12 ஆம் வகுப்பு

காலாண்டுப் பொதுத் தேர்வு
செப்டம்பர் - 2019

பதிவு எண்

கால அளவு : 2.30 மணி அளவு

கணிதவியல்

மொத்த மதிப்பெண்: 90

அறிவுரைகள் : 1. அனைத்து வினாக்களும் சரியாக அச்சுப் பதிவாகி உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின், அறைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.

2. நீலம் (அல்லது) கருப்பு மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும் அடிக்கோடிடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

பகுதி - I

குறிப்பு: i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும். **[20 × 1 = 20]**

ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற்று விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதவும்.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ **-ன் அணித்தரம்**

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) 4

2. $0 \le \theta \le \pi$ **மற்றும்** $x + (\sin\theta)y - (\cos\theta)z = 0$, $(\cos\theta)x - y + z = 0$, $(\sin\theta)x + y - z = 0$ **மற்றும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருப்பின் θ -ன் மதிப்பு**

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

3. $|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$ **மற்றும்** $|9z_1z_2 + 4z_1z_3 + z_2z_3| = 12$ **எனில்,** $|z_1 + z_2 + z_3|$ **-ன் மதிப்பு**

(a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) 3

4. $i, -2+i$, 2 **மற்றும்** 3 **ஆகியவற்றில் எந்த கலப்பெண் ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ளது?**

(a) 3 (b) $-2+i$

(c) i (d) 2

5. $x^3 + px^2 + qx + r$ **-க்கு** α, β **மற்றும்** γ **என்பவை பூச்சியமாக்கிகள் எனில்** $\sum\frac{1}{\alpha}$ **-ன் மதிப்பு**

(a) $\frac{q}{r}$ (b) $\frac{-p}{r}$ (c) $\frac{-q}{r}$ (d) $\frac{-q}{p}$

6. $\sec^{-1}x$ **-ன் வீச்சகம்**

(a) $[-\pi, \pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (b) $[0, \pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(c) $(0, \pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (d) $(-\pi, \pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

7. **குவியங்கள்** $F_1(3,0)$ **மற்றும்** $F_2(-3,0)$ **கொண்ட கூம்பு வளைவு** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **-ன் மீதுள்ள புள்ளி** $P(x, y)$ **எனில்** $PF_1 + PF_2$**-ன் மதிப்பு**

(a) 6 (b) 8 (c) 12 (d) 10

8. **ஆதியிலிருந்து** $2x + 3y + \lambda z = 1, \lambda > 0$ **என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம்** $\frac{1}{5}$ **எனில்,** λ **-ன் மதிப்பு**

(a) 0 (b) 1

(c) $2\sqrt{3}$ (c) $3\sqrt{2}$

9. $x + y + z = 2, 2x + y - z = 3, 3x + 2y + kz = 4$ **என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் எனில்**

(a) $k \ne 0$ (b) $-1 < k < 1$

(c) $-2 < k < 2$ (d) $k = 0$

10. **A என்பது செங்குத்து அணி எனில்** $|A| =$

(a) 1 (b) −1 (c) ±1 (d) 0

11. z **என்பது கலப்பெண் மற்றும்** $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ **எனில்,**

(a) $\text{Re}(z^2) = 0$ (b) $\text{Im}(z^2) = 0$

(c) $\text{Re}(z^2) = \text{Im}(z^2)$ (d) $\text{Re}(z^2) = -\text{Im}(z^2)$

12. z **என்பது கலப்பெண் எனில்,** $z, iz, -z, -iz$ **எனும் புள்ளிகள்**

(a) ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்

(b) ஒரு சரிவகத்தை அமைக்கும்

(c) ஒரு கோடமைவன

(d) மையம் (0,0), ஆரம் $\sqrt{2}$ உடைய $|z| = \sqrt{2}$ என்ற வட்டத்தில் அமையும்

13. $\sin\alpha$ மற்றும் $\cos\alpha$ என்பன $25x^2 + 5x - 12 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில் $\sin 2\alpha$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{12}{25}$ (b) $\frac{-12}{25}$ (c) $\frac{-24}{25}$ (d) $\frac{4}{5}$

14. a மற்றும் b என்பன ஒற்றைப்படை முழுக்கள் எனில் $2ax^2 + (2a + b)x + b = 0$ $(a \neq 0)$ -ன் மூலங்கள்

(a) விகிதமுறு எண்கள்

(b) விகிதமுறா எண்கள்

(c) மெய்யற்றவை

(d) விகிதமுறு மற்றும் சமம்

15. $4\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \pi$ எனில் x -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

16. $\cos^{-1}(2x - 1)$ என்ற சார்பின் சார்பகமானது

(a) $[0,1]$ (b) $[-1, 1]$

(c) $(-1, 1)$ (d) $(0, \pi)$

17. $16x^2 - 9y^2 = 144$ என்ற அதிபரவளைத்தின் இயக்குவரை $5x + 9 = 0$ எனில் அதை சார்ந்த குவியம்

(a) $\left(\frac{-5}{3},0\right)$ (b) $(5,0)$

(c) $(-5, 0)$ (d) $\left(\frac{5}{3},0\right)$

18. $ax^2 + by^2 + (a + b - 4)xy - ax - by - 20 = 0$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடு எனில் அதன் மையம்

(a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

(c) $(1, 1)$ (d) $(-1, -1)$

19. $\vec{\alpha} = \vec{a}\times\vec{b}, \vec{\beta} = \vec{b}\times\vec{c}, \vec{\gamma} = \vec{c}\times\vec{a}$ எனில் $\left[\vec{\alpha}\times\vec{\beta}, \vec{\beta}\times\vec{\gamma}, \vec{\gamma}\times\vec{\alpha}\right] =$

(a) $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]^4$ (b) $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]^2$

(c) $2\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]^2$ (d) $4\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

20. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ என்றகோட்டிற்குA(1,0,0) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி

(a) $(3, -4, -2)$ (b) $(5, -8, -4)$

(c) $(-3, 4, 2)$ (d) $(2, -3, 4)$

பகுதி - II

எவையேனும் ஏழு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். வினா எண் 30 -க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்கவும்.

7 × 2 = 14

21. $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1}-ஐக் காண்க.

22. சுருக்குக : $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}$.

23. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ -ஐ ஒரு மூலமாகவும் முழுக்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

24. மதிப்பு காண்க : $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$.

25. $y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக இருக்க கட்டுப்பாடு காண்க.

26. $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + m\vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருதள வெக்டர்கள் எனில் m-ன் மதிப்புக் காண்க.

27. $\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை என நிறுவுக.

28. $x^9 - 5x^8 - 14x^7 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் மிகையெண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்க.

29. மதிப்பு காண்க : $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

30. $x + 2ay + az = 0, x + 3by + bz = 0, x + 4cy + cz = 0$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்ற தீர்வு உடையது எனில் a, b, c என்பன H.Pயில் உள்ளன என நிறுவுக.

பகுதி - III

எவையேனும் ஏழு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். வினா எண் 40 -க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்கவும்.

7 × 3 = 21

31. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு காஸ் - ஜோர்டன் முறை மூலம் நேர்மாறு காண்க.

32. ஒரு போட்டித் தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் $\frac{1}{4}$ மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாணவர் 100 கேள்விகளுக்குப் பதிலளித்து 80 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் எனில், அவர் எத்தனை கேள்விகளுக்குச் சரியாக பதில் அளித்திருப்பார்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி இக்கணக்கைத் தீர்க்கவும்)

33. முக்கோண சமனிலியை எழுதி நிறுவுக.

34. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பெருக்குத்தொடர் முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தையைக் காண்க. இங்கு $a, b, c, d \neq 0$ எனக் கொள்க.

35. $\sin^{-1}(2 - 3x^2)$-ன் சார்பகம் காண்க.

36. முனை $(-1, -2)$, அச்சு y-அச்சுக்கு இணை மற்றும் $(3, 6)$ வழிச்செல்லும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

37. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1' என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு பரவளையத்தை மீண்டும் 't_2', என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமெனில் $t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$ என நிறுவுக.

38. $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ என்ற மூன்று அலகு வெக்டர்களில் $\hat{b}, \hat{c}$ என்பன இணை அல்லாத வெக்டர்கள் மற்றும் $\hat{a} \times (\hat{b} \times \hat{c}) = \frac{1}{2}\hat{b}$ எனில் $\hat{a}$ மற்றும் $\hat{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

39. $\vec{r} = (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$, $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{k}) + s(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ என்ற ஒரு ஜோடி நேர்க்கோடுகள் இணைக்கோடுகளாகுமா எனக் காண்க. மேலும், அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் காண்க.

40. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \frac{2b}{a}$ என நிறுவுக.

பகுதி - IV

அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்

7 × 5 = 35

41. (a) காஸ்ஸியன்நீக்கல்முறையைப்பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக:

$C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

(அல்லது)

(b) தீர்க்க : $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

42. (a) k -ன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு $kx - 2y + z = 1$, $x - 2ky + z = -2\gamma$. $x - 2y + kz = 1$
   (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது
   (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்
   (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

(அல்லது)

(b) z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவை $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் என்க. மேலும் $z_1 = 1 + \sqrt{3}$ எனில், z_2 மற்றும் z_3-ஐக் காண்க.

43. (a) $z = x + iy$ மற்றும் $\arg\left(\frac{z-1}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ எனில் $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$ என நிரூபிக்க.

(அல்லது)

(b) $x^6 - 13x^5 + 62x^4 - 126x^3 + 65x^2 + 127x - 140 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $2 + i$ மற்றும் $3 - \sqrt{2}$ எனில் அனைத்து மூலங்களையும் காண்க.

44. (a) i) மதிப்பு காண்க : $\tan^{-1}(-1) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

ii) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ எனில் $\cos\theta$ மதிப்பு காண்க.

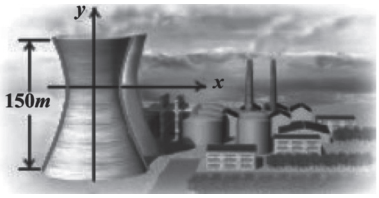
(அல்லது)

(b) $4x^2 + y^2 + 24x - 2y + 21 = 0$, என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள் மற்றும் குவியங்கள் காண்க. மேலும் செவ்வகல நீளம் 2 என நிறுவுக.

45. (a) $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1}(3x)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(அல்லது)

(b) ஒரு அணு உலை குளிரூட்டும் கோபுரம் குறுக்குவெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{44^2}=1$. தூண் 150 மீ உயரமுடையது. மேலும் அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல்பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுதி மற்றும் அடிப்பகுதியின் விட்டங்களைக் காண்க.



46. (a) (2, 2, 1), (1, –2, –3) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் (2, 1, –3) மற்றும் (–1, 5, –8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(அல்லது)

(b) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளுக்கு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

47. (a) $\cos\theta+\cos\phi=\sin\theta+\sin\phi=0$ எனில்

i) $\cos 2\theta + \cos 2\phi = 2\cos(\pi+\theta+\phi)$

ii) $\sin 2\theta + \sin 2\phi = 2\sin(\pi+\theta+\phi)$

என நிறுவுக.

(அல்லது)

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடானது ஆய அச்சுக்களுடன் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே h, k எனில் $\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=1$ என நிறுவுக.

விடைகள்

பகுதி - I

1. (b) 1
2. (b) $\frac{\pi}{4}$
3. (a) 2
4. (a) 3
5. (c) $\frac{-q}{r}$
6. (b) $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
7. (d) 10
8. (c) $2\sqrt{3}$
9. (a) $k\neq 0$
10. (c) ± 1
11. (a) $\mathrm{Re}(z^2)=0$
12. (a) ஒரு சரிவகத்தை அமைக்கும்
13. (c) $\frac{-24}{25}$
14. (a) விகிதமுறு எண்கள்
15. (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
16. (a) $[0, 1]$
17. (c) $(-5, 0)$
18. (a) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
19. (a) $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]^4$
20. (a) $(3, -4, -2)$

பகுதி - II

21. தீர்வு :

$$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

எனவே $A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|adj\ A|}}\text{adj }(A)$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{9}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. தீர்வு :

$$\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = \left[i\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{18}$$

$$= -(\cos 3\pi - i\sin 3\pi) = 1$$

23. தீர்வு :

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ என்பது ஒரு மூலம் என்பதால், $x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ என்பது ஒரு காரணியாகும். வெளிப்புறமுள்ள வர்க்கமூலத்தை நீக்க $x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ என்பதை மற்றொரு காரணியாக எடுத்துக் கொண்டு இவை இரண்டையும் பெருக்க,

$$\left(x + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

இருப்பினும் நாம் இன்னும் இலக்கை அடையவில்லை.

எனவே $x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ என்பதை மற்றொரு காரணியாகக் கொண்டு இரண்டையும் பெருக்கினால்

$$\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = x^4 - \frac{2}{3}$$

எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, தேவையானப் பண்புகளுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு, $3x^4 - 2 = 0$ ஆகும்.

24. தீர்வு :

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{-2\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{5} \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

25. தீர்வு :

$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுகின்றது என்க. இந்த வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் முறையே $(0,0)$ மற்றும் a ஆகும்.

(i) **ஒரு நேர்க்கோடு தொடுகோடாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு (Condition for a line to be tangent)**

$(0,0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y - mx - c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கான செங்குத்து தூரம்

$$\left|\frac{0 - m, 0 - c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

இது ஆரத்திற்குச் சமம்

எனவே $\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = a$ அல்லது

$$c^2 = a^2(1 + m^2)$$

இதனால் $y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைய கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.

26. தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் என்பதால், $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -3$

27. தீர்வு :

$$z = \left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}$$ என்க.

இதிலிருந்து

$$\bar{z} = \overline{\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

$$= \overline{\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10}} + \overline{\left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

$$(\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= \left(\overline{2 + i\sqrt{3}}\right)^{10} + \left(\overline{2 - i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

$$\left(\because \left(\overline{z^n}\right) = \left(\bar{z}\right)^n\right)$$

$$= \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} = z$$

$$\bar{z} = z$$

$\Rightarrow z$ ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

28. தீர்வு :

$$p(x) = x^9 - 5x^8 - 14x^7 = 0 \text{ என்க}$$

$p(x)$ க்கு ஒரே ஒரு குறி மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது.

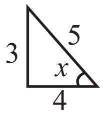
மேலும் $p(-x) = (-x)^9 - 5(-x)^8 - 14(-x)^7 = 0$

$\Rightarrow \quad p(-x) = -x^9 - 5x^8 + 14x^7 = 0$

$p(-x)$ க்கு ஒரே ஒரு குறி மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது.

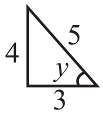
$\therefore p(-x)$ -க்கு அதிகபட்சம் ஒரு மிகை மற்றும் ஒரு குறை மூலம் உள்ளது.

29. தீர்வு : $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$



$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = x \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$

$\therefore \tan x = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{3}{4}$



$\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = y \Rightarrow \sin y = \frac{4}{5}$ என்க

$\therefore \tan y = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{4}{3}$

$\therefore \cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \cot(x+y)$

$$= \frac{1}{\tan(x+y)} = \frac{1}{\dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}} = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{1-1}{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{0}{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = 0$$

$\therefore \cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = 0$

30. தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a & a \\ 1 & 3b & b \\ 1 & 4c & c \end{vmatrix} = 0$$

$$-bc + 2ac - ab = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$$

$\therefore a, b, c$ என்பது H.P-ல் உள்ளன.

PART - III

31. தீர்வு :

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் மீது காஸ் – ஜோர்டான் முறையினைப் பயன்படுத்த

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to (-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} \times R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{5}\right) & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 6R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \left(\frac{6}{5}\right) & -1 \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{5}\right) & 0 \end{array}\right]$$

எனவே $A^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{5}\right) & -1 \\ \left(\frac{1}{5}\right) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

32. தீர்வு : x கேள்விகளுக்கு சரியாக பதில் அளித்திருப்பார் மற்றும் y கேள்விகளுக்கு தவறான பதில் அளித்திருப்பார் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி, $x + y = 100$ மற்றும்

$$1.x - \frac{1}{4}y = 80 \quad \ldots (1)$$

4 ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$$4x - y = 320 \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 320 & -1 \end{vmatrix} = -100 - 320 = -420$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 4 & 320 \end{vmatrix} = 320 - 400 = -80$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-420}{-5} = +84$$

மற்றும் $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-80}{-5} = 16$

$\therefore 84$ கேள்விகளுக்குச் சரியான பதில் அளித்திருப்பார்.

33. தீர்வு :

$$|z_1+z_2| = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) \quad (\because |z|^2 = z\bar{z})$$

$$\Rightarrow \quad = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \quad (\because \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2\right) + z_1\bar{z}_2$$

$$= z_1\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \overline{\bar{z}_1 z_2}\right) + z_1\bar{z}_2 \quad (\because \bar{\bar{z}} = z)$$

$$= |z_2|^2 + 2\,\text{Re}\,(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad (\because 2\,\text{Re}\,(z) \le |z_2|)$$

$$= |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2$$

($\because |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ மற்றும் $|z| = |z|$)

$\Rightarrow |z_1+z_2|^2 \le (|z_2| + |z_2|)^2$

$\Rightarrow |z_1+z_2| \le |z_2| + |z_2|$

34. தீர்வு : மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர்முறையில் உள்ளன என்க. எனவே, அவற்றை. $\dfrac{\alpha}{\lambda}, \alpha, \alpha\lambda$ எனக் கருதுக.

வியட்டாவின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது

$$\Sigma\alpha = \alpha\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right) = -\frac{b}{a} \quad \ldots (1)$$

$$\Sigma\alpha\beta = \alpha^2\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right) = \frac{c}{a} \quad \ldots (2)$$

$$\Sigma\alpha\beta\Upsilon = \alpha^3 = -\frac{d}{a} \quad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (2)-ஐ சமன்பாடு (1)-ஆல் வகுக்க,

$$\alpha = -\frac{c}{b}$$

(4) -ஐ (3)-இல் பிரதியிட $\left(-\dfrac{c}{b}\right)^3 = -\dfrac{d}{a}$

$$\Rightarrow \quad ac^3 = db^3$$

35. தீர்வு : $\sin^{-1}(x)$ -ன் சார்பகம் $[-1,1]$ ஆகும்.

எனவே $1 \le 2-3x^2 \le 1$ ஆகையால் $-3 \le -3x^2 \le -1$.

$-3 \le -3x^2$, எனும் போது $x^2 \le 1$ ... (1)

$-3x^2 \le -1$, , எனும் போது $x^2 \le \dfrac{1}{3}$ ... (2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2), ஆகியவற்றிலிருந்து $\dfrac{1}{3}x^2 \le 1$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ |x| \le 1$,

$a \le |x| \le b$ என்பதிலிருந்து $x \in [-b, -a] \cup [a, b]$ கிடைக்கும் என்பதால்,

எனவே, $x \in \left[-1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$

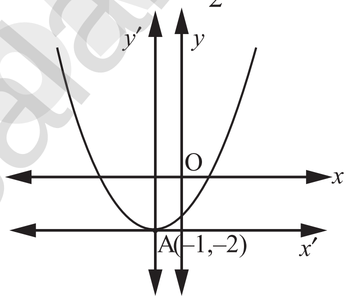
36. தீர்வு : அச்சு y- அச்சுக்கு இணை என்பதால் தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(x+1)^2 = 4a\,(y+2).$$

இது $(3,6)$ வழிச்செல்வதால்

$$(3+1)^2 = 4a + (6+2)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$



எனவே பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x+1)^2 = 2\,(y+2)$ இதைச் சுருக்க

$$x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$ எனக்கிடைக்கும்.

37. தீர்வு : $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1' -ல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y + xt_1 = at_1^3 + 2at_1$ ...(1)

பரவளையம் $y_2 = 4ax$ ஐ (1) 't_2'ல் சந்திக்கிறது.

't_2'-ல் பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி, $x = at_2^2$, $y = 2at_2$ (2) ஆனது (1)ன் மீது அடைகிறது.

$\therefore$ (2) ஐ (1) -ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$2at_2 + (at_2^2)\,t_1 = at_1^3 + 2at_1$$

$$\Rightarrow \quad 2at_2 + at_1t_2^2 = at_1^3 + 2at_1$$

$$\Rightarrow \quad 2at_2 - 2at_1 = at_1^3 - at_1t_2^2$$

$$\Rightarrow \quad 2a(t_2-t_1) = -at_1\,[t_2^2 - t_1^2]$$

$$\Rightarrow \quad 2\cancel{a}\cancel{(t_2-t_1)} = -\cancel{a}t_1(t_2+t_1)\cancel{(t_2-t_1)}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = -t_1(t_2+t_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2}{t_1} = t_2 + t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{-2}{t_1} - t_1$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = -(t_1 + \frac{2}{t_1})$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

38. தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c}) = \frac{1}{2}\hat{b}$

$$\Rightarrow (\hat{a}\cdot\hat{c})\hat{b} - (\hat{a}\cdot\hat{b})\hat{c} = \frac{1}{2}\hat{b}$$

$$\Rightarrow \lambda\hat{b} - \mu\hat{c} = \frac{1}{2}\hat{b}\ [\because \lambda = \hat{a}\cdot\hat{c} \text{ மற்றும் } \mu = \hat{a}\cdot\hat{b}]$$

$$\Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\hat{b} - \mu\hat{c} = 0.$$

$\hat{b}$ மற்றும் $\hat{c}$ ஒரு கோட்டமைவு வெக்டர்களில்லை ஆதலால்

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0 \text{ மற்றும் } \mu = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{a}\cdot\hat{c} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |\hat{a}||\hat{c}|\cos\theta = \frac{1}{2}$ [$\because$ திசையிலி பெருக்கலின் வரையறைப் படி]

$\Rightarrow (1)\,(1)\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad [\because |\vec{a}| = |\vec{c}| = 1]$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60° = \frac{\pi}{3}$$

எனவே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$.

39. தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளையும் $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c} + s\vec{d}$ உடன் ஒப்பிட்டு, நாம் பெறுவது

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k},$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{c} = 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{d} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} \text{ ஆகும்.}$$

$\vec{b}$ -ஐ $\vec{d}$ -ன் திசையிலிப் பெருக்கலாக எழுத முடியாது என்பதை தெளிவாகக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, இவ்விரு வெக்டர்கள் இணையான வெக்டர்கள் அல்ல. ஆதலால், இரு கோடுகளும் இணையான கோடுகள் அல்ல.

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்

$$\delta = \frac{|(\vec{c} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$

இப்பொழுது, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

மேலும், $(\vec{c} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{d}) = (-2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$

எனவே, இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் பூச்சியம் ஆகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகளாகும்.

40. தீர்வு :

$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b} = \theta$ என்க.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sec 2\theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$$= \frac{2\sec^2\theta}{\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}$$

$$= \frac{2}{\cos 2\theta} = \frac{2b}{a}$$

பகுதி - IV

41. (a) **தீர்வு :**

நாம் x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்ற மிகை முழுக்களை

$$x_1\,C_5\,H_8 + x_2 O_2 = x_3 CO_2 + x_2 H_2O$$

(1) -ன் இடதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கை (1)-ன் வலதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$5x_1 = x_3$$

$$\Rightarrow \quad 5x_1 - x_3 = 0$$

என்ற நேரியச் சமப்படித்தான சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். இதேபோல் ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜன் அணுக்கள் எண்ணிக்கைகளை ஒப்பிடக் கிடைப்பது,

$$8x_1 = 2x_4$$
$$\Rightarrow \quad 4x_1 - x_4 = 0,$$
$$2x_1 = 2x_3 + x_4$$
$$\Rightarrow \quad 2x_2 - 2x_3 - x_3 = 0.$$

சமன்பாடுகள் (2), (3), மற்றும் (4) என்பன 4 மாறிலிகளில் ஒரு நேரியச் சமன்படித்தான தொகுப்பை ஏற்படுத்துகின்றன.

விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியானது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்த,

$$[A|B] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 4R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

எனவே, $\rho(A) = \rho([A|B]) = 3 < 4 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

ஏறுபடி வடிவத்தில் நமக்குக் கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள் $4x_1 - x_4 = 0$, $2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$, $-4x + 5x_4 = 0$.

எனவே ஒரு மாறியை பூச்சியமற்ற மெய் எண் பெறும் தன்னிச்சை மாறியாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$x_4 = t$, t 0 என்க. பின்னோக்கி பிரதியிடல் முறையில் $x_3 = \frac{5t}{4}$, $x_2 = \frac{7t}{4}$, $x_1 = \frac{t}{4}$ எனப் பெறுகிறோம்.

x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்பன மிகை முழுக்கள். எனவே $t = 4$ எனத் தேர்வு செய்கிறோம். எனவே, $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$ மற்றும் $x_4 = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே சமனாக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$C_5H_8 + 7O_2 \to 5CO_2 + 4H_2O$ ஆகும்.

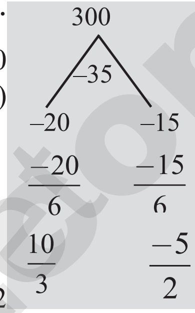
(அல்லது)

(b) **தீர்வு :**

இது இரட்டைப்படை முதல் வகை தலைகீழ் சமன்பாடாகும்.

எனவே பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \quad ...(1)$$

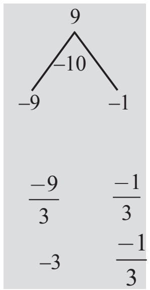


பிரதியிடு $x + \frac{1}{x} = y$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$\therefore$ (1) ஆனது

$$\Rightarrow 6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$$
$$\Rightarrow 6y^2 - 12 - 35y + 62 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 6y^2 - 35y + 50 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (3y - 10)(2y - 5) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{10}{3}, \frac{5}{2}$$



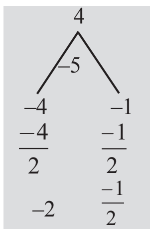
நிலை (i) $y = \frac{10}{3}$ எனில், $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$

$$y = \frac{10}{3}, x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3 = 10x$$
$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x - 3)(3x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 3, \frac{1}{3}$$

நிலை (ii)

$y = \frac{5}{2}$ எனில்,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2 = 5x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 2, \frac{1}{2}$$



எனவே மூலங்கள் $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$

42. (a) **தீர்வு :**

$kx - 2y + z = 1,\ x - 2ky + z = -2,\ x - 2y + k = 1$

சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$ இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & 1 \\ 1 & -2 & k \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[A|B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - kR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k+2 & k & -3 \\ 0 & -2+2k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & 1-k^2+1-k & -k-2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -k-2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) & -k-2 \end{array}\right] \quad ...(1)$$

நிலை (i) $k = 1$ எனில்

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 1$ மற்றும் $\rho[A|B] = 2$

ஆகையால், $\rho(A) \neq \rho[A|B] \Rightarrow$ தொகுப்புற்கு தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) $k \neq 1, k \neq -2$ எனில்

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & \text{பூச்சியமற்ற} & \text{பூச்சியமற்ற} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho[A|B] = 3$

ஆகையால், $\rho(A) = \rho[A|B] = 3$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

ஆகையால், தொகுப்புக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிலை (iii) $k = -2$ எனில்

$$\rho[A|B] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

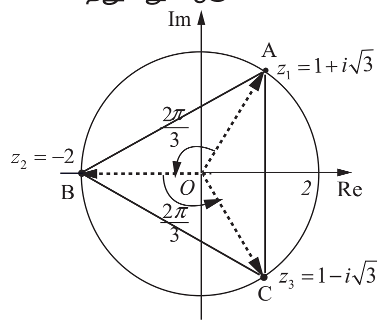
இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho[A|B] = 2$

$\therefore\ \rho(A) = \rho[A|B] = 2 < 3$, மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. ஆகையால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :**

$|z| = 2$ என்பது$(0,0)$-வை மையமாகவும். ஆரம் 2 கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கும். A, B, மற்றும் C ஆகியவை முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என்க. z_1, z_2, மற்றும் z_3 ஆகியவை $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள். எனவே, AB, BC, மற்றும் CA என்ற பக்கங்கள் ஆதியை பொருத்து (முக்கோணத்தின் சற்று வட்ட மையம்) $\frac{2\pi}{3}$ ரேடியன்கள் (120^o) கோண இடைவெளி விட்டு அமையும். ($ze^{i\theta}$ என்பது z-ஐ ஆதியைப் பொருத்து θ கோணம் கடிகார எதிர்திசையில் சுற்றுவது ஆகும்.



ஆகவே, z_1-ஐ முறையே $\frac{2\pi}{3}$ மற்றும் $\frac{4\pi}{3}$ கோணங்கள் சுற்றுவதால் z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவற்றை பெறலாம்.

$\overline{OA} = z_1 = 1\,i\sqrt{3}$ என்க.

$\overline{OB} = z_i e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1 + i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2;$$

$$\overrightarrow{OC} = z_i e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_i e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}$$

ஆகவே, $z_2 = -2$, மற்றும் $z_3 = 1-i\sqrt{3}$

43. (a) **தீர்வு :**

கொடுக்கப்பட்ட $z = x+iy$ மற்றும் $\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \arg(z-i) - \arg(z+2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(x+iy-i) - \arg(x+iy+2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(x+i(y-1)) - \arg((x+2)+iy) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x+2}}{1+\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y}{x+2}}\right) = \frac{\pi}{4}\left[\because \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{(x+2)(y-1)-xy}{x\,\cancel{(x+2)}}\right)}{\left(\frac{x(x+2)+y(y-1)}{x\,\cancel{(x+2)}}\right)} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(y-1)-xy}{x(x+2)+y(y-1)} = 1$$

$$\Rightarrow -x+2y-2 = x^2+2x+y^2-y$$

$$\Rightarrow x^2+2x+y^2-y+x-2y+2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+3x-3y+2 = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :**

சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் அனைத்தும் விகிதமுறு எண்கள் என்பதாலும் $2+i$ மற்றும் $3-\sqrt{2}$ ஆகியவை மூலங்கள் என்பதாலும் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டிற்கு $2-i$ மற்றும் $3+\sqrt{2}$ ஆகியவையும் மூலங்களாக அமையும். எனவே, $(x-(2+i))$, $(x-(2-i))$, $(x-(3+\sqrt{2}))$ மற்றும் $(x-(3+\sqrt{2}))$ ஆகியவையும் காரணிகளாகும். ஆகையால் இவற்றின் பெருக்கல் $(x-(2+i))(x-(2-i))\,(x-(3+\sqrt{2}))\,(x-(3+\sqrt{2}))$ என்பதும் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டிற்கு ஒரு காரணியாகும். அதாவது, $(x^2-4x+5)\,(x^2-6x+7)$ என்பது ஒரு காரணி, கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை இக்காரணியால் வகுக்க, மற்றொரு காரணியாக (x^2-3x-4) பெறப்படுகிறது. இதிலிருந்து 4 மற்றும் -1 ஆகியவை மற்ற இரு மூலங்களாகும். எனவே,

$2+i,\ 2-i,\ 3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2},\ -1$ மற்றும் 4

ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

44. (a) (i) **தீர்வு :**

$\tan^{-1}(-1) = y$ என்க. எனவே,

$$\tan y = -1 = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

இங்கு $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ என்பது குறிப்பிடதக்கது.

எனவே $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

இனி, $\cos^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)y$ எனில் $\cos y = \frac{1}{2}$ $\cos = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ என்பதால் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

மேலும், $\sin^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)y$ எனில் $\sin y = \frac{1}{2}$ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ என்பதால் $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

எனவே, $\tan^{-1}(-1) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

(ii) **தீர்வு :**

வரையறைப்படி $\cot^{-1} \in (0, \pi)$

எனவே, $\cot^{-1} = \theta$ என்பதிலிருந்து $\theta \in (0, \pi)$ ஆகும்.

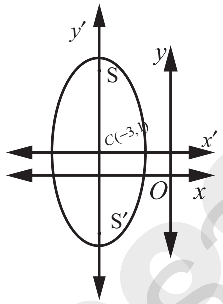
ஆனால் $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ என்பது $\theta = \frac{1}{7}$ ஆகும். எனவே $\tan\theta = 7$ மற்றும் θ ஒரு குறுங்கோணம் ஆகும்.

$\tan\theta = \frac{7}{1}$ என்பதை பயன்படுத்தி, செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றை உருவாக்குக. பின்னர் $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ என நமக்கு கிடைக்கிறது.

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :**

உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தி எழுத நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு



$$\begin{aligned} 4x^2 + 24x + y^2 - 2y + 21 &= 0 \\ \text{அதாவது, } 4(x^2 + 6x + 9 - 9) + & \\ (y^2 - 2y + 1 - 1) + 21 &= 0, \\ 4(x+3)^2 - 36 + (y-1)^2 - 1 + 21 &= 0, \\ 4(x+3)^2 + (y-1)^2 &= 16, \\ \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

மையம் $(-3,1)$ $a = 4$, $b = 2$, மற்றும் நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணை

$$\begin{aligned} c^2 &= 16 - 4 = 12 \\ c &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

எனவே குவியங்கள் $(-3, 2\sqrt{3} + 1)$ மற்றும் $(-3, -2\sqrt{3} + 1)$.

முனைகள் $(1, \pm 4 + 1)$. அதாவது $(1,5)$ மற்றும் $(1, -3)$, மற்றும் செவ்வகத்தின் நீளம் $= \frac{2b^2}{a} = 2$ அலகுகள்

45. (a) **தீர்வு :**

கருதுக $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}(x+1)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-(x^2-1)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2+1}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) \qquad \therefore \tan^{-1}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) + \tan^{-1}(x)$$

$= \tan^{-1}(3x)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \tan^{-1}(3x) - \tan^{-1}(x)$$

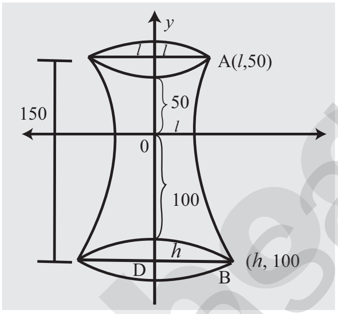
$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x}{1+3x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{2x}{1+3x^2}$$

குறுக்கு பெருக்கல் மூலம் நமக்கு கிடைப்பது முப்படி சமன்பாடாகும்.
ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகள் இருக்கும்.

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :** அணு உலை குளிரூட்டும் தூணின் குறுக்கு வெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது.



கொடுக்கப்பட்ட OC $= \frac{1}{2}$ OD மற்றும் CD $= 150$ மீ

அதனுடைய சமன்பாடு OC $= 50$ மீ மற்றும் OD $= 100$ மீ

$$\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1 \qquad ...(1)$$

தூணின் உச்சியின் ஆரம் l என்க.

$\therefore$ A$(l, 50)$ அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி

$$\therefore \frac{l^2}{30^2} - \frac{50^2}{44^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{30^2} = 1 + \frac{50^2}{44^2} = \frac{44^2 + 50^2}{44^2}$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{30^2}{44^2}(1936 + 2500)$$

$$\Rightarrow l = \frac{30}{44}\sqrt{4436} = \frac{30}{44}(66.60)$$

$$= \frac{1998}{44} = 45.40 \text{ மீ}$$

தூணின் உச்சியின் ஆரம் 45.40 மீ.
தூணின் அடிப்பகுதியின் ஆரம் h என்க.

$\therefore$ B$(h, 100)$ அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி

$\therefore$ (1) லிருந்து

$$\frac{h^2}{30^2}-\frac{100^2}{44^2}=1 \Rightarrow \frac{h^2}{30^2}=1+\frac{100^2}{44^2}=\frac{44^2+100^2}{44^2}$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{30^2}{44^2}(1936+10000)$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{30}{44}\sqrt{11936} = \frac{30}{44}(109.25)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{3277.5}{44} = 74.48 \text{ மீ}$$

தூணின் அடிப்பகுதியின் ஆரம் 74.48 மீ.

46. (a) **தீர்வு :**

தளம் இரண்டு புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது.

$\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$.

(2, 1, –3) மற்றும் (–1, 5, –8) வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-1}{5-1}=\frac{z+3}{-8+3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-5}$$

ஆகையால் தேவையான தளம் வெக்டர் $\vec{c} = -3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ க்கு இணை.

இரு புள்ளிகள் $\vec{a},\vec{b}$ வழிச் செல்லும் மற்றும் $\vec{c}$ க்கு இணையான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாட்டின் துணையலகு வடிவம் $\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a})+t\vec{c}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

$\vec{r} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}+s(-3\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}) + t(-3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}), s, t \in \mathbb{R}$

இரண்டு புள்ளி வழிச் செல்லும் மற்றும் வெக்டருக்கு இணையான தளத்தின் கார்டீசியன் வடிவம்

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

[$\because$ (x_1, y_1, z_1) is (2, 2, 1), (x_2, y_2, z_2), (–1, –2, 3) & c_1, c_2, c_3 is –3, 4 –5]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(20-8)-(y-2)(5+6)+(z-1)(-4-12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(12)-(y-2)(11)+(z-1)(-16) = 0$$

$$\Rightarrow 12x-24-11y+22-16z+16 = 0$$

$$\Rightarrow 12x-11y-16z+14 = 0$$

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :** முக்கோணம் ABC-ல் $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி O என்க. AB-ஐ F-ல் சந்திக்குமாறு COவை நீட்டுக. ஆதிப்புள்ளி O என்க. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ என்க.

$\overrightarrow{AD}$ என்பது $\overrightarrow{BC}$ க்குச் செங்குத்து என்பதால், $\overrightarrow{OA}$ என்பது $\overrightarrow{BC}$ க்குச் செங்குத்தாகும். எனவே, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

அதாவது $\vec{b}.(\vec{a} - \vec{c}) = 0$

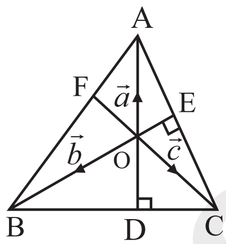
$\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} = 0$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றின் கூடுதல் காண, நாம் பெறுவது

$\vec{a}.(\vec{c} - \vec{b}) = 0$

$$\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{c}.(\vec{a} - \vec{b}) = 0$$



அதாவது $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. ஆகவே $\overrightarrow{OC}$ என்பது $\overrightarrow{BA}$ -க்குச் செங்குத்து என்பதால் $\overrightarrow{CF}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$ க்குச் செங்குத்தாகும். அதாவது C-யிலிருந்து பக்கம் AV-க்குரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு O வழியாகச் செல்கிறது. எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளாகும்

47.(a) **தீர்வு :**

கொடுக்கப்பட்ட $\cos\theta + \cos\phi = \sin\theta + \sin\phi = 0$

$a = \cos\theta + i\sin\theta,\ b = \cos\phi + \sin\phi$ என்க.

$a + b\ (\cos\theta + \cos\phi) + i\,(\sin\theta + \sin\phi) = 0$

$a + b = 0$ ஆதலால் $(a+b)^2 = 0$

$a^2 + b^2 + 2ab = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 2(-1)ab$

$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\phi + \sin\phi)^2 = 2$

$(\cos\pi + i\sin\pi)\ (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + \sin\phi)\ (\cos 2\theta + \cos 2\phi) + i\,(\sin 2\theta + \sin 2\phi) = 2$

$(\cos(\pi + i\sin\pi)(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)\ (\cos 2\theta + \cos 2\phi) + i\,(\sin 2\theta + \sin 2\phi) = 2$

$[\cos(\pi + \theta + \phi) + i\sin\ (\pi + \theta + \phi)]$

மெய் மற்றும கற்பனை பகுதிகளை சமப்படுத்த

$$\cos 2\theta + \cos 2\phi = 2\cos(\pi + \theta + \phi)$$

$$\sin 2\theta + \sin 2\phi = 2\sin(\pi + \theta + \phi)$$

(அல்லது)

(b) **தீர்வு :**

(x_1, y_1)ல் தொடுகோடு $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\left(\dfrac{a^2}{x_1}\right)}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{b^2}{y_1}\right)} = 1$

$$\therefore h = \frac{a^2}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{a^2}{h}$$ மற்றும்

$$k = \frac{b^2}{y_1} \Rightarrow y_1 = \frac{b^2}{k}$$

$(x_1, y_1)\left(\dfrac{a^2}{k}, \dfrac{b^2}{k}\right)$ = நீள்வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(a^2)^2}{h^2(a^2)}+\dfrac{(b^2)^2}{k^2(b^2)} = 1$

$$\therefore \frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2} = 1$$

❁❁❁❁❁