) 20

14. ஆங்கில எழுத்துகள் $\{a, b, \ldots, z\}$ -யிலிருந்து ஓர் எழுத்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்யப்படுகிறது. அந்த எழுத்து $x$ -க்கு முந்தைய எழுத்துகளில் ஒன்றாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{12}{13}$  (2) $\frac{1}{13}$  (3) $\frac{23}{26}$  (4) $\frac{3}{26}$

15. ஒரு பணப்பையில் ₹2000 நோட்டுகள் 10-ம், ₹500 நோட்டுகள் 15-ம், ₹200 நோட்டுகள் 25-ம் உள்ளன. ஒரு நோட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றது எனில், அந்த நோட்டு ₹500 நோட்டாகவோ அல்லது ₹200 நோட்டாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(1) $\frac{1}{5}$  (2) $\frac{3}{10}$  (3) $\frac{2}{3}$  (4) $\frac{4}{5}$

## அலகு பயிற்சி - 8

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியானது 62.8 மற்றும் அனைத்து நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் 50. விடுபட்ட நிகழ்வெண்கள் $f_1$ மற்றும் $f_2$ -ஐக் கணக்கிடுக.

| பிரிவு இடைவெளி | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 | 100-120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் | 5 | $f_1$ | 10 | $f_2$ | 7 | 8 |

2. ஒரு வடிவமைப்பில் வரையப்பட்ட வட்டங்களின் விட்ட அளவுகள் (மி.மீ-ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| விட்டங்கள் | 33-36 | 37-40 | 41-44 | 45-48 | 49-52 |
|---|---|---|---|---|---|
| வட்டங்களின் எண்ணிக்கை | 15 | 17 | 21 | 22 | 25 |

திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

3. ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| $x$ | $k$ | $2\,k$ | $3\,k$ | $4\,k$ | $5\,k$ | $6\,k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

அட்டவணையில், $k$ ஒரு மிகை முழு. விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது $160$ எனில், $k$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. செல்சியஸில் குறிக்கப்பட்ட வெப்பநிலை தரவின் திட்டவிலக்கமானது $5$. இந்த வெப்பநிலை தரவை ஃபாரன்ஹீட் ஆக மாற்றும்பொழுது கிடைக்கும் தரவின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.

5. ஒரு பரவலில் $\sum(x-5)=3, \sum(x-5)^2=43,$ மற்றும் மொத்த தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை $18$ எனில் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

6. இரண்டு நகரங்களின் பல்வேறு இடங்களில் விற்பனை செய்யும் நிலக்கடலை பொட்டலங்களின் விலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எந்த நகரத்தில் விலைகளானது மிகவும் நிலையானதாக உள்ளது?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| நகரம் $A$-ன் விலைகள் | 20 | 22 | 19 | 23 | 16 |
| நகரம் $B$-ன் விலைகள் | 10 | 20 | 18 | 12 | 15 |

7. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக்கெழு முறையே $20$ மற்றும் $0.2$ எனில், விவரங்களின் மிகப்பெரிய மதிப்பு மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்புகளைக் காண்க.

8. இரண்டு முறையான பகடைகள் உருட்டப்படும் பொழுது, முக மதிப்புகளின் பெருக்கல் $6$ ஆகவோ அல்லது முக மதிப்புகளின் வித்தியாசம் $5$ ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

9. இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள ஒரு குடும்பத்தில், குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

10. ஒரு பையில் $5$ வெள்ளை மற்றும் சில கருப்பு பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து கருப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப்போல் இரு மடங்கு எனில், கருப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11. ஒரு மாணவன் இறுதித் தேர்வில் ஆங்கிலம் மற்றும் தமிழில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $0.5$, ஒன்றிலும் தேர்ச்சி அடையாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $0.1$ ஆங்கிலத் தேர்வில் தேர்ச்சி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $0.75$ எனில், தமிழ் தேர்வில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

12. $52$ சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டில் ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து இராசா, இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகள் நீக்கப்படுகின்றன. மீதமுள்ள சீட்டுகளிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது (i) ஒரு டைமண்ட் (ii) ஓர் இராணி (iii) ஒரு ஸ்பேடு (iv) $5$ என்ற எண் கொண்ட ஹார்ட் சீட்டு ஆகியனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

## நினைவில் கொள்ள வேண்டியவை

- வீச்சு $= L - S$ ($L$ - மிகப்பெரிய எண், $S$ - மிகச்சிறிய எண்)
- வீச்சுக்கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$; விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$
- திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$
- திட்டவிலக்கம் (தொகுக்கப்படாதவை)

  (i) நேரடி முறை $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$ (ii) சராசரி முறை $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^{\,2}}{n}}$

  (iii) ஊகச் சராசரி முறை $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

  (iv) படிவிலக்க முறை $\sigma = c \times \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$
- முதல் $n$ இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$
- திட்டவிலக்கம் (தொகுக்கப்பட்டவை)

  (i) சராசரி முறை $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$ (ii) ஊகச் சராசரி முறை $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

  (iii) படி விலக்க முறை $\sigma = C \times \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$
- மாறுபாட்டுக் கெழு C.V $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$
- மாறுபாட்டுக் கெழுவின் மதிப்பு சிறியதாக இருந்தால், அத்தரவு அதிக நிலைத் தன்மையுடையது. மாறுபாட்டுக் கெழுவின் மதிப்பு பெரியதாக இருந்தால் அத்தரவு குறைந்த நிலைத் தன்மையுடன் இருக்கும்.
- ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையில் அனைத்து வாய்ப்புகளையும் அறிந்து கொள்ள முடியும். ஆனால், குறிப்பிட்ட வாய்ப்புகள் அறியப்படாது.
- ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் கிடைக்கப்பெறும் அனைத்து சாத்திய விளைவுகளின் தொகுப்பைக் கூறுவெளி என்கிறோம்.
- A, B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A \cap B = \phi$
- $E$ என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

  (i) உறுதியாகக் கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது $1$ மற்றும் இயலாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது $0$ ஆகும்.

  (ii) $0 \le P(E) \le 1$ ; (iii) $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
- $A$ மற்றும் $B$ ஆனவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- (i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ மட்டும்$) = P(A) - P(A \cap B)$

  (ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B$ மட்டும்$) = P(B) - P(A \cap B)$
- $A$ மற்றும் $B$ ஆனவை ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $A$, $B$, $C$ என்பன ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

  $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

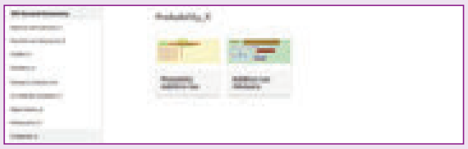
## இணையச் செயல்பாடு (ICT)

**ICT 8.1**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Probability என்ற தலைப்பில் ஒரு பணித்தாள் தோன்றும். அதில் Probability Addition law என்ற தலைப்பைத் தேர்வு செய்க.

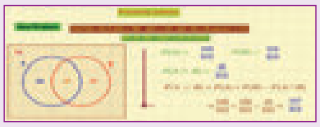
**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் New problem என்பதை சொடுக்குவதன் மூலம் பணித்தாளின் கேள்வியை மாற்ற முடியும். பின்னர் வலை நகர்த்தி கணக்கின் படிகளைக் காணலாம்.

படி 1



படி 2

முடிவுகள்

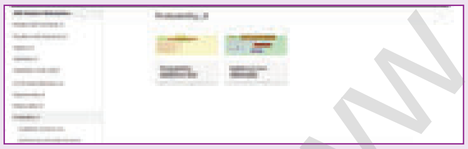


**ICT 8.2**

**படி 1:** கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க. Probability என்ற தலைப்பில் ஒரு பணித்தாள் தோன்றும். அதில் Addition law mutually exclusive என்ற தலைப்பைத் தேர்வு செய்க.

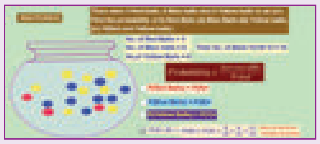
**படி 2:** கொடுக்கப்பட்ட பணித்தாளில் New problem என்பதை சொடுக்குவதன் மூலம் பணித்தாளின் கேள்வியை மாற்ற முடியும். பின்னர் வலை நகர்த்தி கணக்கின் படிகளைக் காணலாம். சரிபார்க்கும் பெட்டியைச் சொடுக்கி சரியான விடையைப் பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2

முடிவுகள்



இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/359554

அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

B371_10_MATHS_TM







X_Ch 8 TM.indd 350 15-04-2019 16:18:46

# விடைகள்

## பயிற்சி 1.1

1.(i) $A\times B=\{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A\times A=\{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B\times A=\{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A\times B=\{(p,p)(p,q)(q,p)(q,q)\}$; $A\times A=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$ ;

$B\times A=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $A\times B=\{\ \}$; $A\times A=\{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$; $B\times A=\{\ \}$

2. $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

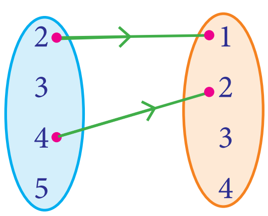
3. $A=\{3,4\}$ $B=\{-2,0,3\}$ 5. உண்மை

## பயிற்சி 1.2

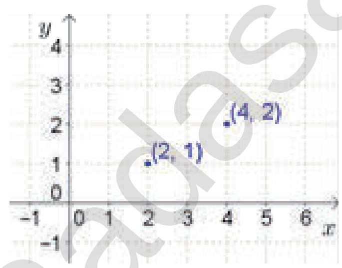
1.(i) உறவு இல்லை (ii) உறவு இல்லை (iii) உறவு (iv) உறவு இல்லை

2. $\{1,2,3,4,5,6\},\{1,4,9,16,25,36\}$ 3. $\{0,1,2,3,4,5\},\{3,4,5,6,7,8\}$

4. (i)(i)

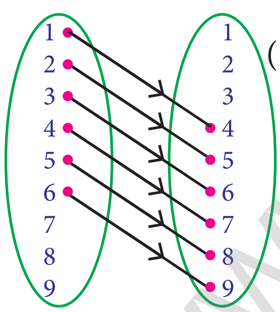



(ii)

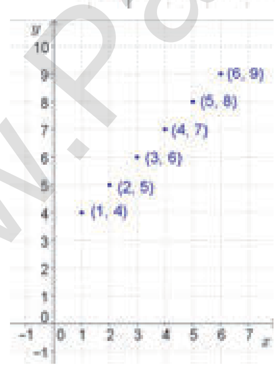



(iii) $\{(2,1),(4,2)\}$

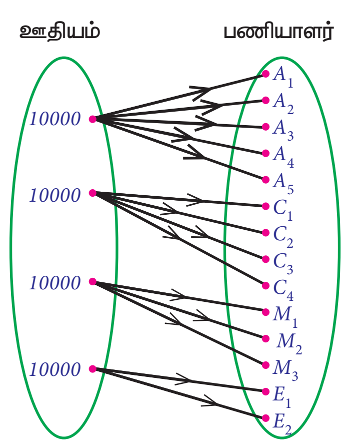
(ii)(i)



(ii)




(iii) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$




5. $\{(10000,A_1),(10000,A_2),(10000,A_3),(10000,A_4),$
$(10000,A_5),(25000,C_1),(25000,C_2),(25000,C_3),$
$(25000,C_4),(50000,M_1),(50000,M_2),(50000,M_3),$
$(100000,E_1),(100000,E_2)\}$

## பயிற்சி 1.3

1. $\{1,2,3,4,\ldots\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2,4,6,8,\ldots\}$, ஆம். 2. ஆம்

3.(i) 12 (ii) $4a^2-10a+6$ (iii) 0 (iv) $x^2-7x+12$

4.(i) (a) 9 (b) 6 (c) 6 (d) 0

(ii) 9.5 (iii) (a) $\{x \,/\, 0 \le x \le 10, x \in R\}$ (b) $\{x \,/\, 0 \le x \le 9, x \in R\}$

(iv) 5 5. 2 6.(i) $-2$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

7. $4x^3 - 96x^2 + 576x$ 8. 1 9. $500t$

10.(i) ஆம் (ii) 0.9,24.5 (iii) 60.5 அங்குலம் (iv) 32 செ.மீ

## பயிற்சி 1.4

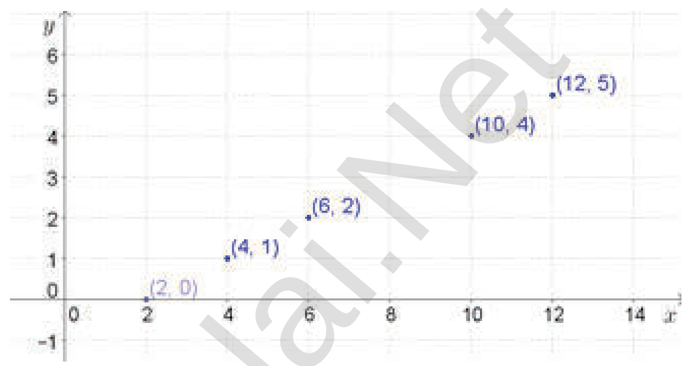
1.(i) சார்பு அல்ல (ii) சார்பு (iii) சார்பு அல்ல (iv) சார்பு

2.(i) $\{(2,0),(4,1),(6,2),(10,4),(12,5)\}$

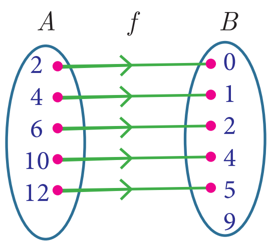
(ii)

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 |

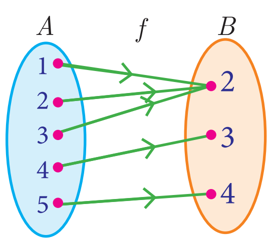
(iv)




(iii)



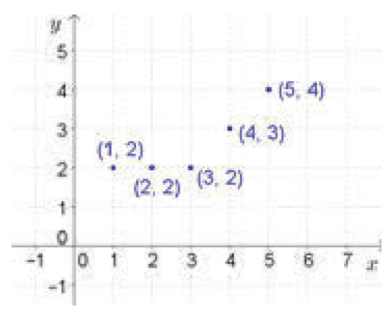

3.(i)




(ii)

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |

(iii)




6.(i) $\{1,8,27,64\}$ (ii) ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் உள்நோக்கிய சார்பு

7.(i) இருபுறச் சார்பு (ii) இருபுறச் சார்பு இல்லை 8. $a=1$ அல்லது $-1$, $b=1$

9.(i) 5 (ii) 2 (iii) $-2.5$ (iv) 1

10.(i) 2 (ii) 10 (iii) 178 (iv) $\frac{-9}{17}$

11. ஆம் 12.(i) $32°F$ (ii) $82.4°F$ (iii) $24°F$ (iv) $100°C$ (v) $-40°$

## பயிற்சி 1.5

1.(i) $x^2 - 6,\ (x-6)^2$ ; சமமில்லை (ii) $\frac{2}{2x^2-1},\ \frac{8}{x^2} - 1$; சமமில்லை

(iii) $\frac{3-x}{3}$ ; சமமில்லை (iv) $x-1,\ x-1$ ; சமம் (v) $4x^2 + 8x + 3,\ 4x^2$ ; சமமில்லை

2.(i) $-5$ (ii) $\frac{-5}{3}$ 4.(i) $a = \pm 2$ (ii) 2

5. $\left\{y \mid y = 2x^2 + 1,\ x \in \mathbb{N}\right\}$; $\left\{y \mid y = (2x+1)^2, x \in \mathbb{N}\right\}$ 6.(i) $x^4 - 2x^2$

(ii) $\left[x^4 - 2x^2\right]^2 - 1$ 7. $f$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று, $g$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று இல்லை, $f \circ g$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று 9. $-4x - 1$

## பயிற்சி 1.6

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (3) | (1) | (2) | (3) | (4) | (3) | (1) | (3) | (3) | (1) | (4) | (3) | (2) | (4) |

## அலகு பயிற்சி–1

1. 1,2 மற்றும் $-5,1$ 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3.(i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,11,13,17\}$

5. {–1,0,1} 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R-\{9\}$ (ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

## பயிற்சி 2.1

1. 2, 5, 8, 11, … 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51
(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. 2, –1 9. 6

## பயிற்சி 2.2

1. இரட்டை எண்கள் 2. மதிப்பு இல்லை 3. 10101 4. 9, 3
5. 2,3,5,7 மற்றும் 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

## பயிற்சி 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2
2. 3 3. 2,8,14,… 4. 8, 19, 30, … 5. 11 மு.ப
6. 8 பி.ப 7. வெள்ளி 9. 2 10. 6 மு.ப, திங்கள்

## பயிற்சி 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7,-11,-15$ (iii) $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$ 2.(i) $-1,6,25,62$
(ii) $2,-6,12,-20$ (iii) $-4$, 2, 12, 26 3.(i) $n^2+1$ (ii) $\frac{n-1}{n}$
(iii) $5n-2$ 4.(i) $\frac{13}{3},\frac{15}{4}$ (ii) $-12,117$ 5. $\frac{63}{11},\frac{225}{31}$ 6. 1,1,3,7,17,41

## பயிற்சி 2.5

1.(i) கூட்டுத் தொடர்வரிசை (ii) கூட்டுத் தொடர்வரிசை இல்லை
(iii) கூட்டுத் தொடர்வரிசை (iv) கூட்டுத் தொடர்வரிசை
(v) கூட்டுத் தொடர்வரிசை இல்லை 2.(i) 5, 11, 17, … (ii) 7, 2, –3, … (iii) $\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\ldots$
3.(i) $-1,2$ (ii) $-3,-7$ 4. –83 5. 15 6. 93, 99 8. 4 9. 3,17,31
10. 78 11. 2,9,16 12. 5:7 13. $-3°C, 0°C, 3°C, 6°C, 9°C$ 14. 31 ஆண்டுகள்

## பயிற்சி 2.6

1.(i) 3240 (ii) 999 (iii) 721 2. 20 3. 1540
5. 612.5 6. 50625 7. 168448 8.(i) ₹ 45750 (ii) ₹ 5750 9. 20 மாதங்கள்
10.(i) 42 (ii) 2130 12. $\frac{6}{a+b}(24a-13b)$

## பயிற்சி 2.7

1.(i) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை இல்லை
(iii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (iv) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (v) பெருக்குத் தொடர்வரிசை
(vi) பெருக்குத் தொடர்வரிசை இல்லை (vii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை
2.(i) 6,18,54 (ii) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$
(iii) 1000,400,160 3. 1 4. –18 5.(i) 12 (ii) 7 6. $5\times(3^{11})$
7. 3072 9. $\frac{9}{2}$, 3, 2 10. ₹ 76577 11. ₹ 23820, ₹ 24040

### பயிற்சி 2.8

1.(i) $\frac{25}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$ (ii) $\frac{1024}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 2. 1820 3. 12

4.(i) $\frac{27}{2}$ (ii) 63 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) $\frac{4}{9}n-\frac{4\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{81}$

(ii) $\frac{10(10^n-1)}{27}-\frac{n}{3}$ 7. 3069 8. ₹ 174760 9. $\frac{41}{333}$

### பயிற்சி 2.9

1.(i) 1830 (ii) 1584 (iii) 3003 (iv) 1240 (v) 3256 (vi) 42075 (vii) 1296

2. 105625 3. 210 4. 15 5. 9 6. 4615 செ.மீ$^2$ 7.(i) $4n^3+3n^2$ (ii) 2240

### பயிற்சி 2.10

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (1) | (2) | (3) | (4) | (1) | (4) | (3) | (1) | (3) | (3) | (4) | (2) | (2) | (3) |

### அலகு பயிற்சி–2

2.(i) 35 லிட்டர் (ii) 5 (iii) 3 3. 1 6. –78 8. ₹1200 9. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots$ 10. ₹27636

### பயிற்சி 3.1

1.(i) $2, -1, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (iii) 35, 30, 25

2.(i) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (ii) தீர்வு இல்லை (iii) ஒரே தீர்வு

3. 24 ஆண்டுகள், 51 ஆண்டுகள், 84 ஆண்டுகள் 4. 137 5. 7, 3, 2

### பயிற்சி 3.2

1.(i) $x^2+2x-3$ (ii) $x^2+1$ (iii) $x(x^2+4x+4)$ (iv) $3(x^2+1)$

2.(i) $8x^3y^2$ (ii) $-36a^3b^2c$ (iii) $-48m^2n^2$ (iv) $(p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $4(x+3)(2x+1)(x-3)$ (vi) $2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2+6xy+9y^2)$

### பயிற்சி 3.3

1.(i) $105x^2y^2, 7xy$ (ii) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1), (x+1)$

(iii) $xy(x+y), x(x+y)$ 2.(i) $(a+6)(a-2)(a-3)$ (ii) $x(x-3a)^2(x^2+3ax+9a^2)$

3.(i) $4x^2(x-1)$ (ii) $x^2-xy+y^2$ 4. (i) $(a+2)(a-7)$ (ii) $x^2+xy+y^2$

### பயிற்சி 3.4

1.(i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-9}{x-2}$ (iii) $\frac{9}{x-1}$ (iv) $\frac{p+5}{2p(p-4)}$

2.(i) $-5, 5$ (ii) 2, 3 (iii) 1 (iv) $0, -3, 2$

### பயிற்சி 3.5

1.(i) $\frac{3x^3z}{5y^3}$ (ii) $p+4$ (iii) $\frac{3t^2}{4}$ 2.(i) $\frac{3x-4y}{2x-5}$ (ii) $\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3.(i) $-5$ (ii) $\frac{b-4}{b+2}$ (iii) $\frac{3y}{x-3}$ (iv) $\frac{4(2t-1)}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$ 5. $x^2+4x+4$

## பயிற்சி 3.6

1.(i) $\frac{2x}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$ (iii) $x^2+xy+y^2$ 2.(i) $\frac{2(x-2)}{x-4}$ (ii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$ 4. $\frac{3}{x^2-2x+4}$ 5. $\frac{(4x^2-1)}{2(4x^2+1)}$ 7. 2 மணிகள் 24 நிமிடங்கள் 8. 30 கி.கி, 20 கி.கி,

## பயிற்சி 3.7

1.(i) $2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$ (ii) $4\left|\frac{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}{4x-1}\right|$ (iii) $\frac{11}{9}\left|\frac{(a+b)^4(x+y)^4}{(a-b)^6}\right|$ 2.(i) $|2x+5|$

(ii) $\left|1+\frac{1}{x^3}\right|$ (iii) $|3x-4y+5z|$ (iv) $|(x-2)(7x+1)(4x-1)|$ (v) $\frac{1}{6}|(4x+3)(3x+2)(x+2)|$

## பயிற்சி 3.8

1.(i) $|x^2-6x+3|$ (ii) $|2x^2-7x-3|$ (iii) $|4x^2+1|$ (iv) $|11x^2-9x-12|$

2. $\left|\frac{x}{y}-5+\frac{y}{x}\right|$ 3.(i) $49,\ -42$ (ii) $144,\ 264$ 4.(i) $-12,\ 4$ (ii) $24,\ -32$

## பயிற்சி 3.9

1.(i) $x^2+9x+20=0$ (ii) $3x^2-5x+12=0$ (iii) $2x^2+3x-2=0$

(iv) $x^2+(2-a^2)x+(a+5)^2=0$ 2.(i) $-3,\ -28$ (ii) $-3,\ 0$ (iii) $-\frac{1}{3},-\frac{10}{3}$ (iv) $\frac{1}{3},\ \frac{-4}{3}$

## பயிற்சி 3.10

1.(i) $-\frac{1}{4},2$ (ii) $-2,\frac{9}{2}$ (iii) $-2,9$ (iv) $-\sqrt{2},\frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{4},\frac{1}{4}$ 2. 6

## பயிற்சி 3.11

1.(i) $\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ (ii) $-1,\ 3$ 2.(i) $2,\ \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(iii) $-1,\ \frac{23}{3}$ (iv) $\frac{a+b}{6},\ \frac{a-b}{6}$ 3. 3.75 நொடிகள்

## பயிற்சி 3.12

1. $5,\ -\frac{1}{5}$ 2. 1.5 மீ 3. 45 கி.மீ/மணி 4. 20 ஆண்டுகள், 10 ஆண்டுகள்

5. ஆம், 12 மீ, 16 மீ 6. 72 7. 28 மீ, 42 மீ 8. 2 மீ 9. 40, 60

## பயிற்சி 3.13

1.(i) மெய், சமமில்லை (ii) மெய், சமமில்லை (iii) மெய்யல்ல

(iv) மெய், சமம் (v) மெய், சமம் 2.(i) 2, 3 (ii) $1,\ \frac{1}{9}$

## பயிற்சி 3.14

1.(i) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$ (ii) $\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$ (iii) $9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$

(iv) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ 2.(i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{29}{20}$ (iii) $\frac{-63}{8}$ (iv) $\frac{101}{54}$

3.(i) $x^2-44x+16=0$ (ii) $x^2-3x-1=0$ (iii) $x^2-24x-64=0$

4. $-15,\ 15$ 5. $-24,24$ 6. $-36$

## பயிற்சி 3.15

1.(i) மூலங்கள் மெய், சமமில்லை (ii) மூலங்கள் மெய், சமம் (iii) மூலங்கள் மெய்யல்ல
(iv) மூலங்கள் மெய், சமமில்லை (v) மூலங்கள் மெய், சமம்
(vi) மூலங்கள் மெய், சமமில்லை 2. $-3, 4$ 3. மூலங்கள் மெய்யல்ல
4. $-1$ 5. $-4, 1$ 6. $-2, 7$ 7. $-1, 3$ 8. $-2, 3$

## பயிற்சி 3.16

1.(i) 16 (ii) $4\times 4$ (iii) $\sqrt{7}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 5, 0, -11, 1$

2. $1\times 18, 2\times 9, 3\times 6, 6\times 3, 9\times 2, 18\times 1$ மற்றும் $1\times 6, 2\times 3, 3\times 2, 6\times 1$

3.(i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 9 & \frac{64}{3} \\ 9 & \frac{64}{3} & \frac{125}{3} \\ \frac{64}{3} & \frac{125}{3} & 72 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{5} & -\sqrt{3} \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

7.(i) 3,12,3 (ii) 4,2,0 அல்லது 2,4,0 (iii) 2,4,3

## பயிற்சி 3.17

3. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4.(i) $\begin{pmatrix} 7 & -17 & -37 \\ -39 & -11 & -26 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -63 & -15 & -45 \\ 15 & -27 & -60 \end{pmatrix}$

5.(i) $4, -10, 12$ (ii) $-10, 14, 10$ 6. 4,6 7. 4 8. $-1, 5$ மற்றும் $-2, 4$

## பயிற்சி 3.18

1. $P\times R$, வரையறுக்கப்படாது 2. 7,10 3. $3\times 3, 4\times 2, 4\times 2, 4\times 1, 1\times 3$

4. $\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 23 \end{pmatrix}, AB \neq BA$

## பயிற்சி 3.19

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | (1) | (2) | (1) | (2) | (3) | (4) | (2) | (3) | (3) | (2) | (1) | (2) | (4) | (2) | (2) | (4) | (2) | (2) | (1) |

## அலகு பயிற்சி-3

1. 6,2,1 2. 42,78,30 3. 153 4. $(ky+x)(k^2x^2-y^2)$ 5. $x^2+2x+1$ 6. (i) $x^a-2$
(ii) $-x+\frac{5}{2}$ 7. $\frac{1}{2qr}$ 8. 11 மணிகள், 22 மணிகள், 33 மணிகள் 9. $\left|17x^2-18x+19\right|$ 10. 3,63
11. 14 கி.மீ/மணி 12. 120 மீ, 40 மீ 13. 14 நிமிடங்கள் 14. 25 15.(i) $x^2-6x+11=0$
(ii) $3x^2-2x+1=0$ 16. $3, \frac{9}{4}$ 17.(i) $\begin{pmatrix} 750 & 1500 & 2250 \\ 3750 & 4250 & 750 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 8000 & 1600 & 24000 \\ 40000 & 24000 & 8000 \end{pmatrix}$
18. $\sin\theta$ 19. 8, 4 20. $\begin{pmatrix} 122 & 71 \\ -58 & -34 \end{pmatrix}$

## பயிற்சி 4.1

1.(i) வடிவொத்தவை இல்லை (ii) வடிவொத்தவை, 2.5 2. 3.3 மீ 3. 42 மீ
5. $\frac{15}{13}, \frac{36}{13}$ 6. 5.6 செ.மீ, 3.25 செ.மீ 7. 2.8 செ.மீ 9. 2 மீ

## பயிற்சி 4.2

1.(i) 6.43 செ.மீ (ii) 1 2. 60 செ.மீ 5. 4 செ.மீ, 4 செ.மீ

8. 2.5 செ.மீ, 3.5 செ.மீ 9.(i) இருசமவெட்டி இல்லை (ii) இருசமவெட்டி 13. 2.1 செ.மீ

### பயிற்சி 4.3

1. 30 மீ 2. 1 மைல் 3. 21.74 மீ 4. 12செ.மீ, 5 செ.மீ 5.10 மீ, 24 மீ, 26 மீ 6. 0.8 மீ

### பயிற்சி 4.4

1. 7 செ.மீ 2. 2 செ.மீ 3. 7 செ.மீ, 5 செ.மீ, 3 செ.மீ 4. $30°$ 5. $130°$ 6. $\frac{20}{3}$ செ.மீ

7. 10 செ.மீ 8. 4.8 செ.மீ 10. 2 செ.மீ 11. 2 செ.மீ 14. 8.7 செ.மீ 16. 4 செ.மீ

### பயிற்சி 4.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (2) | (4) | (1) | (4) | (1) | (2) | (3) | (1) | (4) | (2) | (2) | (2) | (4) | (1) |

### அலகு பயிற்சி–4

2. $\frac{12}{5}$ செ.மீ, $\frac{10}{3}$ செ.மீ 5. $20\sqrt{13}$ கி.மீ 7. 10 மீ 8. நிழல்= $\frac{4}{11}\times$(தொலைவு) 10.14 அலகுகள்

### பயிற்சி 5.1

1.(i) 24 ச. அ (ii) 11.5 ச. அ 2.(i) ஒரு கோட்டமை (ii) ஒரு கோட்டமை

3.(i) 44 (ii) 13 4.(i) 0 (ii) $\frac{1}{2}$ அல்லது $-1$ 5.(i) 35 ச. அ (ii) 34 ச. அ

6. $-5$ 7. $2, -1$ 8.24 ச.அ, $\Delta ABC$ -யின் பரப்பு $= 4\times(\Delta PQR)$ -யின் பரப்பு

9. 38 ச. அ 10. 10 வாளி 11.(i) 3.75 ச. அ (ii) 3 ச. அ (iii) 13.88 ச. அ

### பயிற்சி 5.2

1.(i) வரையறுக்க முடியாது (ii) 0 2.(i) $0°$ (ii) $45°$ 3.(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $-\cot\theta$

4. 3 6. 7 7. $\frac{17}{2}$ 8. 4 9.(i) ஆம் (ii) ஆம் 11. 5, 2 14. $\left(1, \frac{-3}{2}\right)$ அல்லது $\left(3, \frac{-1}{2}\right)$

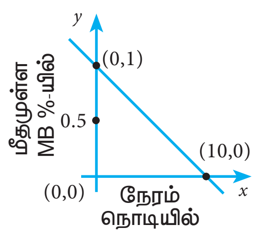
### பயிற்சி 5.3

1.(i) $2y+3=0$ (ii) $2x-5=0$ 2. $1, 45°, \frac{5}{2}$

3. $x-\sqrt{3y}-3\sqrt{3}=0$ 4. $\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{3+3\sqrt{3}}{-2}$ 5. $-5$ 6. $x-y-16=0$

7.(i) $16x-15y-22=0$ (ii) $4x-9y+19=0$ 8. $15x-11y+46=0$

9. $x+4y-14=0$ 10. $5x+4y-3=0$ 11. (i)




(ii) 1 (iii) 7.5 நொடிகள் (iv) 10 நொடிகள்

12.(i) $3x-2y-12=0$ (ii) $3x-20y+15=0$ 13.(i) 2, $-3$

(ii) $-3, -4$ 14.(i) $5x+2y+3=0$ (ii) $x+y+4=0$

### பயிற்சி 5.4

1.(i) 0 (ii) வரையறுக்க முடியாது 2.(i) 0.7 (ii) வரையறுக்க முடியாது

3.(i) இணை (ii) செங்குத்து 4. 4 5. $3x+4y+7=0$

6. $2x+5y-2=0$ 7. $2x+5y+6=0$, $5x+y-48=0$ 8. $5x-3y-8=0$

9. $13x+5y-18=0$ 10. $49x+28y-156=0$ 11. $31x+15y+30=0$

12. $4x+13y-9=0$

### பயிற்சி 5.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (1) | (2) | (3) | (3) | (4) | (2) | (2) | (1) | (3) | (3) | (1) | (2) | (1) | (2) |

### அலகு பயிற்சி–5

1. சாய் சதுரம் 2. $\left(\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$ 3. 0 ச.அ 4. $-5$ 6. $2x-3y-6=0,\ 3x-2y+6=0$

7. 1340 லிட்டர் 8. $(-1,-4)$ 9. $13x+13y-6=0$ 10. $119x+102y-125=0$

### பயிற்சி 6.2

1. $30^\circ$ 2. 24 மீ 3. 3.66 மீ 4. 1.5 மீ 5.(i) 7 மீ (ii) 16.39 மீ

6. 10 மீ 7. $100\sqrt{5}$ மீ 8. 0.14 மைல் (தோராயமாக)

### பயிற்சி 6.3

1. 150 மீ 2. 50 மீ 3. 32.93 மீ 4. 2078.4 மீ 6. 0.5 மீ/நொ

### பயிற்சி 6.4

1. 35.52 மீ 2. 69.28 மீ, 160 மீ 4. 150 மீ, ஆம்

5.(i) 264 மீ (ii) 198 மீ (iii) 114.31 மீ 6.(i) 2.91 கி. மீ (ii) 6.93 கி. மீ

### பயிற்சி 6.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (4) | (2) | (1) | (2) | (2) | (1) | (3) | (2) | (4) | (2) | (2) | (4) | (2) | (1) |

### அலகு பயிற்சி–6

5. 29.28 மீ/நொ 6. 1.97 நொடிகள் (தோராயமாக) 7.(i) 24.58 கி. மீ(தோராயமாக)

(ii) 17.21 கி. மீ (தோராயமாக) (iii) 21.41 கி. மீ (தோராயமாக)

(iv) 23.78 கி. மீ (தோராயமாக)) 8. 200 மீ 9. 39.19 மீ

### பயிற்சி 7.1

1. 25 செ.மீ, 35 செ.மீ 2. 7 மீ, 35 மீ 3. 2992 ச.செ.மீ

4. $PQ$ யை பொருத்து சுழற்றும்போது கூம்பின் புறப்பரப்பு அதிகமாக இருக்கும்.

5. 18.25 செ.மீ 6.28 தொப்பிகள் 7. $\sqrt{5}:9$ 8. 56.25% 9. ₹ 302.72 10. ₹ 1357.72

### பயிற்சி 7.2

1. 4.67 மீ 2. 1 செ.மீ 3. 652190 செ.மீ$^3$ 4. 63 நிமிடங்கள் (தோராயமாக)

5. 100.58 6. 5:7 7. 64:343 9. 4186.29 செ.மீ$^3$ 10. ₹ 418.36

### பயிற்சி 7.3

1. 1642.67 செ.மீ$^3$ 2. 66 செ.மீ$^3$ 3. 2.46 செ.மீ$^3$ 4. 905.14 செ.மீ$^3$

5. 56.51 செ.மீ$^3$ 6. 332.5 செ.மீ$^2$ 7.(i) $4\pi r^2$ ச. அ

(ii) $4\pi r^2$ ச. அ (iii) 1:1 8. 73.39 செ.மீ$^2$

### பயிற்சி 7.4

1. 36 செ.மீ 2. 2 மணிகள் 3. $\frac{h}{3x^2}$ 4. 6 செ.மீ

5. 281200 செ.மீ$^3$ 6. 1.33 செ.மீ 7. 1 செ.மீ 8. 100%

### பயிற்சி 7.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | (1) | (1) | (2) | (3) | (2) | (2) | (3) | (3) | (1) | (4) | (1) | (1) | (2) | (4) |

## அலகு பயிற்சி–7

1. 48000 வார்த்தைகள் 2. 27 நிமிடங்கள் (தோராயமாக) 3. $\frac{1}{3}\pi r^3$ க. அ
4. 782.57 ச.செ.மீ 5. 450 நாணயங்கள் 6. 4.8 செ.மீ
7. ₹ 6800 8. 2 செ.மீ 9. 17 செ.மீ 10. 2794.18 செ.மீ$^3$

## பயிற்சி 8.1

1.(i) 62; 0.33 (ii) 47.8; 0.64 2. 50.2 3. 250 4. 2.34
5. 222.22, 14.91 6. 6.9 7. 6.05 8. 4.5 9. 1.44, 1.2 10. 7.76 11. 14.6
12. 6 13. 1.24 14. 60.5, 14.61 15. 6 மற்றும் 8

## பயிற்சி 8.2

1. 52% 2. 4.69 3. 7.2 4. 180.28% 5. 14.4%
6. 10.07% 7. வித்யா 8. அறிவியல், சமூக அறிவியல் 9. நகரம் A

## பயிற்சி 8.3

1. $\{HHH, HHT, HTH, THH, THT, TTH, TTT\}$

2. $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,5),(4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

3. (i) $\frac{15}{32}$ 4. $\frac{3}{8}$ 5. (i) $\frac{9}{1000}$ (ii) $\frac{8}{999}$ 6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $x = 4$
7.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{7}{36}$ 8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$
9. $\frac{2}{36}, \frac{4}{36}, \frac{6}{36}, \frac{6}{36}, \frac{6}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{2}{36}$ 10.(i) $\frac{3}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{10}{13}$ (iv) $\frac{6}{13}$
11. 12 12.(i) $\frac{13}{46}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{46}$ 13. $\frac{157}{600}$ 14. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{36}$
15. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{8}$

## பயிற்சி 8.4

1. $\frac{11}{15}$ 2. (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74 3. 0.1 4. 1.2 5. 0.2
6. $\frac{5}{9}$ 7. $\frac{1}{13}$ 8. $\frac{13}{18}$ 9. $\frac{73}{280}$ 10. $\frac{17}{40}$ 11. 1 12. $\frac{11}{48}, \frac{11}{24}, \frac{11}{16}$

## பயிற்சி 8.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (1) | (3) | (2) | (3) | (4) | (2) | (1) | (1) | (2) | (2) | (2) | (3) | (3) | (4) |

## அலகு பயிற்சி–8

1. 8,12 2. 5.55 3. 7 4. 81 5. 5.17, 1.53 6. நகரம் A 7. 60, 40
8. $\frac{1}{9}$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. 10 11. $\frac{13}{20}$ 12. (i) $\frac{13}{20}$ (ii) $\frac{3}{49}$ (iii) $\frac{1}{49}$

## கணித கலைச் சொற்கள்

| | |
|---|---|
| அச்சு | Axis |
| அடிப்படை விகித சமம் | Basic proportionality |
| அட்சரேகை | Latitude |
| அட்டவணை முறை | Table form |
| அணிகள் | Matrix |
| அதிபரவளையம் | Hyperbola |
| அம்புக்குறி படம் | Arrow diagram |
| அரைக் கோளம் | Hemisphere |
| அலகு அணி | Unit matrix / Identity matrix |
| அளவு | Magnitude |
| ஆயக்கூறு அச்சு | Coordinate axes |
| இடைக் கண்டம் | Frustum |
| இணை தளங்கள் | Parallel planes |
| இணைந்த திண்மங்கள் | Combined solids |
| இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் | Quadratic polynomials |
| இருபடிச் சமன்பாடுகள் | Quadratic equation |
| இருபடிச் சார்பு | Quadratic function |
| இருபுறச் சார்பு | Bijection |
| இறக்கக் கோணம் | Angle of depression |
| உச்சிக் கோணம் | Vertical angle |
| உயரங்களும் தூரங்களும் | Height and distance |
| உள்நோக்கிய சார்பு | Into function |
| உள்ளீடற்ற | Hollow |
| எதிர் அணி | Negative of a matrix |
| ஏற்றக் கோணம் | Angle of elevation |
| ஒத்த நேரிய சமன்பாடுகள் | Simultaneous linear equations |
| ஒருங்கமைவற்ற | Inconsistent |
| ஒருங்கமைவுடைய | Consistent |
| ஒருங்கிசையும் | Concurrent |
| ஒருங்கிசைவு | Congruence |
| ஒருங்கிசைவுத் தேற்றம் | Concurrency theorem |
| ஒருபுறச் சார்பு | Injection |
| ஒரேபிரதியிலுள்ள | Concyclic |
| ஒரேயொரு தீர்வு | Unique solution |
| ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு | One-one function |
| ஒன்றுவிட்ட துண்டு | Alternate segment |
| ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் | Mutually exclusive events |
| காதம்கள் (தூரத்தின் அலகு) | Kadhams (unit of distance) |
| கார்டீசியன் பெருக்கல் | Cartesian product |
| கிடைமட்ட வரிசை | Horizontal level |
| கிடைமட்டக் கோட்டுச் சோதனை | Horizontal line test |
| குத்துக்கோட்டுச் சோதனை | Vertical line test |
| குத்துயரம் | Altitude |
| கூட்டுத்தொடர் வரிசை | Arithmetic progression |
| கூறுபுள்ளி | Sample point |
| கூறுவெளி | Sample space |
| கோண இருசம வெட்டி | Angle bisector |
| சதுர அணி | Square matrix |
| சம அணிகள் | Equal matrices |
| சமகோணம் | Equiangular |
| சமச்சீர் அச்சு | Axis of symmetry |
| சமவாய்ப்புச் சோதனை | Random experiment |
| சமனிச் சார்பு | Identity function |
| சாயுயரம் | Slant height |
| சாய்ந்த இடைக் கண்டம் | Oblique frustum |
| சாய்ந்த உருளை | Oblique cylinder |
| சாய்வு | Slope or gradient |
| சாய்வுக் கோணம் | Inclination |
| சாய்வுமாணி | Clinometer |
| சார்புகளின் இணைக்கம் | Composition of functions |
| சார்புகள் | Functions |
| சிதறல் அளவைகள் | Measures of dispersion |
| சீரான நாணயங்கள் | Unbiased coins |
| சுண்டப்படுதல் | Tossed |
| சுழற்சி | Revolutions |
| சுழி தொடர்பு | Null relation |
| செங்குத்து சமவெட்டி | Perpendicular bisector |

| | |
|---|---|
| தலைகீழ்ச் சார்பு | Reciprocal function |
| தளமட்டக் கோணமானி | Theodolite |
| தனித் தன்மை | Uniqueness |
| தன்மைக் காட்டி | Discriminant |
| திசையிலி அணி | Scalar matrix |
| திட்ட விலக்கம் | Standard deviation |
| திண்மம் | Solid |
| தீர்க்கரேகை | Longitude |
| துணை மதிப்பகம் | Co-domain |
| துணைத் தேற்றம் | Lemma |
| தொடர் | Series |
| தொடர்புகள் | Relations |
| தொடர்வரிசை | Sequence |
| தொடுகோடுகள் | Tangents |
| தொடுபுள்ளி | Point of contact |
| நடுக்கோடு | Median |
| நிகழ்ச்சி | Event |
| நிரல் அணி | Column matrix |
| நிரை அணி | Row matrix |
| நிரை நிரல் மாற்று அணி | Transpose matrix |
| நிழல் உரு | Image |
| நேரிய சமன்பாடுகள் | Linear equations |
| நேரிய சார்பு | Linear function |
| நேர்க் குத்தற்ற கோடுகள் | Non-vertical lines |
| நேர்க் கோட்டமைவு | Collinearity |
| நேர்வட்ட உருளை | Right circular cylinder |
| நேர்வட்டக் கூம்பு | Right circular cone |
| பங்கீட்டுப் பண்பு | Distributive property |
| படிமுறை | Algorithm |
| பரவளையம் | Parabola |
| பரிமாணங்கள் | Dimensions |
| பலவற்றிற்கொன்றான சார்பு | Many-one function |
| பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் | Zeros of polynomials |
| பார்வைக் கோடு | Line of sight |
| பிரித்தல் | Decompose |
| புவி நிலைப்படுத்தல் அமைப்பு | Geo-positioning system |
| புறப்பரப்பு | Surface area |
| பூச்சிய அணி | Null matrix / Zero matrix |
| பூச்சியமற்ற முழு | Non-zero integer |
| பூச்சியமற்ற மெய் எண் | Non-zero real number |
| பெருக்குத்தொடர் வரிசை | Geometric progression |
| பொது விகிதம் | Common ratio |
| பொது வித்தியாசம் | Common difference |
| மட்டு | Modular |
| மதிப்பகம் | Domain |
| மாறிலிச் சார்பு | Constant function |
| மாறுபாட்டுக் கெழு | Coefficient of variation |
| மீப்பெரு வட்டம் | Great circle |
| முக்கோண அணி | Triangular matrix |
| முயற்சி | Trial |
| முன் உரு | Pre-image |
| மூலைவிட்ட அணி | Diagonal matrix |
| மெய்மதிப்புச் சார்பு | Real valued function |
| மேல் சார்பு | Onto function |
| மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் | Measures of central tendency |
| மொத்தப் பரப்பு | Total surface area |
| வடிவொத்த முக்கோணம் | Similar triangle |
| வட்ட இயக்கம் | Circular motion |
| வரிசைச் சோடிகள் | Ordered pair |
| வரைபடமுறை | Graphical form |
| வரையறுக்கப்படாதது | Undefined |
| வர்க்கப் பூர்த்தி முறை | Completing square method |
| வலமிருந்து இடம் | Counter-clock wise |
| வளைபரப்பு | Curved surface area |
| விகிதமுறு கோவை | Rational expression |
| விலக்க வர்க்க சராசரி | Variance |
| விளைவுகள் | Outcomes |
| வீச்சகம் (அ) வீச்சு | Range |
| வீச்சுக் கெழு | Coefficient of range |
| வெட்டுக்கோடு | Secant |
| வெட்டுத்துண்டு | Intercept |
| வெட்டுப்புள்ளி | Point of intersection |

# கணிதம் – பத்தாம் வகுப்பு
# பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

### மேலாய்வாளர்

- முனைவர் இரா. இராமானுஜம்,
  பேராசிரியர்,
  கணித அறிவியல் நிறுவனம்,
  தரமணி, சென்னை.
- முனைவர். சி. கேசவன்
  பேராசிரியர் (ஓய்வு),
  இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம், சென்னை
- முனைவர் அ.மீ.சு. இராமசாமி
  கணிதவியல் பேராசிரியர்
  வேல்டெக் ரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா அறிவியல் மற்றும் ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்
  ஆவடி, சென்னை–62.
- இரா. ஆத்மராமன்
  கணிதக் கல்வி ஆலோசகர்,
  இந்திய கணித ஆசிரியர்கள் சங்கம், சென்னை–05

### பாட வல்லுநர்

- முனைவர் இரா.சிவராமன்
  இணைப் பேராசிரியர்
  கணிதத்துறை
  து.கோ. வைணவக் கல்லூரி,
  அரும்பாக்கம், சென்னை–106

### பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

- பா. தமிழ்செல்வி,
  துணை இயக்குநர்,
  மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
  சென்னை – 06.

### ஒருங்கிணைப்பாளர்

- இரா. கீதாராணி,
  பட்டதாரி ஆசிரியர்,
  ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, பெருந்துறை, ஈரோடு

### பாடநூல் உருவாக்கம்

- முனைவர் சு. முத்துக்கருப்பன்
  விரிவுரையாளர்
  மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
  மச்சுவாடி , புதுக்கோட்டை மாவட்டம்
- ஜே. ஜான்சன்
  விரிவுரையாளர்
  மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
  காளையார்கோவில், சிவகங்கை மாவட்டம்
- க. சே. காந்திமதி
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  சென்னை பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
  நுங்கம்பாக்கம், சென்னை
- பா. ரிஷிகேசவன்
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
  சாலைக்கிராமம், சிவகங்கை மாவட்டம்
- வெ. அருள்முருகன்
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி
  பரிவிளாகம், கடலூர் மாவட்டம்
- இரா. சொ. துரைராஜ்
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  அ.மே.நி.பள்ளி
  கெட்டிச் செவியூர், ஈரோடு மாவட்டம்
- கோ. ஜெயராஜ்
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
  ஆவுடையாபுரம், விருதுநகர் மாவட்டம்
- பா. விஸ்வநாதன்
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி
  தெங்கியாநத்தம், கள்ளக்குறிச்சி மாவட்டம்
- ஜா. மரியாலான்சி
  பட்டதாரி ஆசிரியர்
  சிஷ்யா பள்ளி, தளி ரோடு
  ஓசூர், கிருஷ்ணகிரி மாவட்டம்

### ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

- தா. வசுராஜ்,
  பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு), ,
  முதுகலை மற்றும் துறை தலைவர் கணிதம்
  கே.ஆர்,எம்.பப்ளிக் பள்ளி, சென்னை

### விரைவுக்குறியீடு மேலாண்மைக்குழு

- இரா. ஜெகநாதன், இ.நி.ஆ,
  ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, கணேசபுரம்,
  போளூர் , திருவண்ணாமலை மாவட்டம்.
- சூ. ஆல்பர்ட் வளவன் பாபு, ப.ஆ,
  அ.உ.நி.பள்ளி, பெருமாள் கோவில்,
  பரமக்குடி, இராமநாதபுரம்.
- ஆ.தேவி ஜெஸிந்தா, ப.ஆ ,
  அ.உ.நி. பள்ளி, என்.எம்.கோவில், வேலூர்.

## கலை மற்றும் வடிவமைப்புக்குழு

### பக்க வடிவமைப்பு மற்றும் வரைபடம்

- ஜாய் கிராபிக்ஸ்,
  சிந்தாதிரிபேட்டை, சென்னை –02.

### In House QC

- ஜெரால்டு வில்சன் • ப. அருண் காமராஜ்
- ராஜேஷ் தங்கப்பன்
- மதன்ராஜ் • யோகேஷ் பலராமன்

### ஒருங்கிணைப்பாளர்

- ரமேஷ் முனிசாமி

### அட்டை வடிவமைப்பு

### தட்டச்சர்

- ஆ. பழனிவேல்,
  தட்டச்சர்,
  மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
  சென்னை

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம் எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில்
அச்சிடப்பட்டுள்ளது ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: