

XI Sem - கணிதம் 2018-19 TM. பப்ரவரி-9.
எல்லைகள் - உதாரணம்: (அதிடுதறு)

1) $\lim_{x \rightarrow 0}$ எனில் x ஆனது 0 லை அருகில் இல்லை என்பதை
 $x \neq 0$ ஆகவும். மேலும் x க்கு 0 லை அருகில் இல்லை
 எனும்.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ எனும்பொழுது 0 க்கு அருகில் $f(x)$.
 $x \rightarrow 0$ அல்லது $x \rightarrow 0^+$ அல்லது $x \rightarrow 0^-$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில்
 இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ எனும்பொழுது 0 க்கு அருகில் $f(x)$ எனும்பொழுது
 $x \rightarrow 0^+$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $x \rightarrow 0^-$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $x \rightarrow 0^+$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2} \quad x \neq 0$$

$x = 0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

0 லை $f(x) = x^3 + 1$

0 லை $f(x) = 2$ எனும்பொழுது.

இவ்வாறு காட்டினால் $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ எனில் $x=0$ லை அருகில்
 இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $f(x)$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $f(x)$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $f(x)$ எனும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

4) எல்லை காணும்பொழுது $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.
 $x=0$ லை அருகில் இல்லை என்பதைக் காட்டும்.

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$$

Does $f(x) = [x]$ exist?

கிடைக்காத காரணம் $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1, \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$

$$f(x) = x^2, \quad x \leq 2$$

$$8-2x, \quad 2 < x < 4$$

$$4, \quad x \geq 4 \text{ எனும் இடங்களில்} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2$$

எனவே $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8-2x$ எனவும் $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 8-2x$

எனவும் $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 4$ எனவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

பிறகு x க்கு மற்றொரு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$f(x) = |x-1|$ எனில் $f(x) = -(x-1) \quad x < 1$
 $(x-1) \quad x > 1$ எனக் கொள்ளலாம்.

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $f(x)$ உடன் $\lim_{x \rightarrow x_0} c$ கிடைக்கும்

c என்னும் மாறியை எடுத்துப் பிறகு எந்தவொரு மதிப்பைக் கொள்ளலாம்.

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
 கிரைஸ்லெய்ன் மெதோடு கிடைக்கும் மதிப்பைக் கொள்ளலாம்.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

கிரைஸ்லெய்ன் மெதோடு கிடைக்கும் மதிப்பைக் கொள்ளலாம்.

$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2-3)^{10}$ எனில் $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2-3)$ கிடைக்காததால் அதை 10 மீறிய

மதிப்பைக் கொள்ளலாம்.

தொகுக்கப்பட்ட கணம் x இன் மத்தியில் இருந்து கொள்ளும் இடைவெளி
 $(x+1), (x-2)$ - - - கிடைக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். பிறகு
 கிடைக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். (அ) தொகுக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். எடுத்துக் கொள்ளலாம்.
 பிறகு மதிப்பைக் கொள்ளலாம். (அ) தொகுக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். எடுத்துக் கொள்ளலாம்.
 மதிப்பைக் கொள்ளலாம். (அ) தொகுக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். எடுத்துக் கொள்ளலாம்.
 தொகுக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். (அ) தொகுக்காத மதிப்பைக் கொள்ளலாம். எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right)$ என எடுக்க வேண்டும்.

இதன் மூலம்: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$. இங்கு a என்பது x இன் மதிப்பாக $x \rightarrow a$ எனக் கொள்ளும். $x^n - a^n$ பகுதியை, $x - a$ பகுதியால் $x \rightarrow a$ எனக் கொள்ளும். $x - a$ பகுதியின் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $x^n - a^n$ பகுதியின் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ எனும் வடிவத்திற்கு $\frac{0}{0}$ எனும் வடிவம் கிடைக்கும்.

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned} \right\} \text{பயன்படுத்த வேண்டிய சூத்திரம்.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^5 - 2^5}{x}$ எனக் கொள்ளும். $x \rightarrow 0$ எனக் கொள்ளும். x இன் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $(x+2)^5 - 2^5$ பகுதியின் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $\frac{0}{0}$ எனும் வடிவம் கிடைக்கும். $x = t - 2$ எனக் கொள்ளும். $t = x + 2$ எனக் கொள்ளும். $x \rightarrow 0$ எனக் கொள்ளும். $t \rightarrow 2$ எனக் கொள்ளும். $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^5 - 2^5}{t - 2}$ எனக் கொள்ளும். $t \rightarrow 2$ எனக் கொள்ளும். t இன் மதிப்பை 2 எனக் கொள்ளும். $t^5 - 2^5$ பகுதியின் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $t - 2$ பகுதியின் மதிப்பை 0 எனக் கொள்ளும். $\frac{0}{0}$ எனும் வடிவம் கிடைக்கும்.

இவ் வகையான மூலக்கோணம் $x \rightarrow 0^+$ எனில் $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow 0^+$ எனில் $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 0^-$ எனில் $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow 0^+$ எனில் $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$

n வது வகையான மூலக்கோணம்

$x \rightarrow a$ எனில் $\frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow \infty$

$x \rightarrow a^-$ எனில் $\frac{1}{(x-a)^n} = \infty$

$x \rightarrow a^+$ எனில் $\frac{1}{(x-a)^n} = \infty$

$x \rightarrow a^-$ எனில் $\frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow a^+$ எனில் $\frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow +\infty$

TrbTnpsc.com

தொடர்புள்ள கேள்விகள்: $f, g, h: I \subseteq \mathbb{R}$ ஸ்திரீய ஸார்புதம் I ி $\mathbb{R}$ ம்

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ සමයෙහි $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ සහ $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ නම් $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ වේ.

$$1) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad 2) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad a > 0$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 1$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Scanned by CamScanner

தொடர்ச்சித் தன்மை: ஒருவரின் குறிப்பிடப்படாத x_0 இல் தொடர்ச்சி
 -யாக இருக்க வேண்டும் எனில் $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
 என வேண்டும். உட்கருத்து எதுவுமே இருந்தால், f என்ற ஒருவரின் x_0
 என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும். மற்றவரு தொடர்ச்சியாக
 இருக்க வேண்டும். எல்லா கருத்துகளையும் குறிப்பிட்டுக் கொள்ள வேண்டும்.
 எல்லா கருத்துகளையும் $f(x)$ என்ற கருத்து x_0 என்றவரு தொடர்ச்சியாக
 இருக்க வேண்டும். $f(x)$ என்ற கருத்து x_0 என்றவரு தொடர்ச்சியாக
 இருக்க வேண்டும்.

ஒருவரின் தொடர்ச்சித் தன்மை

- 1) $f(x) = k$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 2) $f(x) = x^n$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 3) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ $a_0 \neq 0$ என்ற பன்முகபடி கோவை
 R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 4) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $Q(x) \neq 0$ என்ற பன்முகபடி கோவை
 R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 5) $\sin x, \cos x$ என்றவை R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ என்றவை $R - \{(2n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}\}$ இல் தொடர்ச்சியாக
 $\sec x, \csc x$ என்றவை $R - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ இல் தொடர்ச்சியாக
- 6) $f(x) = x^n$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 7) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ இல் தொடர்ச்சியாக
- 8) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 9) $f(x) = |x|$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 10) $f(x) = e^x$ R இல் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியாக
- 11) $f(x) = \log x$ $R = (0, \infty)$ இல் தொடர்ச்சியாக

T. G. Venkatesan

9444209677.

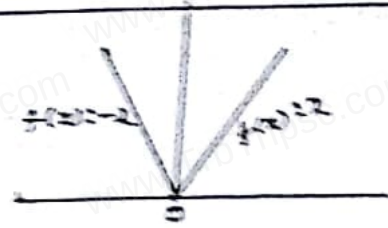
21 இது பற்றித் தீர்மானம் - 9.

புள்ளித்தொகுப்பு (எண்ணுகல் மற்றும் விதிகளின்படி)

எடுத்துக்காட்டு: 1. எண்: 9.1) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ கண்டறிவதற்காக.

$$|x| = -x \quad x < 0$$

$$x \geq 0.$$



$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

எண்: 9.2) $f(x) = \sqrt{x}$ $x \geq 0$ எனில் $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ கண்டறிதல்.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

$x < 0$ எனில் $\sqrt{x}$ வரையறுக்கப்படவில்லை.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ கண்டறியப்படவில்லை.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ கண்டறியப்படவில்லை.}$$

குறிப்பு: $x \leq 0$ ல் $\log x$ வரையறுக்கப்படவில்லை.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \log x \text{ கண்டறியப்படவில்லை.}$$

எண்: 9.3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$ கண்டறிதல்.

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n \text{ எனவே } n \text{ ல் } [x] \text{ தொடர்ச்சியற்றது.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} [x] \text{ கண்டறியப்படவில்லை.}$$

$$\text{எடுத்துக்காட்டு: } \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n+1.$$

குறிப்பு

$$\text{எனவே } \lim_{x \rightarrow n} [x] \text{ கண்டறியப்படவில்லை.}$$

எண்: 9.4) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ எனில் $x \rightarrow 0$ $f(x)$ க்கு எல்லை உண்டா? என்பதைக் கண்டறிதல்.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ எல்லை உண்டா.}$$

எ.கா. 9.5) $f(x) = \frac{|x+5|}{x+5}$ $x \neq -5$
 $\frac{0}{0}$ $x = -5$ என்ற $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ கிடைக்காது.

பொதுவான சம சமன்பாடு.

$$f(x) = \frac{|x+5|}{x+5}$$

$$x \neq -5$$

$$x = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{-(x+5)}{x+5} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x+5)}{(x+5)} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -5} f(x) \text{ கிடைக்கப் பெறாது.}$$

எ.கா. 9.6) $f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4|x-1| + x-1}{|x-1|}$ $x \neq 1$ என்ற எல்லைக் கிடைக்கப் பெறாது.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4(x-1) + x-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4x + 4 + x - 1}{-x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x + 3}{-x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3(x-1)}{-(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1) + x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 4 + x - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x-1)}{(x-1)} = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ என்ற எல்லை கிடைக்கப் பெறாது.}$$

கிடைக்காமைக்கானதற்குச் சான்று பெறுவது என் சித்திரங்கள் கிடைக்காமைக்குச் சான்று.

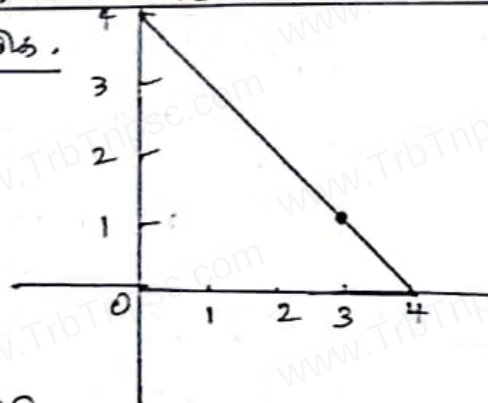
சிறுந்தான் கிடைக்காது விளக்கிக.

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4-x) = 4-3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (4-x) = 4-3 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \text{ என்பதை உணர்.}$$



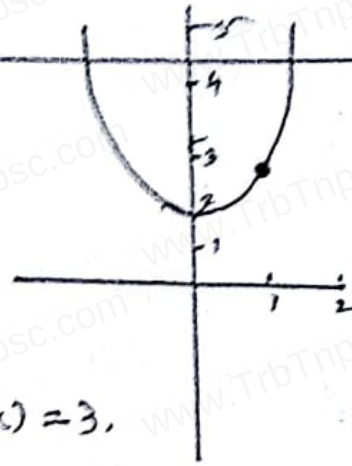
8) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + 2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + 2) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3,$$

$\therefore$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

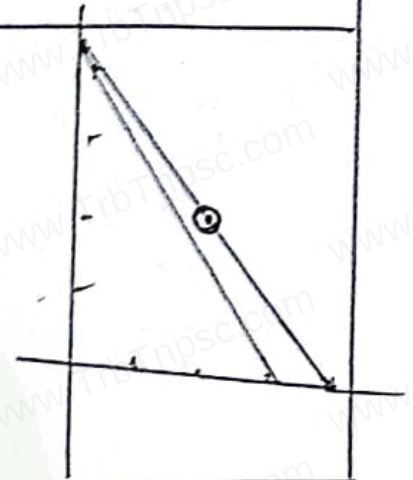


9) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ where $f(x) = 4 - x$ $x \neq 2$
0 $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4 - x = 4 - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 - x = 4 - 2 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2.$$

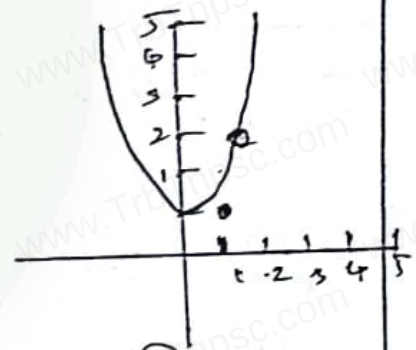


10) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ where $f(x) = x^2 + 2$ $x \neq 1$
1 $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3. \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3.$$

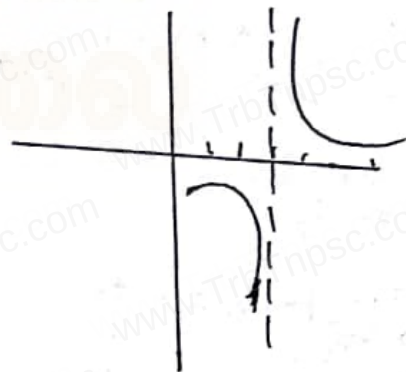


11) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

$\therefore$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ does not exist.



$$\frac{12}{9.1} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-(x-5)}{x-5} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ $\therefore$ இலிமிட் எல்லை காணமுடியாது.

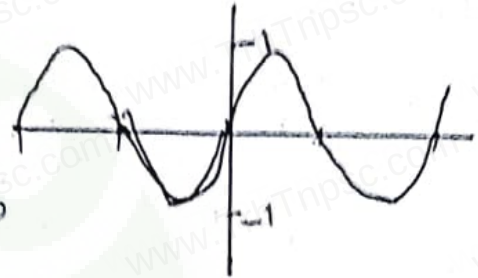


$$\frac{13}{9.1} \lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin \pi x = \sin \pi = 0$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \therefore$ இலிமிட் காணப்படும்.

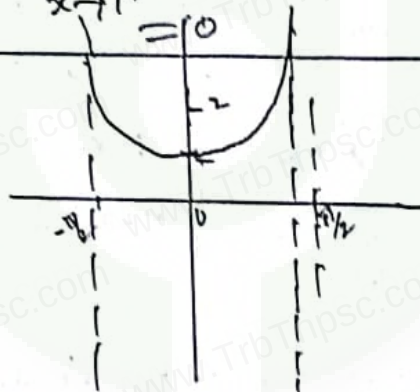


$$\frac{14}{9.1} \lim_{x \rightarrow 0} \sec x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sec x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sec x = 1$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sec x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sec x = 1$ $\therefore$ இலிமிட் காணப்படும்.

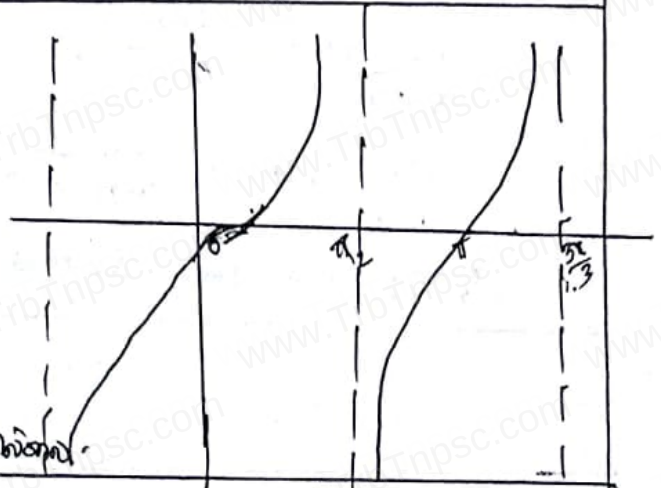


$$\frac{15}{9.1} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = \infty$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x)$ $\therefore$ இலிமிட் காணப்படாது.



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$\therefore x=1$ is an indeterminate form.

Polynomial:

1) $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ [n is the degree, $a_0, a_1, \dots, a_n$ are the coefficients]

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = P(x_0)$$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

6) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n$

Proof: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

Proof: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + xa^{n-1} + a^n)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + xa^{n-1} + a^n)}{(x-a)}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} \text{ (n times)}$$

$$= na^{n-1}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

எ.கா: 9.7: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + 6)$ இ மதிப்பு கணக்கிடுக.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + 6) = 27 - 6 + 6 = 27.$$

எ.கா: 9.8 எந்தவொரு எண்ணையும் $\lim_{x \rightarrow x_0} (5)$ இ மதிப்பாகக் காண்க.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (5) = 5.$$

$\therefore$ எந்தவொரு எண்ணின் மதிப்பையும் 5 இ மதிப்பாகக் காண்க.

எ.கா: 9.9. மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 8} (5x)$.

$$1) \lim_{x \rightarrow 8} (5x) = 5 \times 8 = 40$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}(-2) = 3$$

எ.கா: 9.10 கணக்கிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2+x}{x} + 4x^3 + 3\right]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x + 1 + 4x^3 + 3] = 0 + 1 + 0 + 3 = 4.$$

எ.கா: 9.11. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3)^{10}$.

$$= \left[\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3)\right]^{10}$$

$$= (1 - 3)^{10} = (-2)^{10} = 1024.$$

எ.கா: 9.12 மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x + 6)(-x^2 + 15)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x + 6) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 + 15) = (-8 + 6 + 6)(-4 + 15) = 4 \times 11 = 44.$$

எ.கா: மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 8x + 7}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 8x + 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 8x + 7)} = \frac{9 - 18 + 5}{27 - 24 + 7} = \frac{-4}{10}$$

Q. No: 9.14) Find the limit: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Q. No: 9.15) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{t^2+9}-3)(\sqrt{t^2+9}+3)}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+9-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} \\ = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

Q. No: 9.16) Find the limit: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 1^3-1 = \underline{\underline{3}}$$

Q. No: 9.17) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{1/2}-1}{t-1} = \frac{1^{1/2}-1}{1-1} = \frac{0}{0} \\ = \frac{1}{2}$$

Q. No: 9.18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^5-2^5}{x}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^5-2^5}{x} \\ = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^5-2^5}{t-2} = 5 \cdot 2^4 \\ = 80.$$

Put $t = 2+x$
as $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 2$.

Q. No: 9.19) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^n-3^n}{x-3} = 27$ Find the value of n .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^n-3^n}{x-3} = n \cdot 3^{n-1} = 27 = 3 \cdot 3^2 \Rightarrow n = 3.$$

$$\frac{1}{9.2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad \text{L.H.S.} = 9.2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = 4 \cdot 2^3 = 4 \times 8 = 32$$

$$\frac{2}{9.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^m - 1}{x - 1}}{\frac{x^n - 1}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^m - 1}{x - 1}}{\frac{x^n - 1}{x - 1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\frac{3}{9.2) \lim_{\sqrt{x} \rightarrow 3} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{\sqrt{x} \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x})^4 - 3^4}{\sqrt{x} - 3} = 4 \cdot 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$\frac{4}{9.2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad x > 0.$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x}$$

$$\text{let } t = x + h. \quad h = t - x \\ h \rightarrow 0, \quad t \rightarrow x.$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^{1/2} - x^{1/2}}{t - x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\frac{5}{9.2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x-5}$$

$$\text{let } x+4 = t \\ x \rightarrow 5 \quad t \rightarrow 9.$$

$$= \lim_{t \rightarrow 9} \frac{t^{1/2} - 3}{t - 9} = \frac{1}{2} 9^{-1/2}$$

$$x = t - 4 \\ x - 5 = t - 9.$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

✓

$$\frac{6}{9.2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{-1} - 2^{-1}}{x - 2} = (-1) 2^{-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{9.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) - (x^2 - 1)}{-(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x^{1/2} - 1^{1/2}}$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = -1 + \frac{2}{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = -1 + 4 = 3.$$

$$9.2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

(or) let $t = 1+x$
 $x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 1$
 $x = t-1$
 $\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{1/2} - 1}{t-1} = \frac{1}{2}$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{7+x^3} - 2}{x-1} - \frac{(\sqrt{3+x^2} - 2)}{x-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7+x^3)^{1/3} - 8^{1/3}}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x^2)^{1/2} - 4^{1/2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7+x^3)^{1/3} - 8^{1/3}}{\frac{x^3-1}{x-1}} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x^2)^{1/2} - 4^{1/2}}{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7+x^3)^{1/3} - 8^{1/3}}{x^3-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x^2)^{1/2} - 4^{1/2}}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7+x^3)^{1/3} - 8^{1/3}}{x^3-1} - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x^2)^{1/2} - 4^{1/2}}{x^2-1}$$

$$\textcircled{x} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(7+x^3)^{1/3} - 8^{1/3}}{x^3-1}$$

put $7+x^3 = t$
 $x \rightarrow 1$ so $t \rightarrow 8$

$$= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^{1/3} - 8^{1/3}}{t-8} = \frac{1}{3} 8^{-2/3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(8^{1/3})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3+x^2)^{1/2} - 4^{1/2}}{x^2-1}$$

$3+x^2 = t$
 $x \rightarrow 1$ so $t \rightarrow 4$

works separately

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^{1/2} - 4^{1/2}}{t-4} = \frac{1}{2} 4^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Sub in } \textcircled{x} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1} = 3 \cdot \frac{1}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{11}{9.2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4-x}}$$

$\div$ Numerator Div by $x-2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - (x+2)^{1/2}}{\frac{2^{1/3} - (4-x)^{1/3}}{x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - (x+2)^{1/2}}{2^{1/3} - (4-x)^{1/3}} \cdot \frac{x-2}{x-2}$$

Workout separately.

Put $x+2 = t$ $x \rightarrow 2$ corresponds $t \rightarrow 4$

$x = t - 4$

$4-x = t$ $x \rightarrow 2$ corresponds $t \rightarrow 2$

$4-t = x \Rightarrow x-2 = 4-t-2 = 2-t$

$$1^{\circ} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4^{1/2} - t^{1/2}}{t-4} \cdot \frac{0}{0} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2^{1/3} - t^{1/3}}{t-2}$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^{1/2} - 4^{1/2}}{t-4} \cdot \frac{1}{1} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^{1/3} - 2^{1/3}}{t-2}$$

$$= -\frac{1}{2} 4^{1/2} \div \frac{1}{3} 2^{-2/3}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \div \frac{1}{3 \cdot 4^{1/3}} = -\frac{1}{4} \times 3 \times 4^{1/3} = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{12}{9.2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{1+x^2} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{13}{9.2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x^2(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1-x}}{x^2(\sqrt{1-x} + 1)}$$

$$= \frac{-1}{0} = -\infty \cdot x \rightarrow 0 \text{ corresponds } f(x) \rightarrow -\infty \text{ or } \infty$$

$$\begin{aligned}
 \frac{14}{9.2)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{15}{9.2)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2} \times \frac{\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-b) - (a-b)}{(x+a)(x-a)(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b})} \\
 &= \frac{1}{2a \cdot 2\sqrt{a-b}} = \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}
 \end{aligned}$$

Q.81: 9.20) $f(x) = ax + b \quad x > 3$
 $3ax - 4b + 1 \quad x < 3$

Let's find $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ by using the definition of limit. a, b are constants.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3ax - 4b + 1 = 9a - 4b + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + b = 3a + b$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ exists only if } 9a - 4b + 1 = 3a + b$$

$$6a - 5b + 1 = 0$$

പ്രധാനപ്പെട്ട സിദ്ധാന്തം: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + x^3} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$\text{Ex. 9.21: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x^3} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\therefore x \rightarrow 0$ സമയം $f(x) \rightarrow \infty$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x^3} \rightarrow \infty \quad \therefore \text{സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കുന്നു.}$$

Ex. 9.22: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0} = \infty$$

അതുകൊണ്ട് $x \rightarrow 2$ സമയം $f(x) \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty \quad \text{അതുകൊണ്ട്}$$

സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കുന്നു.

Ex. 9.22: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow \infty$

$$x \rightarrow a \text{ സമയം } \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow a^- \text{ സമയം } \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow a^+ \text{ സമയം } \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow \infty$$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$x \rightarrow \infty \text{ സമയം } \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow \infty \text{ സമയം } \frac{1}{(x-a)^n} \rightarrow \infty$$

$\therefore x = a$ സമയം $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ex. 9.23: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{5x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\text{Ex. 9.24: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{3x+2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - x^2}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\therefore$ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കുന്നു.

Ex. 9.24: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{3x+2} = \frac{\infty}{\infty}$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x-6} = 0 - 0 = 0$$

Ex. 9.24: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{3x+2} = \frac{\infty}{\infty}$

$$0 - 0 = 0$$

த.கா: 9.25 : உடனிடம் உடனடி அங்குதானா அந்தரயீதல், சிவா நகரம் மேலும்
 உயர்வுக்கும் மருந்து மேதி அந்தான மேலும் கிளீவீதலும் உயரிடையுறுகின்றது.
 அங்குதானா அடர்த்தி மிகுமாக அங்குதான அந்தரயீதலும் உயரிடையுறுகின்றது
 மேலானமே உயரிடையுறுகின்றது கிளீவீதலும் உயரிடையுறுகின்றது. அதன் அளவினை
 5% க்கு குறைவாகவே அந்தரயீதலும், சிவா நகரம் உயரிடையுறுகின்றது.
 அங்குதான மேலிடத்தில் உடனடி அங்குதானா கிளீவீதல் மிகுதலுக்கும் அங்குதான
 ரகதும் அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான
 அங்குதான $r(x) = \frac{\alpha x}{x+\beta}$ என உயரிடையுறுகின்றது. α, β மிகுதலுக்கும்
 அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான

விடை

$$r = \frac{\alpha x}{x+\beta}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} r &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x}{x+\beta} = \frac{1}{1} x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{x}} = \alpha \end{aligned}$$

த.கா: 9.26 : உயரிடையுறுகின்ற அங்குதான கிளீவீதலும் அங்குதான
 கிளீவீதலும் அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான
 அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான
 அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான அங்குதான

$$\lim_{v \rightarrow c} (m) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\lim_{v \rightarrow c} (1-\frac{v^2}{c^2})}}$$

$h > 0$ எனில்

$$c-h < v < c$$

$$(c-h)^2 < v^2 < c^2$$

$$\frac{(c-h)^2}{c^2} < \frac{v^2}{c^2} < 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c-h)^2}{c^2} < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^2}{c^2} < \lim_{h \rightarrow 0} 1$$

$$1 < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^2}{c^2} < 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^2}{c^2} = 1$$

$$\therefore \lim_{v \rightarrow c} (m) = \infty$$

$\therefore v \rightarrow c$ எனில் அங்குதான அங்குதான அங்குதான

$$\begin{aligned} v &= c-h \\ v \rightarrow c &\Rightarrow h=0 \end{aligned}$$

அங்குதான அங்குதான அங்குதான
 அங்குதான அங்குதான அங்குதான
 அங்குதான அங்குதான அங்குதான

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{30t}{200+t} \div t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{30}{\frac{200}{t} + 1} = \underline{\underline{30}}$$

9) மீண்டும் அறிவிப்பின் மூலிய பரந்த-சாறு நீரோடைகளில் உள்ள
9.3) மெட்டையா துதியான மீன்களின் எண்ணிக்கை சமய காலத்திற்கு
கிடைக்கக்கூடிய பண்புடைய கிடைக்கக்கூடிய காலத்தில் அங்குள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை
மீன்பிடிப்புக்கு தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையை கணக்கிடுவதற்கும்.
S என்பது மெட்டையா துதியில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை,
R என்பது மீன்பிடிப்புக்கு தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கை,
பிரபலம் போன்றவை கிடைக்கக்கூடிய காலம் $R(s) = \frac{s}{\alpha s + \beta}$ கிடைக்க
α, β என்பன மிகை லாபநிலைகள். கிடைக்கக்கூடிய காலம் கிடைக்கக்கூடிய
கிடைக்கக்கூடிய மீன்களின் எண்ணிக்கை சமயமான அளவு அளிக்கக்கூடிய
அளவுகளைக் குறித்து மீன்களின் எண்ணிக்கை சமயமான லாபநிலைகள்
சமயமான சமயநிலைகள்.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\alpha s + \beta} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{s}} = \frac{1}{\alpha} \text{ (லாபநிலை)}$$

பயிற்சி - 9.4.
த.கா: 9.29) மதிப்பு காண்க $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sol: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

த.கா: 9.30 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Sol: $x \geq 0$ எனில் $-x \leq \sin x \leq x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \leq 0$$

प्रश्न: 9.31

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right] = 120$$

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{2}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor \leq \frac{2}{x} + 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{15}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \leq \frac{15}{x} + 1$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \dots + \frac{15}{x} \right) - 15 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \dots + \frac{15}{x} + 15$$

$$\frac{15(16)}{2x} - 15 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \leq \frac{15 \times 16}{2x} + 15$$

$$\frac{120}{x} \leq 15 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \leq \frac{120}{x} + 15$$

$$120 - 15x \leq x \left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right] \leq 120 + 15x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 120 - 15x \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} 120 + 15x$$

$$120 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right] \leq 120$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor \right] = 120$$

प्रश्न: 9.32) लैम्बर्ट W फंक्शन: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$

Sol: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$

Let $\sin x = y$, $\cos x = \frac{1}{y}$

$x \rightarrow 0$ means $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{1/y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left((1 + y)^{1/y} \right)^y = e^2$$

प्रश्न: 9.32

$$\frac{1}{9.4)} \text{ லிமிட் கொண்டு } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^7 = e^7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\frac{2}{9.4)} \text{ லிமிட் கொண்டு: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{1/x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}\right]^{1/3} = e^{1/9}$$

$$\frac{3}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{m/x} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{1/x}\right]^m = \left(1 + 0\right)^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+5-2}{2x^2+5}\right)^{4(2x^2+5)-17} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2x^2+5}\right)^{4(2x^2+5)-17} \quad \text{put } t = 2x^2+5 \\ &\quad x \rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{t}\right)^{4t-17} \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{t}\right)^t\right]^4 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{t}\right)^{-17} \\ &= e^{-8} \cdot 1 = e^{-8} = \frac{1}{e^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 \\ &= e^3 \cdot 1 = e^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6}{9.4)} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \theta}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \theta}{\theta^3 \cdot 8} = \frac{1}{8} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{9.4)} \text{ லிமிட் கொண்டு } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \cdot \alpha x}{\frac{\sin \beta x}{\beta x} \cdot \beta x} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{8}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{9}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^n}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^n \cdot x^m}{x^m (\sin x)^m} = x^{n-m} \cdot \frac{1}{1} = x^{n-m}$$

$$\frac{10}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos a \sin x}{x} \quad \begin{matrix} \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ = 2 \cos A \sin B \end{matrix}$$

$$= 2 \cos a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cos a \cdot 1 = 2 \cos a$$

$$\frac{11}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+a^2} - b} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - a}{(x^2+a^2)^{1/2} - b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - a}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - b}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - (a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2) - a^2} \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0 \text{ or } \\ x^2+a^2 \rightarrow a^2 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - (b^2)^{1/2}}{x^2+b^2-b^2}$$

$$\therefore \lim_{x^2+a^2 \rightarrow a^2} \frac{(x^2+a^2)^{1/2} - (a^2)^{1/2}}{x^2+a^2-a^2} = \frac{\frac{1}{2}(a^2)^{-1/2}}{\frac{1}{2}(b^2)^{-1/2}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{12}{9.4) \text{ L'Hôpital's rule } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{13}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2^2} \cdot 4} = \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$= \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{14}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x \cdot \frac{1}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{15}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) - (3^x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \\ &= \log 2 - \log 3 = \log\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x+1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) \\ &= \log 3 \cdot 2 = 2 \log 3 = \log 3^2 = \log 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{17}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x - \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x - \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x - 2\sin x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{18}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right] & \quad t = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos^{\frac{1}{x}} + 1 - e^{\frac{1}{x}} \right] & \quad x \rightarrow \infty \text{ or } t \rightarrow 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[(3^t - 1) + (1 - \cos^t) + (1 - e^t) \right] & \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^t}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - e^t)}{t} & \\ = \log 3 + 0 + 1 = 1 + \log 3 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{19}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\log(x+a) - \log x \right] & \quad t = \frac{1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{x+a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{x+a}{x} \right)}{\frac{1}{x}} & \quad x = \frac{1}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \log \left(\frac{1+at}{at} \right) \cdot a = a \cdot 1 = a. & \end{aligned}$$

$$\frac{20}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(3x - 3\pi)}{\sin(2x - 2\pi)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(3x - 3\pi)}{3x - 3\pi} \times (3x - 3\pi)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x - 2\pi)}{2x - 2\pi} (2x - 2\pi)$$

$$= \lim_{3x \rightarrow 3\pi} \frac{\sin(3x - 3\pi)}{3x - 3\pi} \cdot 3(x - \pi)$$

$$\lim_{2x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(2x - 2\pi)}{2x - 2\pi} \cdot 2(x - \pi)$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{21}{9.4)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \sin x)^{2 \csc x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 1)^{2 \cdot 1} = 4$$

$$\text{or) } \lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin x)^{2 \csc x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + y)^{\frac{2}{y}} = e^2 \quad \begin{matrix} y = \sin x \\ x \rightarrow \pi \quad y \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\frac{23}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}{\tan x (\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x) - (1 - \sin x)}{\tan x (\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \csc x}{\tan x (\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{1 + 1} = 1$$

$$\frac{24}{9.4)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 \cos^2 x/2}}{\sin^2 x}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x/2}{\sin^2(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/4)}{(\sin(x/2))^2} \cdot \frac{x/4}{x/4}$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{24}{9.4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 4x + 2) + (2x - 1)}{x^2 - 4x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)}{(x^2 - 4x + 2)} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}} \right]$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 2} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 2} \times x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x^2 - 4x + 2} \right) \quad \text{Power of NV and DV are equal.}$$

$$= e^{2/1} = e^2$$

$$\frac{25}{9.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \left(\frac{2}{e^x} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{aligned}
 26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^a)^x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^b)^x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^a)^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^b)^x - 1}{x} \\
 &= \log e^a - \log e^b \\
 &= a - b.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4} \times 4} \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
 &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4} \cdot 4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\
 &= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

ഉദ്ദാഹരണ പ്രശ്നങ്ങൾ.

- 1) x ന്റെ അതിർത്തിയിൽ $f(x)$ യുടെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ എന്ന പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ.

- 1) $f(x) = k$ എന്ന പരിധിയിൽ R ന്റെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ
- 2) $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ R ന്റെ പരിധിയിൽ
- 3) $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ എന്ന പരിധിയിൽ R ന്റെ പരിധിയിൽ $f(x)$ ന്റെ പരിധിയിൽ.

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x & 0 \leq x < 100 \\ 0.14x & x > 100 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} 0.14x = 14$$

$$C(100) = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = 0.16x = 16$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) \neq \lim_{x \rightarrow 100^+} C(x)$$

1) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

$f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

2) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

3) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

4) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

5) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

6) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

7) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

8) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

9) $f(x) = x^2 \sin x$ - R ത്തെടൊന്ന ഏകീകരിക്കുകയും $\sin x$ ന്റെ $\cos x$ ആകും.

$$7) f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$$

$x^2 - 16$, $x + 4$ என்பவை பின்னங்கூறுகளாக எதிரை R ன் ஆகலட்சி.

தகைய $x = -4$ ன் கூறுகளாக கூறப்படவில்லை.

எனவே $f(x)$ என்பது $R - (-4)$ ன் ஆகலட்சி.

$$8) f(x) = |x+2| + |x-1|$$

$|x+2|$, $|x-1|$ இரண்டும் மிகுதி கூறுகள். மிகுதி கூறுகள் R ன் ஆகலட்சியாக.

$\therefore f(x) = |x+2| + |x-1|$ ன் R ன் ஆகலட்சியாக.

$$9) f(x) = \frac{|x-2|}{|x-1|}$$

$|x-2|$, $|x-1|$ இரண்டும் மிகுதி கூறுகள். மிகுதி கூறுகள் R ன் ஆகலட்சியாக.

$\therefore f(x) = \frac{|x-2|}{|x-1|}$ ன் R ன் ஆகலட்சியாக.

$$10) f(x) = \cot x + \tan x$$

$\cot x$ என்பது $x = \frac{n\pi}{2}$ ன் தனி தனி கூறுகள் ஆகலட்சி.

$\tan x$ ன் $x = \frac{n\pi}{2}$ ன் தனி தனி கூறுகள் ஆகலட்சி.

$\therefore f(x) = \cot x + \tan x$ $R - \frac{n\pi}{2}$ ன் ஆகலட்சியாக.

3) மிகுதி கூறுகள் கூறுகள் ஆகலட்சி மிகுதி கூறுகள் கூறுகள் ஆகலட்சி.

9.5) கூறுகள் :

$$1) f(x) = \begin{cases} 4x+5 & x \leq 3 \\ 4x-5 & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 4x+5 = 12+5 = 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 4x-5 = 12-5 = 7$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$\therefore x = 3$ ன் கூறுகள் ஆகலட்சியாக.

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x+2 = 2+2=4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2+2=4$$

$\therefore x=2$ is the point of continuity.

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} x^3-3 & x \leq 2 \\ x^2+1 & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3-3) = 8-3=5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+1) = 4+1=5 \quad \text{Because } f(2) = 8-3=5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \quad \therefore f(x) \text{ is continuous at } x=2 \text{ is the point of continuity.}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi/4 \\ \cos x & \pi/4 < x \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4^-} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4^+} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f(\pi/4) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi/4} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4^-} f(x) = f(\pi/4) \quad \therefore x = \pi/4 \text{ is the point of continuity.}$$

Therefore $x = [\pi/4]$ is the point of continuity.

4) 9.5) Check the continuity of the function $f(x)$ at $x_0 = 1$ where $f(x) = \begin{cases} x^3-1 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

$$1) \quad x_0 = 1 \quad f(x) = \begin{cases} x^3-1 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{எனவே } f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

$\therefore x=1$ ன் தொகுதி நீக்கப்படுகிறது.

$$2) x_0 = 3 \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad x \neq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = 3+3 = 6$$

$$\text{எனவே } f(3) = 5$$

$$\text{எனவே } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

$\therefore x=3$ ன் தொகுதி நீக்கப்படுகிறது.

$$5) \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1 \quad \text{எனவே } (-\infty, \infty) \text{ ன் தொகுதி நீக்கப்படுகிறது.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 1+1+1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 1+1+1 = 3$$

$$\text{எனவே } f(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

$\therefore (-\infty, \infty)$ ன் தொகுதி நீக்கப்படவில்லை.

$$\frac{b}{9.5} \quad f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$$

$$x \quad x = 1$$

അത്യാവശ്യമായി പരിഗണിക്കേണ്ട $x=1$ ന്

അന്യമൊരു x ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ കണ്ടുക.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4.$$

$$f(1) = 4.$$

ഒരു തുല്യതയ്ക്ക് $f(x)$ ന്റെ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore 4 = 4.$$

$$\frac{7}{9.5} \quad f(x) = 0 \quad x < 0$$

$$x^2 \quad 0 \leq x < 2$$

4 $x \geq 2$ അതിനുള്ളിൽ x ന്റെ $x=2$ ന്റെ അതിരുകൾ $(-\infty, \infty)$ ന് തുല്യതയ്ക്ക് A അതിരുകൾ $\in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^2 = 0 \quad f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \text{Example } f(2) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{Example } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

അതുകൊണ്ട് $(-\infty, \infty)$ ന് അന്യ തുല്യതയ്ക്ക് $f(x)$ ന്റെ.

$\frac{9}{9.5}$ അന്യ തുല്യതയ്ക്ക് $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ കണ്ടുക.

ഒരു x ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ $f(x)$ ന്റെ $x=1$ ന്റെ അതിരുകൾ.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq -1 \\ 3x & -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x = 3$$

$$\text{Example } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2x - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \therefore x=1$ in $f(x)$ not continuous.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \therefore x=1$ in $f(x)$ not continuous.

10) f is continuous at a if $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$f(x) = 0 \quad x \leq 0$$

$$x \quad 0 < x < 1$$

$$-x^2 + 4x - 2 \quad 1 \leq x < 3$$

$$x = x \quad x \geq 3 \quad \text{Define } f(x) \text{ at } x=0, 1, 3 \text{ to be continuous.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{Because } f(x) = x$$

$$f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \therefore x=0 \text{ is continuous}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 4x - 2 = -1 + 4 - 2 = 1$$

$$f(1) = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$\therefore x=1$ in $f(x)$ is continuous.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} -x^2 + 4x - 2 = -9 + 12 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 4 - x = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Because } f(3) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$\therefore x=3$ ൽ $f(x)$ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

12)
$$g(x) = \begin{cases} x^2 - b^2 & x < 4 \\ bx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$
 $f(x)$ $(-\infty, \infty)$ ൽ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - b^2 = 16 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} bx + 20 = 4b + 20$$

$$f(4) = 4b + 20$$

$f(x)$ $(-\infty, \infty)$ ൽ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

$$16 - b^2 = 4b + 20$$

$$b^2 + 4b + 4 = 0$$

$$(b+2)(b+2) = 0$$

$$b = -2$$

11) ii)
$$f(x) = \frac{x^3 + 64}{x + 4} \quad x \neq -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4^3}{x + 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 16)}{x+4} = 16 + 16 + 16 = 48$$

$$f(-4) = \frac{-64 + 64}{-4 + 4} = \frac{0}{0}$$

$\therefore x = -4$ ൽ $f(x)$ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

$\therefore x = -4$ ൽ $f(x)$ തുല്യമായിരിക്കുന്നു.

$$\therefore g(x) = \frac{x^3 + 64}{x + 4} \quad x \neq -4$$

$$x = -4$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} \quad x_0 = 9.$$

$$f(9) = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-9}{x-9} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$\therefore x=9$ in $f(x)$ is not defined. $\therefore$ we have to find the limit of $f(x)$ as x approaches 9.

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} & x \neq 9 \\ \frac{1}{18} & x = 9. \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x+2} \quad x_0 = -2$$

$$f(-2) = \frac{4+8-8}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)(x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-4) = -2-4 = -6. \end{aligned}$$

$\therefore x=-2$ in $f(x)$ is not defined. $\therefore$ we have to find the limit of $f(x)$ as x approaches -2.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x+2} & x \neq -2 \\ -6 & x = -2. \end{cases}$$

13) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ since $f(0)$ is not defined. $\therefore$ we have to find the limit of $f(x)$ as x approaches 0.

$$-1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1$$

$$-x \leq x \sin \frac{\pi}{x} \leq x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} (x)$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} \leq 0$$

By sandwich theorem $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$

$\therefore f(x)$ is continuous everywhere when $f(0) = 0$.

14) The fn $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ is not defined at $x=1$ what value we must give $f(1)$ in order to make $f(x)$ continuous at $x=1$.

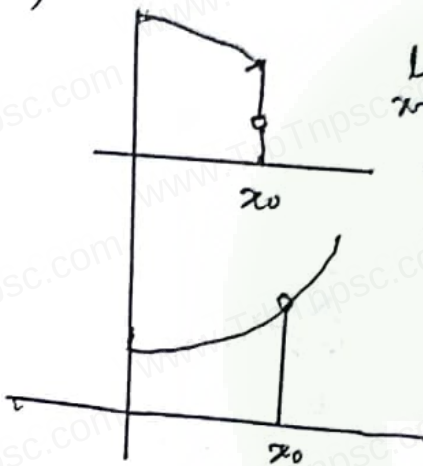
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ at $x=1$ $f(1) = \frac{2}{3}$

then $f(1) = \frac{2}{3}$ at $x=1$ is continuous.

15) Which of the following functions at $x=x_0$ is continuous? Explain.

a)



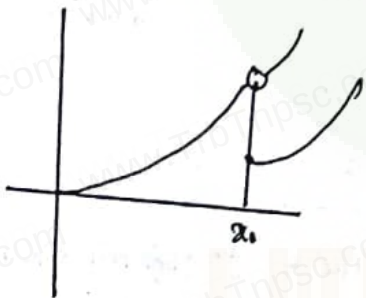
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{at } x = x_0$$

$\therefore x = x_0$ is not continuous.

$\therefore x = x_0$ is not continuous.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad x = x_0$$

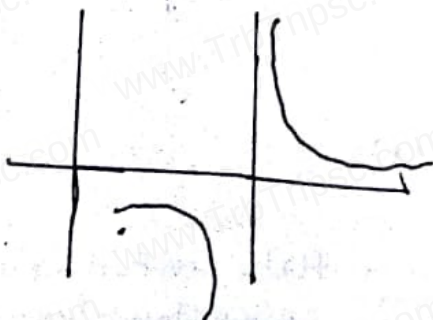
Therefore $x = x_0$ is not continuous.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq$$

$\therefore x = x_0$ is not continuous.

$\therefore x = x_0$ is not continuous.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

$\therefore x = x_0$ is not continuous.

$\therefore x = x_0$ is not continuous.

പ്രശ്നം - 9.6 (മുഹൂർത്തം)

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} =$ 1) 1 2) 0 3) ∞ 4) $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ അതിന്റെ വിപരീതം ആണ്. അതിനാൽ ഇതിന്റെ മറുപടി ആണ് 0.

Let $t = \frac{1}{x}$ as $x \rightarrow \infty$ $t \rightarrow 0$

$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x} =$ 1) 2 2) 1 3) -2 4) 0

അതിനാൽ ഇതിന്റെ മറുപടി ആണ് -2

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} =$ 1) 0 2) 1 3) $\sqrt{2}$ 4) ഇതിന്റെ മറുപടി ആണ് 0.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

4) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} =$ 1) 1 2) -1 3) 0 4) 2

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} = 1 \cdot 1 = 1$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 3} \right)^x =$ 1) e^4 2) e^2 3) e^3 4) 1

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x}{x^2 + x + 3} \right)^x$

$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{x^2 + x + 3} \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2}{x^2 + x + 3} \right)} = e^4$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} =$ 1) 1 2) 0 3) -1 4) $\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - b^x}{x}$ = 1) $\log ab$ 2) $\log a/b$ 3) $\log b/a$ 4) a/b .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x - 1}{x} \quad (*) \text{ Result}$$

$$= \log a - \log b = \log (a/b)$$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1^x}{x^2}$ = 1) $2 \log 2$ 2) $2(\log 2)^2$ 3) $\log 2$ 4) $3 \log 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 2^{2x} - 2^x + 1^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x}(2^x - 1) - (2^x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(2^{2x} - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{x}$$

$$= (\log 2)(\log 2^2) = 2(\log 2)(\log 2)$$

$$= 2(\log 2)^2$$

9) If $f(x) = x(-1)^{\lfloor x \rfloor}$ $x \leq 0$ then x is negative x is 0 then $f(x)$ is 0. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ is $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ is 0.

1) -1 2) 0 3) 2 4) 4.

$x \leq 0 \lfloor x \rfloor = 0$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x(-1)^{\lfloor x \rfloor} = 0 \times (-1)^0 = 0$.

10) $\lim_{x \rightarrow 3} \lfloor x \rfloor =$ 1) 2 2) 3 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \lfloor x \rfloor$ does not exist 4) 0.

$\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$, $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n$. $\therefore$ (Result)

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} \lfloor x \rfloor = 3-1 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ does not exist.

11) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3x$ $0 \leq x \leq 1$
 $-3x+5$ $1 < x \leq 2$ then

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ does not exist

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-3x+5) = -3+5 = 2$.

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ does not exist.

12) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $|x-3| + |x-4|$ $x \in \mathbb{R}$ then the value of $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ is $\log$ is $\dots$

1) -2 2) -1 3) 0 4) 1.

Let $x = 3-h$ as $x \rightarrow 3$ $h \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} [(3-h-3) + |3-h-4|]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [0] + \lim_{h \rightarrow 0} |3-h-4| \text{ (or)}$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$$\frac{-(x-3)}{3} \quad \frac{x-3}{4}$$

$$\frac{-x+3}{3} \quad \frac{x-3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} -(x-3) = 0 \checkmark$$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \sin x}{x}$ is $\log$ is $\dots$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\tan 3x} = 4$ then p is $\log$ is $\dots$

1) 6 2) 9 3) 12 4) 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{px} \cdot \frac{3x}{\tan 3x} \cdot \frac{px}{3x}$$

$$= \frac{p}{3} \lim_{px \rightarrow 0} \frac{\sin px}{px} \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 3x} = 4$$

$$\frac{p}{3} \cdot 1 \cdot 1 = 4 \Rightarrow p = 12$$

15) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$ is $\log$ is $\dots$ 1) $\sqrt{2}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) 1 4) 2.

By L'Hospital Rule

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) =$

1) $\frac{1}{2}$ 2) 0 3) 1 4) ∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \right) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$ 1) 1 2) e 3) $\frac{1}{e}$ 4) 0.

Put $t = \sin x$ $x \rightarrow 0$ then $t \rightarrow 0$ and $0/0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1 \cdot 1 = 1.$$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$ 1) 1 2) e 3) $\frac{1}{2}$ 4) 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)}{\tan x - x} = e^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ 1) 1 2) -1 3) 0 4) ∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (Result).}$$

20) $\lim_{x \rightarrow 3} (x - [x])$ 1) -1 2) 1 3) 0 4) ∞

$$x = 3 \text{ then } \lim_{x \rightarrow 3} (x - [x]) = 3 - 2 = 1$$

21) $x = \frac{3}{2}$ $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$ then

1) $f(x)$ is continuous 2) $f(x)$ is not continuous 3) $f(x)$ is not continuous 4) $f(x)$ is not continuous.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{|2x-3|}{2x-3} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x-3}{2x-3} = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$$

$\therefore f(x)$ is not continuous.

22) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ then $f(x) = x$: x is rational then $f(x) = 1-x$: x is irrational then

1) $x = \frac{1}{2}$ is not continuous 2) $x = \frac{1}{2}$ is not continuous 3) $f(x)$ is not continuous 4) $f(x)$ is not continuous.

$\frac{1}{2}$ is not continuous

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-x) = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{2} \text{ is not continuous}$$

23) சார்பு $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$, $x = -1$ ன் வரையறுக்கப்படவில்லை.

$f(-1)$ ன் எல்லைப் பற்றி கீழ்க்கண்டவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

- 1) $\frac{2}{3}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) 1 4) 0

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{-1-1}{1+1+1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

24) f சார்பு சார்பு $[2, 5]$ ல் தொடர்ச்சியானது என்க. x ன் எல்லா மதிப்புகளிலும் f அதிகபட்ச மதிப்பைக் காண மட்டும் கொடுக்கவும். மேலும்

$f(3) = 12$ எனில் $f(4.5)$ ன் மதிப்பு

- 1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ 2) 12 3) 17.5 4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{7.5}$

ஒரு சார்பு தொடர்ச்சியானது அதிகபட்ச மதிப்பைக் காண மட்டும் கொடுக்கவும். அது மாதிரி சார்பு (கோவை) x (அதற்குள்) க்கும்.

$\therefore$ தொடர்ச்சியான சார்பு $[2, 5]$ ல் ஒரு மாதிரி சார்பு

$\therefore$ மாதிரி சார்பு அனைத்து மாதிரிகளிலும் ஒரு மதிப்பாகும்

$$\therefore f(3) = 12 \Rightarrow f(4.5) = 12$$

25) f சார்பு சார்பு $f(x) = \frac{x-1}{x}$ $x \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டு $f(0) = 2$

எனில் f சார்பு 1) எல்லாம் தொடர்ச்சியானது அல்ல

2) எல்லாம் தொடர்ச்சியானது

3) $x = 1$ ன் தனி ஒரு மதிப்பு க்கும் தொடர்ச்சியானது

4) $x = 0$ ன் தனி ஒரு மதிப்பு க்கும் தொடர்ச்சியானது.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = \infty$$

$\therefore x = 0$ ன் தனி ஒரு மதிப்பு க்கும் தொடர்ச்சியானது.

T. G. Venkatesam

9444209677

XI Std - Maths Unit - 10 வகைக்கெடுப்புகள் - TM

த.கா.10.1) $f(x) = 7x + 5$ என்ற வகைக்கெடுப்பு $(x_0, f(x_0))$ எனில்
 4-ம் விதி கொண்டு கெட்டுப் போனதைக் காண்க.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x) = 7x + 5$$

$$f(x_0) = 7x_0 + 5$$

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 7\Delta x$$

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7 = 7.$$

த.கா.10.2) $f(x) = -5x^2 + 7x$ என்ற வகைக்கெடுப்பு $(5, f(5))$ எனில்
 4-ம் விதி கொண்டு கெட்டுப் போனதைக் காண்க.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad f(x) = -5x^2 + 7x$$

$$f(5) = -125 + 35 = -90$$

$$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x)$$

$$= -5(25 + 10\Delta x + (\Delta x)^2) + 35 + 7\Delta x$$

$$= -125 - 50\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 35 + 7\Delta x$$

$$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$

$$f(5 + \Delta x) - f(5) = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-43 - 5\Delta x)}{\Delta x} = -43$$

4-ம் விதி வகைக்கெடுப்பு $y = f(x)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

த.கா.3) $f(x) = [x]$ எனில் $f(x) = [x]$ என்ற வகைக்கெடுப்பு
 10.1) $f(x) = [x]$ எனில் $f'(x)$ காண்க.

$f(x) = [x]$ எனில் $f'(x)$ காண்க.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1 \quad \text{ஆனால்} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow n} [x]$ கிடையாது. $\therefore f'(x)$ எந்த ஒரு மதிப்பையும்
 கொண்டிருக்காது.

10.1) താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഡെറിവേറ്റീവ് കണ്ടെത്തുക.
 1) $f(x) = 6$ 2) $f(x) = -4x + 7$ 3) $f(x) = -x^2 + 2$.

1) $f(x) = 6$

$f(x_0) = 6$ $f(x_0 + \Delta x) = 6$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{\Delta x} = 0.$$

2) $f(x) = -4x + 7$

$f(x_0) = -4x_0 + 7$

$f(x_0 + \Delta x) = -4(x_0 + \Delta x) + 7$

$= -4x_0 - 4\Delta x + 7$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -4\Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4.$$

3) $f(x) = -x^2 + 2$

$f(x_0) = -x_0^2 + 2$

$f(x_0 + \Delta x) = -(x_0 + \Delta x)^2 + 2$

$= -(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 2$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 2 - (-x_0^2 + 2)$

$= -2x_0\Delta x - \Delta x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$

$= -2x_0 - \Delta x$

2) താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഡെറിവേറ്റീവ് കണ്ടെത്തുക.
 1) $f(x) = |x-1|$ 2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

1) $f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & x < 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$

$\therefore x=1$ ലെ ഡെറിവേറ്റീവ്

ഉപയോഗിക്കുക

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1) - 0}{x-1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) - 0}{x-1} = 1$$

2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $f(1) = 0$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x - 1} = \frac{0}{0} = 0$$

$f'(1)$ exists because $f(1^+)$ exists $\sqrt{1-x^2}$ is continuous.
 $\therefore f(1^+)$ is continuous. $\therefore x=1$ is continuous, differentiable.

3) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

$\therefore x=1$ is not continuous, differentiable.

3/10.1) The function $f(x)$ is continuous at $x=0$ if $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$.

1) $f(x) = \begin{cases} x|x| & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ $f(0) = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$\therefore f'(0^-) = f'(0^+)$, $\therefore x=0$ is continuous, differentiable.

2) $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \leq 1 \\ -(x^2 - 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ (x^2 - 1) & x \geq 1 \end{cases}$ $f(1) = 0$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+)$
 $\therefore x=1$ is not continuous, differentiable.

3) $f(x) = |x| + |x-1|$ $x=0, 1.$

$$f(x) = -x - (x-1) - x \quad x < 0 \quad \begin{array}{c|c|c} -x & x & x \\ \hline -(x-1) & 0 & -(x-1), x-1 \end{array}$$

$$= 1 - 2x \quad x < 0$$

$$= -(x-1) + x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 1$$

$$= x - 1 + x \quad x > 1$$

$$= 2x - 1$$

$x=0$ ൽ

$f(0) = 1$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2x - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0 \quad \therefore f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

$\therefore x=0$ ൽ ഖത്തം ഉണ്ട്.

$x=1$ ൽ

$f(1) = 1$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0.$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+) \quad \therefore x=1$$

$\therefore x=1$ ൽ ഖത്തം ഉണ്ട്.

4) $f(x) = \sin|x|$ $x=0$ ൽ.

$$= \sin(-x) = -\sin x \quad x < 0 \quad f(0) = 0$$

$$= \sin x \quad x \geq 0.$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - 0}{x} = -1.$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \therefore f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

$\therefore x=0$ ൽ ഖത്തം ഉണ്ട്.

4) $\frac{4}{101}$ ഭൂമിയിൽ ചന്ദ്രനുള്ള അകലം 4 മീറ്റർ ഉള്ളതാണ്. 1) $f(x) = -x + 2 \quad x \leq 2$ $x=2$ ൽ.

$$2) f(x) = 3x \quad x < 0$$

$$-4x \quad x \geq 0. \quad x=0$$

$$1) f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2 \\ 2x-4 & x > 2 \end{cases} \quad x=2 \text{ ని}$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$\therefore f'(x) \neq f'(2^+)$ $\therefore x=2$ ని $f(x)$ యొక్క వంతుత బిందువు

$$2) f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ -4x & x \geq 0 \end{cases} \quad x=0 \text{ ని}$$

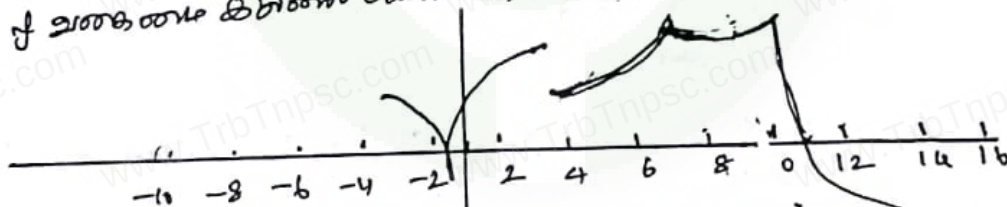
$$f(0) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x - 0}{x} = -4$$

$\therefore f'(0^-) \neq f'(0^+)$ $\therefore x=0$ ని వంతుతబిందువు.

5) 10.1) తీర్మానము: f యొక్క వంతుత బిందువులను x అక్షంపై గుర్తించి f వంతుత బిందువులను x అక్షంపై గుర్తించి చూడండి.



$x = -1$ $x = 8$ ని వంతుత బిందువులు. $x = 4$ ని వంతుత బిందువు.

$x = 4$ ని వంతుత బిందువు. $\therefore x = 4$ ని వంతుత బిందువు.

$x = 11$ ని వంతుత బిందువు. $\therefore x = 11$ ని వంతుత బిందువు.

$\therefore x = -1, 8, 4, 11$ ని వంతుత బిందువులు.

6) 10.1) $f(x) = |x+100| + x^2$ వలన $f(-100)$ వంతుత బిందువు. $x = -100$ ని వంతుత బిందువు.

$$f(x) = -(x+100) + x^2 \quad x < -100$$

$$= x + 100 + x^2 \quad x \geq -100$$

$$f(-100) = \lim_{x \rightarrow -100} \frac{f(x) - f(-100)}{x + 100} \quad f(-100) = 100^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100} \frac{x - 100 + x^2 - 100^2}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow -100} \frac{-(x - 100) + (x - 100)(x + 100)}{x + 100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100} \frac{(x - 100)(-1 + x + 100)}{x + 100} = -200.$$

$$f'(-100) = \lim_{x \rightarrow -100} \frac{f(x) - f(-100)}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow -100} \frac{x - 100 + x^2 - 100^2}{x + 100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100} \frac{(x - 100) + (x - 100)(x + 100)}{x + 100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100} \frac{(x - 100)(1 + x + 100)}{x + 100}$$

$$\therefore f'(-100) \neq f(-100)$$

$$= -199.$$

$\therefore$ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുമാണ്.

7.1) $\sin x$ എന്ന ട്രൈഗണമീറ്ററിക് ഫങ്ഷന്റെ ഗ്രാഫ് പ്ലോട്ട് ചെയ്തുകൊണ്ട് $\sin x$ ന്റെ പെരുമാറ്റം പഠിക്കുക.

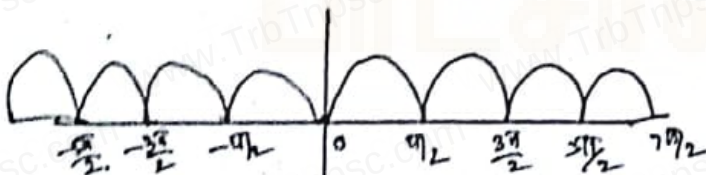
1) $|\sin x|$ 2) $|\cos x|$.



$$y = |\sin x|.$$

$x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾക്ക് $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് പ്ലോട്ട് ചെയ്തുകൊണ്ട് പഠിക്കുക.

$x = n\pi$ ന്റെ പെരുമാറ്റം പഠിക്കുക.



$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ന്റെ പെരുമാറ്റം പഠിക്കുക.

മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുമാണ്.

XI Maths Differentiation. Unit - 10.

$$1) \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$4) \frac{d}{dx}[k f(x)] = k \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$1. \frac{d}{dx}(k) = 0 \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$3) \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{(\log_a x)} = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

$$5) \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

$$6) \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$7) \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$8) \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$9) \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$10) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$11) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$12) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$13) \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) \frac{d}{dx}(\operatorname{arccos} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) \frac{d}{dx}(\operatorname{arctan} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$17) \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$18) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$19) x = f(\theta) \quad y = g(\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d\theta}{dx}$$

Required Trigonometric formulas.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

For $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ and $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ put $x = \cos 2\theta$

Let θ be an angle such that $\cos 2\theta = x$.

1) 3) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\sin 2\theta = \sqrt{1-x^2}$.
 4) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\tan 2\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
 5) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\sec 2\theta = \frac{1}{x}$.

6) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arcsin} x = 2\theta$.

7) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arccos} x = 2\theta$.

8) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arctan} x = \theta$.

9) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arcsec} x = 2\theta$.

10) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arccot} x = \theta$.

11) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arcsin} x = 2\theta$.

12) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arccos} x = 2\theta$.

13) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arctan} x = \theta$.

14) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arcsec} x = 2\theta$.

15) If θ is an angle such that $\cos 2\theta = x$, then $\operatorname{arccot} x = \theta$.

$$1) \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$4) \frac{d}{dx}[Kf(x)] = K \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$1) \frac{d}{dx}(k) = 0 \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$3) \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{(\log_a x)x} = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

$$5) \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

$$6) \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$7) \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$8) \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$9) \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$10) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$11) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$12) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$13) \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$14) \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$15) \frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$16) \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$17) \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$18) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$19) x = f(t) \quad y = g(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{dt}{dx}$$

Required Trigonometric formulas.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

$$\text{For } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ and } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ put } x = \cos \theta$$

உதாரணம் எடுத்துக் காட்டுக.

1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ எனில் θ கண்டிப்பாக $\frac{\pi}{6}$ அல்லது $\frac{5\pi}{6}$ ஆக இருக்கிறது. (ஏனெனில் $\sin \theta = \frac{1}{2}$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{6}$ அல்லது $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ஆக இருக்கிறது.)

2) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ எனில் θ கண்டிப்பாக $\frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{5\pi}{3}$ ஆக இருக்கிறது. (ஏனெனில் $\cos \theta = \frac{1}{2}$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $\theta = \frac{5\pi}{3}$ ஆக இருக்கிறது.)

3) $\tan \theta = 1$ எனில் θ கண்டிப்பாக $\frac{\pi}{4}$ அல்லது $\frac{5\pi}{4}$ ஆக இருக்கிறது.

4) $\sec \theta = 2$ எனில் θ கண்டிப்பாக $\frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{5\pi}{3}$ ஆக இருக்கிறது. (ஏனெனில் $\sec \theta = 2$ எனில் $\cos \theta = \frac{1}{2}$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $\theta = \frac{5\pi}{3}$ ஆக இருக்கிறது.)

Ex 10.7:

EXERCISE - 10.2.

1) $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3.$$

2) $y = e^x + 8\sin x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 8\cos x.$$

3) $y = 4\cos x - \log x - 2e^x.$

$$\frac{dy}{dx} = -4\sin x - \frac{1}{x} - 2e^x.$$

4) $y = (x - \frac{1}{x})^2$

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

5) $y = x e^x \log x.$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \log x + x e^x \log x \\ &= e^x (1 + \log x + x \log x) \end{aligned}$$

6) $y = \frac{\cos x}{x^3}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^3(-\sin x) - \cos x \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= -\frac{x^2}{x^6} (x \sin x + 3 \cos x) \\ &= -\frac{(x \sin x + 3 \cos x)}{x^4}. \end{aligned}$$

7) $y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x} \log x.$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + \log x (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \log x \right) \end{aligned}$$

8) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & x < 4 \\ x-4 & x \geq 4 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$f'(3) = -1 \quad \because 3 < 4$$

$$f'(5) = 1 \quad \because 5 > 4.$$

1) $f(x) = x - 3 \sin x$

$$f'(x) = 1 - 3 \cos x.$$

2) $y = \sin x + \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x.$$

3) $f(x) = x \sin x$

$$f'(x) = x \cos x + \sin x.$$

4) $y = \cos x - 2 \tan x.$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - 2 \sec^2 x.$$

5) $g(t) = t^3 \cos t$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -t^3 \sin t + \cos t \cdot 3t^2 \\ &= t^2 (3 \cos t - t \sin t) \end{aligned}$$

6) $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 4 \sec t \tan t + \sec^2 t \\ &= \sec t (4 \tan t + \sec t) \end{aligned}$$

7) $y = e^x \sin x.$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^x \cos x + \sin x e^x \\ &= e^x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

8) $y = \frac{\tan x}{x}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec^2 x - \tan x \cdot 1}{x^2}.$$

9) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \cos x) \cos x - \sin x (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\frac{10}{10.2} \checkmark y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x + \cos x) - x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x - x \cos x + x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+x) \sin x + (1-x) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\frac{11}{10.2} \checkmark y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x (\sec^2 x) - (\tan x - 1) \sec^2 x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{\sec^2 x (\sec x - \tan x + 1)}{\sec^2 x}$$

$$= \sec x - \tan x + 1$$

$$\frac{12}{10.2} y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x - \sin x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(2 \cos x - 2 \sin x)}{x^4}$$

$$\frac{13}{10.2} \checkmark y = \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$x \frac{dy}{d\theta} = \tan \theta (\cos \theta - \sin \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \sec^2 \theta$$

$$= \tan \theta \cos \theta - \tan \theta \sin \theta + \sin \theta \sec^2 \theta + \cos \theta \sec^2 \theta$$

$$\frac{14}{10.2} y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec} x (-\operatorname{cosec}^2 x) + \cot x (-\operatorname{cosec} x)$$

$$= -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x$$

$$= -\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= -\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$\frac{15}{10.2} \checkmark y = x \sin x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \sin x (-\sin x) + x \cos x \cos x + \sin x \cos x$$

$$= -x \sin^2 x + x \cos^2 x + \sin x \cos x$$

$$= x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x$$

$$= x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\frac{16}{10.2} y = e^{-x} \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + \log x (-e^{-x})$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \log x \right)$$

$$\frac{17}{10.2} \checkmark y = (x^2 + 5) (\log(1+x)) e^{-3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 5) \log(1+x) (-3e^{-3x})$$

$$+ (2x + 5) e^{-3x} + \log(1+x) e^{-3x} \cdot 2x$$

$$= e^{-3x} \left[-3(x^2 + 5) \log x + \frac{x^2 + 5}{1+x} + \log(1+x) \cdot 2x \right]$$

$$\frac{19}{10.2} \checkmark y = \log_{10} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e$$

$$\frac{20}{10.2} f(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

$$f'(x) = 4x + 5$$

EXERCISE 10.3.

Ex 10.8. Find $F'(x)$ if $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$y = \sqrt{x^2+1} \quad t = x^2+1$$

$$y = \sqrt{t} \quad \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x$$

Ex 10.9) If $y = \sin(x^2)$ find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \sin(x^2)$$

$$t = x^2$$

$$y = \sin t$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \cos t \cdot 2x$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

Ex 10.10 $y = (x^3-1)^{100}$ find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = (x^3-1)^{100}$$

$$t = x^3-1$$

$$y = t^{100}$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 100t^{99}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 100t^{99} \cdot 3x^2$$

$$= 100(x^3-1)^{99} \cdot 3x^2$$

$$= 300x^2(x^3-1)^{99}$$

Ex 10.11) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = (x^2+x+1)^{-1/3}$.

$$y = t^{-1/3}$$

Put $t = x^2+x+1$

$$\frac{dt}{dx} = 2x+1$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}t^{-4/3} = -\frac{1}{3}t^{-4/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^{4/3}} \cdot (2x+1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^{4/3}} \cdot (2x+1)$$

10.12)

தொகுக்கப்பட்ட இனம் அளவின் வகைகளைக் காண்க

$$f(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

$$g'(t) = 9 \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$\text{Now } \frac{d}{dt} \left(\frac{t-2}{2t+1}\right) = \frac{(2t+1) \cdot 1 - (t-2) \cdot 2}{(2t+1)^2}$$

$$= \frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2} = \frac{5}{(2t+1)^2}$$

$$\therefore g'(t) = 9 \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{5}{(2t+1)^2}$$

10.13)

(2x+1)^5 (x^3-x+1)^4 ன் வகைப்பாடு

$$y = (2x+1)^5 (x^3-x+1)^4$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^5 \cdot 4(x^3-x+1)^3 (3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 \cdot 5(2x+1)^4$$

$$= 2(2x+1)^4 \left[(2x+1)^2 (x^3-x+1)^3 (3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 10(2x+1)^2 \right]$$

$$= 2(2x+1)^4 (x^3-x+1)^3 \left[2(2x+1)(3x^2-1) + (x^3-x+1) 10(2x+1) \right]$$

$$= 2(2x+1)^4 (x^3-x+1)^3 (17x^3+6x^2-9x-3)$$

$$10.14) y = e^{\sin x}$$

$$t = \sin x$$

$$y = e^t$$

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \cos x$$

$$= e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$10.15) y = 2^x$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \log a$$

$$\frac{dy}{dx} = 2^x \log 2$$

$$10.16) y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ find } \frac{dy}{dx}$$

$$u = \frac{1+x}{1-x} \quad \frac{du}{dx} = \frac{(1-x) \cdot 1 - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{1-x^2}$$

$$\therefore y = \tan^{-1}(u)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{10.3} \quad y = (x^2 + 4x + 6)^5$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5(x^2 + 4x + 6)^4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 6) \\ &= 5(x^2 + 4x + 6)^4 (2x + 4) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{10.3} \quad y = \tan 3x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sec^2 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) \\ &= 3 \sec^2 3x \end{aligned}$$

$$\frac{3}{10.3} \quad y = \cos(\tan x)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\sin(\tan x) \cdot \frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\sin(\tan x) \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\frac{4}{10.3} \quad y = \sqrt[3]{1+x^3} = (1+x^3)^{1/3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}(1+x^3)^{1/3-1} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^3) \\ &= \frac{1}{3}(1+x^3)^{-2/3} (3x^2) \\ &= x^2 (1+x^3)^{-2/3} \end{aligned}$$

$$\frac{5}{10.3} \quad y = e^{\sqrt{x}} \quad \frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{6}{10.3} \quad y = \sin(e^x)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(e^x) \cdot \frac{d}{dx}(e^x) \\ &= e^x \cos e^x \end{aligned}$$

$$\frac{7}{10.3} \quad F(x) = y = (x^3 + 4x)^7$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 7(x^3 + 4x)^6 \frac{d}{dx}(x^3 + 4x) \\ &= 7(x^3 + 4x)^6 (3x^2 + 4) \end{aligned}$$

$$\frac{8}{10.3} \quad h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \cdot \frac{d}{dt} \left(t - \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2}{t^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{9}{10.3} \quad f(t) = 3\sqrt{1 + \tan t} = (1 + \tan t)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{3}{2} (1 + \tan t)^{1/2} \frac{d}{dt} (1 + \tan t) \\ &= \frac{3}{2} (1 + \tan t)^{1/2} \sec^2 t \end{aligned}$$

$$\frac{10}{10.3} \quad y = \cos(a^3 + x^3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\sin(a^3 + x^3) \frac{d}{dx}(a^3 + x^3) \\ &= -\sin(a^3 + x^3) \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{11}{10.3} \quad y = e^{-mx}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-mx} \frac{d}{dx}(-mx) \\ &= -m e^{-mx} \end{aligned}$$

$$\frac{12}{10.3} \quad y = 4 \sec 5x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4 \sec 5x \tan 5x \cdot \frac{d}{dx}(5x) \\ &= 20 \sec 5x \tan 5x \end{aligned}$$

$\frac{6}{10.3}$

$$y = \sin(e^x)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos(e^x) \cdot \frac{d}{dx}(e^x) \\ &= e^x \cos e^x\end{aligned}$$

$\frac{7}{10.3}$

$$F(x) = y = (x^3 + 4x)^7$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 7(x^3 + 4x)^6 \frac{d}{dx}(x^3 + 4x) \\ &= 7(x^3 + 4x)^6 (3x^2 + 4)\end{aligned}$$

$\frac{8}{10.3}$

$$h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \cdot \frac{d}{dt} \left(t - \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$\frac{9}{10.3}$

$$f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t} = (1 + \tan t)^{1/3}$$

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{3} (1 + \tan t)^{-2/3} \frac{d}{dt} (1 + \tan t) \\ &= \frac{1}{3} (1 + \tan t)^{-2/3} \sec^2 t\end{aligned}$$

$\frac{10}{10.3}$

$$y = \cos(a^3 + x^3)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\sin(a^3 + x^3) \frac{d}{dx}(a^3 + x^3) \\ &= -\sin(a^3 + x^3) \cdot 3x^2\end{aligned}$$

$\frac{11}{10.3}$

$$y = e^{-mx}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{-mx} \frac{d}{dx}(-mx) \\ &= -m e^{-mx}\end{aligned}$$

$\frac{12}{10.3}$

$$y = 4 \sec 5x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4 \sec 5x \tan 5x \cdot \frac{d}{dx}(5x) \\ &= 20 \sec 5x \tan 5x\end{aligned}$$

Q3

$$(2x-5)^4 (8x^2-5)^{-3} = y$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{(2x-5)^4}{(8x^2-5)^3} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(8x^2-5)^3 \cdot 4(2x-5)^3 \cdot 2 - (2x-5)^4 \cdot 3(8x^2-5)^2 \cdot 16x}{(8x^2-5)^6} \\ &= \frac{(8x^2-5)^2 (2x-5)^3 [8(8x^2-5) - 48x(2x-5)]}{(8x^2-5)^6} \\ &= \frac{(2x-5)^3 [64x^2 - 40 - 96x^2 + 240x]}{(8x^2-5)^4} \\ &= -8(2x-5)^3 \frac{4x^2 - 30x + 5}{(8x^2-5)^4} \end{aligned}$$

14/10.3)

$$y = (x^2+1)^3 x^2+2$$

$$= (x^2+1)(x^2+2)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1) \cdot \frac{1}{3}(x^2+2)^{-2/3} \frac{d}{dx}(x^2+2) + (x^2+2)^{1/3} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)(x^2+2)^{-2/3} \cdot 2x + (x^2+2)^{1/3} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{3} \frac{x^2+1}{(x^2+2)^{2/3}} \cdot 2x + (x^2+2)^{1/3} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x(x^2+1) + 3(x^2+2) \cdot 2x}{3(x^2+2)^{2/3}}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x + 6x^3 + 12x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{8x^3 + 14x}{3(x^2+2)^{2/3}}$$

15/10.3)

$$y = x e^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \frac{d}{dx}(-x^2) + e^{-x^2} \cdot 1$$

$$= x e^{-x^2} (-2x) + e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

16/10.3)

$$s(t) = 4 \sqrt{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = \frac{(t^3+1)^{1/2}}{(t^3-1)^{1/2}}$$

$$s'(t) = \frac{(t^3-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2} \cdot 3t^2 - (t^3+1)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}(t^3-1)^{-1/2} \cdot 3t^2}{(t^3-1)^{3/4}}$$

$$\frac{3t^2}{4(t^3-1)^{1/4}(t^3+1)^{3/4}} - \frac{3t^2}{4(t^3-1)^{3/4}(t^3+1)^{1/4}}$$

$$\frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}}$$

$$= \frac{3t^5 - 3t^2 - 3t^5 - 3t^2}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}} = \frac{-6t^2}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}}$$

$$\frac{17}{10.3) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{7-3x} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{7-3x}}(-3)}{(7-3x)}$$

$$= \frac{2(7-3x) + 3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}} = \frac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$$

$$\frac{18}{10.3) \quad y = \tan(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x) \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -\sin x \cdot \sec^2(\cos x)$$

$$\frac{19}{10.3) \quad y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = \tan x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \cos x + \sin x \sec^2 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + \sin x \cdot \sec^2 x$$

$$= \sin x (1 + \sec^2 x)$$

$$\frac{20}{10.3) \quad y = 5^{-1/x}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{-1/x} \log 5 \frac{d}{dx}(-1/x)$$

$$= \frac{5^{-1/x} \log 5}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Q21

10.3

$$y = \sqrt{1+2\tan x}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{1+2\tan x}} \cdot \frac{d}{dx}(1+2\tan x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+2\tan x}} \cdot 2 \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}\end{aligned}$$

Q22

10.3

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3\sin^2 x \frac{d}{dx}(\sin x) + 3\cos^2 x \left(\frac{d}{dx}(\cos x)\right) \\ &= 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x \\ &= 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

Q23

10.3

$$y = \sin^2(\cos kx)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\sin(\cos kx) \frac{d}{dx}(\sin(\cos kx)) \\ &= 2\sin(\cos kx) \cdot \cos(\cos kx) \frac{d}{dx}(\cos kx) \\ &= 2\sin(\cos kx) \cos(\cos kx) (-\sin kx) \cdot k \\ &= -k \sin(kx) \sin 2(\cos kx)\end{aligned}$$

Q24

10.3

$$y = (1 + \cos^2 x)^6$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 6(1 + \cos^2 x)^5 \frac{d}{dx}(1 + \cos^2 x) \\ &= 6(1 + \cos^2 x)^5 (2\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)) \\ &= 6(1 + \cos^2 x)^5 (-2\sin x \cos x) \\ &= -6(1 + \cos^2 x)^5 \sin 2x\end{aligned}$$

Q25

10.3

$$y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^x)e^{3x} \frac{d}{dx}(3x) - e^{3x}(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^{3x}(1+e^x) - e^x e^{3x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{3x}(3+3e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{3x}(3+2e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$$

27) $y = e^{x \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \cos x} \cdot \frac{d}{dx}(x \cos x)$$

$$= e^{x \cos x} [-x \sin x + \cos x]$$

$$= e^{x \cos x} [\cos x - x \sin x]$$

28) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}(x + \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

29) $y = \sin(\tan(\sqrt{\sin x}))$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \frac{d}{dx}(\tan \sqrt{\sin x})$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2 \sqrt{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{\sin x}$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2 \sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2(\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

30) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2}} \times \frac{(1+x^2)(-2x) - (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{2(-x-x^3-x+x^3)}{(1+x^2)} \\
 &= \frac{1}{2x} \cdot \frac{2 \cdot (-2x)}{1+x^2} = \frac{-2}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

EXERCISE - 10.4

Ex 10.17: Find $\frac{dy}{dx}$ if $x^2 + y^2 = 1$, and $\frac{dy}{dx}$ at $x=1$.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Ex 10.18 Find the slopes of the tangent to the graph $x^2 + y^2 = 4$ at the point corresponding to $x=1$.

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\text{When } x=1, 1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3, y = \pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ The points are $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$.

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \text{Slope at } (1, \sqrt{3}) : \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Slope at } (1, -\sqrt{3}) : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ex 10.19: Find $\frac{dy}{dx}$ if $x^4 + x^2 y^3 - y^5 = 2x + 1$.

$$x^4 + x^2 y^3 - y^5 = 2x + 1$$

$$4x^3 + 2 \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \cdot 2x - 5y^4 \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} (3x^2 y^2 - 5y^4) = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2 y^2 - 5y^4}$$

EX 10.20

$$\frac{dy}{dx} : \sin y = y \cos 2x.$$

$$\sin y = y \cos 2x.$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -y 2 \sin 2x + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$$2y \sin 2x = \frac{dy}{dx} (\cos 2x - \cos y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y \sin 2x}{\cos 2x - \cos y}.$$

 ലോഗ് രീതി ഉപയോഗിച്ച്

EX 10.21 $y = \sqrt{x^2+4} \sin^2 x \cdot 2^x$ ന്റെ $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$ ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ ഘട്ടത്തിലും.

$$y = \sqrt{x^2+4} \sin^2 x \cdot 2^x$$

$$\log y = \log(x^2+4)^{1/2} + \log(\sin^2 x) + \log(2^x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+4}) + \frac{1}{\sin^2 x} \frac{d}{dx}(\sin^2 x) + \frac{1}{2^x} \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \frac{d}{dx}(x^2+4) + \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{1}{2^x} 2^x \log 2$$

$$= \frac{1}{x(x^2+4)} 2x + \frac{1}{\sin^2 x} (2 \sin x \cos x) + \log 2.$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \log 2 \right)$$

EX 10.22

യുടെ ഓരോ $y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

$$y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

$$\log y = \log [x^{3/4} \sqrt{x^2+1}] - \log (3x+2)^5$$

$$= \log x^{3/4} + \log \sqrt{x^2+1} - 5 \log (3x+2)$$

$$= \frac{3}{4} \log x + \frac{1}{2} \log (x^2+1) - 5 \log (3x+2)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x^2+1)} \frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{5}{3x+2} \frac{d}{dx}(3x+2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4x} + \frac{1}{x(x^2+1)} \cdot 2x - \frac{5}{3x+2} \cdot 3 \\
 &= \frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \\
 \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right] \\
 &= \frac{3/4 \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right]
 \end{aligned}$$

EX 10.23

$$y = x^{\sqrt{x}} \text{ Find } \frac{dy}{dx}$$

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\log y = \log x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \log x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \right] \\
 &= x^{\sqrt{x}} \left[\frac{2 + \log x}{2\sqrt{x}} \right]
 \end{aligned}$$

EX 10.24 If $y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ find $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} \quad \text{Put } x = \tan \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} x$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \right]$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \theta$$

$$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Ex 10.25

$$f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x) \text{ നോക്കൂ } f'(x) \text{ നോക്കൂ}$$

$$f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x) \quad \text{put } x = \cos \theta.$$

$$4x^3 - 3x = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \quad \theta = \cos^{-1}(x)$$

$$= \cos 3\theta.$$

$$\cos^{-1}(4x^3 - 3x) = \cos^{-1}(\cos(3\theta))$$

$$= 3\theta$$

$$f(x) = 3\cos^{-1}x.$$

$$f'(x) = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ഉത്തരം: $f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

Ex 10.26) Find $\frac{dy}{dx}$ if $x = at^2$ $y = 2at$ $t \neq 0$ നോക്കൂ $\frac{dy}{dx}$ നോക്കൂ

$$x = at^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2at$$

$$y = 2at$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at}$$

$$= \frac{1}{t}.$$

Ex 10.27

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$$

നോക്കൂ $\frac{dy}{dx}$ നോക്കൂ

$$x = a(t - \sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$= a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a(\sin t)$$

$$= a \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$= \cot \frac{t}{2}.$$

10.4) $y = x^{\cos x}$ $\frac{dy}{dx}$ നോക്കൂ

$$y = x^{\cos x}$$

$$\log y = \log x^{\cos x} = \cos x \log x.$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} + \log x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\cos x}{x} - \log x \sin x \right]$$

$$= x^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{x} - \log x \sin x \right]$$

2/10.4) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = x^{\log x} + (\log x)^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^{\log x}) + \frac{d}{dx} (\log x)^x$$

let $u = x^{\log x}$.

$$\log u = \log x^{\log x} = \log x \cdot \log x$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u \cdot \frac{2 \log x}{x} = \frac{2 x^{\log x} \cdot \log x}{x}$$

let $v = (\log x)^x$.

$$\log v = \log [(\log x)^x]$$

$$= x \log (\log x)$$

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log (\log x)$$

$$= \frac{1}{\log x} + \log (\log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right]$$

$$= \log x^x \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{2 x^{\log x} \cdot \log x}{x} + \log x^x \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right]$$

3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടെത്തുക

$\sqrt{xy} = e^{x-y}$

$x^{1/2} y^{1/2} = e^{x-y}$

$x^{1/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} + y^{1/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{x-y} \left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$

$\left[\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + e^{x-y} \right] \frac{dy}{dx} = e^{x-y} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + e^{x-y}}$

(or) $\sqrt{xy} = e^{x-y}$

$\log(xy)^{1/2} = \log e^{x-y}$

$\log x^{1/2} + \log y^{1/2} = \log e^{x-y}$

$\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y = (x-y) \log e$

$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2y} + 1 \right) = 1 - \frac{1}{2x}$

$= \frac{2x-1}{2x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2x-1}{2x}}{1 + \frac{1}{2y}} = \frac{y(2x-1)}{2x(1+2y)}$

4) $x^y = y^x$ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടെത്തുക

$x^y = y^x$

$$\log x^y = \log y^x.$$

$$y \log x \neq x \log y.$$

$$y \cdot \frac{1}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y.$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\log x - \frac{x}{y} \right) = \log y - \frac{y}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x \log y - y}{y \log x - x} \right) \cdot \frac{y}{x}.$$

5) $y = (\cos x)^{\log x}$ or find dy/dx or find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = (\cos x)^{\log x}.$$

$$\log y = \log (\cos x)^{\log x}$$

$$= \log x \cdot \log (\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx} (\log (\cos x)) + \log (\cos x) \frac{d}{dx} (\log x)$$

$$= \log x \cdot \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} (\cos x) + \frac{\log (\cos x)}{x}.$$

$$= \log x \left(-\frac{\sin x}{\cos x} \right) + \frac{\log (\cos x)}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[-\log x \cdot \tan x + \frac{\log (\cos x)}{x} \right]$$

$$= (\cos x)^{\log x} \left[\frac{\log (\cos x)}{x} - \log x \tan x \right].$$

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ or find $\frac{dy}{dx}$ or find $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{1}{a^2} \cdot 2x + \frac{1}{b^2} \cdot 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{b^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x \cdot b^2}{a^2 \cdot 2y}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

$$\frac{7}{10.4) \checkmark} \sqrt{x^2+y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(x^2+y^2)^{1/2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} (2x + 2y \frac{dy}{dx}) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y \frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} \right) = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{x\sqrt{x^2+y^2} + y}{x^2+y^2}}{\frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x}{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + y}{x - y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{8}{10.4) \checkmark} \tan(x+y) + \tan(x-y) = x \text{ find } dy/dx.$$

$$\tan(x+y) + \tan(x-y) = x$$

$$\sec^2(x+y) \frac{d}{dx}(x+y) + \sec^2(x-y) \frac{d}{dx}(x-y) = 1$$

$$\sec^2(x+y) \left[1 + \frac{dy}{dx}\right] + \sec^2(x-y) \left[1 - \frac{dy}{dx}\right] = 1$$

$$\sec^2(x+y) + \sec^2(x+y) \frac{dy}{dx} + \sec^2(x-y) - \sec^2(x-y) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} [\sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)] = 1 - \sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)}$$

9) $\cos(xy) = x$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y \sin(xy))}{x \sin(xy)}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$

$$\cos(xy) = x$$

$$-\sin(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 1$$

$$-\sin(xy) \left[x \frac{dy}{dx} + y \right] = 1$$

$$-\sin(xy) \cdot x \frac{dy}{dx} = 1 + y \sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y \sin(xy))}{x \sin(xy)}$$

10) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan \frac{x}{2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan \frac{x}{2}$$

11) $y = \tan^{-1}\left(\frac{6x}{1-9x^2}\right)$

let $3x = \tan \theta$
 $\tan(3\theta) = \frac{6x}{1-9x^2}$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{2(3x)}{1-(3x)^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$

$$= 2\theta = 2 \tan^{-1}(3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+9x^2} \cdot 3 = \frac{6}{1+9x^2}$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta$$

12) $\cos\left[2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = y$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}$

$$y = \cos\left[2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$$

$$y = \cos\left[2 \tan^{-1}(\tan \theta)\right]$$

$$= \cos(2\theta)$$

$$= \cos(\cos^{-1}(x)) \Rightarrow y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

let $x = \cos \theta$ $\theta = \cos^{-1} x$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

13) 10.4) $x = a \cos^3 t$ $y = a \sin^3 t$. Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of t .

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t & y &= a \sin^3 t \\ \frac{dx}{dt} &= 3a \cos^2 t \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) & \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= -3a \cos^2 t \sin t & \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cdot \cos t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} \\ &= -\tan t. \end{aligned}$$

14) 10.4) $x = a(\cos t + t \sin t)$ $y = a(\sin t - t \cos t)$. Find $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t) & y &= a(\sin t - t \cos t) \\ \frac{dx}{dt} &= a(-\sin t + t \cos t + \sin t) & \frac{dy}{dt} &= a(\cos t - (t \sin t + \cos t)) \\ &= at \cos t & &= -at \sin t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-at \sin t}{at \cos t} = -\tan t. \end{aligned}$$

15) 10.4) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of t .

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & y &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} & \frac{dy}{dt} &= \frac{(1+t^2)2 - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{(-2t - 2t^3) - (2t + 2t^3)}{(1+t^2)^2} & &= \frac{2 + 2t^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-4t}{(1+t^2)^2} & &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}} \\ &= \frac{2(1-t^2)}{-4t} = -\frac{1-t^2}{2t}. \end{aligned}$$

16) $y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ Find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

Put $x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$

$$\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \cos 2\theta$$

17) $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ Find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

$$y = \sin^{-1}(\sin 3\theta)$$

$$= 3\theta$$

$$= 3 \sin^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \sin \theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

$$3x - 4x^3 = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

$$= \sin 3\theta$$

18) $y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$ Find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)$$

$$y = \frac{\pi}{4} + x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$\div$ by $\cos x$ in Nr, Dr

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

2. Find the derivatives of the following

Ex 10.31 Find y', y'', y''' if $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$ Find y', y'', y''' .

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$

$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''' = 6$$

Ex 10.32.

if $y = \frac{1}{x}$ then find y'' and y''' .

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

Ex 10.33. Find $f''(x)$ if $f(x) = x \cos x$ then find $f''(x)$ and $f'''(x)$.

$$f(x) = x \cos x$$

$$f'(x) = -x \sin x + \cos x$$

$$f''(x) = -[x \cos x + \sin x] - \sin x$$

$$= -[x \cos x + 2 \sin x]$$

Ex 10.34)

 $x^4 + y^4 = 16$ then find y'' and y''' .

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$

$$y^3 y' = -x^3$$

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

$$y'' = -\left[\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 y'}{y^6} \right]$$

$$= -\left[\frac{3x^2 y^3 - 3x^3 y^2 \left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6} \right]$$

$$= -\left[\frac{3x^2 y^4 + 3x^6 y^2}{y^6} \right]$$

$$= -3x^2 \left[\frac{y^4 + x^4}{y^4} \right] = -\frac{3x^2(16)}{y^4} = -\frac{48x^2}{y^4}$$

EX 10-35)

$$x = a \cos t \quad y = a \sin t \quad \text{---} \quad \text{എന്നിവ കിട്ടുന്ന L നു ചുറ്റും ചുറ്റിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു}$$

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \cos^2 t \cdot \frac{1}{-a \sin t}$$

$$= -\frac{\cos^3 t}{a}$$

EX 10-35)

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{---} \quad \text{എന്നിവ കിട്ടുന്ന L നു ചുറ്റും ചുറ്റിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$2x \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{y} \right) = - \left[\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{y - x \left(-\frac{x}{y} \right)}{y^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{y^2 + x^2}{y^3} \right] = -\frac{4}{y^3}$$

23
10-4)

$$y = \sin^{-1} x$$

y ന്റെ പരമാവധി

$$y = \sin^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) \\
 &= + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}
 \end{aligned}$$

24) 10.4) If $y = e^{\tan^{-1}x}$ s.t. $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$

$$\begin{aligned}
 y &= e^{\tan^{-1}x} \\
 y' &= e^{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
 (1+x^2)y' &= e^{\tan^{-1}x} = y \\
 (1+x^2)y'' + y' \cdot 2x &= y \\
 (1+x^2)y'' + (2x-1)y' &= 0
 \end{aligned}$$

25) 10.4) $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ s.t. $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}y = \sin^{-1}x \\
 \sqrt{1-x^2}y' + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (1-x^2)y' - xy &= 1 \\
 (1-x^2)y'' + y'(-2x) - (xy' + y) &= 0 \\
 (1-x^2)y'' - 2xy' - xy' - y &= 0 \\
 (1-x^2)y'' - 3xy' - y &= 0
 \end{aligned}$$

26) 10.4) If $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$ P.T. at $\theta = \pi/2$ $y'' = \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned}
 x &= a(\theta + \sin\theta) & y &= a(1 - \cos\theta) \\
 \frac{dx}{d\theta} &= a(1 + \cos\theta) & \frac{dy}{d\theta} &= a\sin\theta
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r \sin \theta}{r(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{r \sin \theta/2 \cos \theta/2}{r \cos^2 \theta/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}(\tan \theta/2) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 \theta/2 \cdot \frac{1}{r \cos^2 \theta/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \theta = \pi/2 = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{r \cos^2 \pi/4} \cdot r$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{2r}$$

27) 10.4) If $\sin y = x \sin(a+y)$... $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

$$\sin y = x \sin(a+y)$$

$$\frac{\sin y}{\sin(a+y)} = x$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y) \cos y - \sin y \cos(a+y)}{(\sin(a+y))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin(a+y))^2}{(\sin(a+y) \cos y - \sin y \cos(a+y))} = \frac{(\sin(a+y))^2}{\sin y}$$

($\because \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A-B)$)

28) 10.4) If $y = (\cos^2 x)^2$ P.T. $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$...

y_2 : $\cos^2 x = 0$ or $\sin y$ or $\cos^2 x = 0$

$$y = (\cos^2 x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = -2 \cos^2 x$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2y}{dx^2} = +2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 2 = 0$$

when $x=0$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

Differentiation of a fn w.r.t. another fn.

~~It~~ Differentiate the fn. f w.r.t. fn. g both are in x .

$$\frac{df}{dg} = \frac{df/dx}{dg/dx}$$

Ex 10-28) Find the derivative of x^x w.r.t. $x \log x$.

Let $u = x^x$ $x \log x$ is derivative of x^x w.r.t. x .
 $\log u = \log x^x = x \log x$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u [1 + \log x] = x^x [1 + \log x]$$

Let $v = x \log x$

$$\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{x^x (1 + \log x)}{1 + \log x} = x^x$$

Ex 10-29) Find the derivative of $\tan^{-1}(1+x^2)$ w.r.t. x^2+x+1 .

Let $u = \tan^{-1}(1+x^2)$ x^2+x+1 is derivative of $\tan^{-1}(1+x^2)$ w.r.t. x .

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(1+x^2)^2} \times 2x = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

Let $v = x^2+x+1$

$$\frac{dv}{dx} = 2x+1$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Ex 10-30) Differentiate $\sin(ax^2+bx+c)$ w.r.t. $\cos(1x^2+mx+n)$

Let $u = \sin(ax^2+bx+c)$ $\cos(1x^2+mx+n)$ is derivative of $\sin(ax^2+bx+c)$ w.r.t. x .

$$\frac{du}{dx} = \cos(ax^2+bx+c) (2ax+b)$$

Let $v = \cos(1x^2+mx+n)$

$$\frac{dv}{dx} = -\sin(1x^2+mx+n) (21x+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{(2ax+b) \cos(ax^2+bx+c)}{-(2x+m) \sin(ax^2+bx+c)}$$

19) Find the derivative of $\sin x^2$ w.r.t. x^2 .

10.4) Let $u = \sin x^2$ x^2 is the function of $\sin x^2$ is the variable known,

$$\frac{du}{dx} = \cos x^2 \times 2x = 2x \cos x^2$$

$$\text{Let } v = x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{2x \cos x^2}{2x} = \cos x^2$$

20) Find the derivative of $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ w.r.t. $\tan^{-1} x$.

$$\text{10.4) Let } u = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$\text{put } x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\text{let } v = \tan^{-1} x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{1}$$

$$= 2$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$$

21) If $u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ and $v = \tan^{-1} x$ find $\frac{du}{dv}$.

$$\text{let } u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$u = \tan^{-1}(\tan \phi_2)$$

$$= \phi_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$$

$$x = \tan \theta$$

$$1+x^2 = 1+\tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sec^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \tan \theta$$

$$v = \tan^{-1} x \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{du/du}{dv/du} = \frac{1}{2(1+x^2)} \times \frac{1+x^2}{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

22) Find derivative $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ w.r.t $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$\text{Let } u = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan x_2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Let } v = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - x_2$$

$$\frac{dv}{dx} = -x_2$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{x_2}{-x_2}$$

$$= -1$$

$$\frac{x \sin x_2 \cos x_2}{x \cos^2 x_2}$$

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos^2 x_2 - \sin^2 x_2}{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2 + 2\sin x_2 \cos x_2}$$

$$= \frac{(\cos x_2 + \sin x_2)(\cos x_2 - \sin x_2)}{(\sin x_2 + \cos x_2)^2}$$

$$= \frac{\cos x_2 - \sin x_2}{\sin x_2 + \cos x_2}$$

$$\therefore \text{Both Nr and Dr by } \cos x_2$$

$$= \frac{1 - \tan x_2}{1 + \tan x_2} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right)$$

T. G. Venkatesan
9444209677

அதிர்வுகளுக்கான 10.5 (குத்தகை/பொது)

1) $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{180} x \right)$

1) $\frac{\pi}{180} \cos x$ 2) $\frac{1}{90} \cos x$ 3) $\frac{\pi}{90} \cos x$ 4) $\frac{2}{\pi} \cos x$

Hint: $1 = \frac{\pi}{180} \therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{180} x \right) = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{180} x \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{90} \cos x$
 $\therefore 2 = \frac{\pi}{180} x$

2) $y = f(x^2 + 2)$ மற்றும் $f'(3) = 5$ எனில் $x = 1$ ன் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?
 1) 5 2) 25 3) 15 4) 10

$y = f(x^2 + 2) \Rightarrow y' = f'(x^2 + 2) \cdot 2x$

Hint: Put $x = 1$ $f'(3) = 5 \therefore y' = 5 \cdot 2 = 10$

3) $y = \frac{1}{4} u^4$, $u = \frac{2}{3} x^3 + 5$ எனில் dy/dx என்ன?

1) $\frac{1}{27} (2x^3 + 15)^3$ 2) $\frac{2}{27} x (2x^3 + 5)^3$ 3) $\frac{2}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$ 4) $-\frac{2}{27} x (2x^3 + 5)^3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} u^3 \cdot \frac{du}{dx}$
 $\frac{du}{dx} = 2x^2$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} u^3 \cdot 2x^2 = \frac{1}{2} u^3 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3 + 15}{3} \right)^3 \cdot x^2$
 $= \frac{1}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$

4) $f(x) = x^2 - 3x$ எனில் $f(x) = f'(x)$ என அமைக்கும் x களின் மூலம்

1) கிடைக்கும் மூலம் மட்டும் இருக்காது

2) கிடைக்கும் இரண்டு மூலம் இருக்காது

3) கிடைக்கும் மூன்று மூலம் இருக்காது

4) கிடைக்கும் மூன்று மூலம் இருக்காது

$f(x) = f'(x) \Rightarrow x^2 - 3x = 2x - 3$
 $x^2 - 5x + 3 = 0$
 $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

5) $y = \frac{1}{a-x}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

1) $(a-x)^2$ 2) $-(x-a)^2$ 3) $(x+a)^2$ 4) $-(x+a)^2$

$a-x = \frac{1}{y} \Rightarrow a - \frac{1}{y} = x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(a-x)} = -\frac{1}{(a-x)^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = -y^2$

6) $y = \cos(\sin x^2)$ നൽകി $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ൽ $\frac{dy}{dx}$ ന്റെ മൂല്യം.

- 1) -2 2) 2 3) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 4) 0.

7) $y = mx + c$ രേഖാമൂലം $f(0) = f'(0) = 1$ ആണെന്ന് $f(2)$ കണ്ടെത്തുക.

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) -3

$$\frac{dy}{dx} = m \quad f(0) = c \quad \therefore m = c = 1$$

$$f'(0) = m$$

അതുകൊണ്ട് $y = x + 1$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

8) $f(x) = x \tan^{-1} x$ നൽകി $f'(1)$ കണ്ടെത്തുക.

- 1) $1 + \frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ 4) 2

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x.$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \tan^{-1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$ കണ്ടെത്തുക.

- 1) $e^x x^4 (x+5)$ 2) $e^x x (x+5)$ 3) $e^x + \frac{5}{x}$ 4) $e^x - \frac{5}{x}$.

$$= e^{(x+5\log x)} \cdot \left(1 + \frac{5}{x}\right) = e^x \cdot e^{5\log x} \cdot \frac{1}{x} (x+5)$$

$$= e^x e^{\log x^5} \cdot \frac{1}{x} (x+5) = e^x \frac{x^5}{x} (x+5)$$

10) $x=0$ ന് $(ax-5)e^{3x}$ ന്റെ മൂല്യം -13 ആണെന്ന് a കണ്ടെത്തുക.

- 1) 8 2) -2 3) 5 4) 2

$$f(x) = (ax-5)e^{3x} + e^{3x} \cdot a \Rightarrow f'(0) = -15 + a = -13$$

$$a = -13 + 15 = 2$$

11) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{2t}{1+t^2}$ നൽകി $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടെത്തുക.

- 1) $-\frac{y}{x}$ 2) $\frac{y}{x}$ 3) $-\frac{x}{y}$ 4) $\frac{x}{y}$

$$x^2 + y^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{b}{a} \sec^2 \theta \cdot \frac{1}{a \cos \theta} \\ &= -\frac{b}{a^2} \sec^3 \theta.\end{aligned}$$

13) $\log_x 10$ ന്റെ മൂല്യം $\log_{10} x$ ന്റെ മൂല്യത്തിന് തുല്യമാകുക.

1) 1 2) $-(\log_{10} x)^2$ 3) $(\log_x 10)^2$ 4) $\frac{x^2}{100}$

$$\begin{aligned} u &= \log_{10} x & v &= \frac{1}{\log_{10} x} = (\log_{10} x)^{-1} \\ \text{Hmit.} & & & \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{(\log_{10} x)} & \frac{dv}{dx} &= -1 (\log_{10} x)^{-2} \cdot \frac{1}{(\log_{10} x)} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{1}{(\log_{10})x} \times -1 (\log_{10})^2 x = -(\log_{10})^2$$

14) $f(x) = x+2$ στο $x=4$ η $f'(f(x))$ είναι 1

1) 8 2) 1 3) 4 4) 5

Hint $f'(x+2) \approx 1$

15) $y = \frac{(1-x)^2}{x^2}$ $\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx} \left(\frac{(1-x)^2}{x^2} \right)$

1) $\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ 2) $-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ 3) $-\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ 4) $-\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

$$y = \frac{1+x^2-2x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$$

1b) $P_v = 81 \text{ atm}$ $v = 9 \text{ m}^3$ $\frac{dp}{dv}$ at 10 km

1) 1 2) $\checkmark$ -1 3) 2 4) $\overset{av}{-2}$

$$P = \frac{81}{V} \quad \frac{dP}{dV} = -\frac{81}{V^2} \quad \text{at } V = 9 \text{ m}^3 \quad \frac{dP}{dV} = -\frac{81}{81} = -1$$

$$17) f(x) = \frac{x^2 - 5}{4x - 9} \quad x \leq 1$$

$1 < x < 2$ සඳහා $x=2$ හි $f(x)$ අවම වශයෙන්

සමීපව පරීක්ෂා කරන්න.

$$1) 0 \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+4}{4} = \frac{6+4}{4} = 2.5$$

$$\text{Hence } f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+4-10}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)}{(x-2)} = 3.$$

$$18) f'(a) \text{ නිර්ණය කරමින් } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a} \text{ සොයන්න}$$

$$1) f(a) - a f'(a) \quad 2) f'(a) \quad 3) -f'(a) \quad 4) f(a) + a f'(a)$$

$$19) f(x) = \frac{x+1}{2x-1} \quad x < 2 \quad \text{සඳහා } f'(2) \text{ අගයය,}$$

$$1) 0 \quad 2) 1 \quad 3) 2 \quad 4) \text{ නිශ්චය කළ නොහැකි}$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1-3}{2x-1-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{2x-3} = 1$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1+3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$\therefore f'(2^-) \neq f'(2^+)$. $\therefore f'(x)$ නිශ්චය කළ නොහැකි.

$$20) g(x) = (x^2 + 2x + 3)f(x), f(0) = 5 \text{ ලෙසින් } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4 \text{ සඳහා}$$

$$g'(0) \text{ සොයන්න} \quad 1) 20 \quad 2) 14 \quad 3) 18 \quad 4) 12$$

$$f(0) = 5 \quad f'(0) = 4, \quad g(0) = 2.$$

$$g'(x) = (x^2 + 2x + 3)f'(x) + f(x)(2x + 2)$$

$$= 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ = 12 + 10 = 22.$$

$$21) f(x) = \frac{x+2}{5} \quad -1 < x < 3$$

$$\frac{5}{8-2} \quad x=3 \quad x=3 \text{ හි } f'(x) \text{ සොයන්න.}$$

$$\frac{5}{8-2} \quad x > 3$$

$$1) 1 \quad 2) -1 \quad 3) 0 \quad 4) \text{ නිශ්චය කළ නොහැකි.}$$

22) $x = -3$ ൽ $f(x) = x|x|$ ൽ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക. 4) 0
 1) 6 2) -6 3) $f'(-3) = 6$ 4) 0

$f(x) = -x^2 \quad x < 0$
 $x^2 \quad x \geq 0$
 $f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 + 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 6$
 $\therefore f'(-3) = 6$

23) $f(x) = \begin{cases} 2a - x & -a < x < a \\ 3x - 2a & x \geq a \end{cases}$ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം $x = a$ ൽ കണ്ടെത്തുക.

- 1) $x = a$ ൽ $f(x)$ x ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.
- 2) $x = a$ ൽ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.
- 3) R ൽ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.
- 4) $f'(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.

24) $f(x) = ax^2 - b \quad -1 < x < 1$
 $\frac{1}{|x|}$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം $x = 1$ ൽ കണ്ടെത്തുക.
 1) $a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{3}{2}$ 2) $a = -\frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}$ 3) $a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{3}{2}$
 4) $a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}$

$f'(x) = 2ax$
 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - b - (a - b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1} = a(1+1) = 2a$
 $\therefore a = \frac{1}{2}$

25) $f(x) = |x-1| + |x-3| + \sin x$ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം $x = 2$ ൽ കണ്ടെത്തുക.
 1) 3 2) 2 3) 1 4) 4.

$f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ മൂല്യം $x = 2$ ൽ കണ്ടെത്തുക.
 $f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 1 & 1 < x < 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$
 $\therefore f'(2) = 1$

65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100

தமிழக அரசு தயார் செய்தது 2018-19

அத்தியாயம் - 11

தொடக்க விடல் உதவிகள்:

T. G. Venkatesan

9444209677

1) நேரடியாக சூத்திரத்தை பயன்படுத்துதல்

2) $\int f(ax+b) dx$ உதவம்

3) கூட்டல் (அ) கழித்தல் உதவியளித்தல்: தொடக்க விடல்

4) பகுதி கிடைக்காமல் பிடித்துக் கொள்ளுதல்

5) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ உதவம்6) $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ உதவம்பிரதியிடல் மூலம்
தொடக்க எண்ணுதல்.

7) பகுதி தொடக்க விடல் (Integration by parts)

உதவியளிப்பதில் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துதல்.

8) $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$ உதவம்.9) $\int e^x (f(x) + f'(x)) dx$ உதவம்10) $\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ உதவம்11) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ உதவம்12) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ உதவம்13) $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$.14) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+a}$ உதவம்.1) நேரடியாக சூத்திரத்தை பயன்படுத்துதல்

மேல்க்கண்ட நேரடியாக சூத்திரங்களை பயன்படுத்தி மிகவும் எளிதானதாகக் கணக்கிடுதல்.

(அ) இவ்வுதவிகளைத் திட்டி கொண்டு சூத்திரங்களைப் (ஆ) அங்கீகரிக்கப்பட்ட பதவிகளைத் தொடக்க விடல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி மிகவும் எளிதானதாகத் தொடக்க விடல் செய்ய வேண்டும்.

2) $\int f(ax+b) dx$ உதவம்: $\int f(x) dx$ உதவம் தொடக்க விடல் மூலம்அதேபோலவே வேண்டும் ஆனால் x க்கு $ax+b$ என மாற்ற வேண்டும்

வேண்டும் அதன் காரணம் மாற்றியமைக்காதேயெனவேண்டும்

or, $\int (ax+b)^3 dx = \frac{(ax+b)^4}{4} + c$

1) കൂട്ടായ്മ (Cooperation) കഴിഞ്ഞാൽ, നാട്ടിൽ നിന്നും നീക്കം ചെയ്യും (Removal from the country)

১৯৬৩ সাল ১১ মার্চ তারিখের মধ্যে
 অর্থিক পরিসংখ্যান

கோவாரி தொழில் இயக்குகின்றவர்களுக்கு பரிசீலனை செய்து கொடுக்கப்படுகின்றது.
பரிசீலனை செய்யும் பற்றி தகுந்தவர்களுக்கு உத்தரவுகளை அனுப்புகிறேன்.

[illegible]

5) ഗുണമേന്മ കൂടിയ വസ്തുക്കൾ ഉപയോഗിക്കുക.

[illegible]

b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, ആദ്യം ഭേദന-ഘാത-നേരം ചേർക്കുക.

8) $\int \sin x \cos x dx$ I-LATE

PLATE உதவியைக் கொடுக்கப்பட்டு
கொடுக்கப்பட்டுள்ளதில், பின்வரும்
கொடுக்கப்பட்டுள்ளதில், பின்வரும்

I - Inverse fr.

$t = \log 1.77$

A: Algebraic Int.

T : Trigonometrie &

E: exponential f.o

താഴെ പറയുന്നവയെക്കുറിച്ച് ചുരുക്കത്തിൽ എഴുതുക.
വേദത്തിന്റെ പ്രധാന വിഭാഗങ്ങൾ.

എന്റെ പ്രധാന ശ്വസ്തകമായി കണക്കാക്കേണ്ടതാണ്.

மயற்காசநிலைத் தீவிரத்தினை உயர்த்துவதற்கு

மேற்கூறியவை போலவே பதவியும் திருமதியும் தேர்ந்தெடுத்து
பதவியுடையவர்களுக்கு $u^1, u^2, u^3, \dots$ என்றவாறாகும்.

drönspråk $v_1, v_2, \dots$ som bäst

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \dots$$

ഗവർണ്മനയുടെ u എന്നിവ Algebraic form $(a, x^2, \dots)$ കിട്ടിയിട്ടുള്ള
 ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് ആദ്യത്തെ പാർട്ടിയിൽ പഠിച്ച ചട്ടങ്ങൾ. $\int \log x dx$
 $\int x \log x dx$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് $\int u dv = uv - \int v du$ എന്ന
 - ഭാഗം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

8) $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.

ഇവിടെ a എന്ന സംഖ്യയുടെ a, b എന്നിവയെക്കുറിച്ച് a, b എന്നിവയെക്കുറിച്ച്
 e^{ax} ന്റെ x ന്റെ $\sin bx$ ന്റെ x ന്റെ b .

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C$$

9) $\int e^x (f(x) + f'(x)) dx$ എന്ന ചട്ടം e^x ന്റെ $f(x)$ ന്റെ
 ഭാഗം $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ
 ഭാഗം $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ
 ഭാഗം $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ $f'(x)$ ന്റെ $f(x)$ ന്റെ

10) ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന)

1) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

3) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന)

ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്
 ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്
 ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്
 ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്
 ഗവർണ്മനയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്

$x^2 + bx + c$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്

$x^2 + bx + c$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് b (ഗവർണ്മന) $\sqrt{x^2 + a^2}$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച്

பிறகு இது நமக்கு 2-வது எந்த சந்தர்ப்பத்திற்கும் உதவும். 2-வது சந்தர்ப்பம் பற்றித் தரவில்லை. அதில் ax^2+bx+c எனக் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் ax^2+bx+c எனக் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் ax^2+bx+c எனக் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$\text{Eg: } ax^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2$$

12) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ வடிவம்

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = A \frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + B \text{ என எழுதிக்கொள்ளும்}$$

இதில் A, B களைத் தீர்மானிப்போம்.

$$\text{பிறகு } \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + \int \frac{Bdx}{ax^2+bx+c}$$

இதில் I_1 மற்றும் I_2 எனக் கொண்டு $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ வடிவம் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$\text{இதில் } \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \text{ என எழுதிக்கொண்டு } \int \frac{A(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \int \frac{Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

இதில் I_1 மற்றும் I_2 எனக் கொண்டு $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ வடிவம் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

13) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ வடிவம் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$1) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$2) \int \sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \log(x + \sqrt{a^2+x^2})$$

$$3) \int \sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \log(x - \sqrt{x^2-a^2})$$

14) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+a}$ வடிவம் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் x^2+a எனக் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் x^2+a எனக் கொண்டு அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

Integration Formula

$$1) \int 0 dx = c \text{ where } c \text{ is const.}$$

$$2) \int dx = x + c$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \log x + c$$

$$5) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c.$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$8) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$9) \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

$$10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$11) \int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\cot x + c$$

$$12) \int e^x dx = e^x + c$$

$$13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c.$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$15) \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c.$$

$$16) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx + c$$

$$17) \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) \pm \int f_2(x)$$

$$18) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du + c$$

$$19) \int \tan x dx = \log |\sec x| + c$$

$$20) \int \cot x dx = \log |\sin x| + c$$

$$21) \int \operatorname{cosec} x dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$22) \int \sec x dx = \log |\sec x + \tan x| + c$$

$$23) \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + c$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$$

$$24) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$25) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$26) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$$

$$27) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2+a^2}| + c.$$

$$28) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + c$$

$$29) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + c.$$

$$30) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$31) \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \log (x + \sqrt{x^2-a^2}) + c$$

$$32) \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \log (x + \sqrt{x^2+a^2}) + c.$$

$$33) \int u dv = uv - \int v du.$$

$$34) \text{ Bernoulli's Formula.}$$

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

എറണാകുളം ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് -

$$1) \int 0 dx = c$$

$$2) \int k dx = kx + c$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad n \neq -1$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$8) \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x$$

$$9) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$10) \int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

$$11) \int e^x dx = e^x$$

$$12) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$13) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$14) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$15) \int \tan x dx = \log |\sec x| + c$$

$$16) \int \cot x dx = \log |\sin x| + c$$

$$17) \int \operatorname{cosec} x dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$18) \int \sec x dx = \log |\sec x + \tan x| + c$$

11.1) i) x^{10} 2) $\frac{1}{x^{10}}$ 3) $\sqrt{x}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$1) \int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + c$$

$$2) \int \frac{1}{x^{10}} dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-9}}{-9} + c$$

$$3) \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$4) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

11.2) :

$$1) \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2) \frac{\cot x}{\sin x}$$

$$3) \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$2) \int \frac{\cot x}{\sin x} dx = \int \cot x \operatorname{cosec} x dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

$$3) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$$

$$4) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C.$$

Ex 11.3 1) $\frac{1}{e^x}$ 2) $\frac{x^2}{x^3}$ 3) $\frac{1}{1+x^2}$ 4) $\frac{1}{x^3}$

$$1) \int \frac{1}{e^x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C.$$

$$2) \int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x.$$

$$3) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x.$$

$$4) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$\frac{1}{11.1}$ I) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ EXERCISE = 11.1.

$$2) \int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-6}}{-6} + C.$$

$$3) \int \sqrt[3]{x^4} dx = \int x^{4/3} dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} = \frac{3}{7} x^{7/3} + C.$$

$$4) \int (x^5)^{1/8} dx = \int x^{5/8} dx = \frac{x^{13/8}}{13/8} = \frac{8}{13} x^{13/8} + C.$$

$$\frac{2}{11.1} 1. \int \frac{1}{\sec^2 x} dx = \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$2. \int \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$$

$$3) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$$

$$4) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

$$\frac{3}{11.1} 1) \int 12^3 dx = 12^3 x + C.$$

$$2) \int \frac{x^{14}}{x^5} dx = \int x^9 dx = \frac{x^{10}}{10} + C.$$

$$3) \int e^x dx = e^x + c$$

$$\frac{4}{11.1) \int (1+x^2)^{-1} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$$

$$2) \int (1-x^2)^{-1/2} dx = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + c.$$

Ex 11.4) $\int f(ax+b) dx$

Integrals of the form $\int f(ax+b) dx$

$$1) \int (4x+5)^6 dx \quad 2) \int \sqrt{15-2x} dx \quad 3) \int \frac{dx}{(3x+7)^4}.$$

$$1) \int (4x+5)^6 dx = \frac{(4x+5)^7}{7 \times 4} = \frac{(4x+5)^7}{28} + c$$

$$2) \int \sqrt{15-2x} dx = \int (15-2x)^{1/2} dx = \frac{(15-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \times (-2)}$$

$$= -\frac{2(15-2x)^{3/2}}{3} + c$$

$$3) \int \frac{dx}{(3x+7)^4} = \int (3x+7)^{-4} dx = \frac{(3x+7)^{-3}}{-3 \times (-3)} = -\frac{1}{9(3x+7)^3} + c$$

Ex 11.5)

Integrals of the form $\int f(ax+b) dx$

$$1) \sin(2x+4) \quad 2) \sec^2(3+4x) \quad 3) \operatorname{cosec}(ax+b) \cot(ax+b)$$

$$1) \int \sin(2x+4) dx = -\frac{\cos(2x+4)}{2} + c.$$

$$2) \int \sec^2(3+4x) dx = \frac{1}{4} \tan(3+4x) + c.$$

$$3) \int \operatorname{cosec}(ax+b) \cot(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec}(ax+b)$$

Ex 11.6

Integrals of the form $\int f(ax+b) dx$

$$1) e^{3x} \quad 2) e^{5-4x} \quad 3) \frac{1}{3x-2} \quad 4) \frac{1}{5-4x}.$$

$$1) \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c.$$

$$2) \int e^{5-4x} dx = e^{5-4x} \times \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} e^{5-4x} + c.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x-2} = \int (3x-2)^{-1} dx = \frac{(3x-2)^{-2}}{-2 \times 3} = -\frac{1}{6} \frac{1}{(3x-2)^2}$$

$$4) \int \frac{dx}{5-4x} = \int (5-4x)^{-1} dx = \frac{(5-4x)^{-2}}{-2 \times 4} = -\frac{1}{8(5-4x)^2} + C$$

Ex 11.7):

x-ko sun jai or sunna wala.

1) $\frac{1}{1+(2x)^2}$

2) $\frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

1) $\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x) + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x)^2}} = \frac{1}{9} \sin^{-1}(9x) + C$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} dx = \frac{1}{5} \sin^{-1}(5x) + C$

x-ko sun jai or sunna wala.

EXERCISE - 11.2.

11.2) 1) $(x+5)^6$ 2) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ 3) $\sqrt{3x+2}$

1) $\int (x+5)^6 dx = \frac{(x+5)^7}{7} + C$

2) $\int \frac{dx}{(2-3x)^4} = \int (2-3x)^{-4} dx = \frac{(2-3x)^{-5}}{-5 \times (-3)} = \frac{1}{15(2-3x)^5} + C$

3) $\int \sqrt{3x+2} dx = \int (3x+2)^{1/2} dx = \frac{(3x+2)^{3/2}}{\frac{3}{2} \times 3} = \frac{2}{9} (3x+2)^{3/2} + C$

11.2) 1) $\sin 3x$ 2) $\cos(5-11x)$ 3) $\sec^2(5x-7)$

1) $\int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$

2) $\int \cos(5-11x) dx = \frac{\sin(5-11x)}{-11} + C$

3) $\int \sec^2(5x-7) dx = \frac{\tan(5x-7)}{5} + C$

3) 1) e^{3x-6} 2) e^{8-7x} 3) $\frac{1}{6-4x}$

1) $\int e^{3x-6} dx = \frac{1}{3} e^{3x-6} + c$

2) $\int e^{8-7x} dx = -\frac{1}{7} e^{8-7x} + c$

3) $\int \frac{dx}{6-4x} = -\frac{1}{4} \log(6-4x) + c$

4) 1) $\sec^2\left(\frac{x}{5}\right)$ 2) $\operatorname{cosec}(5x+3) \cot(5x+3)$
3) $30 \sec(2-15x) \tan(2-15x)$

1) $\int \sec^2\left(\frac{x}{5}\right) dx = \frac{1}{5} \tan\left(\frac{x}{5}\right) + c$

2) $\int \operatorname{cosec}(5x+3) \cot(5x+3) dx$
 $= \frac{1}{5} \log(5x+3) + c$

3) $\int 30 \sec(2-15x) \tan(2-15x) dx$
 $= \frac{2}{15} \sec(2-15x)$
 $= -2 \sec(2-15x) + c$

5) 1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ 3) $\frac{1}{1+36x^2}$

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \frac{1}{4} \sin^{-1}(4x) + c$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(9x)^2}} = \frac{1}{9} \sin^{-1}(9x) + c$

3) $\int \frac{dx}{1+(6x)^2} = \frac{1}{6} \tan^{-1}(6x) + c$

ഉദ്യോഗാർത്ഥികൾക്ക് മാത്രം.

Ex 11.3):

1) $5x^4$ 2) $5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ 3) $2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \csc^2 x$

1) $\int 5x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$

2) $\int (5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 4x + 7 \log|x| + 4\sqrt{x} + C.$

3) $\int (2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \csc^2 x) dx.$
 $= 2\sin x + 4\cos x + 5\tan x - \cot x + C.$

Ex 11.9) ഉദ്യോഗാർത്ഥികൾക്ക് മാത്രം.

1) $\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}$

2) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8 \cot(4x+2) \operatorname{cosec}(4x+2)$

1) $\int (\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}) dx.$

$= \int 12(4x-5)^{-3} dx + \int \frac{6}{3x+2} dx + 16 \int e^{4x+3} dx.$

$= \frac{12(4x-5)^{-2}}{-2 \times 4} + 16 \frac{\log|3x+2|}{3} + \frac{16}{4} e^{4x+3} + C.$

$= -\frac{3}{2(4x-5)^2} + 2 \log|3x+2| + 4e^{4x+3} + C.$

2) $\int (15(5x-4)^{-1/2} - 8 \cot(4x+2) \operatorname{cosec}(4x+2)) dx.$

$= 15 \cdot \frac{(5x-4)^{+1/2}}{1/2 \cdot 5} - \frac{8}{4} (-\operatorname{cosec}(4x+2)) + C.$

$= 6\sqrt{5x-4} + 2 \operatorname{cosec}(4x+2) + C.$

EXERCISE - 11.3

$$\frac{1}{11.3} \quad (x+4)^5 + \frac{2}{(2-5x)^4} - \operatorname{cosec}^2(3x-1)$$

$$\begin{aligned} & \int (x+4)^5 dx + \int \frac{2}{(2-5x)^4} dx - \int \operatorname{cosec}^2(3x-1) dx \\ &= \frac{(x+4)^6}{6} + \frac{2(2-5x)^{-3}}{-3(-5)} + \frac{\cot(3x-1)}{3} + C \\ &= \frac{(x+4)^6}{6} + \frac{2}{3 \cdot 5(2-5x)^3} + \frac{1}{3} \cot(3x-1) + C \end{aligned}$$

$$\frac{2}{11.3} \quad 4 \cos(5-2x) + 9e^{3x-6} + \frac{24}{6-4x}$$

$$\begin{aligned} & \int 4 \cos(5-2x) dx + 9 \int e^{3x-6} dx + 24 \int \frac{dx}{6-4x} \\ &= \frac{4 \sin(5-2x)}{-2} + 9 \cdot \frac{e^{3x-6}}{3} + 24 \cdot \frac{\log|6-4x|}{-4} + C \\ &= -2 \sin(5-2x) + 3e^{3x-6} + 6 \log|6-4x| + C \end{aligned}$$

$$\frac{3}{11.3} \quad \sec^2 \frac{x}{5} + 18 \cos 2x + 10 \sec(5x+3) \tan(5x+3)$$

$$\begin{aligned} & \int \sec^2 \frac{x}{5} dx + 18 \int \cos 2x dx + 10 \int \sec(5x+3) \tan(5x+3) dx \\ &= \frac{\tan(\frac{x}{5})}{\frac{1}{5}} + 18 \frac{\sin 2x}{2} + 10 \frac{\sec(5x+3)}{5} + C \\ &= 5 \tan \frac{x}{5} + 9 \sin 2x + 2 \sec(5x+3) + C \end{aligned}$$

$$\frac{4}{11.3} \quad \frac{8}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{27}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{15}{1+25x^2}$$

$$\begin{aligned} & 8 \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} + 27 \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} + 15 \int \frac{dx}{1+(5x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sin^{-1}(4x) + \frac{27}{3} \sin^{-1}(3x) + \frac{15}{5} \tan^{-1}(5x) + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^{-1}(4x) + 9 \sin^{-1}(3x) + 3 \tan^{-1}(5x) + C \end{aligned}$$

$$\frac{5}{11.3) \quad \frac{6}{1+(3x+2)^2} - \frac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$$

$$= 6 \int \frac{dx}{1+(3x+2)^2} - 12 \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$$

$$= \frac{6}{3} \tan^{-1}(3x+2) - \frac{12}{-4} \sin^{-1}(3-4x) + C.$$

$$= 2 \tan^{-1}(3x+2) + 3 \sin^{-1}(3-4x) + C.$$

$$\frac{b}{11.9) \quad \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}-4\right) + \frac{7}{7x+9} + e^{\frac{x}{5}+3}.$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos\left(\frac{x}{3}-4\right) dx + 7 \int \frac{dx}{7x+9} + \int e^{\frac{x}{5}+3} dx.$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)}{\frac{1}{3}} + 7 \cdot \frac{\log|7x+9|}{7} + \frac{e^{\frac{x}{5}+3}}{\frac{1}{5}} + C$$

$$= \sin\left(\frac{x}{3}-4\right) + \log|7x+9| + 5e^{\frac{x}{5}+3} + C.$$

Ex 11.10) Qf $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ Linear form

$f(1) = 3$ Then find $f(x)$.

$$\int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 5) dx.$$

$$f(x) = 3 \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x + C.$$

$$= x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

Given

$$f(1) = 1 - 2 + 5 + C = 3.$$

$$C = 3 - 4 = -1.$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1.$$

தொலைதூரத்தை கணிதம் பயன்படுத்துதல்.

த.கா: 11.10: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ மற்றும் $f(1) = 3$ எனில் $f(x)$ ன்வு காண்க.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$\int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 5) dx$$

$$= 3 \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$

$$f(1) = 1 - 2 + 5 + C = 3$$

$$C = -1$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1.$$

த.கா: 11.11) ஒரு தொடர்வற்றடி மகனா சந்திப்பிவிடுங்க கோயம்புத்தூர் நோக்கி பிழ்மகம் 3 மணிக்கு $V(t) = 20t + 50$ கி.மீ/மணி என்ற திசை வேகத்தில் 4 மூல்கொடுகிறது. இங்கு t ஆனது மணிதளில் காண்க. - மடுகிறது எனில் மானை 5 மணிக்கு அதிதொடர்வற்றடி எவ்வளவு தூரம் பயணத்திடுகிறது.

$$V = \frac{ds}{dt} \therefore V(t) = 20t + 50$$

$$\int ds = \int (20t + 50) dt$$

$$s = \frac{20t^2}{2} + 50t + C$$

$$s = 10t^2 + 50t + C$$

$$t = 0 \text{ எனில் } s = 0 \quad 0 = C$$

$$\therefore s = 10t^2 + 50t$$

$$t = 2 \text{ எனில்}$$

$$s = 10 \times 4 + 50 \times 2$$

$$= 40 + 100 = 140 \text{ km.}$$

த.கா: 11.12) ஒருநபரின் உயரம் h கெ.மீ மற்றும் அதை w கி.கி.

அவரின் அதையின் மானும்தம் உயரத்தை எவ்வளவு தூரம்

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} \text{ கி.கி.} \text{ மானும்தம் உயரம்}$$

அதைய உயரத்தின் காரணம் காண்க. மேலும் ஒருநபரின் உயரம் 150 கெ.மீ ஆக இருக்கும் போது அதைய காண்க.

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} \text{ கி.கி.}$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \cdot \frac{h^2}{2} + C$$

$$w = 0 \text{ ஸென்டி } t = 0$$

$$\therefore w = 4.364 \times 10^{-5} \frac{h}{s} \quad (\text{அரை, அரை நிமிஷம்})$$

2436 ஹி 150 ஹி 10 ஹி 10

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150}{s} \right)$$

$$w = 49 \text{ நிமிஷம்}$$

எ.கா: 11.13) ஒரு லாட்ஜ் வீட்டின் மூலக்கூறு $\frac{1}{4}$ அடி / நிமிஷம்
மேல் உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது. $t = 0$ ஆல் வீட்டின் மூலக்கூறு 5 அடி 10
இருக்கிறது என எதிர்த்துக் கொள்ளுங்கள்

1) மூலக்கூறு உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது

2) எதிர்த்துக் கொண்டு உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது

$$\frac{dh}{dt} = \frac{18}{s} = 18 \frac{ft}{s}$$

$$h = \int 18 \frac{ft}{s} dt$$

$$= \frac{18 \frac{ft}{s}}{1} + c = 36 \frac{ft}{s} + c$$

$$t = 0 \text{ ஸென்டி } h = 5$$

$$h = 0 + c \therefore c = 5$$

$$\therefore h = 36 \frac{ft}{s} + 5$$

$$1) t = 4 \text{ ஸென்டி } h = 36 \frac{ft}{s} + 5$$

$$= 72 + 5 = 77 \text{ அடி}$$

$$2) h = 149 \text{ ஸென்டி } 149 = 36 \frac{ft}{s} + 5$$

$$\frac{144}{36} = \frac{ft}{s} \Rightarrow \frac{ft}{s} = 4$$

$$t = 16 \text{ நிமிஷம்}$$

எ.கா: 11.14) லாண்ட்ஸ் டிரைவர் தன் வேண்டிய வாகனத்தைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு
வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் போது வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும்
வேண்டிய 40 கி மீட்டர்கள் உயர்ந்து கொண்டிருக்கிறது வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும்
வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும்
வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும்
வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் வேண்டிய வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும்

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} \text{ ஸ்காலர் அல்லது வெக்டர்}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -8 \text{ m/s}^2$$

$$v = \int a dt = \int -8 dt = -8t + c_1$$

மீதேதாவது பதவியுடைய வேகம் $t=0$ $v=24 \text{ m/s}$.

$$24 = c_1$$

$$\therefore v = -8t + 24$$

$$\frac{ds}{dt} = -8t + 24$$

$$s = \int (-8t + 24) dt$$

$$= -\frac{8t^2}{2} + 24t + c_2$$

$$t=0 \text{ எனில் } s=0$$

$$\therefore c_2 = 0$$

$$\therefore s = -4t^2 + 24t$$

பாகவரத்திற்கு நிறுத்தம் வேகம் $v=0$

$$0 = -8t + 24 \Rightarrow 8t = 24$$

$$t = 3$$

$$t = 3 \text{ எனில்}$$

$$s = -4 \times 9 + 72$$

$$= -36 + 72$$

$$= 36$$

$36 < 40$ எனவே தரப்பட்ட அளவுக்கு மேல் இடம் கிடைக்காது.

Step 1: $a = \frac{dv}{dt}$, v காண்க.

மீதேதாவது பதவியுடைய வேகம்
 $t=0$, $v=24 \text{ m/s}$

Step 2: $v = \frac{ds}{dt}$, s காண்க.

மீதேதாவது பதவியுடைய இடம்
 $t=0$, $s=0$ எனில்.

Step 3: v காண்க. $v=0$ எனில் t காண்க.

மீதேதாவது பதவியுடைய இடம்
 $v=0$ எனில் t காண்க.

Step 4: s காண்க. s காண்க.

4) ஒரு பந்தை 39.2 m/s வேகத்தில் கீழே விட்டு விடுகிறார்கள். மேல் நோக்கி எழும்பும் வேகம். கீழே விழும் வேகம். $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ எனில் பந்தின் மீதான செயல்பாடுகளைக் கண்டறியவும்.

1) எவ்வளவு வேகத்தில் கீழே விழும் பந்தின் வேகம் கண்டறியவும்.

2) எவ்வளவு வேகத்தில் பந்தின் வேகம் கண்டறியவும்.

3) பந்தின் எவ்வளவு வேகம் கண்டறியவும்.

$$a = -9.8$$

$$\frac{dv}{dt} = -9.8 \Rightarrow \int dv = \int -9.8 dt$$

$$v = -9.8t + c_1$$

$$t=0 \text{ எனில் } v = 39.2 \therefore 39.2 = c_1$$

$$\therefore v = -9.8t + 39.2 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 39.2$$

$$\int ds = \int (-9.8t + 39.2) dt$$

$$s = -9.8 \frac{t^2}{2} + 39.2t + c_2$$

$$t=0 \text{ எனில் } s=0$$

$$0 = c_2$$

$$\therefore s = -4.9t^2 + 39.2t$$

மேல் நோக்கி எழும்பும் வேகம்

வேகம் $v=0$ எனில்

சமன்பாடு

$$0 = -9.8t + 39.2$$

$$9.8t = 39.2$$

$$t = 4$$

சுரத போஸ் தீர்மானத்தின்படி காலம் $t = 4$

∴ சமரத்தகாலம் $t = 8$.

$$t = 8 \text{ மணி} \quad S = -4.9 \times 16 + 39.2 \times 8$$

பந்த உயரம் $S = 78.4 \text{ m}$

$$u + at = v \quad \text{கிடைசு } u = 0$$

$$0 + 9.8 \times 4 = 39.2 \text{ m/sec.}$$

5) 11.4) ஒரு பொருள் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டை $\frac{3}{(t+2)^2}$ என்ற விகிதத்தில்

சரிவிற்பனையில் திறமையாக இயங்குகிறது. திறமையில் திறமையாக இயங்குகிறது. திறமையில் திறமையாக இயங்குகிறது.

1) சரிவிற்பனையில் திறமையாக இயங்குகிறது. திறமையில் திறமையாக இயங்குகிறது. திறமையில் திறமையாக இயங்குகிறது.

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{3}{(t+2)^2} \Rightarrow \int dA = -3 \int (t+2)^{-2} dt$$

$$A = -3 \frac{(t+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$A = \frac{3}{t+2} + C$$

$$A = \frac{3}{3} + C = 2 \text{ (given)}$$

$$C = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore A = \frac{3}{t+2} + 1$$

$$\text{சரிவிற்பனையில் } t = 0 \quad A = \frac{3}{2} + 1 = 2.5 \text{ sq. cm.}$$

$$\text{அளவற்றதில் } t = 4 \quad A = \frac{3}{4+2} + 1$$

$$= \frac{3}{6} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5 \text{ sq. cm.}$$

1/11.4)

$$f'(x) = 4x - 5$$

$$f(2) = 1 \quad \text{EXERCISE: 11.4:} \quad f(x) \text{ formula}$$

$$f'(x) = 4x - 5$$

$$f(x) = \int (4x - 5) dx = \frac{4}{2} x^2 - 5x + C$$

$$= 2x^2 - 5x + C$$

$$f(2) = 2 \times 4 - 5 \times 2 + C = 1$$

$$C = 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

2/11.4)

$$f'(x) = 9x^2 - 6x \text{ and } f(0) = -3 \quad \text{find } f(x) \text{ formula}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 6x$$

$$f(x) = \int (9x^2 - 6x) dx$$

$$= \frac{9}{3} x^3 - \frac{6}{2} x^2 + C$$

$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 + C$$

$$f(0) = -3$$

$$-3 = C$$

$$\therefore f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3$$

$$= 3(x^3 - x^2 - 1)$$

3/11.4)

$$f''(x) = 12x - 6 \text{ and } f(0) = 5 \quad \text{find } f(x) \text{ formula}$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f'(x) = \int (12x - 6) dx = \frac{12}{2} x^2 - 6x + C$$

$$= 6x^2 - 6x + C$$

$$f'(1) = 5$$

$$6 - 6 + 4 = 5$$

$$C_1 = 5$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$$

$$f(x) = \int (6x^2 - 6x + 5) dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x + C_2$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + 5x + C_2$$

$$f(1) = 2 - 3 + 5 + C_2 = 30$$

$$C_2 = 26$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 26$$

EXERCISE = 11.5

Ex 11.15)

பெறும் பதிலை கண்டுபிடிக்கவும்.

1) $(1-x^3)^2$

2) $\frac{x^3 - x + 1}{x^3}$

$$\begin{aligned} 1) \int (1-x^3)^2 dx &= \int (1 - 2x^3 + x^6) dx \\ &= x - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C \\ &= x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{x^3 - x + 1}{x^3} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - x^{-2} + x^{-3} \right) dx \\ &= \log x - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C \\ &= (\log x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Ex 11.16)

பெறும் பதிலை கண்டுபிடிக்கவும்.

1) $\cos 5x \sin 3x$

2) $\cos^3 x$

$$\begin{aligned} 1) \int \cos 5x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int 2 \cos 5x \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} \right] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \cos^3 x dx &= \frac{1}{4} \int (3 \cos x + \cos 3x) dx \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ &= \frac{1}{4} \left[3 \sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right] + C \quad \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) = \cos^3 x \end{aligned}$$

$$2) e^{3x}(e^{2x}-1)$$

$$2) \int e^{3x} (e^{2x} - 1) dx = \int (e^{5x} - e^{3x}) dx$$

$$= \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sec^2 x + \tan^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx \\&= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\&= \int \frac{\sin x}{\cos x \cos x} dx - \int \tan^2 x dx \\&= \int \sec x \tan x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx \\&= \sec x - \tan x + x + C\end{aligned}$$

$$c \int \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int \cos x dx = +\sqrt{2} \sin x + c$$

Ex 11.21) $\int \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)} dx =$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)} dx &= \int \frac{x^2-2x+1}{x(x^2+1)} dx \\ &= \int \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} dx - \int \frac{2x}{x(x^2+1)} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \log|x| - 2 \tan^{-1}x + C. \end{aligned}$$

Ex 11.22) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$ log in @s.

$$\begin{aligned} \int (\tan x + \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + x dx \end{aligned}$$

Ex 11.23) $\int \frac{1-\cos x}{1+\sin x} dx$ log in @s.

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\cos x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{2 \sin^2 x/2}{2 \cos^2 x/2} dx = \int \tan^2 x/2 dx \\ &= \int (\sec^2 x/2 - 1) dx \\ &= \frac{\tan x/2}{1/2} - x + C \\ &= 2 \tan x/2 - x + C. \end{aligned}$$

Ex 11.24) $\int \sqrt{1+\sin 2x} dx$ log in @s.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\sin 2x} dx &= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} dx \\ &= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Ex 11.25)

$$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx \quad \text{Logarithmic}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-1} dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx + 3 \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1| + C.$$

Ex 11.26)

$$1) \int a^x e^x dx \quad 2) \int e^{x \log 2} \cdot e^x dx \quad \text{Logarithmic}$$

$$1) \int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + C. \quad \text{change } a^x \text{ to } e^{x \log a}$$

$$2) \int e^{x \log 2} e^x dx = \int e^{\log 2^x} e^x dx \\ = \int 2^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + C.$$

Ex 11.27)

$$\int (x-3)\sqrt{x+2} dx \quad \text{Logarithmic}$$

$$\int (x-3)\sqrt{x+2} dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2} dx$$

$$= \int (x+2)\sqrt{x+2} dx - 5 \int \sqrt{x+2} dx.$$

$$= \int (x+2)^{3/2} dx - 5 \int (x+2)^{1/2} dx.$$

$$= \frac{(x+2)^{5/2}}{5/2} - 5 \frac{(x+2)^{3/2}}{3/2} + C.$$

$$= \frac{2}{5} (x+2)^{5/2} - \frac{10}{3} (x+2)^{3/2} + C.$$

Ex 11.28)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad \text{Logarithmic}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} dx = \int \frac{\sqrt{x+1}}{2} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{2} dx \\ = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + C$$

Ex 11.29)

$$1) \int \frac{3x+7}{x^2-3x+2} dx \quad 2) \int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)} dx$$

$$1) \int \frac{3x+7}{x^2-3x+2} dx$$

$$\frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

$$(3x+7)/(x-1)$$

$$3x+7 = A(x-1) + B(x-2)$$

$$\text{Put } x=1$$

$$10 = B(-1) \Rightarrow B = -10$$

$$\text{Put } x=2$$

$$13 = A \cdot 1 \Rightarrow A = 13$$

$$\therefore \int \frac{3x+7}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1} \right) dx$$

$$= 13 \log |x-2| - 10 \log |x-1| + C$$

$$2) \int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)} dx$$

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \int \frac{-2}{x+2} dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} dx + 2 \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -2 \log |x+2| + \frac{1}{x+2} + 2 \log |x+1| + C$$

$$x+3 = A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2$$

$$\text{Put } x=-1$$

$$2 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Put } x=-2$$

$$1 = B(-1) \therefore B = -1$$

$$\text{Equating } x^2 \text{ term}$$

$$0 = A + C \Rightarrow A = -C = -2$$

11.5)

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

"20 முக்கிய கருவிகள்
கொடுக்க."

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^2} dx = \int \left(x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x - 3 \log |x| + 2 \cdot \frac{1}{x} + C$$

$$\frac{2}{11.5) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \log |x| + 2x + C$$

$$\frac{3}{11.5) \int (2x-5)(36+4x) dx = \int (72x + 8x^2 - 180 - 20x) dx$$

$$= \int 8x^2 dx + 50 \int x dx - 180 \int dx$$

$$= 8 \frac{x^3}{3} + 50 \frac{x^2}{2} - 180x + C$$

$$\frac{4}{11.5) \int (\cot^2 x + \tan^2 x) dx$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

$$= \int ((\sec^2 x - 1) + (\csc^2 x - 1)) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x - 2) dx$$

$$= -\cot x + \tan x - 2x + C$$

$$\frac{5}{11.5) \int \frac{\cos 2x - \cos 2x}{\cos x - \cos x} dx$$

$$= \int \frac{(2 \cos^2 x - 1) - (2 \cos^2 x - 1)}{\cos x + \cos x} dx$$

$$= \int \frac{2(\cos^2 x - \cos^2 x)}{\cos x - \cos x} dx = \int \frac{2(\cos x + \cos x)(\cancel{\cos x} / \cancel{\cos x})}{\cancel{\cos x} + \cancel{\cos x}} dx$$

$$= 2 \int (\cos x + \cos x) dx$$

$$= 2 [\sin x + \sin x] + C$$

$$\frac{6}{11.5) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cancel{\cos^2 x} \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \cancel{\cos^2 x}} dx$$

$$= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx$$

$$= -\cot x + \tan x + C$$

$$\frac{7}{11.5) \int \frac{3 + 4 \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{3}{\sin^2 x} dx + 4 \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x} dx$$

$$= 3 \int \csc^2 x dx + 4 \int \csc x \cot x dx$$

$$= -3 \cot x - 4 \csc x + C$$

$$\frac{8}{11.5) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \cos x} dx$$

$$= \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C$$

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{11.5) \int \frac{\sin 4x}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin 2(2x)}{\sin x} dx \\
 &= \int \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x} dx \\
 &= \int \frac{2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot \cos 2x}{\sin x} dx \\
 &= 4 \int \cos 2x \cdot \cos x dx \\
 &= 4 \int \frac{1}{2} 2 \cos 2x \cos x dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{10}{11.5) \int \cos 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int 2 \cos 3x \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int [\cos 5x + \cos x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 5x}{5} + \sin x \right] + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{11}{11.5) \int \sin^2 5x dx &: \int \sin^2 \left(\frac{10x}{2} \right) \\
 &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 10x \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 10x}{10} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{12}{11.5) \int \frac{1 + \cos 4x}{\cos x - \tan x} dx &= \int \frac{1 + \cos 2(2x)}{\cos^2 x - \tan x} dx \\
 &= \int \frac{1 + 2 \cos^2 2x - 1}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{2 \cos^2 2x \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin x} dx \\
 &= \int \cos 2x \sin 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x \sin 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin 4x dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos 4x}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$\frac{13}{11.5) \int e^{x \log a} e^x dx = \int e^{\log a^x} \cdot e^x dx.$$

$$= \int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + C.$$

$$\frac{14}{11.5) \int (3x+4) \sqrt{3x+7} dx.$$

$$= \int (3x+7-3) \sqrt{3x+7} dx.$$

$$= \int (3x+7)^{3/2} dx - 3 \int \sqrt{3x+7} dx.$$

$$= \frac{(3x+7)^{5/2}}{5/2 \cdot 3} - 3 \cdot \frac{(3x+7)^{3/2}}{3/2 \cdot 3}$$

$$= \frac{2}{15} (3x+7)^{5/2} - \frac{2}{3} (3x+7)^{3/2} + C.$$

$$\frac{15}{11.5) \int \frac{8^{1+x} + 4^{1-x}}{2^x} dx = \int \frac{(2^3)^{1+x} + (2^2)^{1-x}}{2^x} dx$$

$$= \int ((2)^{3+2x} + (2)^{2-3x}) dx.$$

$$= \int (2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-3x}) dx.$$

$$= 84 \frac{2^x}{\log 2} + 4 \frac{2^{-3x}}{(-3) \log 2} + C.$$

$$= \frac{2^{2x+2}}{\log 2} - \frac{1}{3} \frac{2^{2-3x}}{\log 2} + C.$$

$$\frac{16}{11.5) \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4}} = \int \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4})} dx.$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}}{(x+3) - (x+4)} dx.$$

$$= \frac{1}{7} \left[\frac{2}{3} (x+3)^{3/2} + \frac{2}{3} (x+4)^{3/2} \right] + C = \frac{1}{7} \left[\frac{(x+3)^{3/2}}{3/2} + \frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} \right] + C$$

$$\frac{17}{11.5) \int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} dx.$$

$$= \int \frac{-1}{x+2} dx + \int \frac{2}{x+3} dx.$$

$$= -\log|x+2| + 2\log|x+3| + c$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$x+1 = A(x+3) + B(x+2)$$

$$\text{Put } x = -3$$

$$-2 = -B \quad B = 2$$

$$\text{Put } x = -2$$

$$-1 = A$$

$$\frac{18}{11.5) \int \frac{1}{(x-1)(x+2)^2} dx.$$

$$= \int \frac{1/9}{x-1} dx - \int \frac{1/9}{x+2} dx - \int \frac{1/3}{(x+2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{9} \log|x-1| - \frac{1}{9} \log|x+2| + \frac{1}{3} (x+2)^{-1} + c.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$$

$$\text{Put } x = -2$$

$$1 = -3C \Rightarrow C = -1/3.$$

$$x = 1$$

$$1 = 9A \Rightarrow A = 1/9.$$

$$\text{Co-eff of } x^2$$

$$0 = A + B$$

$$B = -A = -1/9.$$

$$\frac{19}{11.5) \int \frac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} dx.$$

$$\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$3x-9 = A(x+2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+2)$$

$$\text{Put } x = 1, -6 = A(3)(2) \Rightarrow 6A = -6 \quad A = -1$$

$$\text{Put } x = -2, -15 = B(-3)(5) \Rightarrow B = 1$$

$$x^4 \text{ or } x^2 \text{ or } x \quad 0 = C$$

$$\text{Put } x = 0 \quad D = 3$$

$$\therefore \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1} \right) dx = -\log|x-1| + \log|x+2| + 3 \tan^{-1} x + c$$

$$\frac{20}{11.5) \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \int \left[(x+3) + \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{6}{x-2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \log|x-1| + 6 \log|x-2| + C$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ x^2 - 3x + 2 \overline{) 2x^3 - 7x^2 + 12x - 6} \\ \underline{2x^3 - 3x^2 + 2x} \\ 4x^2 - 10x - 6 \\ \underline{4x^2 - 12x + 8} \\ 2x - 14 \\ \underline{2x - 4} \\ -10 \end{array}$$

$$7x-6 = A(x-1) + B(x-2)$$

Put $x=1 \Rightarrow A=-1$
 $x=2 \Rightarrow B=8$

විකල්පයක් ලෙස ධ්වනිකරණය කළ හැකිය.

Method of substitution (or) change of variable.

Ex 11.30

1) $\int 2x \sqrt{1+x^2} dx$ 2) $\int x e^{-x^2} dx$ 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

4) $\int \frac{dx}{1+x^2}$ 5) $\int x(a-x)^8 dx$

1) $\int 2x \sqrt{1+x^2} dx$ Put $t = 1+x^2$
 $dt = 2x dx$
 $= \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + C$

2) $\int x e^{-x^2} dx$
 $= \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$ Put $t = -x^2$
 $dt = -2x dx$
 $-\frac{1}{2} dt = x dx$
 $= -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ Put $t = 1+\cos x$
 $dt = -\sin x dx$
 $-dt = \sin x dx$
 $= -\log|t| = -\log(1+\cos x) + C$

4) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

5) $\int x(a-x)^8 dx$ Put $t = a-x \Rightarrow x = (a-t)$
 $dt = -dx$
 $-dt = dx$
 $= \int (a-t) t^8 (-dt)$

$$= -\int (at^8 - t^9) dt$$

$$= -\left[a \frac{t^9}{9} - \frac{t^{10}}{10} \right]$$

$$= -\left[\frac{a(a-x)^9}{9} - \frac{(a-x)^{10}}{10} \right] = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

Important Results

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

$$\int [f'(x) f(x)]^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

Ex 11.31)

1) $\int \tan x dx$ 2) $\int \cot x dx$ 3) $\int \operatorname{cosec} x dx$ 4) $\int \sec x dx$.

$$1) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

$$t = \cos x$$

$$-dt = -\sin x dx$$

$$= \int -\frac{dt}{t} = -\log |t|$$

$$= -\log |\cos x| + c.$$

$$= \log \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c.$$

$$= \log |\sec x| + c.$$

$$2) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t$$

$$= \log |\sin x| + c.$$

$$3) \int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx.$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx.$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t$$

$$t = \operatorname{cosec} x - \cot x$$

$$= \log (\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$$

$$dt = (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$4) \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx.$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$t = \sec x + \tan x$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log |(\sec x + \tan x)| + C$$

Ex 11-32)

$$1) \int \frac{2x+4}{x^2+4x+b} \, dx$$

$$2) \int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$$

$$3) \int \frac{1}{x \log x} \, dx.$$

$$4) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \, dx$$

$$5) \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} \, dx.$$

$$1) \int \frac{2x+4}{x^2+4x+b} \, dx$$

$$t = x^2 + 4x + b$$

$$dt = (2x+4) \, dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |x^2 + 4x + b| + C.$$

$$2) \int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$$

$$t = e^x - 1$$

$$dt = e^x \, dx.$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |e^x - 1| + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{x \log x}$$

$$t = \log x$$

$$dt = \frac{1}{x} \, dx.$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |\log x| + C.$$

$$4) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \, dx$$

$$t = \sin x - \cos x.$$

$$dt = (\cos x + \sin x) \, dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |\sin x + \cos x| + C.$$

$$5) \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} \, dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \, dx$$

$$= \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \, dx.$$

$$t = 1 + \sin 2x$$

$$dt = 2 \cos 2x \, dx$$

$$\frac{1}{2} dt = \cos 2x \, dx.$$

$$= \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log |1 + \sin 2x| + C = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t}$$

1
11.b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{Put } t^2 = 1+x^2 \\ 2t dt = 2x dx \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t$$

$$= \sqrt{1+x^2} + C.$$

2
11.b)

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{Put } t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ \frac{1}{3} dt = x^2 dx \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3} dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1}(t) = \frac{1}{3} \tan^{-1}(x^3) + C.$$

3
11.b)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$t = e^x + e^{-x}.$$

$$dt = (e^x - e^{-x}) dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |e^x + e^{-x}| + C.$$

4
11.b)

$$\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}} dx.$$

$$t = 10^x + x^{10}$$

$$dt = 10^x \log_e 10 + 10x^9$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log |10^x + x^{10}| + C.$$

5
11.b)

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \sin t \cdot 2 dt$$

$$= 2 \int \sin t dt.$$

$$= -2 \cos t + C$$

$$= -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ 2 dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right.$$

6
11.b)

$$\int \frac{\cot x}{\log(\sin x)} dx.$$

$$t = \log \sin x$$

$$dt = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t$$

$$= \log |(\log \sin x)| + C.$$

$$dt = \cot x dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{11.6) \int \frac{\sec x}{\log \tan x_2} dx. \\ = \int \frac{dt}{t} = \log t \\ = \log |\log(\tan x_2)| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \log(\tan x_2) \\ dt &= \frac{1}{\tan x_2} \cdot \sec^2 x_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sec^2 x_2}{\sin x_2 \cos x_2} \\ &= \frac{1}{2 \sin x_2 \cos x_2} = \sec x_2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{11.6) \int \frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x} dx. \\ = \int \frac{\frac{1}{b^2} dt}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= a^2 + b^2 \sin^2 x \\ dt &= b^2 \cdot 2 \sin x \cos x dx \\ \frac{1}{b^2} dt &= \sin 2x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b^2} \log t = \frac{1}{b^2} \log |a^2 + b^2 \sin^2 x| + C.$$

$$9) \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} t &= \sin^2 x \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int t dt \\ &= \frac{t^2}{2} = \frac{(\sin^2 x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$$10) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$11) \int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} dx$$

$$\begin{aligned} t &= \log(\log x) \\ dt &= \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log t = \log |\log(\log x)| + C.$$

$$12) \int \alpha \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int -dt = -t \\ &= e^{-\beta x^{\alpha}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= e^{-\beta x^{\alpha}} \\ dt &= e^{-\beta x^{\alpha}} (-\beta \alpha x^{\alpha-1}) dx \\ -dt &= \alpha \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} dx. \end{aligned}$$

$$\frac{13}{11.6) \int \tanh \sqrt{x} dx :$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{x}} = \tanh \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{t^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\frac{14}{11.6) \int x(1-x)^{17} dx$$

$$t = 1-x$$

$$-dt = +dx$$

$$x = 1-t$$

$$= \int (1-t)t^{17} (-dt)$$

$$= - \int (t^{17} - t^{18}) dt$$

$$= - \left[\frac{t^{18}}{18} - \frac{t^{19}}{19} \right] + c$$

$$= \frac{(1-x)^{19}}{19} - \frac{(1-x)^{18}}{18} + c$$

$$\frac{15}{11.6) \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

$$= \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int (\sin^5 x - \sin^7 x) \cos x dx$$

$$= \int (t^5 - t^7) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + c$$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

$$\frac{16}{11.6) \int \frac{\cos x}{\cos(x-a)} = \int \frac{\cos(x-a+a)}{\cos(x-a)} dx$$

$$= \int \frac{\cos(x-a) \cos a - \sin(x-a) \sin a}{\cos(x-a)} dx$$

$$= \int \cos a dx - \int \sin a \tan(x-a) dx$$

$$= x \cos a - \sin a \log |\sec(x-a)| + c$$

Integration by Parts.

$$1) \int u dv = uv - \int v du$$

I L A T E.

2) Bernoulli's Formula.

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 + \dots$$

$u, u', u'' \dots$ are successive differentiations.

$v_1, v_2, v_3 \dots$ are successive integrations.

EX 1853 1) $\int x e^x dx$ 2) $\int x \cos x dx$ 3) $\log x dx$ 4) $\sin^{-1} x dx$

$$1) \int x e^x dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$= uv - u'v_1$$

$$\int dv = \int e^x dx \quad v = e^x$$

$$= x e^x - e^x$$

$$v_1 = e^x$$

$$= e^x (x - 1) + c.$$

$$2) \int x e^x dx$$

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

$$v_1 = e^x$$

$$\int dv = \int \cos x dx$$

$$v = \sin x$$

$$v_1 = -\cos x$$

$$\int x \cos x dx$$

$$= uv - u'v_1$$

$$= x \sin x + \cos x + c.$$

$$3) \int \log x dx$$

$$u = \log x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

$$v_1 =$$

$$= uv - \int v du$$

$$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - x + c.$$

$$= x (\log x - 1) + c.$$

$$4) \int \sin^{-1} x dx$$

$$u = \sin^{-1} x$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

$$= uv - \int v du$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx: t^2 = 1-x^2$$

$$2t dt = -2x dx$$

$$\int \frac{-t dt}{t} = t = -\sqrt{1-x^2}.$$

Ex 11.34)

$$\int \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) dx \text{ logit. ub}$$

$$\text{let } x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta.$$

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \tan \theta}{1-\tan^2 \theta} = \tan 2\theta.$$

$$\int \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) dx = \int \tan^{-1}(\tan 2\theta) \cdot \sec^2 \theta d\theta.$$

$$= \int 2\theta \sec^2 \theta d\theta.$$

$$u = \theta \quad dv = \sec^2 \theta d\theta$$

$$u' = 1 \quad v = \tan \theta.$$

$$= 2[u v - \int v du].$$

$$= 2[\theta \tan \theta - \int \tan \theta d\theta]$$

$$= 2[\theta \tan \theta - \log |\sec \theta|] + C.$$

$$= 2 x \tan^{-1} x + \log \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ex 11.35)

1) $x^2 e^{5x}$

2) $x^3 \cos x$

3) $x^3 e^x$

1) $\int x^2 e^{5x} dx$

$$= uv - u'v_1 + u''v_2$$

$$= x^2 \frac{e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{2} + \frac{2e^{5x}}{125} + C.$$

$$u = x^2$$

$$u' = 2x$$

$$u'' = 2$$

$$dv = e^{5x} dx$$

$$v = \frac{e^{5x}}{5}$$

$$v_1 = \frac{e^{5x}}{25}$$

$$v_2 = \frac{e^{5x}}{125}$$

2) $\int x^3 \cos x dx$

$$u = x^3$$

$$u' = 3x^2$$

$$u'' = 6x$$

$$u''' = 6$$

$$= uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C.$$

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \sin x$$

$$v_1 = -\cos x$$

$$v_2 = -\sin x$$

$$v_3 = \cos x.$$

$$\begin{aligned}
 3) \int x^3 e^{-x} dx & \quad u = x^3 \quad dv = e^{-x} dx \\
 & \quad u' = 3x^2 \quad v = -e^{-x} \\
 & \quad u'' = 6x \quad v_1 = e^{-x} \\
 & \quad u''' = 6 \quad v_2 = -e^{-x} \\
 & \quad v_3 = e^{-x} \\
 & = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 \\
 & = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} \\
 & = -e^{-x} [x^3 + 3x^2 + 6x + 6] + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{11.7) \text{ i)} \int 9x e^{3x} dx & \quad u = x \quad dv = e^{3x} dx \\
 & \quad u' = 1 \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \\
 & \quad v_1 = \frac{e^{3x}}{9} \\
 & = 9[uv - u'v_1] \\
 & = 9\left[x \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right] \\
 & = 9\left[\frac{3xe^{3x} - e^{3x}}{9}\right] + C \\
 & = e^{3x} [3x - 1] + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int x \sin 3x dx & \quad u = x \quad dv = \sin 3x dx \\
 & \quad u' = 1 \quad v = -\frac{\cos 3x}{3} \\
 & \quad v_1 = -\frac{\sin 3x}{9} \\
 & = uv - u'v_1 \\
 & = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int 25x e^{-5x} dx & \quad u = x \quad dv = e^{-5x} dx \\
 & \quad u' = 1 \quad v = -\frac{e^{-5x}}{5} \\
 & \quad v_1 = \frac{e^{-5x}}{25} \\
 & = 25[uv - u'v_1] \\
 & = 25\left[-x \frac{e^{-5x}}{5} - \frac{e^{-5x}}{25}\right] + C \\
 & = -25\left[\frac{5xe^{-5x} + e^{-5x}}{25}\right] + C \\
 & = -e^{-5x} (5x + 1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \int x \sec x \tan x dx & \quad u = x \quad dv = \sec x \tan x dx \\
 & \quad u' = 1 \quad v = \tan x \\
 & \quad v_1 = \log(\sec x) \\
 & = uv - u'v_1 \\
 & = x \tan x - \log(\sec x) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{11.7) \text{ i)} \int x \log x dx & \quad u = \log x \quad dv = x dx \\
 & \quad u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \\
 & = uv - \int v du \\
 & = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c.$$

$$\therefore = \frac{x^2}{2} \log|x| - \frac{x^2}{4} + c.$$

$$\begin{aligned} 2) \int 27x^2 e^{3x} dx. \quad & u = x^2 \quad dv = e^{3x} dx. \\ & u' = 2x \quad v = \frac{e^{3x}}{3} \\ & u'' = 2 \quad v_1 = \frac{e^{3x}}{9} \\ & \quad \quad \quad v_2 = \frac{e^{3x}}{27} \\ & = 27 \left[uv - u'v_1 + u''v_2 \right] + c. \\ & = 27 \left[\frac{x^2 e^{3x}}{3} - 2x \frac{e^{3x}}{9} + 2 \frac{e^{3x}}{27} \right] + c. \\ & = 27 e^{3x} \left[\frac{9x^2 - 6x + 2}{27} \right] + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int x^2 \cos x dx. \quad & u = x^2 \quad dv = \cos x dx \\ & u' = 2x \quad v = \sin x \\ & u'' = 2 \quad v_1 = -\cos x \\ & \quad \quad \quad v_2 = -\sin x. \\ & = 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int x^3 \sin x dx \quad & u = x^3 \quad dv = \sin x dx \\ & u' = 3x^2 \quad v = -\cos x \\ & u'' = 6x \quad v_1 = -\sin x \\ & u''' = 6 \quad v_2 = \cos x. \\ & \quad \quad \quad v_3 = \sin x. \\ & = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c. \end{aligned}$$

$$\frac{3}{11.7) \quad 1) \frac{x \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad 2) x^5 e^{x^2} \quad 3) \tan^{-1}\left(\frac{8x}{1-6x^2}\right) \quad 4) \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad & \text{Put } x = \sin \theta. \\ & dx = \cos \theta d\theta \\ & = \int \frac{\sin \theta \cdot \sin^{-1}(\sin \theta)}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta = \int \frac{\sin \theta \cdot \sin^{-1}(\sin \theta)}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ & = \int \sin \theta \cdot \sin^{-1}(\sin \theta) d\theta. \\ & = uv - u'v_1 \\ & = -\theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \\ & = -\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2} + x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \theta, \quad dv = \sin \theta d\theta \\ u' &= 1 \quad v = -\cos \theta \\ v_1 &= -\sin \theta \end{aligned}$$

$$2) \int x^2 e^{x^2} dx = \int a^1 e^{a^2} x da$$

$$= \frac{1}{2} \int t^2 e^t dt$$

$$t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx$$

$$= \frac{1}{2} [uv - u'v_1 - u''v_2]$$

$$= \frac{1}{2} [t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t] + C$$

$$= \frac{1}{2} e^t (t^2 - 2t + 2) + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 2x^2 + 2) + C$$

$$\begin{array}{l|l} u = t^2 & dv = e^t dt \\ u' = 2t & v = e^t \\ u'' = 2 & v_1 = e^t \\ & v_2 = e^t \end{array}$$

$$3) \int \tan^{-1} \left(\frac{8x}{1-x^2} \right) dx$$

$$2\theta = 4x = \tan \theta \quad \theta = \tan^{-1}(2x)$$

$$= \int \tan^{-1} \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right) \frac{1}{4} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\frac{8x}{1-x^2} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta) \cdot \frac{1}{4} \sec^2 \theta d\theta$$

$$dx = \frac{1}{4} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int 2\theta \sec^2 \theta d\theta$$

$$u = \theta \quad \int d\theta \int \sec^2 \theta d\theta \\ u' = 1 \quad = \tan \theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[2\theta \tan \theta - \int \tan \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[2\theta \tan \theta - \log(\sec \theta) \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[\tan^{-1}(2x) \cdot 4x - \log(\sec(\tan^{-1}(2x))) \right] + C$$

$$4) \int \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$$

$$x = \tan \theta$$

$$= \int \sin^{-1}(\sin 2\theta) \cdot \sec^2 \theta d\theta \cdot \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$$

$$= \int 2\theta \sec^2 \theta d\theta$$

$$u = \theta \quad dv = \sec^2 \theta \\ u' = 1 \quad v = \tan \theta$$

$$= 2 \left[\theta \tan \theta - \log(\sec \theta) \right] + C \quad v_1 = \log(\sec \theta)$$

$$= 2 \left[\tan^{-1} x \cdot x - \log(\sec(\tan^{-1}(x))) \right] + C$$

Integrals of the form $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, $\int e^{ax} \cos bx \, dx$.

$$1. \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + C.$$

$$2. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C.$$

Ex 11.36) ... Log 11.36.

$$1) \int e^{3x} \cos 2x \, dx \quad 2) \int e^{-5x} \sin 3x \, dx.$$

$$1) \int e^{3x} \cos 2x \, dx \quad a=3, b=2.$$

$$= \frac{e^{3x}}{9+4} [3 \cos 2x + 2 \sin 2x]$$

$$= \frac{e^{3x}}{13} [3 \cos 2x + 2 \sin 2x] + C.$$

$$2) \int e^{-5x} \sin 3x \, dx \quad a=-5, b=3$$

$$= \frac{e^{-5x}}{(-5)^2 + 3^2} [-5 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$$

$$= -\frac{e^{-5x}}{34} (5 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C.$$

11.8 ... x 11.8

$$1) e^{ax} \cos bx \quad 2) e^{ax} \sin bx \quad 3) e^{-x} \cos 2x.$$

$$1) \int e^{ax} \cos bx$$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot b \sin bx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx.$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left[\frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{e^{ax}}{a} b \cos bx \right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \sin bx \right) - \frac{b^2}{a^2} I.$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx.$$

$$u = \cos bx \quad dv = e^{ax} \\ du = -b \sin bx \quad v = \frac{e^{ax}}{a}.$$

$$u = \sin bx \quad dv = e^{ax} \\ du = b \cos bx \quad v = \frac{e^{ax}}{a}.$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)x = \frac{e^{ax} a \cos bx + e^{ax} b \sin bx}{a^2+b^2}$$

$$I = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2}$$

2) $\int e^{2x} \sin x \, dx$ $a=2, b=1$

$$= \frac{e^{2x}}{4+1} [a \sin x - b \cos x] + C = \frac{e^{2x}}{5} [2 \sin x - \cos x] + C$$

3) $\int e^{-x} \cos 2x \, dx$ $a=-1, b=2$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx]$$

$$= \frac{e^{-x}}{1+4} [-\cos 2x + 2 \sin 2x] + C$$

$$= \frac{e^{-x}}{5} [2 \sin 2x - \cos 2x] + C$$

11.8) 1) $e^{-3x} \sin 2x$ 2) $e^{-4x} \sin 2x$ 3) $e^{3x} \cos x$

1) $\int e^{-3x} \sin 2x \, dx$ $a=-3, b=2$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$$

$$= \frac{e^{-3x}}{9+4} [-3 \sin 2x - 2 \cos 2x] + C$$

$$= -\frac{3e^{-3x}}{13} [3 \sin 2x + 2 \cos 2x] + C$$

2) $\int e^{-4x} \sin 2x \, dx$ $a=-4, b=2$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + C$$

$$= \frac{e^{-4x}}{16+4} [-4 \sin 2x - 2 \cos 2x] + C$$

$$= -\frac{2e^{-4x}}{20} [2 \sin 2x + \cos 2x] + C$$

$$3) \int e^{-3x} \sin x \, dx \quad a = -3, b = 1.$$

$$= \frac{e^{-3x}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C$$

$$= \frac{e^{-3x}}{10} [-3 \cos x + \sin x] + C.$$

$$= \frac{e^{-3x}}{10} [\sin x - 3 \cos x] + C.$$

Integral of the type $\int e^x (f(x) + f'(x)) \, dx = e^x f(x) + C.$

Ex (1.37) Evaluate the following integrals using the above formula

$$1) \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \quad 2) \int e^x (\sin x + \cos x) dx \quad 3) \int e^x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx$$

$$1) \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx. \quad \text{let } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \int e^x (f(x) + f'(x)) \, dx$$

$$= e^x f(x) + C$$

$$= e^x \frac{1}{x} + C.$$

$$2) \int e^x (\sin x + \cos x) dx$$

$$\text{let } f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x.$$

$$\therefore \int e^x (f(x) + f'(x)) \, dx$$

$$= e^x f(x) + C$$

$$= e^x \sin x + C.$$

$$3) \int e^x \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx.$$

$$= \int e^x \left(\frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2} \right) dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^2} \right) dx. \quad \text{let } f(x) = \frac{1}{(1+x)}$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) \, dx.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= e^x \frac{1}{1+x} + C.$$

$$\frac{1}{11.9}) \int e^x (\tan x + \log \sec x) dx.$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) dx$$

$$= e^x (\log(\sec x)) + c.$$

$$\text{Let } f(x) = \log \sec x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \tan x$$

$$\frac{2}{11.9}) \int e^x \left(\frac{x-1}{2x^2} \right) dx.$$

$$= \int e^x \left(\frac{x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \right) dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right) dx$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) dx.$$

$$= e^x \frac{1}{2x} + c.$$

$$\text{Let } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{3}{11.9}) \int e^x \sec x (1 + \tan x) dx.$$

$$= \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) dx$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) dx$$

$$= e^x \cdot \sec x + c.$$

$$\text{Let } f(x) = \sec x$$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{4}{11.9}) \int e^x \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} \right)$$

$$= \int e^x (\sec^2 x + \tan x) dx$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) dx$$

$$= e^x \cdot \tan x + c.$$

$$\frac{2(1 + \sin x \cos x)}{2 \cos^2 x}$$

$$\sec^2 x + \tan x.$$

$$\text{Let } f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = \sec^2 x.$$

$$\frac{5}{11.9}) \int e^{\tan x} \left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2} \right) dx.$$

$$= \int e^{\tan x} \left(1 + \frac{x}{1+x^2} \right) dx.$$

$$= \int e^{\tan x} \left(1 + \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \sec^2 \theta d\theta.$$

$$\text{Let } x = \tan \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} x$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\theta = \tan^{-1} x$$

$$\int e^{\theta} \left(\sec^2 \theta + \frac{\tan \theta \cdot \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} \right) d\theta$$

$$\text{Let } f(\theta) = \tan \theta$$

$$f'(\theta) = \sec^2 \theta$$

$$= \int e^{\theta} (f(\theta) + f'(\theta)) d\theta$$

$$= e^{\theta} \cdot \tan \theta$$

$$= e^{\tan^{-1} x} \cdot \tan^{-1}(\tan^{-1} x)$$

$$= x e^{\tan^{-1} x} + C$$

$$\frac{6}{11.9} \cdot \int \frac{\log x}{(1+\log x)^2} dx = \int \frac{1}{(1+t)^2} e^t dt \quad \text{Put } \log x = t \quad x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{(1+t)^2} e^t dt = \int \left(\frac{t+1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt$$

$$= \int e^t \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt$$

$$= \int e^t (f(t) + f'(t)) dt$$

$$= e^t \cdot \frac{1}{1+t} = e^{\log x} \cdot \frac{1}{1+\log x}$$

$$= \frac{x}{1+\log x} + C. \text{ Ans}$$

Integration by rational algebraic fn.

$$1) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log |x + \sqrt{a^2+x^2}| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

EX 11.38) Logarithmic functions

$$1) \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx \quad 2) \int \frac{x^2}{x^2+5} dx \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad 4) \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}} dx$$

$$1) \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \tan^{-1}(x-2) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$2) \int \frac{x^2}{x^2+5} dx = \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5} dx$$

$$= \int \frac{x^2+5}{x^2+5} dx - \int \frac{5}{x^2+5} dx$$

$$= \int dx - 5 \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2}$$

$$= x - 5 \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

$$= x - \sqrt{5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c.$$

$$3) I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(2x)^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c.$$

$$= \frac{1}{2} \log|2x + \sqrt{4x^2+1}| + c.$$

$$4) I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-5^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$= \frac{1}{2} \log(2x + \sqrt{4x^2-25}) + c.$$

Integrals of the type $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $ax^2+bx+c = a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

and $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Ex 11.39) Evaluate the following integrals.

$$1) \int \frac{dx}{x^2-2x+5} \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+11}} \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{12+4x^2-x^2}}.$$

$$1) I = \int \frac{dx}{x^2-2x+5}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+5-1$$

$$= (x-1)^2+2^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$2) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+11}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}$$

$$= \log|x+6 + \sqrt{(x+6)^2-25}| + c$$

$$= \log|x+6 + \sqrt{x^2+12x+11}| + c.$$

$$x^2+12x+11 = (x+6)^2+11-36$$

$$= (x+6)^2-5^2$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{12-(x^2-4x)}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{12-(x-2)^2+4}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{11-10) \quad 1) \int \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{2^2-x^2} \\
 &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{11-10) \quad I = \int \frac{dx}{25-4x^2}$$

$$= \int \frac{dx}{5^2-(2x)^2}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{5+2x}{5-2x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{20} \log \left| \frac{5+2x}{5-2x} \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

$$\frac{3}{11-10) \quad I = \int \frac{dx}{9x^2-4}$$

$$= \int \frac{dx}{(3x)^2-2^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \log \left| \frac{3x-2}{3x+2} \right| + C.$$

$$= \frac{1}{12} \log \left| \frac{3x-2}{3x+2} \right| + C.$$

$$\frac{2}{11-10) \quad 1) \quad I = \int \frac{dx}{6x-7-x^2} = \int \frac{dx}{-7-(x^2-6x)} = \int \frac{dx}{-7-(x-3)^2+9}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2}+(x-3)}{\sqrt{2}-(x-3)} \right| + C. = \int \frac{dx}{(2)^2-(x-3)^2}$$

$$2) I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 25} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 5^2} = \frac{1}{10} \log \left| \frac{x+1-5}{x+1+5} \right| + C$$

$$= \frac{1}{10} \log \left| \frac{x-4}{x+6} \right| + C.$$

$$3) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 2}}$$

$$x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$$

$$= (x+2)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - (\sqrt{2})^2}} = \log |(x+2) + \sqrt{x^2 + 4x + 2}| + C.$$

$$\frac{3}{11-10}) 1) I = \int \frac{dx}{\sqrt{(2+x)^2 - 1}} = \log |2+x + \sqrt{3+4x+x^2}| + C.$$

$$2) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$$= (x-2)^2 + 1^2$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 1^2}} = \log |(x-2) + \sqrt{x^2 - 4x + 5}| + C$$

$$3) I = \int \frac{dx}{9 + 8x - x^2}$$

$$9 + 8x - x^2 = 9 - (x^2 - 8x)$$

$$= \int \frac{dx}{5^2 - (x-4)^2} = \sin^{-1} \left(\frac{x-4}{5} \right) + C$$

$$= 9 - (x-4)^2 + 16 = 25 - (x-4)^2$$

Integrals of the type $\int \frac{px+q}{a^2x^2+bx+c}$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Take $px+q = A \frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + B$.

Ex 11-40) Evaluate the following logarithmic integrals.

$$1) \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7} dx \quad 2) \int \frac{x+1}{x^2-3x+1} dx \quad 3) \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad 4) \int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$$

$$1) I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7} dx$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)dx}{x^2+4x+7} - \int \frac{dx}{x^2+4x+7}$$

$$= \frac{3}{2} \log |x^2+4x+7| - \int \frac{dx}{(x+2)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3}{2} \log |x^2+4x+7| - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$3x+5 = A \frac{d}{dx}(x^2+4x+7) + B.$$

$$= A(2x+4) + B.$$

$$3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$4A + B = 5$$

$$2 \times \frac{3}{2} + B = 5$$

$$B = 5 - 3 = 2$$

$$3x+5 = \frac{3}{2}(2x+4) + 2$$

$$x^2+4x+7 = (x+2)^2 + 3$$

$$= (x+2)^2 + (\sqrt{3})^2$$

Q.2) $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1} dx$

$\therefore \int \frac{x+1}{x^2-3x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3) + \frac{5}{2}}{x^2-3x+1} dx$

$= \frac{1}{2} \log |x^2-3x+1| + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x^2-3x+1} dx$

$= \frac{1}{2} \log |x^2-3x+1| + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \log \left| \frac{x-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C$

$= \frac{1}{2} \log |x^2-3x+1| + \sqrt{5} \log \left| \frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}} \right| + C$

Partial Fraction Decomposition:

$x+1 = A(2x-3) + B$

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$-3A + B = 1 \Rightarrow -3 \cdot \frac{1}{2} + B = 1 \Rightarrow B = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

3) $I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2 \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2 \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C$

Partial Fraction Decomposition:

$2x+3 = A \frac{d}{dx}(x^2+x+1) + B$

$2x+3 = A(2x+1) + B$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$A + B = 3 \Rightarrow B = 3 - 1 = 2$

4) $I = \int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2+2}} dx = \int \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}(3-2x)}{\sqrt{3x-x^2+2}} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3x-x^2+2}} dx$

$= -\frac{5}{2} \sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\frac{\sqrt{17}}{2})^2 - (x-\frac{3}{2})^2}$

$= -\frac{5}{2} \sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} \right| + C$

$= -\frac{5}{2} \sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{2x-3}{\sqrt{17}} \right| + C$

Partial Fraction Decomposition:

$5x-7 = A \frac{d}{dx}(3x-x^2+2) + B$

$5x-7 = A(3-2x) + B$

$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}$

$-7 = 3A + B \Rightarrow B = -7 + \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

11.11) 1) Integrate $\frac{2x-3}{x^2+4x-12}$

$\int \frac{2x-3}{x^2+4x-12} dx = \int \frac{1 \cdot (2x+4) - 7}{x^2+4x-12} dx$

$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x-12} dx - \int \frac{7}{x^2+4x-12} dx$

Partial Fraction Decomposition:

$2x-3 = A \frac{d}{dx}(x^2+4x-12) + B$

$2x-3 = A(2x+4) + B$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$4A + B = -3 \Rightarrow B = -3 - 4 = -7$

$$= \log |x^2 + 4x - 12| - \frac{7}{8} \log \left| \frac{x+2-4}{x+2+\frac{1}{4}} \right| + C$$

$$x^2 + 4x - 12$$

$$= (x+2)^2 - 12 - 4$$

$$= (x+2)^2 - (4)^2$$

$$= \log |x^2 + 4x - 12| - \frac{7}{8} \log \left| \frac{x-2}{x+\frac{1}{4}} \right| + C$$

$$2) \int \frac{5x-2}{x^2+2x+2} = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{(x+1)^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{5}{2} \log (x^2 + 2x + 2) - 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{1} \right) + C$$

$$5x-2 = A(2x+2) + B$$

$$2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$2A + B = -2$$

$$7 \cdot \frac{5}{2} + B = -2$$

$$B = -7$$

$$(x+1)^2 + 2 + 1$$

$$= (x+1)^2$$

+ i

$$3) \int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+2)}{2x^2-2x+3} + \int \frac{\frac{5}{4} dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2})^2}$$

$$= \frac{3}{4} \log (2x^2 - 2x + 3) + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \log (2x^2 - 2x + 3) + \frac{5}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}} \right) + C$$

$$(3x+1) = A(4x-2) + B$$

$$4A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$-2A + B = 1$$

$$-7 \cdot \frac{3}{4} + B = 1$$

$$B = 1 + \frac{21}{4} = \frac{25}{4}$$

$$2 \left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{4} \right]$$

$$2 \left[\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$\frac{2}{11.1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}$$

$$= \int \frac{-(4x-2x)}{\sqrt{9+4x-x^2}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2 - (x-2)^2}}$$

$$= -2\sqrt{9+4x-x^2} + 5 \sin^{-1} \left(\frac{x-2}{5} \right) + C$$

$$2x+1 = A(4-2x) + B$$

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1$$

$$4A + B = 1$$

$$-4 + B = 1 \Rightarrow B = 5$$

$$9 - (x^2 - 4x)$$

$$= 9 - (x-2)^2 + 4$$

$$= (\sqrt{13})^2 - (x-2)^2$$

$$2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{\sqrt{x^2+4}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x^2+4} + 2 \log |x + \sqrt{x^2+4}| + C$$

$$= \sqrt{x^2+4} + 2 \log |x + \sqrt{x^2+4}| + C$$

$$x+2 = A(2x) + B$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$B = 2$$

$$3) \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}} = \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - (\sqrt{3})^2}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+1} - \log \left| 2x+4 + \sqrt{x^2+4x+1} \right| + C$$

$$2x+3 = A(2x+4) + B$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$4A + B = 3$$

$$B = 3 - 4 = -1$$

$$(x+2)^2 + 1 - 4 = (x+2)^2 - (\sqrt{3})^2$$

Integrals of the form $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$.

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$2) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$3) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

Ex 11.4) Evaluate 1) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ 2) $\int \sqrt{25x^2 - 9} dx$ 3) $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx$
4) $\int \sqrt{(x-3)(5-x)} dx$

$$\begin{aligned} 1) \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int \sqrt{2^2 - x^2} dx \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

$$2) \int \sqrt{25x^2 - 9} dx = \int \sqrt{(5x)^2 - 3^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{5x}{2} \sqrt{25x^2 - 9} - \frac{9}{2} \log |5x + \sqrt{25x^2 - 9}| \right) + C$$

$$\begin{aligned} 3) \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx &= \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{x + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \frac{1}{2} \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C \\ &= \frac{2x + 1}{4} \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int \sqrt{(x-3)(5-x)} dx &= \int \sqrt{8x - x^2 - 15} dx \\ &= \int \sqrt{1^2 - (x-4)^2} dx \\ &= \frac{x-4}{2} \sqrt{8x - x^2 - 15} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x-4}{1} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 8x) - 15 \\ &= [x-4]^2 - 15 + 16 \\ &= 1 - (x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{11.12) 1) \int \sqrt{x^2 + 2x + 10} dx &= \int \sqrt{(x+1)^2 + 3^2} = \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \frac{9}{2} \log |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 10}| + C \\ &= \frac{x^2 + 2x + 10}{2} = \frac{(x+1)^2 + 9}{2} \end{aligned}$$

$$2) \int \sqrt{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

$$= (x-1)^2 - 2^2$$

$$= \int \sqrt{(x-1)^2 - 2^2} = \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \frac{2^2}{2} \log |x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}| + C$$

$$3) \int \sqrt{(6-x)(x-4)} dx$$

$$(6-x)(x-4) = 6x - 24 - x^2 + 4x$$

$$= 10x - x^2 - 24$$

$$= \int \sqrt{1^2 - (x-5)^2}$$

$$= - (x^2 - 10x) - 24$$

$$= \frac{x-5}{2} \sqrt{10x - x^2 - 24} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x-5}{1} \right) + C = - (x-5)^2 - 24 + 25$$

$$= 1^2 - (x-5)^2$$

$$\frac{2}{11.12) 1) \int \sqrt{9 - (2x+5)^2} dx = \int \sqrt{9 - (2x+5)^2} dx$$

$$= \left[\frac{2x+5}{2} \sqrt{9 - (2x+5)^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x+5}{3} \right) \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[(2x+5) \sqrt{9 - (2x+5)^2} + 9 \sin^{-1} \left(\frac{2x+5}{3} \right) \right] + C$$

$$3) \int \sqrt{81 + (2x+1)^2} dx = \int \sqrt{9^2 + (2x+1)^2} dx$$

$$= \left[\frac{2x+1}{2} \sqrt{81 + (2x+1)^2} + \frac{81}{2} \log |2x+1 + \sqrt{81 + (2x+1)^2}| \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[(2x+1) \sqrt{81 + (2x+1)^2} + 81 \log |2x+1 + \sqrt{81 + (2x+1)^2}| \right] + C$$

$$3) \int \sqrt{(x+1)^2 - 4} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 - 2^2} dx$$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{(x+1)^2 - 4} - \frac{2^2}{2} \log |x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}| + C$$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{(x+1)^2 - 4} - 2 \log |x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}| + C$$

EXERCISE - (1.13) (Long Mark)

1. Let $\int f(x) dx = g(x) + C$ then $\int f'(x) g'(x) dx$ is

- 1) $\int (f(x))^2 dx$ 2) $\int f(x) g(x) dx$ 3) $\int f'(x) g(x) dx$ 4) $\int (g(x))^2 dx$

Hint

$$\int g'(x) dx = f(x)$$

$$\therefore \int f(x) g'(x) dx = \int f(x) \cdot f(x) dx = \int (f(x))^2 dx$$

2) If $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2} dx = k(3^{\sqrt{x}}) + C$ then the value of k is

- 1) $\log 3$ 2) $-\log 3$ 3) $-\frac{1}{\log 3}$ 4) $\frac{1}{\log 3}$

Hint $\frac{d}{dx} (k(3^{\sqrt{x}})) = \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$

$$k \cdot 3^{\sqrt{x}} \log 3 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2} \Rightarrow k = -\frac{1}{\log 3}$$

3) If $\int f'(x) e^{x^2} dx = (x-1) e^{x^2} + C$ then $f(x)$ is

- 1) $2x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$ 2) $\frac{x^3}{2} + 3x^2 + 4x + C$ 3) $x^3 + 4x^2 + 6x + C$
4) $\frac{2x^3}{3} - x^2 + x + C$

$$\frac{d}{dx} (x-1) e^{x^2} = (x-1) e^{x^2} 2x + e^{x^2}$$

$$f'(x) = e^{x^2} (2x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - x^2 + x + C$$

4) The gradient (slope) of a curve at any point (x, y) is $\frac{x^2-4}{x^2}$

If the curve passes through the point $(2, 7)$ then the equation of the curve is

- 1) $y = x + \frac{4}{x} + 3$ 2) $y = x + \frac{4}{x} + 4$ 3) $y = x^2 + 3x + 4$
4) $y = x^2 - 3x + 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = 1 - 4x^{-2}$$

$$y = x - 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= x + \frac{4}{x} + C$$

$\therefore$ It passes through $(2, 7)$

$$7 = 2 + \frac{4}{2} + C \Rightarrow C = 7 - 4 = 3$$

$$\therefore y = x + \frac{4}{x} + 3$$

6) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ is 1) $\cot(xe^x) + C$ 2) $\sec(xe^x) + C$
 3) $\tan(xe^x) + C$ 4) $\cos(xe^x) + C$.

$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t dt$ Put $t = xe^x$
 $= \tan t$ $dt = xe^x + e^x$
 $= \tan(xe^x) + C$ $= e^x(1+x) dx$.

6) $\int \frac{\tan x}{\sin^2 x} dx$ is 1) $\sqrt{\tan x} + C$ 2) $2\sqrt{\tan x} + C$ 3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + C$
 4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x} + C$.

$\int \frac{\tan x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

7) $\int \sin^3 x dx$ 1) $-\frac{3}{4}\cos x - \frac{\cos 3x}{12} + C$ 2) $\frac{3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{12} + C$
 3) $-\frac{3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{12} + C$ 4) $-\frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{12} + C$.

$\int \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \right) dx$
 $= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{3}$
 $= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{12} + C$.

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
 $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

8) $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}} dx$ is 1) $x + C$ 2) $\frac{x^3}{3} + C$ 3) $\frac{3}{x^3} + C$ 4) $\frac{1}{x^2} + C$

$\int \frac{e^{\log x^6} - e^{\log x^5}}{e^{\log x^4} - e^{\log x^3}} dx = \int \frac{x^6 - x^5}{x^4 - x^3} dx = \int \frac{x^5(x-1)}{x^3(x-1)} dx$
 $= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

9) $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$ is 1) $\tan^{-1}(\sin x) + C$ 2) $2\sin^{-1}(\tan x) + C$ 3) $\tan^{-1}(\log) + C$
 4) $\sin^{-1}(\tan x) + C$.

$\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx = \int \frac{\sec x dx \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$ $\therefore$ multiply by $\cos x$ on both sides.
 $= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$ $t = \tan x$
 $= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sin^{-1}(t)$ $dt = \sec^2 x dx$
 $= \sin^{-1}(\tan x) + C$.

10) $\int \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} \right) dx$ is

- 1) $x^2 + c$ 2) $2x^2 + c$ 3) $\frac{x^2}{2} + c$ 4) $-\frac{x^2}{2} + c$.

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

$$\int \tan^{-1}(\tan x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

11) $\int 2^{3x+5} dx$ 1) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2} + c$ 2) $\frac{2^{3x+5}}{2 \log 3} + c$ 3) $\frac{2^{3x+5}}{2 \log (3x+5)} + c$
 4) $\frac{2^{3x+5}}{3 \log 2} + c$. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$.

$$\int 2^{3x+5} dx = \int 2^5 \cdot 2^{3x} dx = \frac{2^5 \cdot 2^{3x} \log 2}{3 \cdot \log 2} = \frac{2^{3x+5}}{3 \log 2} + c.$$

12) $\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$ is 1) $\frac{1}{2} \sin 2x + c$ 2) $-\frac{1}{2} \sin 2x + c$ 3) $\frac{1}{2} \cos 2x + c$
 4) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$.

$$\begin{aligned} \sin^8 x - \cos^8 x &= (\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2 = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x) \\ &= (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= (\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x)(-\cos 2x) \\ &= (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)(-\cos 2x) \\ \therefore \int \frac{(\sin^8 x - \cos^8 x)}{(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)} dx &= \int -\cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + c = (-1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)(-\cos 2x) \end{aligned}$$

13) $\int \frac{e^x(x^2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} x + 1)}{x^2 + 1} dx$ is

- 1) $e^x \tan^{-1}(x+1) + c$ 2) $\tan^{-1}(e^x) + c$ 3) $\frac{e^x (\tan^{-1} x)^2}{2} + c$ 4) $e^x \tan^{-1} x + c$.

$$\int \frac{e^x [(x^2+1) \tan^{-1} x]}{(x^2+1)} dx + \int \frac{e^x}{1+x^2} dx.$$

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x).$$

$$\int e^x \left[\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right] dx = e^x \tan^{-1} x + c.$$

14) $\int \frac{2^2 + \cos^2 x}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{cosec}^2 x dx$ is

- 1) $\cot x + \sin^2 x + c$ 2) $-\cot x + \tan^2 x + c$ 3) $-\tan x + \cot^2 x + c$
 4) $-\cot x - \tan^2 x + c$.

$$\int \frac{x^2 + \cos^2 x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1 + \cos^2 x}{x^2 + 1} \cdot \cos x dx$$

$$= \int \frac{(x^2 + 1) \cos x}{x^2 + 1} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + x^2} \cdot \cos x dx$$

$$= \int \cos x dx - \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= -\cot x - \tan^{-1} x + C.$$

15) $\int x^2 \cos x dx$ is

1) $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$ 2) $x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$

3) $-x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \sin x + C$ 4) $-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$

$$u v - u' v_1 + u'' v_2$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$u = x^2$$

$$u' = 2x$$

$$u'' = 2$$

$$dv = \cos x$$

$$v = \sin x$$

$$v_1 = -\cos x$$

$$v_2 = -\sin x$$

16) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} dx$

1) $\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x + C$ 2) $\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

3) $\log |x + \sqrt{1-x^2}| - \sqrt{1-x^2} + C$ 4) $\sqrt{1-x^2} + \log |x + \sqrt{1-x^2}| + C$

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \times \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-t dt}{t} = -t = -\sqrt{1-x^2}$$

$$t = 1-x^2$$

$$t dt = -2x dx$$

$$-t dt = x dx$$

17) $\int \frac{dx}{e^x - 1}$ is

1) $\log |e^x| - \log |e^x - 1| + C$ 2) $\log |e^x| + \log |e^x - 1| + C$

3) $\log |e^x - 1| - \log |e^x| + C$ 4) $\log |e^x + 1| - \log |e^x| + C$

$$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int \frac{dt}{t} = \log |t|$$

$$= \log |1 + e^{-x}| = \log \left| 1 + \frac{1}{e^x} \right|$$

$$= \log \left| \frac{e^x + 1}{e^x} \right|$$

$$= \log |e^x + 1| - \log |e^x| + C$$

18) $\int e^{-4x} \cos x dx$ is

1) $\frac{e^{-4x}}{17} [4 \cos x - \sin x] + C$ 2) $\frac{e^{-4x}}{17} [-4 \cos x + \sin x] + C$

3) $\frac{e^{-4x}}{17} [4 \cos x + \sin x] + C$ 4) $\frac{e^{-4x}}{17} [-4 \cos x - \sin x] + C$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] = \frac{e^{-4x}}{17} [-4 \cos x + \sin x] + C.$$

19) $\int \frac{x^2}{\tan^2 x - 1} dx$ is 1) $2 \log \left| \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right|$ 2) $\log \left| \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right|$ 3) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} \right|$
 4) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right|$

$$\int \frac{dx}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| + C.$$

$$t = \tan x$$

$$dt = \sec^2 x dx.$$

20) $\int e^{-7x} \sin 5x dx$ is

1) $\frac{e^{-7x}}{74} [-7 \sin 5x - 5 \cos 5x] + C$

2) $\frac{e^{-7x}}{74} [7 \sin 5x + 5 \cos 5x] + C.$

3) $\frac{e^{-7x}}{74} [-7 \sin 5x - 5 \cos 5x] + C$

4) $\frac{e^{-7x}}{74} [-7 \sin 5x + 5 \cos 5x] + C.$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx + b \cos bx] = \frac{e^{-7x}}{74} [-7 \sin 5x - 5 \cos 5x] + C$$

21) $\int x^2 e^{x/2} dx$ is 1) $x^2 e^{x/2} - 4x e^{x/2} - 8e^{x/2} + C$ 2) $2x^2 e^{x/2} - 8x e^{x/2} - 16e^{x/2} + C$
 3) $2x^2 e^{x/2} - 8x e^{x/2} + 16e^{x/2} + C$ 4) $\frac{x^2 e^{x/2}}{2} - \frac{x e^{x/2}}{4} + \frac{e^{x/2}}{8} + C.$

$$= uv - u'v_1 + u''v_2$$

$$= 2e^{x/2}x^2 - 4xe^{x/2} + 16e^{x/2} + C.$$

$$u = x^2$$

$$u' = 2x$$

$$u'' = 2$$

$$dv = e^{x/2}$$

$$v = 2e^{x/2}$$

$$v_1 = 4e^{x/2}$$

$$v_2 = 8e^{x/2}$$

22) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx$ is 1) $\sqrt{x^2-1} - 2 \log |x| + \sqrt{x^2-1} + C$

2) $\sin^{-1} x - 2 \log |2 + \sqrt{x^2-1}| + C$ 3) $2 \log |2 + \sqrt{x^2-1}| - \sin^{-1} x + C$

4) $\sqrt{x^2-1} + 2 \log |2 + \sqrt{x^2-1}| + C.$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = +\sqrt{x^2-1} + 2 \log |2 + \sqrt{x^2-1}| + C$$

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad t^2 = 1-x^2$$

$$-x dt = dx$$

$$= \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \sin^{-1} t = 2 \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$$

23) $\int \frac{dx}{x \sqrt{(\log x)^2 - 5}}$ is 1) $\log |x + \sqrt{x^2-5}| + C.$ 2) $\log |\log x + \sqrt{\log x - 5}| + C$
 3) $\log |\log x + \sqrt{(\log x)^2 - 5}| + C$ 4) $\log |\log x - \sqrt{(\log x)^2 - 5}| + C.$

$$\int \frac{dt}{t^2 - (5)^2} = \log \left| \frac{t + \sqrt{t^2 - 5}}{t - \sqrt{t^2 - 5}} \right|$$

$$= \log |\log x + \sqrt{(\log x)^2 - 5}| + C$$

$$t = \log x \quad dt = \frac{1}{x} dx$$

24) $\int \sin \sqrt{x} dx$ is

- 1) $2(-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}) + C$ 2) $2(-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}) + C$
 3) $2(-\sqrt{x} \sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}) + C$ 4) $2(-\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + C$

$$\int \sin t \cdot 2t dt = 2 \int t \sin t dt$$

$$= 2 [uv - u'v_1]$$

$$= 2 [-t \cos t + \sin t]$$

$$= 2 [-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}] + C.$$

$$x = t^2$$

$$u = t \quad dv = \sin t \quad dx = 2t dt.$$

$$u' = 1 \quad v = -\cos t$$

$$v_1 = -\sin t$$

25) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ is

- 1) $2\sqrt{x}(1 - e^{\sqrt{x}}) + C$ 2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - 1) + C$ 3) $2\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) + C$ 4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$

$$\int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t e^t dt = 2 [t e^t - e^t]$$

$$= 2 e^t (t - 1)$$

$$= 2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C$$

$$u = t \quad dv = e^t$$

$$u' = 1 \quad v = e^t$$

$$v_1 = e^t$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt.$$

T. G. Venkatesan

9444 209677.

நிகழ்தகவு - குறிப்புகள்.

1. சமவாய்ப்புச் சோதனை!

1. ஒரு சோதனையின் விளைவுகளைக் கூடிய சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளை முன்கூட்டியே அறிந்துகொடுக்க முடியும்.
2. சோதனைக்கு முன்பே விடவிடக் கணிக்க இயலாது.
3. ஒரு நிகழ்வு நிகழும் சமத்திய கூறுகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளும் மீண்டும் மீண்டும் பயன் படுத்த இயலாது.

2) கூறுகள்: சமவாய்ப்புச் சோதனையின் சமவாய்ப்பு நிகழ்தகவுகளையும் கொண்டு கணக்கிட்டுக் கூறுகள் சமப்படுகின்றன.

3) ஒரு சோதனையின் விளைவுகளை நிகழ்த்துகள்: இது நிகழ்த்துகள் ஒரு சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளும் மீண்டும் மீண்டும் பயன் படுத்த இயலாது. $A \cap B = \emptyset$.

4) இது நிகழ்த்துகள் ஒரு சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளும் மீண்டும் மீண்டும் பயன் படுத்த இயலாது. $A \cap B \neq \emptyset$.

5) $n(S) = (\text{நிகழ்த்துகளின் எண்ணிக்கை})$ $n(S) = 10$
 Ex: நிகழ்த்துகள் 2-ன் நிகழ்த்துகள் 2. $n(S) = 2$
 10 நிகழ்த்துகள் 2-ன் நிகழ்த்துகள் 2.

6. A, B சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு
- 1) $A \cup B$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு
- 2) $A \cap B$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு
- 3) $\bar{A}$, $\bar{B}$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு
4. $(A \cap B)$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு

7). ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுகள் S சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு ஒரு நிகழ்த்துகள் A சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு S சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு $n(S)$, $n(A)$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு

8) ஒரு சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு $P(A) \geq 0$.

9) $0 \leq P(A) \leq 1$

10) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (A, B சமவாய்ப்புச் சமத்திய கூறுகளைக் கொண்டு)

11) $P(S) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

12) $\sum_{i=1}^n P_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1.$

13) நிகழ்தகவின் மதிப்புடன் விநியோகம் சமனாகியும் கிடைக்காமை.

14) உறுப்பு களின் எண்ணிக்கை மிக அதிக சமயம் கிடைக்கும் சேர்ப்பியை வினாப்படி (combination) உறுப்பினரின் 2-ம் உறுப்பு களின் எண்ணிக்கை காணலாம்.

(X) 15) கூடுதல் மதிப்பும் கூடுதல் மதிப்பு விகிதம் (Odds)

ஒரு நிகழ்ச்சியின் A-க்கு கூடுதல் மதிப்பு மிகுந்த 2-ம் மதிப்பு வினாவுக்கு எதிர்ப்பு மதிப்பு வர விதிமுறை.

a-என்பது ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு வரக்கூடிய நிகழ்ச்சியின் மதிப்பு
b-என்பது ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு வரக்கூடிய நிகழ்ச்சியின் மதிப்பு
என்பதையும் குறிப்பிடுக $P(A) = \frac{a}{a+b}.$

ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வுக்கு கூடுதல் மதிப்பு $a:b.$

மிகுந்த மதிப்பு $b:a.$

16) நடக்க வேண்டிய நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $= 0.$

17) A-என்பது A-ன் நிகழ்ச்சியானால்

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad \text{அவ் } P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

18) A, B-என்பது ஏதாவது கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சி, இன்னும்
இன்னும் பிறப்பியாகவும் கிடைக்கக்கூடிய என்ன

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$$

19) நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்: A, B-என்பது கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சி
எனில் $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

A, B-என்பது ஏதாவது வரக்கூடிய நிகழ்ச்சி காரணம் $P(A \cap B) = 0$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$$20) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\text{அவ் } P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) \\ = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

21) நிகழ்ச்சி A ஏதாவது நிகழ்ச்சியின் நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்ச்சியின்
பின் காரணம் $P(B/A)$ என்னும்படி மிகுந்த. மதிப்பு

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0 \\ P(A) \neq 0.$$

$$P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$$

22) நிகழ்தகவின் பகுக்கல் தேற்றம்

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) \text{ (அ)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A) \text{ .}$$

23) A, B இது சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளின்மீது $P(B|A) = P(B), P(A) > 0$
 $P(A|B) = P(A) P(B) > 0$.

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

24) A, B இது சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளின்மீது

- 1) $\bar{A}, \bar{B}$ சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளாகும்
- 2) A, $\bar{B}$ சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளாகும்
- 3) $\bar{A}, B$ சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளாகும்.

25) A, B இது நிகழ்ச்சிகள் $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

1. A, B ஒன்றையொன்றை விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது
- 2) A, B சுதந்திர நிகழ்ச்சிகளின்மீது அவை ஒன்றையொன்றை விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது.

நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு:

26) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்றை விலக்கிய மற்றும் ஈழமொழிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B என்பது கூறுதல் சீர்தர நிகழ்ச்சி (B என்பது $A_1, A_2, \dots, A_n$ ல் நிகழ்ச்சி)

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

27) பேய்க்கத் தேற்றம்.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ஒன்றையொன்றை விலக்கிய மற்றும் ஈழமொழிய நிகழ்ச்சிகளாகும் $P(A_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$. B என்பது ஏதோ ஒரு நிகழ்ச்சியாகும் ($A_1, A_2, \dots, A_n$ ல் உள்ளது) $P(B) > 0$ எனில்

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

குறிப்பு: கூட்டு நிகழ்தகவு என்பது $A_1, A_2, \dots, A_n$ ல் உள்ளவையுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு நிகழ்தகவு.

பேய்க்கத் தேற்றம்: B என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

குறிப்பிட்ட $A_1, A_2, \dots, A_n$ ஒன்றில் நிகழ்தகவு.

வினா: 12.1 A, B, C எனிய தேர்ந்த எழுத்துகள் அடங்கிய தேர்வு நிகழ்ச்சியை
பட்டியல் காட்டி கொண்டு ஒரு கோடுகளில் நிகழ்விக்கப்பட்டு நிகழ்வுகளை
பிரிவுபடுத்தியுள்ள பட்டியல் காட்டி கொண்டு, இவை நிகழ்வுகளை
பிரிவுபடுத்தியுள்ள பட்டியல் காட்டி கொண்டு.

5) $P(A) = 0.421$, $P(B) = 0.527$ $P(C) = 0.042$

உதாரணம்: $P(A) \geq 1$, $0 \leq P(A) \leq 1$, அதாவது சான்றதே நிகழ்வு
 - நிகழ்ச்சியாகவும் கருதப்படும் | திட்டமிடப்படும்.
 நிகழ்வு இல்லாததே நிகழ்வு 0 எனவும் கருதப்படும் | திட்டமிடப்படும்.
 - $P(A) \geq 1$ அதாவது $P(A) \geq 1$ எனவும் கருதப்படும்.
 அதாவது 0 க்குக் குறைவாகும் | கருதப்படும்.

$$5. P(A) + P(B) + P(C) = 0.421 + 0.527 + 0.042 = 0.990 \neq 1. \text{ So not a probability.}$$

[illegible]

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} n(S) = 10

A = {2, 4, 6, 8, 10}

n(A) = 5

(Even numbers)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

B = {3, 6, 9}

n(B) = 3

(Multiples of 3)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

Example 1.3: The sample space of a coin tossed three times is S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}.
1) Find the probability of getting 2 heads. 2) Getting at least 2 heads. 3) Getting at least 1 head.
Solution: The sample space of a coin tossed three times is S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}.
1) Let A be the event of getting 2 heads. Then A = {HHT, HTH, THH}.
2) Let B be the event of getting at least 2 heads. Then B = {HHT, HTH, THH, HHH}.
3) Let C be the event of getting at least 1 head. Then C = {HHT, HTH, THH, HHH, HTT, THT, TTH}.

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT} n(S) = 8

A = Outcomes of 2 heads

$$= \{HHT, HTH, THH\} \quad n(A) = 3 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

B = Outcomes of at least 2 heads

$$= \{HHT, HTH, THH, HHH\} \quad n(B) = 4 \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

C = Outcomes of at least 1 head

$$= \{HHT, HTH, THH, HHH, HTT, THT, TTH\} \quad n(C) = 7 \quad P(C) = \frac{7}{8}$$

உதா: 12.4: பதின்ம எண்களின் மண்டபம் பகுதி என்றால் 1) உதிக் கருதுவது
2) அதிபட்சமமாக இருந்து தலைகள் 3) இன்றித் தலைகள் இருந்து தலைகள்
கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

2.4.4: 10 பதின்ம எண்களின் மண்டபம் 3 தனித்தனியாக எடுத்துக் கொள்ள
 $\therefore n(S) = 2^{10}$: 1) உதிக் கருதுவது 4 மண்டபம் $n(A) = 10C_2$

2) அதிபட்சமமாக இருந்து தலைகள் மண்டபம் அதற்கு இன்றித் தலைகள்
 இருந்து தலைகள் மண்டபம் 0, 1, 2 தலைகள் இருந்து தலைகள்
 கருதுவது $n(B) = 10C_0 + 10C_1 + 10C_2$.

3) இன்றித் தலைகள் இருந்து தலைகள் மண்டபம் உதிக் கருதுவது
 கருதுவது. அதற்கு 3, 4, ..., 9, 10 தலைகள் இருந்து தலைகள்.
 கருதுவது $n(C) = n(S) - (10C_0 + 10C_1)$

$$n(S) = (10C_0 + 10C_1) + n(C) \quad \therefore n(C) = (1024 - (1 + 10))$$

$$n(S) = 2^{10} = 1024.$$

$$1) A = \text{உதிக் கருதுவது} \quad n(A) = 10C_2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{45}{1024}$$

2) $B = \text{அதிபட்சமமாக இருந்து தலைகள்}$

$$n(B) = 10C_0 + 10C_1 + 10C_2 \\ = 1 + 10 + 45 = 56$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{56}{1024}$$

3) $C = \text{இன்றித் தலைகள்}$

$$n(C) = n(S) - (10C_0 + 10C_1)$$

$$= 1024 - (1 + 10)$$

$$= 1013$$

$$\therefore P(C) = \frac{1013}{1024}$$

உதா: 12.5 ஒரு சீரான பகைமை ஒரு இன்றித் தலைகள் மண்டபம்

1) கருதுவது 2) இன்றித் தலைகள் கருதுவது
 கருதுவது.

2.4.5: 5 மண்டபம் $n(S)$ கருதுவது.

1) $A = \text{கருதுவது} \quad n(A)$ கருதுவது

2) $B = \text{இன்றித் தலைகள்} \quad n(B)$ கருதுவது

மண்டபம் கருதுவது கருதுவது.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$n(S) = 9$$

$$A = \text{கூடுதல் மதிப்பு: } \{2, 4, 6\} \quad n(A) = 3 \quad P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$B = \text{கூடுதல் மதிப்பு: } \{3, 6\} \quad n(B) = 2 \quad P(B) = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

எ.கா: 12.6 எடுத்துக்காட்டு: 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம்.

வழிமுறை: 1) 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம். 2) 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம். 3) 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம்.

$$S = \{ (11) (12) (13) (14) (15) (16) \\ (21) (22) (23) (24) (25) (26) \\ (31) (32) (33) (34) (35) (36) \\ (41) (42) (43) (44) (45) (46) \\ (51) (52) (53) (54) (55) (56) \\ (61) (62) (63) (64) (65) (66) \}$$

$$n(S) = 36$$

$$A: \text{கூடுதல் 7: } \{(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2,5) (1,6)\} \quad n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B: \text{கூடுதல் 9: } \{(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)\} \quad n(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{4}{36}$$

$$C: \text{கூடுதல் 12: } \{(6,6)\} \quad n(C) = 1$$

$$P(C) = \frac{1}{36}$$

$$1) P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$3) P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$$

எ.கா: 12.7 நடப்பு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம். 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம். 3) 2019-2020 ஆம் ஆண்டு சர்க்கார் தேர்வுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு விவரம்.

பயிற்சாலை: கொடுக்கப்பட்ட விதிகளை $A:B$, $B:C$ யின் $A:B:C$ டைக்
 உதும் கொடுக்கப்பட்டதில் விதிவாதி K எவ்வளவு.
 3 விதிகளைக் கொண்டு $n(S)$ கிடைக்கும் அறிவின் நிகழ்தகவு என்ன.

$$A:B = 3:1 \quad X, Y, Z \text{ எவற்றின் மூலம் நிகழ்கிறது} A, B, C \text{ என்ன}$$

$$B:C = 2:1 \quad \therefore A:B:C = 6:2:1.$$

$$A = 6K, B = 2K, C = K \text{ என்க. } n(S) = 9K$$

$$X \text{ எவ்வளவு நிகழ்கிறது: } \frac{6K}{9K} = \frac{2}{3}$$

$$Y \text{ எவ்வளவு நிகழ்கிறது: } \frac{2K}{9K} = \frac{2}{9}$$

$$Z \text{ எவ்வளவு நிகழ்கிறது: } \frac{K}{9K} = \frac{1}{9}$$

த.கா: 12.8 : இன்று உபயோக ருபர்களுக்கு இன்று கழிவுகள்
 எடுக்கப்பட்டு இன்று உணவுகளை வைக்கப்பட்டு அவர்களுக்கான
 உணவுகளை எடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றையே மாடுகளிடம் கழிவுகளை
 உணவாகவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1) இதுகாட்சி உணவுகளை 2) எல்லா
 கழிவுகளுக்கும் உபயோக உணவாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சாலை: A, B, C யின் கழிவுகளை 1, 2, 3 என குறிப்பிடுக. இவை எப்படி
 எல்லாம் மாற்றி மாற்றி உபயோகமாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டு
 எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. 1) உணவுகளை உணவாக கொடுக்கப்பட்டு
 உணவாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, ... எல்லாம் உபயோக உணவாக கொடுக்கப்பட்டு
 உணவாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A	1	1	2	-	2	3
B	2	3	1	-	3	2
C	3	2	3	-	1	1

$$n(S) = 6.$$

$$1) \text{ இதுகாட்சி உணவாக கொடுக்கப்பட்டு } A = \{C_2, C_3, C_6\} \quad n(A) = 3 \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$2) \text{ எல்லாம் உபயோக உணவாக கொடுக்கப்பட்டு } B = \{C_4, C_5\} : n(B) = 2 \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

பொருள்: எழுத்து நிகழ்ச்சி விவரம் அடிப்படையில் அமைந்திருக்கிறது.

சமூகம் மற்றும் பாலகம் நிகழ்ச்சிகளை 2018

ചിത്രം 2.2.2-ൽ കാണിക്കുന്നു. നികത്തുക: $\frac{5.1 \times 10}{1.2 \times 10}$

$n(S) = 12C_2 = 66$ തിരഞ്ഞെടുക്കാനിടയുള്ള സംയോജനങ്ങൾ: 66

பெயர்: சுருதி
 பள்ளி: சென்னை

நாயுடுகள் கறங்குமலி

ചുരുക്കത്തിൽ: 4

ഭേദിനി ശബ്ദം : 2.

മുകളിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന സമവാക്യം: $4C_2 = \frac{n(n-1)}{2} = 6$

$$\therefore \{ \text{പ്രകൃതി വികാസം } \} = 66 - 6 = 60.$$

$\therefore$ അനുപാതം = 6:60

$$P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

12-1 டீன் உடும் சூண்ணை டயாண்டா உலகத்திய A, B, C, D என்னு நான்
நிதடித்தி கண்ண டீன் உடும் சூண்ணை டயாண்டா உலகத்திய
நிதடித்தி கண்ண டீன் உடும் சூண்ணை டயாண்டா உலகத்திய

1) $P(A) = 0.15$ $P(B) = 0.30$ $P(C) = 0.43$ $P(D) = 0.12$

2) $P(A) = 0.22$ $P(B) = 0.38$ $P(C) = 0.16$ $P(D) = 0.34$

3) $P(A) = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{3}{5}$ $P(C) = \frac{1}{5}$ $P(D) = \frac{1}{5}$.

உயிடுதாறு ! ஏ.இ. 12.1 ஸ் கௌரியா 19.

$$1) P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = .15 + .30 + .43 + .12 = 1$$

Anjilw kerson (2)

2) $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = .22 + .38 + .16 + .34 = 1.10 \neq 1$
 $\therefore$ ຂອງ ສະໄໝ ບໍ່ຖືກ.

3) $P(c) = -\frac{1}{5} < 0$ எனவே இதுவும் பதிலாகவில்லை.

2) இரண்டு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டப் படுகின்றன.

12.1)

1) ஒரே தலை மற்றும் ஒரே தலை

2) சித்திரம் மற்றும் கிடைப்பு தலை நிகழ்வுகள் உள்ளன.

வாழ்க்கை: 6 தனித்த எழுத்துகள் $n(S) = 6$ உள்ளன.

5ல் ஒரே தலை மற்றும் கிடைப்பு தலை A என்க $n(A) = 2$ உள்ளன.

சித்திரம் மற்றும் கிடைப்பு தலை B என்க $n(B) = 4$ உள்ளன.

மேலே உள்ள கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம். கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம். கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம். கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம். கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம். கிடைப்பு தலை கிடைக்கலாம்.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $n(S) = 4$.

A = ஒரே தலை மற்றும் ஒரே தலை: $\{HH, TT\}$ $n(A) = 2$ $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

B = சித்திரம் மற்றும் கிடைப்பு தலை: $\{TH, HT, HT, TH\}$ $n(B) = 4$
 $P(B) = \frac{4}{4} = 1$.

3) ஒரே மையத்தில் 5 மையங்கள் உள்ள 4 ஆய்வுகள் மையங்களில் உள்ளன. அவற்றுள் 4 மையங்கள் கிடைப்பு மையங்கள் எடுக்கப் பட்டன.

1) ஒரே மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள்

2) கிடைப்பு மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள் கிடைப்பு மையங்கள் எடுக்கப் பட்டன.

வாழ்க்கை: 5 M 4 A. மையங்கள் 9 மையங்களில் 2 எடுக்கப்படும். கிடைப்பு மையங்கள் எடுக்கப்படும் (Combinations) உள்ளன. கிடைப்பு மையங்கள் எடுக்கப்படும். 1) சித்திரம் ஒரே மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள். 2) கிடைப்பு மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள். 3) கிடைப்பு மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள். 4) கிடைப்பு மையங்கள் ஒரே ஆய்வுகள் மையங்கள்.

மே - 5 ஆ - 4.

$$n(S) = {}^9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36.$$

$$1) \text{ ஒரே ஆய்வுகள் ஒரே மையங்கள் } = A = {}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 \times 4 = 20$$

$$\therefore P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

2) இரண்டுமே ஆகியவை: $n(B) = 52 + 42$

$$= 16$$

$$\therefore P(B) = \frac{16}{36} \frac{4}{9}$$

4) 1) ஒரு சாதாரண உருத்திரம் 2) ஒரு வீல் உருத்திரம் 53 ஆயிரத்துக்கிடை
12.1 உருத்திரம் காண நிகழ்தகவுகள் காண்க.

உத்தரவு: ஒரு சாதாரண உருத்திரம் 52 வார்டும் 1 நாயகம்
ஒரு வீல் உருத்திரம் உருத்திரம் 52 வார்டும் வீல் 2 நாயகம்
2-ம் காண. 53 வார்டு ஆயிரத்துக்கிடைகரு பிழைக்கிறார்கள்
உருத்திரம் வீல் நாயகம் காண்கிறார்கள் நிகழ்தகவு
காண்கிறார்கள்.

1) சாதாரண உருத்திரம் 52 வார்டும் 1 நாயகம் காண்கிறார்கள்.

52 வார்டு 52 ஆயிரத்துக்கிடைகரு உருத்திரம். 53 வார்டு ஆயிரத்துக்கிடை
கரு உருத்திரம் 1 நாயகம் காண்கிறார்கள்.

பிறகு 1 நாயகம் காண்கிறார்கள்: {ஆ, தி, ரெ, 4, வி.வெ, ச}

$$n(S) = 7.$$

$$A = \text{ஆயிரம் } n(A) = 1 \quad P(A) = \frac{1}{7}$$

ஒரு வீல் உருத்திரம் உருத்திரம் 52 வார்டும் 2 நாயகம்
காண்கிறார்கள். 52 வார்டு 52 ஆயிரம் காண்கிறார்கள் 53 வார்டு
ஆயிரத்துக்கிடைகரு வீல் காண்கிறார்கள் 2 நாயகம் காண்கிறார்கள்.
பிழைக்கிறார்கள் காண்கிறார்கள் காண்கிறார்கள்:

ஆ, தி

தி, ரெ

ரெ, 4.

4, வி.

வி, வெ

வெ, ச

ச, ஆ.

$$\therefore n(S) = 7.$$

$$\text{ஆயிரம் } A = \{(\text{ஆ, தி})(\text{ச, ஆ})\}$$

$$n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{2}{7}$$

5) 12.1) எட்டு நாயகங்கள் ஒரு மூன்று சிறப்பு உருத்திரம்

1) நாயகம் காண்கிறார்கள் 2) காண்கிறார்கள் காண்கிறார்கள்

3) சிறப்பு உருத்திரம் காண்கிறார்கள் காண்கிறார்கள் காண்கிறார்கள்.

உத்தரவு: எட்டு 12.4 ல் காண்கிறார்கள்.

$$n(S) = 2^8 = 256$$

$$1) A = \text{ആധാര കർമ്മം ചെയ്തവർ} \quad n(A) = 8C_2 = \frac{48.7}{1.25} = 28$$

$$P(A) = \frac{28}{256}$$

$$2) B = \text{കൂടുതൽ കൃത്യതയുള്ളവർ} \\ n(B) = n(S) - \{8C_0 + 8C_1\} \\ = 256 - (1 + 8) \\ = 247$$

$$P(B) = \frac{247}{256}$$

$$3) \text{ മുകളിൽ പറഞ്ഞ 2 കൃത്യതയുള്ളവർ}$$

$$n(C) = 8C_0 + 8C_1 + 8C_2$$

$$= 1 + 8 + 28 = 37$$

$$P(C) = \frac{37}{256}$$

6) (12.1) ഒരു 100 പേർ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു ജനസമൂഹത്തിൽ നിന്ന് ഒരു വ്യക്തിയെ തിരഞ്ഞെടുത്ത് അതിന്റെ ലിംഗം (A) അല്ലെങ്കിൽ വയസ്സ് (B) നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു.

മുകളിൽ പറഞ്ഞവർ: 100 പേർ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ജനസമൂഹം $n(S) = 100$

കുറഞ്ഞ വയസ്സ് $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$

$n(A) = 25$, $P(A) = \frac{25}{100}$

80-ൽ കൂടുതൽ വയസ്സ് $B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$

അതുകൊണ്ട് $n(B) = 12$, $P(B) = \frac{12}{100}$

$$n(S) = 100$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

$$n(A) = 25 \quad P(A) = \frac{25}{100}$$

$$B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$$

$$n(B) = 12 \quad P(B) = \frac{12}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{25}{100} + \frac{12}{100} = \frac{37}{100}$$

பயிற்சி 12-2.

தேவகாண்ட உருட்டிவிடும் யுகம் 7 நிடைக்க சிகழ்ந்தனவென்க.

பகல 2 ஓட்டுகளில் 7 நட்சத் கவனந் நிதய்த்தி . நட்சத் கவனந் நிதய்த்தி - தியின் நிதய்த்து = 0

$$\therefore p(7) = 0.$$

மே. 2013: இரண்டாம் பருவத்தில் இருந்து இரண்டாம் பருவம் இரண்டாம் பருவம்
இருந்து இரண்டாம் பருவம் இரண்டாம் பருவம் இரண்டாம் பருவம்

മഴയ്ക്കു: മഴയിൽ 1 (5) കുറഞ്ഞതാണിവിടെ - മിനുക്കു 9 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ടാകും

கருத்தரைப் புகழ்ந்தானெனத் தழுத டியவையு. $n(s) = 2$.

இருவரும் தனித்தனியாக உருத்தெழுத்துகள்
 குறையுந்தது இது கிடைக்கப் பெறும்படியான 2, 3, 4, ... 9 தமது தமது
 கிடைக்கப்பெறும் சத்தத்தையும்கூட உருத்தெழுத்துகள்.

0,1 தராதகிடைக்க நித்யத்தையுடன் | மருந்து உபயோகம் கடைபிடிக்கவேண்டிய நித்யத்தையுடன்.

$$n(s) = \frac{9}{2} = 512. \quad A = \{ \text{ഒന്നിങ്ങനെ 512 എണ്ണം} \}$$

$$n(\bar{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10$$

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{512}.$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{512} = \frac{502}{512} = \frac{251}{256}$$

∴ தேர்வு: A, B என்பன ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்வுகள், B-ன் நிகழ்வின்மேல் P(A|B) = P(A) - P(A ∩ B)

உதாரணம்: ஒருவர் பட்டாபாசு போட்டு அதில் இவ்வாறு செய்தாலும்
ஒருநிலாக இறங்குகிறது அதிலிருந்து A சைவ வேறுபாட்டில்
எனது நினைவுக்கு வருகிறது.

பலத்திருநாள்

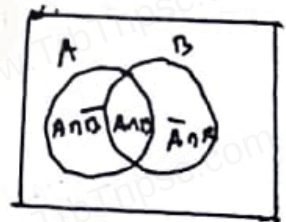
$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)]$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B})$$

$$\textcircled{B} \text{ 7} \text{ 1} \text{ 4} = P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



$A \cap B, A \setminus B$ தொண்டாவதான
உலக்தும் நிகழ்ச்சிகள்

தேர்வுகள்: நிகழ்தகவல்கள் கூட்டல் தேர்வுகள்.

A, B ஏதாவது இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டுத் தகவல் $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A, B ஏதாவது இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின்

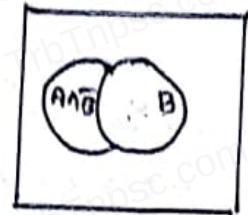
மேல்நிலைகள் $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$

$$P(A \cup B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup B]$$

$$= P[A \cap \bar{B}] + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

ஆகவே A, B இரண்டு தகவல்களின் கூட்டுத் தகவல் நிகழ்ச்சிகளின் $A \cap B = \emptyset$.

$$\therefore P(A \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{எனவே } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

எ.கா: 12.14) $P(A) = 0.52$ $P(B) = 0.43$, $P(A \cap B) = 0.24$ எனில்

1) $P(A \cap \bar{B})$ 2) $P(A \cup B)$ 3) $P(\bar{A} \cap B)$ 4) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ கணக்கிடுக.

$$1) P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0.52 - 0.24 = 0.28$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.52 + 0.43 - 0.24 = 0.71$$

$$3) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.43 - 0.24 = 0.19$$

$$4) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - 0.24$$

$$= 0.76$$

12.15: பெரும்பாலான கருத்துக்கள் தயாராகவும், சில சமயங்களில் மாற்றம்
 அல்லது மாற்றம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.12 மற்றும் மத்தியமாகவும்
 மீண்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.25 மற்றும் மீண்டும் மீண்டும்
 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.07 எனில் 1) இரண்டு சம்பவங்களின்
 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 2) ஒரே சம்பவம் மீண்டும் கிடைப்பதற்கான
 நிகழ்தகவு காண்க.

விடை: இரண்டு சம்பவங்களின் $P(I \cup C)$, ஒரே சம்பவம் மீண்டும் $P(I \cap C) + P(I \cap C)$ கருதுகோளும். கருதுகோளும் சமத்துவம்
 சமத்துவம் காண்க.

$$P(I) = 0.12 \quad P(C) = 0.25 \quad P(I \cap C) = 0.07.$$

$$1. P(I \cup C) = P(I) + P(C) - P(I \cap C)$$

$$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30.$$

$$2) P(I \cap C) + P(I \cap C) = P(I) - P(I \cap C) + P(C) - P(I \cap C)$$

$$= P(I) + P(C) - 2P(I \cap C)$$

$$= 0.12 + 0.25 - 0.14 = 0.23$$

12.2) A மற்றும் B இரண்டு சம்பவங்களின் நிகழ்தகவுகள் $P(A) = \frac{3}{8}$

$P(B) = \frac{1}{8}$ எனில் 1) $P(\bar{A})$ 2) $P(A \cup B)$ 3) $P(\bar{A} \cap B)$ 4) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
 காண்க.

விடை: சமத்துவம் காண்க.

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad P(B) = \frac{1}{8}.$$

$$1) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$2) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$3) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$= P(B)$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$4) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B)$$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1$$

2) A மற்றும் B என்ன ஒரு சம்பவம் 4 சதவீதம் நிகழ்கிறது
 12.2 மற்றும் $P(A) = 0.35$ $P(A \cup B) = 0.85$ $P(A \cap B) = 0.15$
 என்ன
 கருவிக்.

அடிமூன்று: $P(A \cup B) = P(A \cup B)$, $P(A \cap B) = P(A \cap B)$
 $P(A \cup B) = P(A \cup B)$, $P(A \cap B) = P(A \cap B)$

$$1) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.85 - 0.15$$

$$= 0.70$$

$$P(A) = 0.35$$

$$P(A \cup B) = 0.85$$

$$P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$= 0.85 - 0.35 + 0.15$$

$$= 0.65$$

3) ஒரு பகடை கிடுமுறை 2000 படு கிறதும் மூன்று விடுவது 5
 12.2 விடுவது நிகழ்கிறது எனவும் கிரைடாவது மூன்று விடுவது 5 விடுவது
 B எனவும் கிரைடாவது $P(A \cup B)$ கருவிக்.

அடிமூன்று: பகடை கிடுமுறை 2000 படு கிறதும் (அ) கிடுபகடை ஒருமுறை
 2000 படு கிறதும் கிரைடாவது மூன்று விடுவது 5 விடுவது
 எதுவும், கிரைடாவது மூன்று விடுவது 5 விடுவது எதுவும் சதவீதம் கிரைடாவது
 ஒரு நிகழ்கிறது கிரைடாவது கிரைடாவது அது A, B எனக் கருவிக். $P(A \cup B)$
 கிரைடாவது எது கிரைடாவது கிரைடாவது.

$S = \{ (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) \\ (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) \\ (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) \\ (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) \\ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \\ (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) \}$

$$n(S) = 36$$

$A = \{ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \}$ $n(A) = 6$ $P(A) = \frac{6}{36}$
 $B = \{ (1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5) \}$ $n(B) = 6$ $P(B) = \frac{6}{36}$
 $A \cap B = \{ (5,5) \}$ $n(A \cap B) = 1$ $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

4) A என்ன நிதிக் கிடைக்கிறது 0.5 B என்ன நிதிக் கிடைக்கிறது 0.3 மற்றும் A யும் B யும் ஒன்றாகவோ அல்லது வேறொன்றாகவோ நிதிக் கிடைக்கும் சாத்தியம் 1) $P(A \cup B)$ 2) $P(A \cap B)$ 3) $P(\bar{A} \cap B)$ கணக்கிடுக.

அதிலிருந்து : $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.3$ $P(A \cap B) = 0$. மற்றும் சதவீதமாக பதிலளிப்பதற்கு எவ்வளவு.

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$2) P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) \\ = 0.5 - 0 = 0.5$$

$$3) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.3 - 0 = 0.3.$$

5) ஒரு நகரத்தில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் தனித்தனி வீடுகளில் பதில் அளிப்பதற்கு உதவி செய்கிறார்கள். ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96 1) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96 2) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96 3) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96

அதிலிருந்து : 1) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96 $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

2) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

$$P(A) = 0.96 \quad P(\bar{A}) = 0.04$$

$$P(B) = 0.96 \quad P(\bar{B}) = 0.04$$

$$2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \\ = 0.04 \times 0.04 = 0.0016$$

3) ஒரு நகரில் வீட்டுத் தீயணைப்புத் துறையினர் உதவி செய்கிற வீடுகளில் 0.96

$$1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \\ = 1 - 0.0016 = 0.9984$$

6) 12.5) ஒரு திரைப்படத்தின் வெளியீட்டிற்கு உதவியளிக்கும் வகையில் பத்திரிகைகள், தொலைக்காட்சி, ரேடியோ, மற்றும் பிற ஊடகங்கள் பங்களிப்புகள் செய்துள்ளன. பத்திரிகைகள் 0.48, தொலைக்காட்சி 0.36, ரேடியோ 0.20, மற்றும் பிற ஊடகங்கள் 0.12 பங்களிப்புகள் செய்துள்ளன. பத்திரிகைகள் மற்றும் தொலைக்காட்சி இரண்டும் செய்துள்ளன. பத்திரிகைகள் மற்றும் ரேடியோ இரண்டும் செய்துள்ளன. பத்திரிகைகள் மற்றும் பிற ஊடகங்கள் இரண்டும் செய்துள்ளன. தொலைக்காட்சி மற்றும் ரேடியோ இரண்டும் செய்துள்ளன. தொலைக்காட்சி மற்றும் பிற ஊடகங்கள் இரண்டும் செய்துள்ளன. ரேடியோ மற்றும் பிற ஊடகங்கள் இரண்டும் செய்துள்ளன.

பதிலளிக்கும்: 1) பத்திரிகைகள் மற்றும் தொலைக்காட்சி இரண்டும் செய்துள்ளன $P(D \cup M)$

2) ரேடியோ மற்றும் பிற ஊடகங்கள் இரண்டும் செய்துள்ளன $P[(D \cap M) \cup (D \cap R)]$

$$P(D) = 0.48 \quad P(M) = 0.36 \quad P(D \cap R) = 0.20$$

$$\begin{aligned} 1) P(D \cup M) &= P(D) + P(M) - P(D \cap M) \\ &= 0.48 + 0.36 - 0.20 \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P[(D \cap M) \cup (D \cap R)] &= P(D \cap M) + P(D \cap R) \\ &= P(D) - P(D \cap M) + P(M) - P(D \cap M) \\ &= P(D) + P(M) - 2P(D \cap M) \\ &= 0.48 + 0.36 - 0.40 \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

பயிற்சி - 12.5.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு: நிகழ்ச்சி A ஏற்படுவதற்கு நிகழ்ச்சி B நிகழும் வாய்ப்பை $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ எனக் கொள்ளலாம். $P(B/A) \neq 0$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0.$$

A, B இரண்டும் நிகழும் வாய்ப்பை $P(A \cap B)$ எனக் கொள்ளலாம். $P(A/B) = P(A)$ எனில் $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\begin{aligned} \therefore P(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & P(B/A) &= P(B) \\ \Rightarrow P(A) \cdot P(B) &= P(A \cap B) & P(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ & & P(A)P(B) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

எ.கா: 12.16) $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ எனில்

1) $P(A/B)$ 2) $P(\bar{A}/B)$ 3) $P(A/\bar{B})$ காண்க.

2) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

3) $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$

3) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

உதாரணம்:

$P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.5$ $P(A \cap B) = 0.2$.

1) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 2/5$

2) $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$
 $= \frac{0.5 - 0.2}{0.5} = 3/5$

3) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$
 $= \frac{0.6 - 0.2}{1 - 0.5} = 4/5$

குறிப்பு: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ எனில், A, B சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும். இதை மறுதலிப்பதற்கு:

எடுத்துக்காட்டு: 12.8) A மற்றும் B சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும் எனில்

- 1) $\bar{A}$, $\bar{B}$ சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும்
- 2) A, $\bar{B}$ சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும்
- 3) $\bar{A}$, B சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும்.

Proof: A, B சுதந்திர நிகழ்வுகளாகும் $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

1. $\bar{A}$, $\bar{B}$ சுதந்திர நிகழ்வுகளாக $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

LHS: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A))$

$= (1 - P(A))(1 - P(B))$

$= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

2) A, B சார்பற்ற நிகழ்வுகளாக $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ எனில்
 HHS: $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$
 $= P(A) - P(A) \cdot P(B)$
 $= P(A) (1 - P(B))$
 $= P(A) P(B)$

3) A, B சார்பற்ற நிகழ்வுகளாக $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$ எனில்
 HHS: $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
 $= P(B) - P(A) \cdot P(B)$
 $= P(B) (1 - P(A))$
 $= P(B) P(\bar{A})$

எ.கா: 12-18 52 டீட்டுகள் கொண்ட ஒரு டீட்டுகட்டி மீட்டர் இருக்கிறது. அதில் 4 வகையான கிரேடுகள் உள்ளன. அவற்றில் ஒன்று 4 Jack கிரேடுகள். எஞ்சியிருக்கும் கிரேடுகளில் 12 Jack கிரேடுகள் உள்ளன. 1) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 2) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 3) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது

உதாரண: 12-18 52 டீட்டுகள் கொண்ட 4 வகையான கிரேடுகள். அவற்றில் ஒன்று 4 Jack கிரேடுகள். எஞ்சியிருக்கும் கிரேடுகளில் 12 Jack கிரேடுகள் உள்ளன. 1) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 2) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 3) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது

1. டீட்டுகட்டியில் இருந்து டீட்டு எடுக்கப்படுகிறது.

1) $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, $n(S) = 52$.

A, B சார்பற்ற நிகழ்வுகள்.

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

2) டீட்டுகட்டியில் இருந்து டீட்டு எடுக்கப்படுகிறது.

$P(A \cap B) =$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

எ.கா 12-19: ஒரு மூன்று அலகுகள் கொண்ட கிரேடுகள் கொண்ட ஒரு கிரேடுகட்டி. அதில் 4 வகையான கிரேடுகள் உள்ளன. அவற்றில் ஒன்று 4 Jack கிரேடுகள். எஞ்சியிருக்கும் கிரேடுகளில் 12 Jack கிரேடுகள் உள்ளன. 1) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 2) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது 3) ஒரு கிரேடு எடுக்கப்பட்டு அதில் Jack கிரேடு இருக்கிறதா என்று பார்க்கும் போது

1. $P(E \cup F)$ 2) $P(E/F)$ 3) $P(\bar{E}/F)$ 4) E, F സ്വതന്ത്ര ഏകദേശങ്ങൾ.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad n(S) = 4$$

$$E = \{HH, HT\} \Rightarrow n(E) = 2 \quad P(E) = \frac{2}{4}$$

$$F = \{HH, TH\} \Rightarrow n(F) = 2 \quad P(F) = \frac{2}{4}$$

$$E \cap F = \{HH\} \Rightarrow n(E \cap F) = 1 \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

$$1) P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$2) P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$3) P(\bar{E} \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$$

$$= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$4) P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \therefore E, F$ സ്വതന്ത്ര ഏകദേശങ്ങളായിരിക്കുന്നു.

ഉദാ: 12.20) A, B സ്വതന്ത്ര ഏകദേശങ്ങളായിരിക്കുന്നു.

$P(A) = 0.4$ ആണെങ്കിൽ $P(A \cup B) = 0.9$, $P(B)$ കണ്ടുക.

മുഴുവൻ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ എന്ന് എഴുതുക

$$P(A) = 0.4 \quad P(B) = ? \quad P(A \cup B) = 0.9$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - (P(A) \cdot P(B))$$

$$= 0.4 + P(B) - (0.4 \cdot P(B))$$

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) (1 - P(A))$$

$$\frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = P(B)$$

$$= \frac{0.9 - 0.4}{1 - 0.4} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$$

7. க.ப. 12. 23 : ஒரு நகரத்தில் 2000 மக்கள்தொகை கொண்டிருக்கிறது. 4 இயக்குகளைப் போட்டு வரத்தக்க சமீபத்தில் 2000 மக்கள்தொகை கொண்டிருக்கிறது. மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு வரத்தக்க சமீபத்தில் 2000 மக்கள்தொகை கொண்டிருக்கிறது. (அ) இதுவரை நிகழ்ந்திருக்கிற நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
- 1) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6 நிகழ்ந்திருக்கிறது
 - 2) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6 நிகழ்ந்திருக்கிறது
 - 3) மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6 நிகழ்ந்திருக்கிறது
 - 4) மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6 நிகழ்ந்திருக்கிறது

வழிமுறை: 1) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 2) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 3) மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 4) மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0.4$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 0.6$$

1) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 2) முதல் இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0.4$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 0.6$$

3. மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0.4$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 0.6$$

4) மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6
 மேலும் 4 இயக்குகளைப் போட்டு நகரம் 0.4 மற்றும் 0.6

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0.4$$

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 0.6$$

2. A, B சாந்தியை நிதழ் உத்திரம்மணி ஒண்ணையுடைய நிகழ் நிகழ் திரைப்படங்களை திரைப்படம். தெற்கு 12.9.1954. பக்கம் 269.

உதாரணம்: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ பயன்படுத்தி $P(A)$ காண்க.
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ எனில் A, B சார்பற்ற நிகழ்வுகள் என்று அறிவிக்க.

$\therefore$ இளவகர்ப்பலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$.4 = P(B)(.8) \Rightarrow P(B) = \frac{.4}{.8} = \frac{1}{2}$$

4) $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.8$ மற்றும் $P(B|A) = 0.8$ எனில் $P(A|B)$ மற்றும் $P(A \cup B)$ கணக்கிடுக.

வழிமுறை: $P(B|A)$ மூலம் மூலம் $P(A \cap B)$ கணக்கிடுவதில் $P(A|B)$, $P(A \cup B)$ கணக்கிடுக.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.5}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.4$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.5 + 0.8 - 0.4 = 0.9$$

5) A, B எனும் இரண்டு நிகழ்வுகள் $P(A) = \frac{3}{4}$ $P(B) = \frac{2}{5}$ மற்றும் $A \cup B = S$ (செய்தவரை) எனில் $P(A|B)$ கணக்கிடுக.

வழிமுறை: $A \cup B = S \therefore P(A \cup B) = P(S) = 1$ மூலம் மூலம் $P(A \cap B)$ கணக்கிடுவதில் $P(A|B)$ கணக்கிடுக.

$$A \cup B = S \Rightarrow P(A \cup B) = P(S) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{15 + 8 - 20}{20} = \frac{3}{20}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{20} = \frac{3}{8}$$

6) கணித விவரம் தேடுவதற்கான தேர்வு முறைகள் கீழ்க்கண்டவற்றில் $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ என்ற மூன்று சாத்தியமான நிகழ்வுகள் $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

1) சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான நிகழ்வுகள்

2) சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான நிகழ்வுகள்.

வழிமுறை: சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான நிகழ்வுகள் $P(A \cup B \cup C)$

சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான தேர்வு சாத்தியமான நிகழ்வுகள் $P(A \cup B \cup C)$ கணக்கிடுக.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)P(B)P(C) + P(A|B)P(C|B) + P(A|C)P(B|C) + P(A|B|C)$$

প্রদত্ত, $0 \leq p(n) \leq \frac{1}{3}$ $p(n) \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\rho(n) = \frac{1}{n}, \quad \rho(\bar{n}) = 1 - \frac{1}{n} = 3/4$$

$$P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} P_{\text{eff}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^{1/2}$$

சென்னை மாநகராட்சி நிர்வாகப் பேரவை

$$= P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

$$= P(\hat{A}) \cdot P(\hat{B}) \cdot P(\hat{C})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

മുത്തകടത്ത, ക്ലിപ്തമായ നഗ്നതയെക്കുറിച്ചു: $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

உ) ஒதுக்கீடு மட்டுமே தீர்மானிக்கும்

$$= P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{8}{60} + \frac{6}{60} = \frac{26}{60} = 13/30.$$

7) ഗവണ്മെന്റ് നിർമ്മാണ പദ്ധതിയിൽ ഭൂമി കയറ്റിത്തന്നതിന് അനുബന്ധമായി
12.3) നികുതി 0.30 - അനുബന്ധമായി ചെലവഴിക്കുന്നതിന് നികുതി 0.4.

စက်မှုလုပ်ငန်းများ၏ အသုံးပြုမှုများကို ထိန်းချုပ်ရန် ၀.၁၅.

1) சமீபத்தில் மருத்துவப் பரீட்சைக்குப் பங்கேற்றவர்கள் எத்தனை பேர் தோல்வியடைந்தனர்? அவர்களுக்கு என்ன காரணம்?

2) 4 நி.ய சமநிலையம் அப்போது எத்தனை மீட்டர் எண்ணியதற்கு
-மீட்டர் தோண்டி யது குறைந்திருக்கிறது

ചർച്ച: A - ശമ്പളം B - ശമ്പളം കൂട്ടി പണം.

1) $P(A|A)$ 2) $P(A|B)$ නම් ලෙසට ලබ.

$$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.4 \quad P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.40} = 0.375.$$

8) ദ്രവീണയെ 5 വയസ്സുള്ള ഒരു കുട്ടി, തിരുവനന്തപുരം ജനറൽ.

123 കുറു നെടുമ്പുഴ 4 തവണ 6 കറുപ്പു നിറ പന്തുകൾ ഉണ്ട്.

3. உலகமாதிரியானவையெல்லாம். ஆடுபன்கள் எடுக்கப்பட்டிருக்கிறார்கள்.

1) കിന്റം തുറന്നു

2) கிரீன்களும் சிவமே.

3) ஒரு உயர்ந்த மரத்தில் ஒரு பூச்சி உட்கார்ந்து கொண்டிருக்கிறது. அந்த பூச்சி திடீரென்று தரையில் விழுகிறது. அதன் காரணம் என்ன?

ചുരുക്കം: ആദ്യത്തെ w_1 , കൂടെ w_2

$$11 \quad B_1 \quad 11 \quad B_2$$

ഒരു സാധ്യത ഉദാഹരണം = $P(W_1, W_2)$

1. $\therefore \text{മുഖ്യ} = P(B_1 \cap B_2)$

$$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2)$$

ଆଧ	ଦିଆଯାଇଥିବା	ଉତ୍ତର	ଆମର ଉତ୍ତର
1	5	3	8
2	4	6	10

$$P(w_1) = 5/8 \quad P(w_2) = 4/10$$

$$P(B_1) = 3/8 \quad P(B_2) = 6/10.$$

1) ആദ്യം $P(w_1) P(w_2) = 5/8 \times 4/10 = 1/4$

2) நிறைவுகூடிய $P(B_1)P(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{40}$.

3) ஒடுமையற்ற ஒடுமையு: $P(W_1)P(B_2) + P(W_2) \cdot P(B_1)$
 $= \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$

[illegible]

வாய்முறை: பூனைகளை நிகழ்த்துதல்: $P(B)P(F/B) + P(G) \cdot P(F/G)$.

9/12.3 க்கும் இதற்கும் என்ன வித்தியாயம் எண்ணுடன் சிவ
பெண்ணாடு சபையினருக்கும் தேர்ந்து எடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆனால்
இங்கு மரண உணர்வு மரணவிய யுத்த நிலை கிடுக்கெல்லாம்.

பெண்மாளுக்கு நிகழ்தகவு = $\frac{2}{3}$.

பெண் அக்கு நிகழ்தகவு = $\frac{1}{3}$.

பெண்மான் இயல்புமீட்டம் மாங்க நிகழ்தகவு = $\frac{70}{100}$

பெண் 21 " " = $\frac{85}{100}$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{தேர்ந்தெடுப்பவர்} \\ \text{இயல்புமீட்டம் மாங்க} \} : \frac{2}{3} \cdot \frac{70}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} \\ = \frac{140}{300} + \frac{85}{300} \\ = \frac{225}{300} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\frac{10}{12.3}$) $P(A) = 0.4$ $P(A \cup B) = 0.7$ எனில் $P(B)$ ஐ கீழ்க்கண்ட விதம்
— தயவுசெய்து உட்படிக் கொள்க.

- 1) A, B ஒன்றையொன்றை மூலக்கிய நிகழ்தகவுகள்
- 2) A, B சுதந்திர நிகழ்தகவுகள்
- 3) $P(A|B) = 0.4$ $P(B|A) = 0.5$.

உத்தரவு : கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் நிகழ்தகவுகள் எனில் $P(A \cup B) = 0.7$
 $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$$P(A) = 0.4 \quad P(A \cup B) = 0.7.$$

- 1) A, B ஒன்றையொன்றை மூலக்கிய நிகழ்தகவுகள் எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0.7 = 0.4 + P(B)$$

$$0.3 = P(B)$$

- 2) A, B சுதந்திர நிகழ்தகவுகள் எனில் $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= P(A) + P(B)(1 - P(A))$$

$$0.7 = 0.4 + P(B)(0.6)$$

$$0.3 = P(B)(0.6) \Rightarrow P(B) = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$$

$\frac{11}{12.3}$) ஈரமயங்கு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது. அதை
1) 53 சதவீதம் சான்ற அளவில் தரக் கொடுக்க

2) 53 சதவீதம் சான்ற அளவில் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது.

[illegible]

ඉ.වි තැනට නිකුත් වූ 12, 15 විද්‍යාත්මක ශිෂ්‍යයන්ගේ අංකයේ සම්බන්ධතාව
පරීක්ෂණය (combination) කර බලන්න.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{33} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21} = \frac{20}{77}$$

Scanned by CamScanner

12.27) கட்டிடம் கட்டும் நிறுவனத்தின் 2 செயல் மொதியுள்ளனர். 60% 40%.

மேஸ்கண்ணை மொடியை மொதியுள்ளனர் I மற்றும் II செய்கிறார்கள். இவ்வுபயத்தைய மொதியுள்ளனர் I மற்றும் II மேஸ்கண்ணை மொதியின் தவறுகளைக் 0.03 மற்றும் 0.04 ஆகும். தற்போது இவ்வுபயம் கட்டிடமொன்று மொதியின் மேஸ்கண்ணை தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க கட்டிடமொன்று கட்டிடம்.

மொதியின் மொதியை கண்டுபிடிக்க மேஸ்கண்ணை மொதியின் தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க.

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) P(B/A_1)}{P(A_1) P(B/A_1) + P(A_2) P(B/A_2)}$$

மொதியின்

I தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க.

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)}$$

இவ்வுபயம் தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க மொதியின் தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க.

$$P(A_1) = 0.60 \quad P(B/A_1) = 0.03$$

$$P(A_2) = 0.40 \quad P(B/A_2) = 0.04$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} = \frac{(0.60)(0.03)}{(0.60)(0.03) + (0.40)(0.04)} = \frac{9}{17}$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} = \frac{(0.40)(0.04)}{(0.60)(0.03) + (0.40)(0.04)} = \frac{8}{17}$$

$P(A_1/B) > P(A_2/B)$ ∴ மேஸ்கண்ணை மொதியின் தவறுகளைக் கண்டுபிடிக்க கட்டிடம்.

$$P(A_1) = 0.50 \quad P(G/A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30 \quad P(G/A_2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20 \quad P(G/A_3) = 0.60.$$

$$\begin{aligned} 1) P(G) &= P(A_1)P(G/A_1) + P(A_2)P(G/A_2) + P(A_3)P(G/A_3) \\ &= (0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60) \\ &= 0.78. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(A_3/G) &= \frac{P(A_3)P(G/A_3)}{P(A_1)P(G/A_1) + P(A_2)P(G/A_2) + P(A_3)P(G/A_3)} \\ &= \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60)} \\ &= \frac{2}{13}. \end{aligned}$$

12-4) ஒரு தொழிற்சாலை யில் கியர் திரைகளை I டிரைவ் II டிரைவ் உள்ளன. கியர் திரை I தொழிற்சாலை 60% தயாரித்து, டிரைவ் II 40% தயாரிக்கிறது. மேலும் கியர் திரை I இல் 2% தவறு செய்யப்பட்டு வருவதற்கான 2% இனறுபாடு உள்ளதாகவும் II டிரைவ் திரை 4% இனறுபாடு உள்ளதாகவும் உள்ளன. 2% தவறு செய்யப்பட்டு வருவதற்கான ஒரு தொகுதி கொடுக்கப்பட்டு அப்பகுதி அப்பகுதி இனறுபாடுகள் அதிகமாக இருக்கக்கூடியதாகவும்

உள்ளது. தொகுதி இனறுபாடு அதிகமாக இருக்கக்கூடிய தொகுதி கூட்டு நிகழ்வுகளை பயன்படுத்தி உணர்வும்.

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)$$

$$P(A_1) = 0.60 \quad P(A_2) = 0.40 \quad A - \text{கியர் திரை.}$$

$$P(B/A_1) = 0.02 \quad P(B/A_2) = 0.04, \quad B - \text{இனறுபாடு.}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) \\ &= (0.60)(0.02) + (0.40)(0.04) \\ &= 0.0120 + 0.0160 \\ &= \underline{\underline{0.0280}} \end{aligned}$$

12.4) ഒരു കളി രണ്ടു കളിക്കാർക്കിടയിൽ വേർതിരിച്ച് 6 കളികൾ കളിക്കാൻ 4 രൂപയും വിജയിക്കാൻ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. കളിക്കാർ രണ്ടു കളികൾ കളിക്കാൻ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. ഈ കളിയിൽ ഒരു കളിക്കാർക്ക് ഒരു കളി കളിക്കാൻ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. ഈ കളിയിൽ ഒരു കളിക്കാർക്ക് ഒരു കളി കളിക്കാൻ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി.

- 1) കളിക്കാർ 4 കളികൾ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ.
- 2) കളിക്കാർ 2 കളികൾ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ.

ഉദാഹരണം: 1) കളിക്കാർ 4 കളികൾ കളിക്കാൻ $P(B) = P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)$

2) കളിക്കാർ 2 കളികൾ കളിക്കാൻ $P(U_1/B) = \frac{P(U_1) \cdot P(B/U_1)}{P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)}$

∴ കളിക്കാർ 12, 4 കളികൾ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ (Combinations) കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ കളിക്കാൻ.

	B	R	Total
U_1	6	4	10
U_2	2	2	4
Total	8	6	14

$$P(U_1) = \frac{1}{2} \quad P(U_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/U_1) = \frac{4}{6} \quad P(B/U_2) = \frac{2}{4}$$

$$1) P(B) = P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{7}{12}$$

$$2) P(U_1/B) = \frac{P(U_1) \cdot P(B/U_1)}{P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

4) ഒരു കളിയിൽ 1000 കളിക്കാർക്കിടയിൽ A, B, C കളിക്കാർക്കിടയിൽ 5:3:2 അനുപാതത്തിൽ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. കളിക്കാർ 5:3:2 അനുപാതത്തിൽ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. കളിക്കാർ 5:3:2 അനുപാതത്തിൽ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. കളിക്കാർ 5:3:2 അനുപാതത്തിൽ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി. കളിക്കാർ 5:3:2 അനുപാതത്തിൽ 2 രൂപയും ലഭിക്കുന്ന ഒരു കളി.

A - ലോഹം B - ലോഹമല്ല

$$P(A_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{10}$$

$$P(A_3) = 2/10$$

$$P(B/A_1) = 0.4$$

$$P(B/A_2) = 0.5$$

$$P(B|A_3) = 0.3.$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)}$$

$$= \frac{(0.3)(0.5)}{\frac{5}{10} \cdot (0.4) + \frac{3}{10} (0.5) + \frac{2}{10} (0.3)}$$

$$= \frac{0.15}{0.41} = \frac{15}{41}$$

3) 12.4) ஒரு PVC ஸ்பப் தயாரிக்கும் நிறுவனம் X, Y, Z என்ற 3 தொழிற்சாலைகள் மூலம் உற்பத்தி செய்கிறது. X, Y மற்றும் Z களின் திறன் கொள்கை உற்பத்தி செய்யும் ஸ்பப் களின் அளவினை மீறாமல் 2000, 3000, மற்றும் 5000. முந்தைய திறனைப் பயன்படுத்தி X, Y, Z தொழிற்சாலைகளில் உற்பத்தியாகும் ஸ்பப் 4 களின் குறைபாடுகள் மீறாமல் 3%, 4%, மற்றும் 2%. ஆகும். மேலும் உற்பத்தி செய்யும் ஒரு மூலம் உற்பத்தியான ஸ்பப் 15% மீறும் ஒரு ஸ்பப் கொடுக்க வேண்டும்.

- 1) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சம்பத் இறையாடலின் அமைப்பை கீழ்க்கண்டவாறு.
- 2) சம்பத் இறையாடலின் அமைப்பை கீழ்க்கண்டவாறு. அதன் அமைப்பை 7 ம் அங்கத்தின் அமைப்பை கீழ்க்கண்டவாறு.

ചർച്ച 1) ചുരുക്ക വിവരങ്ങൾ.

2) பேரறிஞர் சத்திரம்

$$P(X) = \frac{2000}{10000} = 2/10 \quad P(Y) = 3/10 \quad P(Z) = 5/10$$

$$P(D/x) = 0.03 \quad P(D/y) = 0.04 \quad P(D/z) = 0.02$$

$$P(D) = P(X)P(D/X) + P(Y)P(D/Y) + P(Z)P(D/Z)$$

$$= (0.20)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.50)(0.02)$$

$\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = -0.5$
 $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = -0.5$
 $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = -0.5$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

[illegible]

[illegible]

ආදායම $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ වන බැවින් $(A \text{ සහ } B \text{ යන දෙකම ඇතිවීම} + A \text{ නොමැතිවීම සහ } B \text{ ඇතිවීම})$

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

• : சமூகசமூக) வாரிசுக்கள் சமூகம்தான்
நினைக்கின்றனர்

6) 4 இன்று பரமசிவ சபாதிபதிமைச்சரம் தலைமையில் 12
சபாதிபதிக்களத்தில் இரு சபைகள் சந்திப்பு நடைபெற்றது.
இதில் இன்று முதல் இரு சபைகள் இன்று பரமசிவ சபாதிபதிமைச்சரம்
தலைமையில் 19/33 2) 17/33 3) 23/33 4) 19/33.

③ $\frac{32}{66} + \frac{b}{11} = \frac{38}{11}$

7) ஒரு நபரின் அக வயதில் 3, 50 கோடிக்கும் 4, 100 கோடிக்கும்
 இடையில் 6 ஆகியது கோடிக்கும் 2 மடங்க. அவற்றின் மூலக்
 -பெயர் இது கோடிக்கும் 100 கோடிக்கும் 100 கோடிக்கும் 100 கோடிக்கும்
 நிதியுதவனை 1) 1:12 2) 12:1 3) 13:1 4) 14:1

$$P(A) = \frac{218}{6178} = \frac{1}{12} \quad 1:12$$

1) $\frac{7}{45}$ 2) $\frac{17}{90}$ 3) $\frac{29}{90}$ 4) $\frac{19}{90}$.

$$1.25 = PCIB(1 - 0.25)$$

$$\frac{.25}{.45} = P(13) \Rightarrow P(17) = \frac{5}{13}$$

18) A, B இது நிகழ்தகவுகள் $P(A) = .4$ $P(B) = .8$ $P(B/A) = 0.6$ எனில்
 $P(\bar{A} \cap B)$ கண்டிப்பது 1) 0.96 2) 0.24 3) 0.56 4) 0.66.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{.4} = 0.6 \quad P(A \cap B) = .24$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

$$= 1.8 - 1.24 = 0.56$$

19) A, B, C എന്നു മൂന്നു ദിക്കുകളിൽ ഒന്നു ലഭിക്കുകയും
 - അതിൽ A കിട്ടുകയും ചെയ്യുന്നതിനുള്ള 7 കളെ 4 എന്നു കിട്ടുകയും
 ചെയ്യുന്നതിനുള്ള 5 കളെ 3 എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യുന്നതിനുള്ള
 1) 23 : 65 2) 65 : 23 3) 23 : 88 4) 88 : 23.

$$P(A) = 4/11 \quad P(B) = 3/8 \quad P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\frac{4}{11} + \frac{3}{8} \neq PCO = 1$$

$$\therefore PCV = 1 - \frac{4}{11} - \frac{2}{8} = \frac{88 - 32 - 32}{88} = \frac{23}{88}$$

၈၂၆၅၇၃၁ နှင့် ၈၂၆၅၇၃၂ - ၊ တစ်ခုလုံး = ၈၈-၂၃ = ၆၅

$\therefore 65:23.$

[illegible]

$$\eta(5) = 4 \times 4 = 16$$

മലിനീകരണ പ്രതിരോധം $b^2 - 4ac \geq 0$

Ex 6 $a^2 - 4b > 0$.

$$\therefore n(A) = 7$$

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

$$a=4, \quad b=1 \quad 16-4 > 0$$

$$b \approx 2 \quad 16 - 8 \geq 0$$

$$b = 3 \quad 16 - 12 \geq 0$$

$$b = 14 \quad 16 - 16 \leq 0$$

$$a=3 \quad b=1 \quad 9-4 > 0$$

$$b=2 \quad 9-870$$

$$a=2 \quad b=1 \quad 4-4=0$$

$P(B|A) = 2/3$ எனில் $P(B)$ இன் மதிப்பு

- 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

$$P(A_n) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{P(A)}{1}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{Y_4} = P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

[illegible]

$$P(A_1) = 0.6 \quad P(A_2) = 0.4$$

A_1 - girls

A₂ - Boys

$$P(B/A_1) = \frac{1}{100} \quad P(B/A_2) = \frac{4}{100}$$

$$P(B/A_2) = \frac{4}{100}$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{(0.6)(0.01)}{(0.6)(0.01) + (0.4)(0.04)} = \frac{6}{22} = 3/11$$

23) $1\frac{1}{2}$ നമ്പറിലുള്ള ചിഹ്നം കണ്ടെത്തുക. $\frac{1}{2}$ നമ്പറിലുള്ള ചിഹ്നം കണ്ടെത്തുക.

1) $\frac{1}{64}$ 2) $\frac{1}{32}$ 3) $\frac{1}{16}$ 4) $\frac{1}{128}$

$$\eta(s) = 2^{10} = 1024.$$

$$\eta(A) = 10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}$$

$$= 10C_2 + 10C_1 + 1$$

$$= 45 + 10 + 1$$

$$= 56$$

$$n(s) = \frac{56}{1024} \cdot \frac{14}{256} \cdot \frac{7}{128}$$

$$\begin{array}{r} 32 \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\frac{10 \times 9}{1.2}$$

24) A லேற்றும் B எதற்கு இரு நிபந்தனைகளும் நிகழத்தக்கது என்றால்
0.3 லேற்றும் 0.6 . A லேற்றும் B ஏதோ மூன்று நிபந்தனைகளில் நிகழத்தக்கது 0.8
A (அ) B நிகழாமல் இருப்பதற்கு நிகழத்தக்கது !

1) 0.1 2) 0.72 3) 0.42 4) 0.28

$$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.6 \quad P(A \cap B) = 0.18$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.3 + 0.6 - 0.18 = 0.72$$

$$A \text{ (or) } B \text{ நிகழாமை இடப்பதற்கு} = 1 - 0.72 = 0.28$$

45) $2x^2 + 2mx + (m+1) = 0$ ன் ஐரண்டாம் தரம் வாய்க்காத கருவிகளின் நிகழ்தகவு 1) $1/5$ 2) $2/5$ 3) $3/5$ 4) $4/5$.

$$n = 5 \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$b^2 \geq 4ac$$

$$\therefore 4m^2 \geq 4 \cdot 2(m+1)$$

$$m^2 \geq 2(m+1)$$

$$m = 5 \text{ எனில் } 25 > 12$$

$$4 \text{ எனில் } 16 > 10 \quad \therefore n(A) = 3$$

$$3 \text{ எனில் } 9 > 8 \quad P(A) = 3/5$$

T. G. Venkatesan

9444209677.