



Padalsalai's Telegram Groups!

(தலைப்பிற்கு கீழே உள்ள லிங்கை கிளிக் செய்து குழுவில் இணையவும்!)

- Padalsalai's NEWS - Group
https://t.me/joinchat/NIfCqVRBNj9hhV4wu6_NqA
- Padalsalai's Channel - Group
<https://t.me/padasalaichannel>
- Lesson Plan - Group
<https://t.me/joinchat/NIfCqVWwo5iL-21gpzrXLw>
- 12th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_12th
- 11th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_11th
- 10th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_10th
- 9th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_9th
- 6th to 8th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_6to8
- 1st to 5th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_1to5
- TET - Group
https://t.me/Padalsalai_TET
- PGTRB - Group
https://t.me/Padalsalai_PGTRB
- TNPSC - Group
https://t.me/Padalsalai_TNPSC

7. வகை-நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

வகையிடலின் எய்டு:-

$$① \text{ சாய்வு} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$② \text{ } S \text{ என்பது இயல்புச் சமன்பாடு } S=f(t) \\ \text{நினைவேகம் } v(t) = \frac{dS}{dt}$$

$$\text{ஒடுக்கம் } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

$$③ \text{ சராசரி நினைவேகம்} = \frac{S(b) - S(a)}{b-a}$$

$$④ \text{ கணப்பொழுது நினைவேகம்} = S'(t)$$

$$\text{இயல்புச் சமன்பாடு } S=0 \\ \text{வேகம் } V=0$$

6. காந்தநிலையன்
நிலையன் மாவட்டம்

பயிற்சி 7.1

① ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து t கிணாடி களுக்கு பிறகு ஒரு துகள் 2-ம் மீட்டர் சூரத்தில் அளவு $S=2t^2+3t$ மீட்டர் அளவுப் பி. ஓரங்கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

ய) $t=3$ மற்றும் $t=6$ கிணாடிகளுக்கு இடையேயுள்ள சராசரி நினைவேகம் என்ன?

(ii) $t=3$ மற்றும் $t=6$ கிணாடிகளுக்கு இடையேயுள்ள கணப்பொழுது நினைவேகம் என்ன?

$$S(t) = 2t^2 + 3t$$

ய)

$$a=3 \quad b=6$$

$$S(3) = 2(3^2) + 3(3)$$

$$= 18 + 9$$

$$= 27$$

$$S(6) = 2(6^2) + 3(6)$$

$$= 72 + 18$$

$$= 90$$

$$\text{சராசரி நினைவேகம்} = \frac{S(b) - S(a)}{b-a}$$

$$= \frac{S(6) - S(3)}{6-3}$$

$$= \frac{90-27}{3} = \frac{63}{3}$$

$$= 21 \text{ மீ/வி}$$

$$(ii) S(t) = 2t^2 + 3t$$

$$S'(t) = 4t + 3$$

$t=3$ ல் கணப்பொழுது

$$\text{நினைவேகம்} = S'(3)$$

$$= 4(3) + 3 = 12 + 3$$

$$= 15$$

$t=6$ ல் கணப்பொழுது

$$\text{நினைவேகம்} = S'(6)$$

$$= 4(6) + 3$$

$$= 24 + 3$$

$$= 27 \text{ மீ/வி}$$

2) 400 அடி 2-ம் மீட்டர் 2-ம் சூரத்தில் இருக்கிறது தவறுதலாக ஒரு புதைப்படி கருவி விடுகிறது. t கிணாடிகளில் புதைப்படி கருவி விடும் சூரம் $S=16t^2$ ஆகும்.

ய) தற்செயல் ரொடும் முன்னர் புதைப்படி கருவி விட ருந்துக் ரொடும் ஓரம் என்ன?

(ii) கீழே விடுந்த இறுதி 2 கிணாடிகளில் புதைப்படி கருவியின் சராசரி நினைவேகம் என்ன?

(iii) தற்செயல் ரொடும்பொது புதைப்படி கருவியின் கணப்பொழுது நினைவேகம் என்ன?

$$S(t) = 16t^2$$

ய) தற்செயல் அடையும்பொது

$$\text{சூரம்} = 400 \text{ மீ}$$

$$S(t) = 400$$

$$16t^2 = 400$$

$$t^2 = \frac{400}{16} = \frac{100}{4} = 25$$

$$t^2 = 25$$

$$t = \pm 5$$

ஆரம் $t=5$ கிணாடி

(ii) கடைசி இரண்டு கிணாடிகளில்

சராசரி நினைவேகம்

ஆரம் $t=3$ $t=5$

(2)

$$\begin{aligned} \text{சராசரி திசையகம்} &= \frac{S(5)-S(3)}{5-3} \\ &= \frac{16(5^2)-16(3^2)}{2} \\ &= \frac{8(25-9)}{2} \\ &= 8 \times 16 \\ &= 128 \text{ அடி/மி} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) கணப்பொழுது திசையகம்} &= S'(t) \\ &= 16(2t) = 32t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=5 \text{ ல் கணப்பொழுது} & \\ \text{திசையகம்} &= S'(5) \\ &= 32(5) \\ &= 160 \text{ அடி/மி} \end{aligned}$$

③ $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ கிமீ
 $t \geq 0$ எனும் வரையில் ஒரு கோட்டில்
 ஒரு துகள் நகர்கிறது.
 (i) எந்த நேரங்களில் துகளின் திசை
 மாறுகின்றது?

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள்
 பயணித்த தூரம் என்ன?

(iii) திசையகம் பூச்சிய மூலியை
 எட்டையும் ஒரு நேரங்களில் எல்லாம்
 துகளின் இருக்கை காண்க?

$$S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$$

$$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

(i) துகள் திசையை மாற்றும்போது

$$S'(t) = 0$$

$$6t^2 - 18t + 12 = 0$$

$$6(t^2 - 3t + 2) = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t=1, t=2$$

$$t=1, 2 \text{ வினாடிகள்}$$

(ii) முதல் 4 வினாடி

களில் துகள்

பயணித்த

$$\text{தூரம்} = |S(1) - S(0)|$$

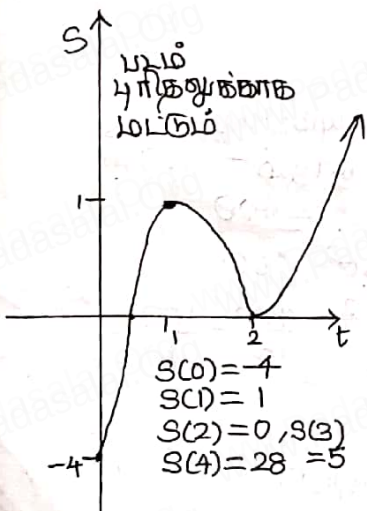
$$+ |S(2) - S(1)|$$

$$+ |S(3) - S(2)|$$

$$+ |S(4) - S(3)|$$

$$= |1-4| + |0-1| + |5-0| + |28-5|$$

$$= 5+1+5+23 = 34 \text{ மீ}$$



$$\text{(iii) } S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$S''(t) = 12t - 18$$

திசையகம் பூச்சியமடையும் ஒரு நேரத்தில்
 ஆகும் $t=1, 2$

$$\text{ஒருக்கம் } S''(1) = 12(1) - 18 = -6 \text{ மீ/மி}^2$$

$$S''(2) = 12(2) - 18 = 6 \text{ மீ/மி}^2$$

4) x பக்க அளவு கொண்ட ஒரு
 கனசதுரத்தின் கனஅளவு $V = x^3$ எனில்
 $x=5$ அளவுகள் எனும்போது x அளவு
 பொறுத்து கனஅளவு மாறுவீதம் காண்க.

$$\text{கனஅளவு } V = x^3$$

x அளவு பொறுத்து மாறுவீதம்

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} x=5 \text{ ல் கனஅளவு} &= \left[\frac{dV}{dx} \right]_{x=5} \\ \text{மாறுவீதம்} &= 3(5^2) = 75 \text{ அளவுகள்} \end{aligned}$$

5) x நீளமுள்ள (மீ) ஒரு மெல்லிய
 கோளின் நிறை $m(x)$ (கிலோகிராம்)

$$m(x) = \sqrt{3x}$$

எனக் கொடுக்கப்
 பட்டுள்ளது. எனில் $x=3$ மற்றும்

$x=27$ ல் எனும்போது நீளத்தைப்

பொறுத்து நிறையின் மாறுபாட்டு

வீதத்தை காண்க.

$$m(x) = \sqrt{3x}$$

$$a=3 \quad b=27$$

நிறையின் மாறுபாட்டு வீதம் $m'(x)$

$$m'(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(i) $x=3$ ல்

$$m'(3) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ கிகி/மீ}$$

(ii) $x=27$ ல்

$$\begin{aligned} m'(27) &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} \text{ கிகி/மீ} \end{aligned}$$

6) ஒரு குளத்தில் விழுந்த கஸ்ஸினாஸ்
 பொது கைய வட்டங்களின் வடிவத்தில்
 சிற்றளவைகள் குறையுக்கின்றது. வண்ணப்பூ
 சிற்றளவைகளின் ஆரம் r வினாடிக்கு
 2 செ.மீ வீதம் அதிகரிக்கின்றது. ஆரம்
 5 செ.மீ எனும்போது கஸ்ஸினாஸ் நீரின்

பரப்பளவு மாறுவீதம் என்ன? (3)

$$= 2\pi \text{ கி.மீ/வி.}$$

t நேரத்தில் பரப்பளவு A எனக்
வட்டத்தின் பரப்பளவு $A = \pi r^2$

t ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{--- (1)}$$

$$r = 5 \text{ மீ} \quad \frac{dr}{dt} = 2$$

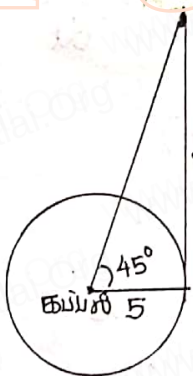
மேல்க்கியிட

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2(5) \cdot 2 = 20\pi$$

பரப்பளவு மாறுவீதம் $= 20\pi$ க.மீ²/வி.

7) கப்பலின் கீழ்க்குள்ள சதுரவானியினக்கு
ஒவ்வொரு 10 வினாடிகளுக்கு ஒரு
முறை சுழன்றுகிறது. கடற்கரையில்
இருந்து 5 கி.மீ தூரத்தில் கப்பல்
நகங்குமிட்டுள்ளது. அவ்விகளக்கின்
ஒளிக்கற்றை கடற்கரையுடன் 45°
கோணத்தை ஏற்படுத்தும்போது
கடற்கரையில் ஒளிக்கற்றை
செய்வளவு வேகமாக நகரும்.

கோண திசைவேகம் $\frac{d\theta}{dt}$ என்க



கடற்கரை
x

10 வினாடிகளில்
கோணம் $= 1$ சுற்று
 $= 2\pi$

1 வினாடியில்
கோணம் $= \frac{2\pi}{10}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{5} \quad x = 5 \tan \theta$$

த ஐ ஸ்பாஸுத்து
வகையில்

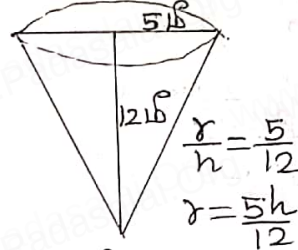
$$\frac{dx}{dt} = 5 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$\theta = 45^\circ$ ல் $x = 5$ கி.மீ எனும்போது
ஒளிக்கற்றை நகரும் வீதம்

$$\frac{dx}{dt} = 5 \sec^2 45^\circ \frac{\pi}{5} = (\sqrt{2})^2 \pi$$

8) தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட
ஒரு குள வட்ட கூம்பின் உயரில் 2 மீ
ஒரு நீர்நிலைத் தொட்டியின் ஆழம் 12 மீ
மற்றும் குளவின் வட்டத்தின் ஆரம்
5 மீ என்க. நீரிடத்தில் 10 கனமீ
வேகத்தில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது. எனில்
8 மீ ஆழத்தில் நீர் இருக்கும்போது நீரின்
ஆழம் அதிகரிக்கும் வேகம் என்ன.

t நேரத்தில் நீரின் கனஅளவு V என்க
ஆரம் $r = 5$ உயரம் (ஆழம்) $h = 12$



$$\frac{dV}{dt} = 10 \quad h = 8$$

எனில் $\frac{dh}{dt}$
காணவேண்டும்.

கூம்பின் கனஅளவு $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{25h^2}{144} h$$

$$V = \frac{25\pi h^3}{3 \times 144}$$

t ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{3 \times 144} 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{25\pi}{3 \times 144} 3 \times 8 \times 8 \times \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{10 \times 9}{4 \times 25\pi} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{10\pi} = \frac{9}{10\pi} \text{ மீ/நிமிஷம்}$$

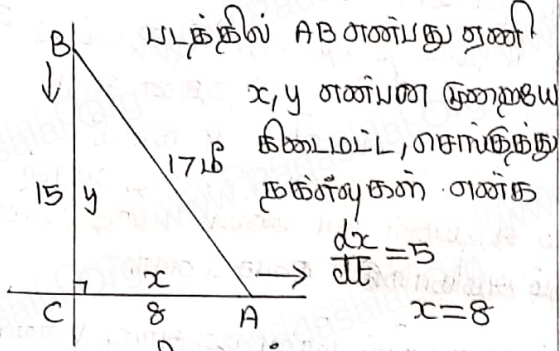
ஆழம் அதிகரிக்கும் வீதம் $\frac{9}{10\pi}$ மீ/நி.

9) 17 மீ நீளமுள்ள ஒரு துணி

செங்குத்தாக சுவரில் சாய்ந்து வைக்கப்
பட்டுள்ளது. துணியின் அடிப்பக்கம் சுவரில்
இருந்து விளக்கி செல்லும் வீதம் வினாடிக்கு
5 மீ எனில் துணியின் அடிப்பக்கம்
சுவரிலிருந்து 8 மீ தொலைவில்
இருக்கும்போது

ய அதன் உச்சி என்ன வீதத்தில் கீழேநகர்க்
கொண்டும் எண்ணத்தக்க காண்க.

(ii) எந்த வீதத்தில், துணி சுவர் மற்றும் துறை ஆகியவற்றால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறது?



பிதாகரஸ் தேற்றப்படி

$$x^2 + y^2 = 17^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$8^2 + y^2 = 17^2$$

$$y^2 = 289 - 64$$

$$y^2 = 225$$

$$y = 15$$

ii) $x^2 + y^2 = 17^2$

t ஐ ஸாறுத்து வகையிட

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

2 ஆல் வகுக்க $8(5) + 15 \frac{dy}{dt} = 0$

$$15 \frac{dy}{dt} = -40$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-408}{153} = -\frac{8}{3}$$

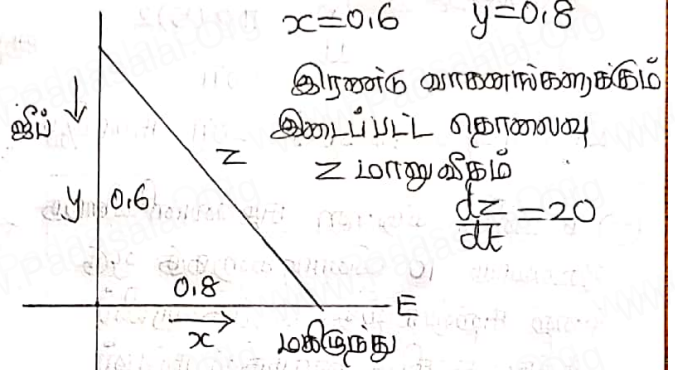
உயரம் குறையும் வீதம் = $\frac{8}{3}$ மீ/வி.

10) வட திசையில் இருந்து ஒரு செங்கோண சந்திப்பை அணுகும் ஒரு காவல்துறை வாகனம் வேகமாக சென்று திடீர்ப் பிடிவாங்கி நொக்கி செல்லும் ஒரு மகிழுந்தை துரத்துகிறது. சாதாரண சந்திப்பின் வடக்கே 0.6 கி.மீ தொலைவில் காவல்துறையின் வாகனமும் கிழக்கே 0.8 கி.மீ தொலைவில் மகிழுந்தும் உள்ளன. போது, மின்காந்த அலைகள் கருவியின் துணை தொண்டு காவல்துறை தாங்களது வாகனத்திற்கும் மகிழுந்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் மணிக்கு 20 கி.மீ வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது எனில் காவல்துறை

(4)

வாகனம் மணிக்கு 60 கி.மீ வேகத்தில் நகர்கிறது எனில் மகிழுந்தும் வேகம் என்ன?

t நேரத்தில் மகிழுந்து நகர்ந்த தூரம் x என்க
காவல்துறை கீழ் நகர்ந்த தூரம் y என்க
கீழ்வேகம் $\frac{dy}{dt} = -60$ கி.மீ/மணி



$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$0.6^2 + 0.8^2 = z^2$$

$$0.36 + 0.64 = z^2$$

$$z^2 = 1$$

$$z = 1$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

t ஐ ஸாறுத்து வகையிட

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}$$

2 ஆல் வகுக்க

$$0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) = 1(20)$$

$$0.8 \frac{dx}{dt} - 36 = 20$$

$$0.8 \frac{dx}{dt} = 20 + 36$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5670}{0.8} = 70 \text{ கி.மீ/வி.}$$

மகிழுந்தின் வேகம் = 70 கி.மீ/வி

தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

① தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

② தொடுகோட்டின் சாய்வு $m = \frac{dy}{dx}(x, y_1)$

③ இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

4) செங்குத்தாக வட்டத்திற்கான திசுத்தனை $m_1 m_2 = -1$

பயிற்சி 7.2

1) தொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு தொடுகோட்டின் சாய்விலை காண்க.

ப) $y = x^4 + 2x^2 - x$; $x = 1$
 x ஐ ஸ்பாஷத்து வகையில் $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x - 1$

சாய்வு = $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 4(1) + 4(1) - 1$
 $= 8 - 1$
 $= 7$

(ii) $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$; $t = \pi/2$

$\frac{dx}{dt} = 3a \cos^2 t (-\sin t)$
 $\frac{dy}{dt} = 3b \sin^2 t (\cos t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t}$
 $= -\frac{b}{a} \frac{\sin t}{\cos t}$

சாய்வு = $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\pi/2} = -\frac{b}{a} \frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2}$
 $= -\frac{b}{a} \frac{1}{0} = \infty$

② $y = x^2 - 5x + 4$ என்ற வளைவரைக்கு சப்புள்ளியில் வறையப்படும் தொடுகோடு $3x + y = 7$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்?

$3x + y = 7$

சாய்வு = $-\frac{x\text{அகடு}}{y\text{அகடு}}$

⑤

சாய்வு = $-\frac{3}{1}$

$y = x^2 - 5x + 4$ — ①

$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$

தொடும்புள்ளி (x, y_1) என்க

சாய்வு = $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x, y_1)} = 2x_1 - 5$

$2x_1 - 5 = -3$

$2x_1 = 5 - 3$

$2x_1 = 2$
 $x_1 = 1$

(x, y_1) ல் ① $\Rightarrow y_1 = x_1^2 - 5x_1 + 4$

$y_1 = 1 - 5 + 4$

$y_1 = 0$

இணையான புள்ளி $(1, 0)$

3) $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ என்ற வளைவரைக்கு சப்புள்ளிகளில் வறையப்படும் தொடுகோடு $x + y = 1729$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக இருக்கும்.

செங்கோட்டின் சாய்வு $x + y = 1729$

சாய்வு = $-\frac{1}{1} = -1$

தொடுகோட்டின் சாய்வு = $-\frac{1}{\text{செங்கோட்டின் சாய்வு}}$
 $= -\frac{1}{-1} = 1$

$m = 1$

தொடுபுள்ளியை (x, y_1) என்க

$y_1 = x_1^3 - 6x_1^2 + x_1 + 3$ — ①

$y = x^3 - 6x^2 + x + 3$

x ஐ ஸ்பாஷத்தில்

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 1$

சாய்வு = $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x, y_1)} = 3x_1^2 - 12x_1 + 1$

$3x_1^2 - 12x_1 + 1 = 1$

$3x_1(x_1 - 4) = 0$

$x_1 = 0$ $x_1 = 4$

$x_1 = 0$ ① $\Rightarrow y_1 = 3$ புள்ளி $(0, 3)$

$x_1 = 4$ ① $\Rightarrow y_1 = 4^3 - 6(4^2) + 4 + 3$

$= 71 - 96 = -25$

புள்ளி $(4, -25)$

தொடுபுள்ளிகள் $(0, 3), (4, -25)$

- ④ $y^2 - 4xy = x^2 + 5$ என்து வளைவரைக்கு எப்போதிலும் வரையப்படும் தொடுகோடு கிடைமட்டமான இடுக்கும்?

தொடுபுள்ளியை (x_1, y_1) என்க

$$y_1^2 - 4x_1y_1 = x_1^2 + 5 \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 - 4xy = x^2 + 5$$

x ஐ ஸா. வகையிட

$$2y \frac{dy}{dx} - 4(x \frac{dy}{dx} + y(1)) = 2x + 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} - 4x \frac{dy}{dx} - 4y = 2x$$

$$2 \frac{dy}{dx} (y - 2x) = 2x + 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)}{2(y-2x)}$$

$$(x_1, y_1) \text{ல் சாய்வு} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)}$$

$$= \frac{x_1 + 2y_1}{y_1 - 2x_1}$$

கிடைமட்டமான தொடுகோட்டின்

$$\text{சாய்வு} = 0$$

$$\frac{x_1 + 2y_1}{y_1 - 2x_1} = 0$$

$$x_1 + 2y_1 = 0$$

$$x_1 = -2y_1 \quad \text{--- ②}$$

① சமீபத்தில்

$$y_1^2 = 4(-2y_1)y_1 = 4y_1^2 + 5$$

$$y_1^2 + 8y_1^2 - 4y_1^2 = 5$$

$$5y_1^2 = 5$$

$$y_1^2 = 1$$

② $\Rightarrow$

$$y_1 = \pm 1$$

$$y_1 = 1 \text{ எனில் } x_1 = -2 \quad (-2, 1)$$

$$y_1 = -1 \text{ எனில் } x_1 = 2 \quad (2, -1)$$

தொடுபுள்ளிகள் $(-2, 1), (2, -1)$.

- ⑤ கீழ்க்கண்ட வளைவரைகளின் மீது

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில்

தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு

சமன்பாடுகளை காண்க,

$$\text{பு } y = x^2 - x^4 ; (1, 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^3$$

⑥

$$\text{சாய்வு } m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(1,0)} = 2(1) - 4(1)$$

$$= -2$$

$$m = -2$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2$$

$$2x + y - 2 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x - 2y + k = 0 \quad \text{--- ①}$$

இது $(1, 0)$ வழி செல்வதால்

$$1 - 2(0) + k = 0$$

$$k = -1$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\text{①} \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{ii) } y = x^4 + 2e^x ; (0, 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2e^x$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(0,2)} = 4(0)^3 + 2e^0$$

$$= 0 + 2(1)$$

$$m = 2$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x - 0)$$

$$y - 2 = 2x$$

$$2x - y + 2 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + 2y + k = 0 \quad \text{--- ①}$$

இது $(0, 2)$ வழி செல்வதால்

$$0 + 2(2) + k = 0$$

$$k = -4$$

① $\Rightarrow$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{iii) } y = x \sin x ; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \sin x$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}(0) + 1$$

$$m = 1$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \pi/2 = 1(x - \pi/2) \quad m=1$$

$$y - \pi/2 = x - \pi/2 \quad (\pi/2, \pi/2)$$

$$x, y_1$$

$$x - y = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + y = 1 \quad \text{--- ①}$$

இது $(\pi/2, \pi/2)$ வழி செல்லும்

$$K = \pi/2 + \pi/2$$

$$K = \pi$$

$$\text{①} \Rightarrow x + y = \pi$$

$$(iv) x = \cos t, y = 2 \sin^2 t; t = \pi/3$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2 \sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4 \sin t \cos t}{-\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \cos t$$

$$\text{சாய்வு } m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\pi/3} = -4 \cos \pi/3$$

$$= -4(1/2) = -2$$

$$[m = -2]$$

$$(x_1, y_1) = (\cos(\pi/3), 2 \sin^2(\pi/3))$$

$$= (1/2, 2(\sqrt{3}/2)^2) = (1/2, 2 \times \frac{3}{4})$$

$$= (1/2, 3/2)$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3/2 = -2(x - 1/2)$$

$$\frac{2y - 3}{2} = -2x + 1$$

$$2y - 3 = -4x + 2$$

$$4x + 2y = 5$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x - 4y = K \quad \text{--- ①}$$

இது $(1/2, 3/2)$ வழி செல்கிறது

$$2(1/2) - 4(3/2) = K$$

$$1 - 6 = K$$

$$K = -5$$

$$\text{①} \Rightarrow 2x - 4y = -5$$

$$\text{⑥ } y = 1 + x^3 \text{ என்ற வளைவரைக்கு}$$

$$x + 12y = 12 \text{ என்ற கோட்டிற்கு}$$

⑦ செங்குத்தாக 2-ம் மீள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க.

$$y = 1 + x^3$$

தொடுமுள்ளியை (x_1, y_1) என்க

$$y_1 = 1 + x_1^3 \quad \text{--- ①}$$

$$y = 1 + x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 3x^2$$

$$(x_1, y_1) \text{ ல் சாய்வு} = 3x_1^2$$

$$[m_1 = 3x_1^2]$$

$$x + 12y = 12$$

$$\text{சாய்வு} = -\frac{1}{12}$$

$$m_2 = -\frac{1}{12}$$

செங்குத்து கோடுகள் எனில்

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$3x_1^2 \left(-\frac{1}{12}\right) = -1$$

$$x_1^2 = 4$$

$$[x_1 = \pm 2]$$

⑧ $x_1 = 2$ எனில்

$$\text{①} \Rightarrow y_1 = 1 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\text{முள்ளி } (2, 9) \text{ சாய்வு } m_1 = 3(2)^2 = 3 \times 4 = 12$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 12(x - 2)$$

$$y - 9 = 12x - 24$$

$$12x - y - 24 + 9 = 0$$

$$12x - y - 15 = 0$$

(ii) $x_1 = -2$ எனில்

$$\text{①} \Rightarrow y_1 = 1 - 8 = -7$$

$$\text{முள்ளி } (x_1, y_1) = (-2, -7)$$

$$\text{சாய்வு } m_2 = 3(-2)^2$$

$$m_2 = 12$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y + 7 = 12(x + 2)$$

$$y + 7 = 12x + 24$$

$$12x - y + 24 - 7 = 0$$

$$12x - y + 17 = 0$$

⑦ $y = \frac{x+1}{x-1}$ என்ற வளைவரைக்கு

$x+2y=6$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க,

தொடுபுள்ளி (x_1, y_1) என்க

$$y_1 = \frac{x_1+1}{x_1-1} \quad \text{--- ①}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)} = \frac{-2}{(x_1-1)^2}$$

$$x+2y=6$$

$$\text{சாய்வு } m_2 = -\frac{1}{2}$$

இணை எனவே $m_1 = m_2$

$$\frac{-2}{(x_1-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$(x_1-1)^2 = 2 \times 2$$

$$x_1-1 = \pm 2$$

$$x_1 = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 3, -1$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 \quad (3, 2)$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{-1+1}{-1-1} = 0 \quad (-1, 0)$$

தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$x+2y=k \quad \text{--- ②}$$

இது $(3, 2)$ வழி செல்கிறது

$$\Rightarrow 3+2(2)=k \quad \boxed{x+2y=7}$$

$$7=k$$

இது $(-1, 0)$ வழி செல்கிறது

$$\Rightarrow -1+0=k \quad \boxed{x+2y=-1}$$

$$k=-1$$

⑧ $x = 7 \cos t$ மற்றும் $y = 2 \sin t$

$t \in \mathbb{R}$ என்ற வளைவரைக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளை காண்க,

$$\frac{dx}{dt} = -7 \sin t \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 \cos t}{-7 \sin t}$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx} (x - x_1)$$

$$y - 2 \sin t = \frac{2 \cos t}{-7 \sin t} (x - 7 \cos t)$$

$$-7y \sin t + 14 \sin^2 t = 2x \cos t - 14 \cos^2 t$$

$$14 \sin^2 t + 14 \cos^2 t = 2x \cos t + 7y \sin t$$

$$2x \cos t + 7y \sin t = 14(1)$$

$$2x \cos t + 7y \sin t = 14$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$7 \sin t x - 2y \cos t = k \quad \text{--- ①}$$

இது $(7 \cos t, 2 \sin t)$ வழியாக செல்கிறது

$$7 \sin t \cdot 7 \cos t - 2 \sin t \cdot 2 \cos t = k$$

$$49 \sin t \cos t - 4 \sin t \cos t = k$$

$$k = 45 \sin t \cos t$$

$$\Rightarrow 7 \sin t x - 2y \cos t = 45 \sin t \cos t$$

⑨ $xy=2$ என்ற செவ்வக

அதிபரவணையத்திற்கும் $x^2+4y=0$

என்ற பரவணையத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை காண்க,

$$xy=2 \quad \text{--- ①}$$

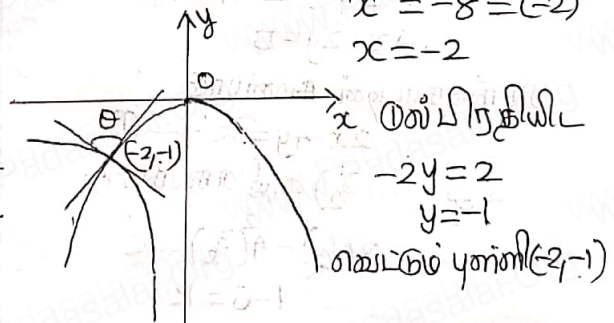
$$x^2 = -4y \quad \text{--- ②}$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$x^2 = -4 \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$x^3 = -8 = (-2)^3$$

$$x = -2$$



⑩ $x^2+y^2=4$ என்பது

$$-2y=2$$

$$y=-1$$

வட்டம் புள்ளி $(-2, -1)$

$$xy=2$$

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(-2, -1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$4y = -x^2$$

$$4 \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(2,-1)} = \frac{+2}{+2} = +1$$

$$m_1 = -2 \quad [m_2 = 1]$$

வண்ணவகரகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - 1}{1 + (-2)(1)} \right|$$

$$= \left| \frac{-3}{-1} \right|$$

$$\tan \theta = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

$$(10) x^2 - y^2 = r^2 \text{ மற்றும் } xy = c^2$$

சென்ற வண்ணவகரகளை செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக. இங்கு c, r ஆகியவை மாறிலிகள்.

$$x^2 - y^2 = r^2 \quad xy = c^2$$

வெட்டும் புள்ளி (x, y) என்க

$$x^2 - y^2 = r^2 \quad (1) \quad xy = c^2 \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = r^2$$

xஐ ஸொலுந்து வகையில்

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x,y)} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{c^2}{x}$$

xஐ ஸொலுந்து வகையில்

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{x^2}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x,y)} = -\frac{c^2}{x^2}$$

செங்குத்தாக வெட்டிகொள்ள நிபுணம்

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{x}{y} \times -\frac{c^2}{x^2}$$

(9)

$$= \frac{-c^2}{xy} = -\frac{c^2}{c^2}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

இந்த வண்ணவகரகளை செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

சுராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

① சுராலின் சூத்திரம்

$f(x)$ சென்ற சார்பு, $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும், $f(a) = f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ஆனது $f'(c) = 0$ என காணலாம்.

② ஸெக்ராக்சியின் சுராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

$f(x)$ சென்ற சார்பு $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும், இருப்பின் எத்தனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ன்று $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ என காணலாம்.

③ $f(x)$ சென்ற சார்பானது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும் இருந்து $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$ என இருந்தால்

$$x_1 < x_2 \text{ எனில் } f(x_1) < f(x_2)$$

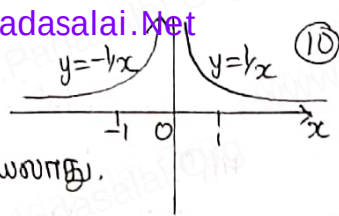
பயிற்சி 7.3

1. கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் சுராலின் சூத்திரம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்பதை விளக்குக.

α) $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|, x \in [-1, 1]$

ய) $f(x)$ ஆனது $[-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சி அற்றது $x = 0 \in [-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சியற்றது.

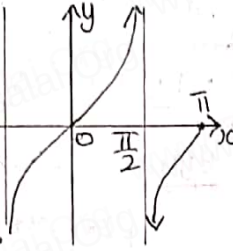
ஏராலின்
தேற்றத்தை
பயன்படுத்த இயலாது.



(i) $f(x) = \tan x$, $x \in [0, \pi]$

$f(x)$ ஆனது $[0, \pi]$ ல்
தொடர்ச்சி அற்றது.

$x = \pi/2 \in [0, \pi]$ ல்
 $f(x)$ தொடர்ச்சி அற்றது.

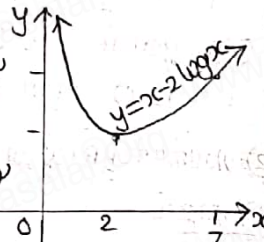


ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த
இயலாது.

(ii) $f(x) = x - 2 \log x$, $x \in [2, 7]$

(i) $[2, 7]$ ல் $f(x)$ ஆனது
தொடர்ச்சியானது

(ii) $(2, 7)$ ல் $f(x)$ ஆனது
வகையிடத்தக்கது.



$f(a) = f(2) = 2 - 2 \log 2$

$f(b) = f(7) = 7 - 2 \log 7$

$f(a) \neq f(b)$

$f(x)$ ஆனது ஏராலின்
சமஸ்த 3 நிபந்தனையையும் பூர்த்தி
செய்யவில்லை

ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த
இயலாது.

2) ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி
கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு x -ன்
சமீபிப்புக்களில் வரையப்படும்
தொடுகோடு x அச்சிற்கு இணையாக
இருக்கும்?

(i) $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 1]$

(i) $f(x)$ ஆனது $[0, 1]$ ல்
தொடர்ச்சியானதும்

(ii) $(0, 1)$ ல் வகையிடத்தக்கதாகவும்

(iii) $f(a) = f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(b) = f(1) = 1 - 1 = 0$

$f(a) = f(b)$

∴ ஏராலின் தேற்றப்படி ஒரு $c \in (0, 1)$
உள்ளது.

$f'(c) = 0$ என காணலாம்

அப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு
வளைவரைக்கு x அச்சிற்கு இணையான
தொடுகோடாக அமையும்.

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 1 = 0$
 $c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$

$x = \frac{1}{2}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு
 x அச்சிற்கு இணையாக அமையும்.

(ii) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 2}$, $x \in [-1, 6]$

(i) $f(x)$ ஆனது $[-1, 6]$ ல் தொடர்ச்சியானது;

(ii) $(-1, 6)$ ல் வகையிடத்தக்கது,

(iii) $f(-1) = \frac{1 + 2}{-1 + 2} = 3$

$f(a) = f(b)$

$f(6) = \frac{36 - 12}{6 + 2} = \frac{24}{8} = 3$

∴ ஏராலின் தேற்றப்படி ஒத்தும் $c \in (-1, 6)$
என காணப்படும்

$f'(x) = \frac{(x+2)(2x-2) - (x^2-2x)(1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{(x+2)^2}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow c^2 + 4c - 4 = 0$

$c^2 + 4c + 4 = 8$

$(c+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$c+2 = \pm 2\sqrt{2}$

$c = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$c = -2 - 2\sqrt{2} \notin (-1, 6)$

$c = -2 + 2\sqrt{2} \in (-1, 6)$

$c = -2 + 2\sqrt{2}$ என்ற புள்ளியில்
வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சிற்கு
இணையாக இருக்கும்.

(iii) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{3}$, $x \in [0, 9]$

$f(x)$ ஆனது $[0, 9]$ ல் தொடர்ச்சியானதும்

$(0, 9)$ ல் வகையிடத்தக்கதாகவும்
உள்ளது.

$$f(a) = f(0) = 0 - \frac{0}{3} = 0$$

$$f(b) = f(9) = 3 - \frac{9}{3} = 0 \quad f(a) = f(b)$$

∴ ரோஸின் தேற்றப்படி ஏதேனும் ஒரு $c \in (0, 9)$ ஐ $f'(c) = 0$ எனும்படி காண இயலும்

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2c} = \frac{1}{3}$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2}$$

$$c = \frac{9}{4} \in (0, 9)$$

$x = \frac{9}{4}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

③ கொடுக்கப் பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் லைக்ரான்சியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்கிடுக.

i) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [-1, 2]$

$f(c)$ ஆனது $[-1, 2]$ ல் தொடர்ச்சியாக இல்லை.

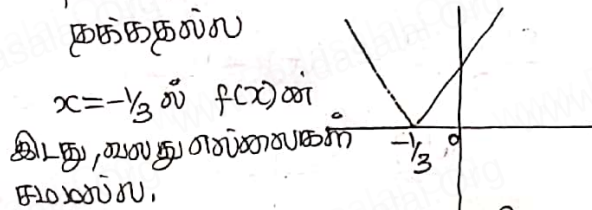
$$x = 0 \text{ ல் } f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

லைக்ரான்சியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்த இயலாது.

ii) $f(x) = |3x+1|, x \in [-1, 3]$

$f(x)$ ஆனது $[-1, 3]$ ல் தொடர்ச்சியாக

$f(x)$ ஆனது $(-1, 3)$ ல் வகையிட தக்கதல்ல



$x = -1/3$ ல் $f(x)$ இடது, வலது எல்லைகள் சமம்.

லைக்ரான்சியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்த இயலாது.

4) லைக்ரான்சியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி குறைபுள்ளிகள் வழியே எவ்வளவு நூலுக்கு இணையாக ஒரு தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளியின் x மதிப்பை காண்க.

i) $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2, 2]$

$f(x)$ ஆனது $[-2, 2]$ ல் தொடர்ச்சியானது $[-2, 2]$ ல் வகையிட தக்கது

∴ லைக்ரான்சியின் இடைமதிப்பு விதியின்படி ஏதேனும் ஒரு $c \in (-2, 2)$ ஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{--- ①}$$

எனும்படி காணலாம்.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3$$

$$f(a) = f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$$

$$f(b) = f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 3 = \frac{4 - 0}{2 + 2}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{4}{4}$$

$$3c^2 = 1 + 3 \quad c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 2)$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு குறைபுள்ளிகள் வழியே எவ்வளவு நூலுக்கு இணையாக இருக்கும்.

ii) $f(x) = (x-2)(x-7), x \in [3, 11]$

$$f(x) = x^2 - 9x + 14$$

$f(x)$ ஆனது $[3, 11]$ ல் தொடர்ச்சியானது, $[3, 11]$ ல் வகையிட தக்கது.

∴ லைக்ரான்சியின் இடைமதிப்பு விதியின்படி

$$c \in (3, 11) \text{ ஐ } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{--- ①}$$

எனும்படி காணலாம்.

$$f'(x) = 2x - 9$$

$$f'(c) = 2c - 9$$

$$f(b) = f(11) = 121 - 99 + 14 = 36$$

$$f(a) = f(3) = 9 - 27 + 14 = -4$$

$$\Rightarrow 2c - 9 = \frac{36 + 4}{11 - 3}$$

$$2c - 9 = \frac{40}{8}$$

$$2c = 9 + 5$$

$$2c = 14$$

$$c = 7$$

$x = 7$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு தொடுகோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்.

5) (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பிற்கு (12)

a, b தாய் மிகைக் குறு எண்ணாக
கொண்ட $[a, b]$ ல் சராசரி மதிப்பு
கொண்டதின் படி இறுதி மதிப்பு $\sqrt{ab}$
என நினைவுக.

$f(x)$ ஆனது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது
(a, b எண்ப்பு மிகை
என்பதால்)

$f(x)$ ஆனது (a, b) ல் வகையிடக்கூடியது
∴ ஸ்கெர்னாசியின் இடைமதிப்பு விதிப்படி

$c \in (a, b)$ ஐ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ என காணலாம்.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a}$$

$$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{ab}$$

$$c^2 = ab \quad c = \sqrt{ab}$$

$$c = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

$$\text{இறுதி மதிப்பு} = \sqrt{ab}$$

(ii) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ என்ற
சார்பிற்கு எந்த ஒரு முடிய இடைமதிப்பு
 $[a, b]$ ல் சராசரி மதிப்பு கொண்டுள்ளதின்
படி இறுதி மதிப்பு $\frac{a+b}{2}$ என நினைவுக.

$f(x)$ ஆனது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது,

$f(x)$ ஆனது (a, b) ல் வகையிடக்கூடியது,

ஸ்கெர்னாசியின் இடைமதிப்பு விதிப்படி

எந்த ஒரு $c \in (a, b)$ ஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{என நினைவுக}$$

காண இயலும்

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

$$f'(c) = 2Ac + B$$

$$f(b) = Ab^2 + Bb + C$$

$$f(a) = Aa^2 + Ba + C$$

0 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2cA + B &= \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b - a} \\ &= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{A(b - a)(b + a) + B(b - a)}{b - a} \end{aligned}$$

$$2cA + B = (b - a) \left[\frac{A(b + a) + B}{(b - a)} \right]$$

$$2cA + B = A(b + a) + B$$

$$2cA = A(a + b)$$

$$c = \frac{a + b}{2} \in (a, b)$$

$$\text{இறுதி மதிப்பு} \quad c = \frac{a + b}{2}$$

6) ஒரு பந்தய மகிடுந்து ஆடுதல்
20 ஆம் கிலோமீட்டரில் இருந்து
முடிபடுகிறார். அதன் வேகம் 150 கிமீ/ம
தாய் தாண்டவில்லை, எனில் அடுத்த
2 மணி நேரத்தில் அவரால் கடக்க
முடிந்த அதிகபட்ச இடைவெளி காண்க.

$s(t)$ என்பது t நேரத்தில் தூரம்

என்க.

$$s(t_1) = 20$$

$$s(t_2) = ?$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 2$$

$$s'(t) \leq 150$$

$s(t)$ என்பது $[0, 2]$ தொடர்ச்சியானதும்

$(0, 2)$ ல் வகையிடக்கூடியதாகும்

இருவின் ஸ. இ.ம. கொண்டுள்ளதின்

$$s'(t) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{s(t_2) - 20}{2 - 0} = s'(t) \leq 150$$

$$\frac{s(t_2) - 20}{2} \leq 150$$

$$s(t_2) - 20 \leq 300$$

$$s(t_2) \leq 300 + 20$$

$$s(t_2) \leq 320$$

அதிகபட்சம் கடந்த தூரம்

$$= 320 - 20$$

$$= 300 \text{ கி.மீ}$$

(4 மீட்டர் விடை 320 தவறு)

- 7) $f(x)$ என்ற சார்பானது $f'(x) \leq 1$ (13)
 $1 \leq x \leq 4$ எனில் $f(4) - f(1) \leq 3$
 எனக் காட்டுக.

$f'(x) \leq 1$
 $(1,4)$ ல்
 எனவே $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது
 $\therefore f(x)$ ஆனது $[1,4]$ ல் தொடர்ச்சியானது.
 $\therefore$ ம.இ.ம தேற்றப்படி

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$a=1 \quad b=4 \quad \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = f'(x) \leq 1$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{3} \leq 1$$

$$f(4) - f(1) \leq 3$$

- 8) $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பானது
 $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ மற்றும் $f'(x) \leq 2$
 $\forall x$ என்றவாறு இருக்க முடியுமா?
 உதவு விடைக்கு தக்கவிதமாக
 தருக?

$$f'(x) \leq 2$$

$f(x)$ வகையிடத்தக்கது ஆகவே
 $[0,2]$ ல் தொடர்ச்சியானது

ம.இ.ம. தேற்றப்படி $x \in (0,2)$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = f'(x) \leq 2$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} \leq 2$$

$$f(2) - f(0) \leq 4 \quad \text{--- ①}$$

ஆனால் கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து

$$f(2) - f(0) = 4 + 1 = 5 \neq 4$$

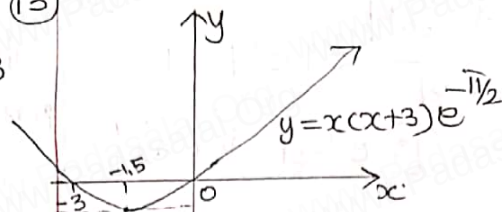
$\therefore f'(x) \leq 2$ என இருக்க இயலாது

$$\left[\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \neq 2 \right]$$

$f'(x) \leq 2$ ஆக இருக்க இயலாது

- 9) $f(x) = x(x+3)e^{-1/2}$, $-3 \leq x \leq 0$

என்ற வகையானது x அச்சிற்கு
 இணையாக வரையப்படும் தொடங்குபுள்ள
 தொடர் முன்னிலின் x மூலியு $(-3,0)$
 ல் அடையும்கு என்னிதறுக.



$f(x)$ ஆனது $[-3,0]$ ல் தொடர்ச்சியானது

$f(x)$ ஆனது $(-3,0)$ ல் வகையிடத்தக்கது

$$f(a) = f(-3) = 0$$

$$f(b) = f(0) = 0$$

$$f(a) = f(b)$$

$\therefore$ ம.இ.ம. தேற்றப்படி மத்தியம்

$c \in (-3,0)$ ஆக $f'(c) = 0$ எனவருது

காணலாம் $x=c$ ல் வரையப்படும்
 தொடங்குபுள்ள x அச்சிற்கு இணையாக
 இருக்கும்.

$$f(x) = x(x+3)e^{-1/2}$$

$$f(x) = e^{-1/2}(x^2+3x)$$

$$f'(x) = e^{-1/2}(2x+3)$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow e^{-1/2}(2c+3) = 0$$

$$2c = -3$$

$$c = -1.5 \in (-3,0)$$

$x = -1.5$ ல் வரையப்படும் தொடங்குபுள்ள
 x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

- 10) ஏதாவது மூலியு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி.

$$a > 0, b > 0, |e^{-a} - e^{-b}| < |a - b|$$

என்கிதறுக.

$$f(x) = e^{-x}$$

$f(x)$ ஆனது மிகை

என்கனின் மூலியு

இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது

திருத்த இடைவெளியில் வகையிட

தக்கதாகவும் உள்ளது

$\therefore$ ம.இ.ம. மூலியு தேற்றப்படி

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = -e^{-c}$$

இருபுறமும் மடங்குதல்

$$\frac{|e^{-a} - e^{-b}|}{|a-b|} = |e^{-c}| \leq 1$$

$$[\because e^{-x} \leq 1 \quad \forall x > 0]$$

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$$

தொடரின் விரிவுகள்

a) தெய்வரின் தொடர்

$f(x)$. சதுரம் $x=a$ ல் முடிவற்ற
சுண்ணிக்கையிலான குறை வகையில
தங்குதல் எனில்

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

b) மெக்ஸுவரின் தொடர்

$a=0$ எனில்

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

பயிற்சி 7.4

i) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு
மெக்ஸுவரின் விரிவைக் காண்க

ii) e^x

சார்பு	e^x மற்றும் வகையகரு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = e^x$	e^x	$e^0 = 1$
$f'(x)$	e^x	$e^0 = 1$
$f''(x)$	e^x	$e^0 = 1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{(1)}{1!} x + \frac{(1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

(iii) $\sin x$

$$f(x) = \sin x$$

function சார்பு	$\sin x$ மற்றும் வகையகரு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \sin x$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f'(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f''(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f'''(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x)$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f^{(5)}(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{(-1)}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(iv) $\cos x$

சார்பு	$\cos x$ மற்றும் வகையகரு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \cos x$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f'(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f''(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$f'''(x)$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f^{(4)}(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f^{(5)}(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f^{(6)}(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!} x + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(iv) \log(1-x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

(15)

சார்பு $\log(1-x)$ மற்றும் அதன் வகைகளை $x=0$ ல் அதன் மதிப்பு

$$f(x) = \log(1-x) \quad \log(1-x) \quad \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} \quad \frac{-1}{1-0} = -1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \quad \frac{-1}{(1-0)^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \frac{2}{(1-0)^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} \quad \frac{-6}{(1-0)^4} = -6$$

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\log(1-x) = 0 - \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$= -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots)$$

$$(v) \tan^{-1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

சார்பு $\tan^{-1}x$ மற்றும் அதன் வகைகளை $x=0$ ல் அதன் மதிப்பு

$$f(x) = \tan^{-1}x \quad \tan^{-1}x \quad \tan^{-1}0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$f''(x) = 0 - 2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots = 0$$

$$f'''(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 + \dots = -2$$

$$f^{(4)}(x) = 0 + 24x - 120x^3 + \dots = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 24 - 360x^2 + \dots = 24$$

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\tan^{-1}x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{4!}{4! \cdot 5}x^5 - \dots$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(vi) \cos^2 x$$

சார்பு $\cos^2 x$ மற்றும் அதன் வகைகளை $x=0$ ல் அதன் மதிப்பு

$$f(x) = \cos^2 x \quad \cos^2 x \quad \cos^2 0 = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x \quad -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos 2x (2) \quad -2\cos 0 = -2$$

$$f'''(x) = -2(-\sin 2x) (2) = 4\sin 2x \quad 4\sin 0 = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cos 2x (2) \quad 8\cos 0 = 8$$

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\cos^2 x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{8}{4!}x^4 + \dots$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots$$

2) $\log x, x > 0$ என்ற சார்பின் விரிவை மெக்ஸுலாஸின் விரிவை $x=1$ ல் பெறும்படி சூத்திரம் கொண்டு பயன்படுத்துவதன் மூலம் காண்க.

சார்பு $\log x$ மற்றும் அதன் வகைகளை $x=1$ ல் அதன் மதிப்பு

$$f(x) = \log x \quad \log x \quad \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{1} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \frac{2}{1^3} = 2$$

பெயர்ச்சி விநிய

(16)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\log x = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$= 0 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(-1)(x-1)^2}{2!} + \frac{2!}{2 \times 3}(x-1)^3 + \dots$$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

(3) $\sin x$ -ன் விரிவை $x = \pi/4$ ன் அடுக்குகளாக முதல் இன்று பூச்சிய மற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

சார்பு $\sin x$ மற்றும் $x = \pi/4$ ன் வகைகளை

$$f(x) = \sin x \quad \sin x \quad \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x \quad \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x \quad -\sin \pi/4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

பெயர்ச்சி விநிய $x = \pi/4$ ன்

$$f(x) = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}(x-\pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\pi/4) + \frac{-1}{2!}(x-\pi/4)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{(x-\pi/4)}{1!} - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \dots \right)$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{(x-\pi/4)}{1!} - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \dots \right)$$

4) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ன் பல்புறுப்பு கோவையின் வரிசை $x=1$ ன் அடுக்குகளாக காண்க.

சார்பு $x^2 - 3x + 2$ ன் $x=1$ ன் வகைகளை

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad x^2 - 3x + 2 \quad 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 3 \quad 2x - 3 \quad 2 - 3 = -1$$

$$\begin{array}{ccc} f''(x) & 2 & 2 \\ f'''(x) & 0 & 0 \end{array}$$

பெயர்ச்சி விநிய $x=1$ ன்

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 + \frac{(-1)}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)^2 - (x-1)$$

தேர்வுபெறாத வடிவங்கள்

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

ஸெயிதாஸின் விதி

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ எனில்}$$

அல்லது

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ எனில்}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

தேர்வுபெறாத வடிவங்கள் $\frac{0^0}{0}, 1^\infty, \infty^0$

சார்பு சார்பு தேர்வு

$$\lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$$

பயிற்சி 7.5

கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளைத் தேர்வுப்படுத்தி இடங்களில் ஸெயிதாஸின் விதியைப் பயன்படுத்தி காண்க.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

தேர்வுபெறாத வடிவம் $\left(\frac{0}{0}\right)$

ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த (17)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

மீண்டும் ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})}$$

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$\text{II} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவம்
ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த
(கரு முறை)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 0}{2x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \left(\frac{\infty}{\log \infty} = \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,

ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} \sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

$$\left(= \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவம்

ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x} e^x}$$

$$= \frac{1}{\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \left(= \frac{0}{0} \right)$$

$\frac{0}{0}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,

ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x}$$

$$= \left(\frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \right)$$

மீண்டும் ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{x(-\cos x) + \cos x + \sin x}$$

$$= \frac{\sin 0}{0 + \cos 0 + \cos 0} = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - x^2 - x}{x^2 - 1} \left(= \frac{2 - 1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \right)$$

$\frac{0}{0}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,
ஸோபிதாஸ் விதிபயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x-x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0-1-2x}{2x} \\ = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (= 0^0)$$

0^0 தேற்றப்பதாபத வடிவில் உள்ளது

$$y = x^x \text{ என்க}$$

மலக்கை எடுக்க

$$\log y = \log x^x$$

$$\log y = x \log x$$

ஸல்லை எடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} \quad \left(= \frac{\log 0}{1/0} = \frac{-\infty}{\infty} \right)$$

$\left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$ தேற்றப்பதாபத வடிவில் உள்ளது

ஸோலிதாஸ் விதியை பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = 0$$

எனவே என்ன தேற்றப்படி

$$\log \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right) = 0$$

எதிர் மலக்கை எடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\infty} \right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

1^{∞} தேற்றப்பதாபத வடிவில் உள்ளது

$$y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \text{ என்க}$$

$$\log y = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\log y = x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

ஸல்லை காண

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x}$$

$$\left(= \frac{\log(1+0)}{1/0} = \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

ஸோலிதாஸ் விதியை பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = 1$$

எனவே என்ன தேற்றப்படி

$$\log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} y \right) = 1$$

எதிர் மலக்கை காண

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$$

$$= (\sin \pi/2)^{\tan \pi/2} = 1^{\infty}$$

(1^{∞}) தேற்றப்பதாபத வடிவில் உள்ளது

$$y = \sin x^{\tan x} \text{ என்க}$$

$$\log y = \log \sin x^{\tan x}$$

$$\log y = \tan x \log \sin x$$

$$\log y = \frac{\log \sin x}{\cot x}$$

സംസ്കൃത കാര്യം

(19)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \log y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log \sin x}{\cot x} = \frac{(\log 1 = 0)}{(\cot \pi/2 = 0)}$$

உலாபிதாஸ் கிந்தைய பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log \sin x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} \times \left(-\frac{\sin^2 x}{1} \right)$$

$$= -\cos \pi/2 \sin \pi/2$$

$$= -0.01$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \log y = 0$$

செய்யுச் செய்யுள்

$$\log(\lim_{x \rightarrow \pi/2} y) = 0$$

தமிழ்மொழிநாடு அருங்கிதம்

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} y = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2} = \cos 0^{1/0} = 1^{\infty}$$

1. ∞ கோணங்களாக வடிவில் உள்ளது

$y = \cos x^{\frac{1}{x^2}}$ என்க

$$\log y = \log \cos x$$

$$\log y = \frac{\log \cos x}{x^2}$$

അൽക്കലി ക്വാർട്ട

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos x}{x^2}$$

$$\left(= \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

செலாதிதாஸ் விநியாய பயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}.$$

$$= -\frac{1}{2}(12) \quad \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = -1/2$$

சென்சு சார்ஜ் தேற்றப்படி

$$\log(\lim_{x \rightarrow 0} + y) = -1/2$$

சதிந்மடகூனக சடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

12) A_0 எதனால் ஆரம்பித்த தொகையானது ஒரு வருடத்திற்கு n சதவீத r சதவீத வட்டி வீதத்தில் கூட்டு வட்டி முறையில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது எனில், முதலீடு செய்யப்பட்டு t வருடத்தில் தொகையின் மதிப்பு $A = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

வட்டியானது தொடர்ச்சியான வட்டி
 சூறையில் (அதாவது $n \rightarrow \infty$)
 கணக்கிடப்பட்டால் t காலத்திற்கு
 பின்னர் அந்த தொகையின் மதிப்பு
 $A = A_0 e^{rt}$ என காட்டுக.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad \text{என்பதை பயன்படுத்த}$$

$$= A_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right)^t$$

$$= A_0 (e^r)^t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A_0 e^{\gamma t}$$

முறை-II

(20)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= A_0 (1^\infty)$$

தேடிப்பதற்கு வடிவில் உள்ளது

$$y = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \text{ என்க,}$$

$$\log y = \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = nt \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$\log y = t \frac{\log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

எனவே காண

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log y = \lim_{n \rightarrow \infty} t \frac{\log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

லாபிதாஸ் விதியை பயன்படுத்த

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \left(\frac{1}{1 + \frac{r}{n}}\right) \left(-\frac{r}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= rt \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{r}{n}}$$

$$= rt \frac{1}{1 + 0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log y = rt$$

$$\log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y\right) = rt$$

எதிர்மடக்கை எடுக்க

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = e^{rt}$$

A_0 ஆல் பெருக்கி

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 e^{rt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A_0 e^{rt}$$

குறையும் வகைக் கொடுக்கப் பயன்படுகின்றஏனும் சார்பு

$f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow$

$$f(a) \leq f(b) \quad \forall a, b \in I$$

எனக்குந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் ஏனும் சார்பு

இறங்கும் சார்பு $f(x)$ என்ற சார்பு

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b), \quad \forall a, b \in I$$

எனில் I ல் $f(x)$ இறங்கும் சார்பு

* $f(x)$ என்ற சார்பு (a, b) ல் வகையிட தக்கது என்க, $\forall x \in (a, b)$ க்கு

i) $f'(x) \geq 0$ எனில் $f(x)$ ஏனும் சார்பு

ii) $f'(x) > 0$ எனில் $f(x)$ திடமான ஏனும் சார்பு

iii) $f'(x) \leq 0$ எனில் $f(x)$ இறங்கும் சார்பு

iv) $f'(x) < 0$ எனில் $f(x)$ திடமான இறங்கும் சார்பு

தேக்கநிலைப்புள்ளி $f(x)$ என்ற சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$

ஒரு தேக்கநிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ ஆகும்,

தேக்கநிலை எண் $f(x)$ என்ற சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$

ஒரு நிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ அல்லது $f'(x_0)$ காணாததற்கு அல்ல.

அந்த x_0 க்கு தேக்கநிலைஎண் அல்லது நிலைஎண் என்று பெயர்.

மீள்பெரு பெருமம், மீச்சிறு சிறுமம்அவ்விடத்தில் தேற்றம்

$f(x)$ என்ற சார்பானது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் f ஆனது

$[a, b]$ ல் நிபந்தனையுடைய,
மிச்சிறு சிறுமம் பெருமம்

$f(x)$ ன் நிபந்தனையுடைய, மிச்சிறு
சிறுமம் காணும் முறை

- 1) $f'(x)$ காண்க
- 2) $f'(x) = 0$ என்கொண்டு
நிலை எண்களை காண்க
- 3) நிலை எண்கள் முறைப்படுத்தி
 a மற்றும் b ல் f ன் மதிப்பு காண்க
- 4) படி 3 ல் பெரியது நிபந்தனையுடைய
சிறியது மிச்சிறுசிறுமம்

பெரியார் உதாரணம்

$f(x)$ க்கு $x=c$ ல் இடம்
சார்ந்த அந்தி உண்டாகுதல் எனில்
 c ஒரு நிலை எண் ஆகும்,
நிலை எண்ணினை $f'(x) = 0$ ஐ
நீர்வதாயும் $f'(x)$ (காணுதல்)
மதிப்புகளை காண்பதன் மூலமாகவும்
பெறலாம்.

முதல் வகைகளைக் கொண்டு காண்க

- ① $f'(c)$ ஆனது c ல் -விருந்து
+ ஆக மாறினால் $f(c)$ என்பது
இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்
- ② $f'(x)$ ஆனது c ல் +விருந்து
- ஆக மாறினால் $f(c)$ ஆனது
இடஞ்சார்ந்த பெருமம்.
- ③ $f'(x)$ ஆனது c ன் இருபுறமும்
+ ஆகவோ அல்லது - ஆகவோ
(ஒரே குறியுடன்) இருப்பின் $f(c)$ ஆனது
இடஞ்சார்ந்த பெருமமும் அல்ல
சிறுமமும் அல்ல.

பயிற்சி 7.6

1, கிழக்காணும் சார்புக்கு
கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில்
நிபந்தனையும் மிச்சிறு அந்தி.
மதிப்புகளை காண்க.

$$\text{பு } f(x) = x^2 - 12x + 10 \quad ; \quad [1, 2]$$

$$f'(x) = 2x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{நிலை எண் } x = 6 \notin [1, 2]$$

(நிலை எண் $[1, 2]$ க்குள்
உருவ வகையில் கொடுக்கப வேண்டும்)
எனவே இடைவெளியை $[1, 2]$ என
மாற்றினால் புத்தக விதையை
பெறலாம்)

நிலை எண்
 $x = 6, [1, 2]$ ல் அமைவின்மை

$$f(1) = 1 - 12 + 10 = -1$$

$$f(2) = 4 - 24 + 10 = -10$$

$$\text{நிபந்தனையுடைய} = -1$$

$$\text{மிச்சிறு சிறுமம்} = -10$$

(கொடுக்கப்பட்ட காலத்தில்
புத்தக விதையை)

$$\text{(ii) } f(x) = 3x^4 - 4x^3 \quad ; \quad [-1, 2]$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2(x-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

$$\text{நிலை எண்கள் } 0, 1 \in [-1, 2]$$

$$f(0) = 3(0) - 4(0) = 0$$

$$f(1) = 3 - 4 = -1$$

$$f(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$f(2) = 3(16) - 4(8) = 48 - 32 = 16$$

$$\text{நிபந்தனையுடைய} = 16$$

$$\text{மிச்சிறு சிறுமம்} = -1$$

(iii) $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$; $[-1, 1]$ 22

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{6} \left(\frac{4}{3} \right) x^{4/3-1} - 3 \frac{1}{3} x^{1/3-1} \\ &= 8x^{1/3} - x^{1/3}x^{-1} \\ &= x^{1/3} \left(8 - \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{1/3} \left(\frac{8x-1}{x} \right) = \frac{8x-1}{x^{2/3}} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} 8x-1=0 \\ 8x=1 \\ x=1/8 \end{array}$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ வரையறுக்கப்படவில்லை
 சூழல் எண்கள் = $0, 1/8$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f\left(\frac{1}{8}\right) &= 6\left(\frac{1}{8}\right)^{4/3} - 3\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} \\ &= 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{36}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3-12}{8} \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$f(-1) = 6(-1)^{4/3} - 3(-1)^{1/3} = 6 + 3 = 9$$

$$f(1) = 6 - 3 = 3$$

$$\text{நீர்வெண் வெண்மை} = 9$$

$$\text{நீச்சிய சிறுமம்} = -\frac{9}{8}$$

(iv) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$; $[0, \pi/2]$

$$f'(x) = 2(-\sin x) + 2\cos 2x.$$

$$f'(x) = 2(-\sin x + \cos 2x)$$

$$f'(x) = 0 \quad -\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin x + 1 = 0 \quad \sin x = -1$$

$$\sin x = -1 \quad \sin 2x = \sin \pi/6$$

$$[0, \pi/2] \text{ in } \sin x \text{ } \left\{ \begin{array}{l} \text{odd} \\ \text{of } y \text{ on } y \end{array} \right. \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/6$$

$$\sin x = -1 \quad \boxed{x = \pi/6}$$

$$f(\pi/6) = 2\cos \pi/6 + \sin 2(\pi/6)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = 2\cos 0 + \sin 0 = 2(1) + 0 = 2$$

$$f(\pi/2) = 2\cos \pi/2 + \sin 2\pi/2 = 0 + 0 = 0$$

$$\text{മിശ്രിത സമയം} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

நிச்சித சிறுமம் = 0.

② கீழ்க்காணும் சார்புகளைக்
ஆரியஸ்ய இடைவெளிகளை காண்க
அதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அளவி
மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2+6x-12=0$$

$$6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$x = -2$ $x = 1$

മൂലം $x = -2, 1$

இடைவெளிகள் $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, \infty)$

உதாரணம்	மதிப்பு x	$f'(x) = 6(x+2)(x-1)$	$f'(x)$ அகிலம்	ஏதும்/ இல்லாது
$(-\infty, -2)$	-3	$6 \times (-1) \times (-4) = 24$	+	திட்டமாக ஏதும்
$(-2, 1)$	0	$6(2)(-1) = -12$	-	திட்டமாக இல்லாது
$(1, \infty)$	2	$6(4)(1) = 24$	+	திட்டமாக ஏதும்

$x = -2$ ஸ் திருப்தியும்

$x = -2$ ன் இரட்டையும்
 (v) $f'(x)$ ன் குறி. $+ \infty$ ஐ அடங்கி - ஆக
 மாறுகிறது.

எனவே $f(x)$ $x = -2$ ல் கிடைக்காது
எனவே $x = -2$ ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது.

பெருமதிப்பு = $f(-2)$

$$= 2(-8) + 3(-2)^2 - 12(-2)$$

$$= -16 + 12 + 24$$

$$= 20$$

(23)

ii) $f'(x)$ ன் குறி $x=1$ ஐ
கடக்கும்போது -லிருந்து +ஆக
மாறுகிறது எனவே $f(x)$ க்கு
 $x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்
உள்ளது.

$$\begin{aligned} \text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} \\ \text{மதிப்பு} &= f(1) \\ &= 2+3-12 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த ஸடுமம்} = 20$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} = -7$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x}{x-5}$$

$$f'(x) = \frac{(x-5)1 - x(1)}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-5-x}{(x-5)^2} = \frac{-5}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-5)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f'(x)$ ஆனது $x=5$ ல் வரையறுக்க
படவில்லை.
 $x=5$ ஐ ஒரு நினைவுகூர் 2-ன்னைது.



இடைவெளிகள் $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = \frac{-5}{(x-5)^2}$	$f'(x)$ ன் குறி	குறும்/இறங்கும்
$(-\infty, 5)$	0	$\frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(5, \infty)$	6	$\frac{-5}{1} = -5$	-	திட்டமாக இறங்கும்

$f(x)$ ஆனது $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$ இரண்டிலும்
திட்டமாக இறங்கும் காப்பு

$f'(x)$ ன் குறி மாற்றம் இல்லை

$\therefore f(x)$ க்கு இடஞ்சார்ந்த அல்லது
மதிப்பு இல்லை.

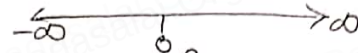
$$\text{iv) } f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(1-e^x)e^x - e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-e^{2x}+e^{2x}}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-e^x)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ காண
இயலாது
நினைவுகூர் $x=0$
தேக்கநினைவுப்புள்ளி இல்லை



இடைவெளிகள் $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = \frac{1}{(1-e^x)^2}$	குறி $f'(x)$	குறும்/இறங்கும்
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{1}{(1-e)^2}$	+	திட்டமாக குறும்
$(0, \infty)$	1	$\frac{1}{(1-e)^2}$	+	திட்டமாக குறும்

$f(x)$ ஆனது $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ல்

திட்டமாக குறும்,
 $f'(x)$ ன் குறி மாறவில்லை
இடஞ்சார்ந்த ஸடுமம், சிறுமம் மதிப்பு இல்லை.

$$\text{v) } f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$$

$f(x)$ ஆனது $(0, \infty)$ ல் மாற்றம்
வரையறுக்கபட்டுள்ளது

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x^3-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-1}{x} = 0$$

$$x^3-1=0$$

$$x^3=1$$

$$x=1$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ வரையறுக்கபடவில்லை
நினைவுகூர் $x=0, 1$



இடைவெளிகள் $(0, 1)$, $(1, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = \frac{x^3-1}{x}$	$f'(x)$ ன் குறி	குறும்/இறங்கும்
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{8}-1}{\frac{1}{2}} = -\frac{7}{4}$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(1, \infty)$	2	$\frac{8-1}{2} = \frac{7}{2}$	+	திட்டமாக குறும்

$x=1$ ன் கிடைக்கும்
 $f'(x)$ ன் குறி - லிருந்து
 + ஆக மாறுகிறது

$x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த
 குறும் 2 ன்னது
 இடஞ்சார்ந்த
 சிறுமம் $f(1) = f(1)$
 $= \frac{1}{3} - \log 1$
 $= \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$$

(v) $f(x) = \sin x \cos x + 5 \quad x \in (0, 2\pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2 \sin x \cos x + 5$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x (2) = \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 2\pi$$

இடைமையனிகள்

$$(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$$

இடைமையனி	மதிப்பு x	$f'(x) = \cos 2x$	$f'(x)$ ன் குறி	ஒளியைப் தண்கம்
$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	+	திட்டமாக ஒளும்
$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{\pi}{2}$	$\cos \pi = -1$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$	π	$\cos 2\pi = 1$	+	திட்டமாக ஒளும்
$(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cos 3\pi = -1$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\cos \frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$	+	திட்டமாக ஒளும்

$(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ ஆகிய
 இடைமையனிகளில் $f(x)$ திட்டமாக ஒளும்
 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ ல் $f(x)$ திட்டமாக
 இறங்கும்

(24) (i) $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ல் கடக்கும் போது $f'(x)$ ன்
 குறி + லிருந்து - ஆக மாறுவதால்
 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ ல் இடஞ்சார்ந்த ரெகும்
 அடைகிறது.

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin 2(\frac{\pi}{4}) + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

$$f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin 2(\frac{5\pi}{4}) + 5$$

$$= \frac{1}{2} \sin \pi + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த ரெகும்} = \frac{11}{2}$$

(ii) $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ல் கடக்கும் போது

$f'(x)$ ன் குறி - லிருந்து + ஆக மாறுகிறது.

எனவே

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த

சிறுமம் அடைகிறது.

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin 2(\frac{3\pi}{4}) + 5 = \frac{1}{2} (-1) + 5 = \frac{9}{2}$$

$$f(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin 2(\frac{7\pi}{4}) + 5 = \frac{1}{2} (-1) + 5 = \frac{9}{2}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} = \frac{9}{2}$$

கிரைண்டர் உணகங்களுமில் பின்புறம்

குறிவு தண்கம் சோதனை

i) திறந்த இடைமையனி I-ல் $f''(x) > 0$
 எனில் I ல் $f(x)$ மேல்நோக்கி குறிவு

ii) திறந்த இடைமையனி I ல் $f''(x) < 0$

எனில் $f(x)$ கீழ்நோக்கி குறிவு

உணவு மாற்றப் புள்ளி

iii) $f''(c)$ காண தக்கது மற்றும் $f''(c)$ ன்

குறி $x=c$ - கடக்கும் போது

மாறுகிறது எனில் $(c, f(c))$ ஆனது f ன்
 உணவு மாற்றப் புள்ளி ஆகும்

(iv) $x=c$ உணவு மாற்றப் புள்ளியில்

$$f''(c) \text{ காண தக்கது எனில் } f''(c) = 0$$

ദൃഷ്ടാന്തം മരണമെന്നു പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

c) മിക്കസംഗതികൾ $f'(c) = 0$ ആകുമ്പോൾ c ന്റെ അടുത്തായിട്ട് $f'(x)$ വ്യക്തമായി മാറാൻ,

၁၆) $\frac{x=c}{f'(x)} < 0$ ဝက်လံ $f(x)$ မှာ $x=c$ မှာ မြင့်မားသည်

$f''(x) > 0$ ചരിവ് $f(x)$ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന
കുന്ദിതമാണ്

$f''(x) = 0$ எனில் இதை ஒரு துணை
இடைவாரித அல்லது மூலிப்புணை
புள்ளிய தகையல் தராது. எனலாம்,

ചുവടു കീഴ് 7.7

1) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு @ இடைவெளிகள் மூலமும் வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = x(x-4)^3$

$$f'(x) = x^3(x-4)^2 + (x-4)^3(1)$$

$$= (x-4)^2(3x + x-4) \quad \begin{array}{c} \uparrow y \\ \uparrow \end{array}$$

$$= (x-4)^2(4x-4)$$

$$= (x-4)^2 4(x-i)$$

$$f''(x) = 4(x-4)^2(1) + 4(x-1)2(x-4)$$

$$= 4(x-4) [x-4 + 2x-2]$$

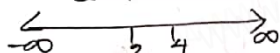
$$= 4(x-4)(3x-6)$$

$$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12(x-4)(x-2) = 0$$

$$x = 2, 4$$

இடைமையனிகள் $(-\infty, 2), (2, 4), (4, \infty)$



இடைவெளி	மதிப்பு	$f'(x) = \frac{1}{12(x-4)(x-2)}$	$f''(x)$ குறியீடு	குறிப்பு
$(-\infty, 2)$	0	96	+	உயர்வுநாள்
$(2, 4)$	3	-12	-	கிழ்வுநாள்
$(4, \infty)$	5	36	+	உயர்வுநாள்

www.TrbTnpsc.com
வண்ணவனம் (0,2), (4,0)ல் கிடைத்தால்
குறியாசையும், (2,4)ல் கிடைத்தால்
குறியாசையும் இடுகின்றது.

$x=2$, $x=4$ යු $f''(x)$ හි ශුන්‍ය
 ස්ථාන සොයන්න

$$f(2) = 2(-2)^3 = -16$$

$$f(4) = 4(0) = 0$$

සාපරාසයේ මධ්‍යස්ථ ලක්ෂ්‍යය $(2, -16), (4, 0)$

(ii) $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 < x < 2\pi$

$$f'(x) = \cos x - \sin x.$$

$$f'(x) = -\sin x - \cos x.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x - \cos x = 0$$

$$-\sin x = \cos x.$$

$$\tan x = -1$$

$$\tan x = \tan(\pi/4)$$

ஸுமத்ரீயில் $x = n\pi + \alpha$
 $x = n\pi - \pi/4 \quad n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \in (0, 2\pi)$$

~~இந்த நவாஸ்மிதன்~~

$$(0, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$$

கொணுதல்	மூலம் x	$f(x) = -(\sin x + \cos x)$	$f'(x)$ இன் குறியை	குறியை
$(0, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{\pi}{2}$	$-(1+0) = -1$	-	நிழலெழுந்தல்
$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	π	$-(0+1) = -1$	+	மேல் நோக்கம்
$(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$	$\frac{11\pi}{6}$	$-(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	-	நிழலெழுந்தல்

$f(x)$ ஆனது $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ ல் கிடைத்தானால்
குதிவாகையும், $(0, \frac{3\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ ல்
நிழ்க்கானல் குதிவாகையும் உள்ளது.

$f'(x)$ னிதே $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ஸ கெண்டு
கொடு மாறுகிறது.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \sin 135^\circ + \cos 135^\circ = \sin(180-45) \\ &\quad + \cos(180-45) \\ &= \sin 45^\circ - \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin 315^\circ + \cos 315^\circ = -\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

வகைமையுடைய புள்ளி $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

$$(ii) f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$[x=0]$$

இடைவெளிகள் $(-\infty, 0), (0, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு	$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f''(x)$	குறி
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{e^{-1} - e^1}{2}$	-	கிடைசியாக
$(0, \infty)$	1	$\frac{e^1 - e^{-1}}{2}$	+	மேல் நோக்கி

$x=0$ ஐ கடைசியாகப் போட்டு $f''(x)$ ன்னைப்
பார்க்கிறோம்

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

வகைமையுடைய புள்ளி $(0, 0)$.

2) இரண்டாம் வகைமையுடைய சோதனையை
பயன்படுத்தி இடஞ்சார்ந்த அகதி
மதிப்புகளை காண்க.

$$2) i) f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$$

$$= -15x^2(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = -15x^2(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -15x^2(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

தேக்கதினை எண்ணு = 0, 1, -1

$$f''(x) = -6x^3 + 30x$$

$$ii) x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 60 - 30 = 30 > 0$$

(26)

$f(x)$ ஆனது $x = -1$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறும மதிப்பை பெறும்

$$\text{அந்த சிறும மதிப்பு} = f(-1)$$

$$= 3 - 5$$

$$= -2$$

(ii) $x = 1$ எனில்

$$f''(1) = -60 + 30 = -30 < 0$$

$x = 1$ ல் $f(x)$ ஆனது இடஞ்சார்ந்த

பெரும் மதிப்பை பெறும்

$$\text{அந்த பெரும் மதிப்பு} = f(1)$$

$$= -3 + 5$$

$$= 2$$

(iii) $x = 0$ எனில்

$$f''(0) = 0$$

இரண்டாம் வகைமையுடைய சோதனை $x = 0$ ல்

f ன் இடஞ்சார்ந்த அகதி மதிப்புகளை
பற்றி அந்த விவரமும் தருவதில்லை.

$$2) (ii) f(x) = x \log x$$

$$f'(x) = x \left(\frac{1}{x}\right) + \log x$$

$$f'(x) = 1 + \log x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \log x = 0$$

$$\log x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$[x = 1/e]$$

தேக்கதினை எண் $x = 1/e$

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

$x = 1/e$ எனில்

$$f''(1/e) = 1/(1/e) = e > 0$$

$f(x)$ ஆனது $x = 1/e$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறுமம் அடைகிறது

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு} = f(1/e)$$

$$= (1/e) \log(1/e)$$

$$= (1/e) (\log 1 - \log e)$$

$$= (1/e) (0 - 1) = -1/e$$

$$\text{சிறுமமதிப்பு} = -1/e$$

$$2) (ii) f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = e^{-2x}(2x) + x^2 e^{-2x}(-2)$$

$$= 2e^{-2x}(x - x^2)$$

$$e^{-2x} \neq 0$$

$$x-x=0$$

$$-x(x-1)=0$$

$$x=0, 1$$

தேக்க நிலை எண்கள் $x=0, 1$

$$f'(x) = 2e^{-2x}(1-2x) + (x-x^2)2e^{-2x}$$

$$= 2e^{-2x}(1-2x-2x+x^2)$$

$$f'(x) = 2e^{-2x}(2x^2-4x+1)$$

ii) $x=0$ எனில்

$$f'(x) = 2e^0(1) = 2 > 0$$

$f(x)$ ஆனது $x=0$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறுமம் அடைகிறது,

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமமதிப்பு} = f(0) = 0$$

(ii) $x=1$ எனில்

$$f'(x) = 2e^{-2}(2-4+1)$$

$$= 2e^{-2}(-1) < 0$$

$f(x)$ ஆனது $x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த

பெருமம் அடைகிறது.

$$\text{பெருமமதிப்பு} = f(1) = 1e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்தபெருமம்} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{சிறுமம்} = 0$$

3) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ என்ற சார்பிற்கு சூரியல்பு இடைமையனிகள், இடஞ்சார்ந்த அல்லது மதிப்புகள் குறித்து இடைமையனிகள் மற்றும் வகையடி மாற்றப் புள்ளிகளை காண்க.

$$f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

$$f'(x) = 6(2x^2 + x - 1) = 6(x+1)(2x-1)$$

$$f'(x) = 6(x+1)(2x-1) \quad \text{--- ①}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(2x^2 + x - 1) = 0$$

$$6(x+1)(2x-1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1}{2}$$

தேக்கநிலை எண்கள் $x = -1, \frac{1}{2}$

$$-\infty \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad \infty$$

27

இடைமையனிகள் $(-1, -1), (-1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$

இடைமையனி	மதிப்பு x	$f'(x) = 6(x+1)(2x-1)$	$f'(x)$ ன் குறி	குறும்/இறங்கும்
$(-1, -1)$	-2	$6(-1)(-5) = 30$	+	நிபமாத குறும்
$(-1, \frac{1}{2})$	0	$6(1)(-1) = -6$	-	நிபமாத இறங்கும்
$(\frac{1}{2}, \infty)$	1	$6(2)(1) = 12$	+	நிபமாத குறும்

$f(x)$ ஆனது $(-1, -1), (\frac{1}{2}, \infty)$ ல் நிபமாத குறும் சார்பாகவும் $(-1, \frac{1}{2})$ ல் நிபமாத இறங்கும் சார்பாகவும் உள்ளது,

$f'(x)$ ன் குறி: $x = -1$ ல் கடக்கும்போது +லிருந்து -ஆக மாறுவதால்

$x = -1$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அடைகிறது,

$$\text{பெருமமதிப்பு} = f(-1) = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$$

$f'(x)$ ன்குறி $x = \frac{1}{2}$ ல் கடக்கும்போது

-லிருந்து +ஆக மாறுவதால்

$x = \frac{1}{2}$ ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் அடைகிறது

$$\text{சிறுமமதிப்பு} = f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{4}) - \frac{6}{2} + 1$$

$$= \frac{2+3-12+4}{4} = \frac{9-12}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்தபெருமம்} = 6$$

$$\text{II } f'(x) = 6(2x^2 + x - 1)$$

$$f'(x) = 6(4x+1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$-\infty \quad -\frac{1}{4} \quad \infty$$

இடைமையனிகள் $(-\infty, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{4}, \infty)$

இடைமையனி	மதிப்பு x	$f''(x) = 6(4x+1)$	$f''(x)$ ன் குறி	குறிப்பு
$(-\infty, -\frac{1}{4})$	-1	-18	-	கீழ்க்காங்கி
$(-\frac{1}{4}, \infty)$	0	6	+	மேல்காங்கி

$f''(x)$ கிடைத்தால் $x = -\frac{1}{4}$ ல் கடக்கும்

போது மாறுகிறது

$$f(-\frac{1}{4}) = 4(-\frac{1}{4}) + \frac{3}{16} - 6(-\frac{1}{4}) + 1$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{6}{4} + 1 = \frac{2}{16} + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{1+12+8}{8} = \frac{21}{8}$$

மாற்றம் மாற்றம் புள்ளி $(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8})$

Padasalai

8. வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைகள்களுக்கள்

* தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$x = x_0 \text{ல்}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

* தனிப்பிணை = மைய மதிப்பு - தோறாய மதிப்பு

* சார்பிணை = $\frac{\text{மைய மதிப்பு} - \text{தோறாய மதிப்பு}}{\text{மைய மதிப்பு}}$

(சு.கார்த்திகேயன்
கருவாடுர் மாவட்டம்)

* சதவீதப்பிணை = சார்பிணை $\times 100$.

பயிற்சி 8.1

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ என்க. $x = 27$ இல்
தோரியல் தோறாய மதிப்பை காண்க,
தோரியல் தோறாய மதிப்பை பயன்படுத்தி
 $\sqrt[3]{27.2}$ மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = x^{1/3} \quad x_0 = 27$$

$$f(x_0) = f(27) = 27^{1/3} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{x^{1/3}}{x}$$

$$f'(x_0) = f'(27) = \frac{1}{3} \frac{(27)^{1/3}}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{27} = \frac{1}{27}$$

$f(x)$ தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

$$= 3 + \frac{x - 27}{27}$$

$$L(x) = \frac{x}{27} + 2$$

$$x = 27.2 \quad f(27.2) \approx L(27.2)$$

$$f(27.2) \approx \sqrt[3]{27.2}$$

$$\begin{array}{r} 1.0074 \\ 27 \overline{) 27.2} \\ \underline{27} \\ 200 \\ 189 \\ \underline{110} \end{array}$$

$$\approx \frac{27.2}{27} + 2$$

$$= 1.0074 + 2$$

$$\sqrt[3]{27.2} \approx 3.0074$$

2) தோரியல் தோறாய மதிப்பை

குறையிஸ், தோறாய மதிப்பு காண்க

i) $(123)^{2/3}$

$$f(x) = x^{2/3} \quad x_0 = 125$$

என்க.

$$f(x_0) = f(125) = (125)^{2/3} = 5^2 = 25$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{2/3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x^{2/3}}{x}$$

$$f'(x_0) = \frac{2}{3} \frac{(125)^{2/3}}{125} = \frac{2}{3} \times \frac{25}{125 \times 5} = \frac{2}{15}$$

தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 25 + \frac{2}{15}(x - 125)$$

$$= 25 + \frac{2x}{15} - \frac{125 \times 2}{15 \times 3}$$

$$= \frac{2x}{15} + \frac{75 - 50}{3}$$

$$L(x) = \frac{2x}{15} + \frac{25}{3}$$

$x = 123$ என பிரதியிட

$$f(123) = (123)^{2/3} \approx L(123)$$

$$\begin{array}{r} 24.733 \\ 15 \overline{) 371} \\ \underline{30} \\ 71 \end{array}$$

$$\underline{60}$$

$$\underline{110}$$

$$\underline{105}$$

$$\underline{50}$$

$$\underline{45}$$

$$\underline{5}$$

$$= \frac{41}{15} + \frac{25}{3}$$

$$= \frac{246 + 125}{15}$$

$$= \frac{371}{15}$$

$$= \frac{371}{15}$$

$$(123)^{2/3} \approx 24.733$$

ii) $4\sqrt{5}$

$$f(x) = x^{1/4} \text{ என்க } x_0 = 16$$

$$f(x_0) = f(16) = (16)^{1/4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{1/4 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{x^{1/4}}{x}$$

$$f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{4} \frac{16^{\frac{1}{4}}}{16} = \frac{1}{24} \frac{2}{16}$$

$$= \frac{1}{32}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 2 + \frac{1}{32}(x - 16)$$

$$= 2 + \frac{x}{32} - \frac{16}{32} \cdot \frac{1}{2}$$

$$L(x) = \frac{x}{32} + \frac{3}{2}$$

$x = 15$ எனப் பிரதியிட

$$f(15) \approx L(15)$$

$$= \frac{15}{32} + \frac{3}{2} = \frac{15 + 48}{32}$$

$$= \frac{63}{32} = 1.968$$

$$4\sqrt[4]{15} \approx 1.968$$

$$(ii) \sqrt[3]{26}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad x_0 = 27$$

என்க $\Delta x = -1$

$$f(x_0) = f(27) = (27)^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \frac{(27)^{\frac{1}{3}}}{27} = \frac{1}{3} \frac{3}{27} = \frac{1}{27}$$

தோறியல் தோற்றம் மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

$$= 3 + \frac{x}{27} - \frac{27}{27}$$

$$L(x) = \frac{x}{27} + 2$$

$x = 26$ எனப் பிரதியிட

$$f(26) = \sqrt[3]{26} \approx L(26)$$

$$\approx \frac{26}{27} + 2$$

$$= 0.9629 + 2$$

$$\sqrt[3]{26} \approx 2.9629$$

3) பின்வரும் சான்றுகளுக்கு
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில்
தோறியல் தோற்றம் மதிப்பைக்
காண்க

2

$$(i) f(x) = x^3 - 5x + 12 \quad x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 2^3 - 5(2) + 12 = 8 - 10 + 12 = 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3(2^2) - 5$$

$$= 12 - 5 = 7$$

தோறியல் தோற்றம் மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 10 + 7(x - 2)$$

$$= 10 + 7x - 14$$

$$L(x) = 7x - 4$$

$$(ii) g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x_0 = -4$$

$$g(x_0) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x$$

$$g'(x_0) = g'(-4) = \frac{-4}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{-4}{5}$$

தோறியல் தோற்றம் மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 5 + \left(\frac{-4}{5}\right)(x + 4)$$

$$= 5 - \frac{4x}{5} - \frac{16}{5}$$

$$= \frac{25 - 4x - 16}{5}$$

$$L(x) = \frac{9 - 4x}{5}$$

$$(iii) h(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1$$

$$h(x_0) = h(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_0) = h'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

தோறியல் தோற்றம் மதிப்பு

$$L(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{x+1}{4}$$

4) ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செ.மீ.க்கு பதிலாக 12.5 செ.மீ. அளவுக்குக் குறைக்கப்பட்டது. எனில் அதன் பரப்பு மாற்றத்திற்குரிய பின்வருவன காண்க.

(i) தனிப்பிணை (ii) சார்பிணை
ஆரம் $r = 12.65$ மாற்றப்பிணை

$$\Delta r = 12.5 - 12.65$$

$$\Delta r = -0.15$$

வட்ட தகட்டின் பரப்பு $A = \pi r^2$

ரஜு ஸ்பாவுத்து வகையில் $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi \times 12.65 \times (-0.15)$$

$$= -3.795\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{தொடராய்ப்பிணை} = -3.795\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{மைய பிணை} = A(12.5) - A(12.65)$$

$$= \pi(12.5)^2 - \pi(12.65)^2$$

$$= \pi(156.25 - 160.0225)$$

$$= -3.7725\pi \text{ செ.மீ}^2$$

(i) தனிப்பிணை = மையப்பிணை - தொடராய்ப்பிணை

$$= -3.7725\pi + 3.795\pi$$

$$= 0.0225\pi \text{ cm}^2$$

(ii) சார்பிணை = தனிப்பிணை
மையப்பிணை

$$= \frac{0.0225\pi}{-3.7725\pi}$$

$$= -0.00596$$

$$\approx -0.006$$

(iii) சதவீதப்பிணை = சார்பிணை $\times 100$

$$= -0.006 \times 100 = -0.6\%$$

5) பனிக் கடடியிலுள்ள ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ. அதன் ஆரம் 10 வீதத்து 9.8 ஆக குறைக்கப்பட்டது. பின்வருவன வற்றின் தொடராய் மதிப்பிணைக் காண்க.

(i) கோளத்தில் ஏற்படும் மாற்றம்

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்

$$\text{ஆரம் } r = 10 \quad \Delta r = \Delta r = 9.8 - 10 = -0.2$$

(i) கோளத்தின் கனஅளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ரஜு ஸ்பாவுத்து வகையில்

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

கோளத்தில் ஏற்படும்

மாற்றம் $\Delta V \approx dV$

$$\approx 4\pi(10)^2(-0.2)$$

$$\approx -80\pi \text{ செ.மீ}^3$$

i.e கோளத்தில் ஏற்படும் குறைவு $80\pi \text{ செ.மீ}^3$

(ii) வளைபரப்பு $S = 4\pi r^2$

ரஜு ஸ்பாவுத்து வகையில்

$$\frac{dS}{dr} = 8\pi r$$

$$dS = 8\pi r dr$$

வளைபரப்பில் ஏற்படும்

மாற்றம் $\Delta S \approx dS$

$$\approx 8\pi(10)(-0.2)$$

$$\approx -16\pi \text{ செ.மீ}^2$$

வளைபரப்பில் ஏற்படும் குறைவு

$$\approx 16\pi \text{ செ.மீ}^2$$

6) L நீளம் 2 மீ. ஒரு தனி ஊதலின்

குறு அளவு குறைய T என்பது $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு g ஒரு மாறிலி. L ல் ஏற்படும் 2 சதவீத பிணைக்கு ஏற்ப T ல் ஏற்படும் தொடராய் சதவீதப்பிணையை காண்க.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \frac{dT}{dL} = \frac{1}{2L}$$

இதிலும் மடக்கை எடுக்க

$$\log T = \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log \frac{L}{g}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{L}{g}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} [\log L - \log g]$$

L ல் ஸ்பாவுத்து வகையில்

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dL} = 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} - 0 \right]$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2L} dL$$

T ல் ஏற்படும் தொடராய்

$$\text{சதவீதப்பிணை} = \frac{dT}{T} \times 100$$

$$\approx \frac{1}{2x} \left(\frac{2x}{100} \right) \times 100$$

$$= 1\%$$

7-ன் சதவீதம் சதவீதப்பித்தம் = 1%

⑦ ஓர் எண்ணின் n ஆம் படிசூலம் கணக்கிடப்படும்போது தற்போத சதவீதப்பித்தம் ஒருநாள்மாக அந்த எண்ணின் சதவீதப்பித்தத்தின் h மடங்கு எனக் காட்டுக.

ஓர் எண் x என்க
அதன் n ஆம் படிசூலம் $y = x^{\frac{1}{n}}$ என்க

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

log எடுக்க

$$\log y = \log x^{\frac{1}{n}}$$

$$\log y = \frac{1}{n} \log x$$

x ஐ வளர்த்து வகையிட

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \right)$$

100 ஆம் வளர்த்து

$$\frac{dy}{y} \times 100 = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

n ஆம் படிசூலம்

காணும்போது தற்போத

$$\text{சதவீதப்பித்தம்} = \frac{\Delta y}{y} \times 100$$

$$\approx \frac{dy}{y} \times 100$$

$$\approx \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

y ன் சதவீதப்பித்தம் $\approx \frac{1}{n}$ (அந்த எண்ணின் சதவீதப்பித்தம்)

வகையீடுகள்

① $y = f(x)$ ன் வகையீடு

$$dy = f'(x) dx$$

② $f(x + \Delta x) \approx y + dy$

③ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

பயிற்சி-8.2

1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு dy காண்க.

④ (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-4x) 3(1-2x)^2(-2) - (1-2x)^3(0-4)}{(3-4x)^2}$$

$$= (1-2x)^2 \left[\frac{-6(3-4x) + 4(1-2x)}{(3-4x)^2} \right]$$

$$= (1-2x)^2 \left[\frac{-18 + 24x + 4 - 8x}{(3-4x)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-2x)^2 (16x - 14)}{(3-4x)^2}$$

வகையீடு

$$dy = \frac{2(1-2x)^2 (8x - 7)}{(3-4x)^2} dx$$

(ii) $y = (3 + \sin 2x)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (3 + \sin 2x)^{\frac{2}{3}-1} (0 + \cos 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} (3 + \sin 2x)^{-\frac{1}{3}} \cos 2x$$

$$\text{வகையீடு } dy = \frac{4}{3} \frac{\cos 2x}{(3 + \sin 2x)^{\frac{1}{3}}} dx$$

(iii) $y = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left((-\sin(x^2-1))(2x) \right)$$

$$+ \cos(x^2-1) (e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} (2x-5))$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left[-2x \sin(x^2-1) + (2x-5) \cos(x^2-1) \right]$$

வகையீடு

$$dy = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left[(2x-5) \cos(x^2-1) - 2x \sin(x^2-1) \right] dx$$

② $f(x) = x^2 + 3x$ எனில் சார்பிற்கு

df காண்க மற்றும்

(i) $x=2$, $dx=0.1$ (ii) $x=3$ மற்றும் $dx=0.02$

எனும் போது df ஐ மதிப்பிடுக.

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 3$$

(5)

$$df = (2x+3)dx$$

$$\text{ii) } x=2, dx=0.1$$

$$df = (2(2)+3)(0.1)$$

$$= 7(0.1)$$

$$df = 0.7$$

$$\text{iii) } x=3, dx=0.02$$

$$df = (2(3)+3)0.02$$

$$= (9)(0.02)$$

$$df = 0.18$$

③ f என்ற சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட x, dx மதிப்புகளுக்கு Δf மற்றும் df காண்க. மூலம் அவற்றை ஒப்பிடுக.

$$\text{ii) } f(x) = x^3 - 2x^2, \quad x=2, \quad \Delta x = dx = 0.5$$

$$f = x^3 - 2x^2$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$df = (3x^2 - 4x)dx$$

$$= (3(2^2) - 4(2))0.5$$

$$= (12 - 8)(0.5)$$

$$df = 2.0$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= f(2 + 0.5) - f(2)$$

$$= f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2)$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (2^3 - 2(2)^2)$$

$$= \frac{125}{8} - \frac{50}{4} - (8 - 8)$$

$$= \frac{125 - 100}{8} = \frac{25}{8}$$

$$\Delta f = 3.125$$

$$df = 2.0, \quad \Delta f = 3.125$$

$$df \neq \Delta f$$

$$\text{iii) } f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$x = -0.5$$

$$\Delta x = dx = 0.1$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 2$$

$$df = (2x + 2)dx$$

$$= (2(-0.5) + 2)(0.1)$$

$$= (1)(0.1)$$

$$df = 0.1$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= f(-0.5 + 0.1) - f(-0.5)$$

$$= f(-0.4) - f(-0.5)$$

$$= ((-0.4)^2 + 2(-0.4) + 3) - ((-0.5)^2 + 2(-0.5) + 3)$$

$$= (0.16 - 0.8 + 3) - (0.25 - 1 + 3)$$

$$= (3.16 - 0.8) - 2.25$$

$$= 3.16 - 3.05$$

$$\Delta f = 0.11$$

$$df = 0.1$$

$$\boxed{df \approx \Delta f}$$

4) $\log_{10} e = 0.4343$ எனக் கொண்டு

$\log_{10} 1003$ ன் தோறாய் மதிப்பு காண்க.

குறைய-I

$$y = f(x) = \log_{10} x \quad \text{என்க}$$

$$f(1000) = \log_{10} 1000$$

$$= \log_{10} 10^3$$

$$f(1000) = 3$$

$$y = \log_{10} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

$$dy = \frac{0.4343}{x} dx$$

$$= \frac{0.4343 \times 3}{1000}$$

$$dy = 0.001303$$

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$f(1000 + 3) \approx 3 + 0.001303$$

$$\log_{10} 1003 \approx 3.001303$$

குறைய-II

$$y = f(x) = \log_{10} x$$

$$\text{என்க}$$

இங்கு

$$x_0 = 1000$$

$$\Delta x = 3$$

$$f(x_0) = f(1000) = \log_{10} 1000 = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

$$f'(x_0) = \frac{0.4343}{1000}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (6)$$

$$L(x) = 3 + \frac{0.4343}{1000}(x - 1000)$$

$x = 1003$ எனப் பிரதியிட

$$L(x) = 3 + \frac{0.4343}{1000}(1003 - 1000)$$

$$= 3 + \frac{1.303}{1000}$$

$$= 3 + 0.001303$$

$$L(1003) = 3.001303$$

$$f(1003) \approx L(1003)$$

$$\log_{10} 1003 \approx 3.001303$$

⑤ ஒரு மரத்தின் அடிப்பகுதியின் விட்டம் 30 செ.மீ அருகே ஆண்டு அதன் சுற்றளவு 6 செ.மீ அதிகரிக்கின்றது, எனில்

(i) தோராயமாக மரத்தின் விட்டம் எவ்வளவு வளர்ந்துள்ளது?

(ii) அதன் குறுக்கு வெட்டு பரப்பு எவ்வளவு சதவீதம் அதிகரிக்கும்,

$$\text{விட்டம்} = 30 \text{ செ.மீ}$$

$$2r = 30$$

$$r = 15$$

(i) சுற்றளவு அதிகரிப்பு = 6 செ.மீ

$$2\pi r_2 - 2\pi r_1 = 6$$

$$\boxed{r_2 - r_1 = \frac{3}{\pi}} \quad 2r_2 - 2r_1 = \frac{6}{\pi}$$

$$\text{விட்டத்தின் அதிகரிப்பு} = \frac{6}{\pi} \text{ செ.மீ}$$

(ii) வட்டத்தின் பரப்பு = πr^2

$$A = \pi r^2$$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dr = \frac{3}{\pi}$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi (15) \frac{3}{\pi}$$

$$dA = 90$$

பரப்பு அதிகரிப்பு சதவீதம்

$$\approx \frac{dA}{A} \times 100$$

$$\approx \frac{90}{100} \times 100$$

$$= \frac{40}{\pi} \%$$

பரப்பு அதிகரிப்பு சதவீதம் $\approx \frac{40}{\pi} \%$

⑥ ஒரு குறிப்பிட்ட பருமனின் குட்டை கிட்டத்தட்ட கோள வடிவமாக உள்ளது. குட்டையின் ஆரம் ஒட்டிக்கு உள்ளே 5 மி.மீ ஆகவும் ஒட்டிக்கு வெளியே 5.3 மி.மீ ஆகவும் உள்ளது எனில், ஒட்டின் தோராய கனஅளவைக் காண்க.

2ம் ஆரம் $r = 5$ மி.மீ

$$\text{ஒட்டின் தடிமன் } dr = \Delta r = 5.3 - 5$$

$$dr = 0.3$$

$$\text{கோளத்தின் கனஅளவு } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

குட்டை ஒட்டின்

$$\text{கனஅளவு } \Delta V \approx dV$$

$$V(5.3) - V(5) \approx 4\pi (5)^2 (0.3)$$

$$\approx 30\pi \text{ mm}^3$$

⑦ மனிதனின் இரத்தக் குழாயின் (நுணியின்) குறுக்கு வெட்டானது வட்ட வடிவம் எனக் கொள்க, ஒரு தோராயமாக இரத்தக் குழாய் விரிவடைவதற்கான மருந்து கொடுக்கப் பட்டுள்ளது, இரத்தக் குழாயின் ஆரம் 2 மி.மீ லிருந்து 2.1 மி.மீ ஆக அதிகரிக்கும்போது அதன் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு தோராயமாக எந்த அளவு அதிகரிக்கும்,

ஆரம் $r = 2$ மி.மீ

$$\Delta r \approx dr = 2.1 - 2$$

$$dr = 0.1$$

$$\text{வட்டத்தின் பரப்பு } A = \pi r^2$$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\text{பரப்பு அதிகரிப்பு} = A(2.1) - A(2)$$

$$\approx dA$$

$$\approx 2\pi(2)(0.1)$$

$$= 0.4\pi$$

$$\text{பரப்பு அதிகரிப்பு} \approx 0.4\pi \text{ ச.மீ}^2$$

8) புதிதாக 2 டிரைவர்கள் போட்ட ஒரு நகரத்தின் வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கையின் (ஆயிரங்களில்) அதிகரிப்பு $V(t) = 30 + 12t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 8$ என்பதால் மதிப்பிடப் படுகின்றது. இங்கு t என்பது ஆண்டுகள் எனில் காலம் 4 ல் இருந்து $4\frac{1}{6}$ வருடமாக இருக்கும் போது ஏற்படும் தொராய வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை மாற்றத்தை காண்க.

$$V(t) = 30 + 12t^2 - t^3$$

$$t=4 \quad \frac{dV}{dt} = (24t - 3t^2)$$

$$\Delta t \approx dt = 4\frac{1}{6} - 4$$

$$dt = \frac{1}{6}$$

$$dV = (24t - 3t^2)dt$$

$$V \text{ ல் மாற்றம்} = V(4\frac{1}{6}) - V(4)$$

$$\approx dV$$

$$\approx (24(4) - 3(4^2)) \frac{1}{6}$$

$$= (96 - 48) \frac{1}{6}$$

$$= \frac{48}{6} = 8$$

வாக்காளர்களின் எண்ணிக்கை

$$\text{மாற்றம்} \approx 8000$$

$$\text{அல்லது} (\approx 8 \text{ ஆயிரம்})$$

10) ஒரு வட்ட வடிவ தகடு வெப்பத்தின் சீராக விரிவடைகிறது என்க. அதன் ஆரம் 10.5 செ.மீ திவிடும் 10.75 செ.மீ ஆக அதிகரிக்கும் போது அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தொராய அதிகரிப்பு மற்றும் தொராய சதவீத அதிகரிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\text{ஆரம் } r = 10.5$$

$$\Delta r = dr = 10.75 - 10.5$$

$$dr = 0.25$$

வட்ட தகட்டின் பரப்பு

$$A = \pi r^2$$

ரஃஸ்பாற்றத்து வகையிட

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

ப) பரப்பில் ஏற்படும் தொராய மாற்றம்

$$= dA$$

$$= 2\pi(10.5)(0.25)$$

$$= 5.25\pi \text{ செ.மீ}^2$$

பி) பரப்பில் ஏற்படும் தொராய

$$\text{மாற்ற சதவீதம்} = \frac{dA}{A} \times 100$$

$$= \frac{5.25\pi}{\pi \times 10.5 \times 10.5} \times 100$$

$$= \frac{5.25}{110.25} \times 100$$

$$= 4.76\%$$

9) ஒரு மனிதன் x மணி நேரத்தில்

கற்கும் y வார்த்தைகளுக்கான தொடர்பு

$$y = 52\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 9$$

எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. x ன் மதிப்பு பின்வருமாறு

மாறும்போது, கற்கும் வார்த்தைகளின்

எண்ணிக்கையில் ஏற்படும் தொராய

(அதிகரிப்பு) மாற்றத்தை காண்க.

ப) 1 லிருந்து 1.1 மணி பி) 4 லிருந்து 4.1 மணி

$$y = 52\sqrt{x}$$

$$\text{ப) } x=1 \quad dx = \Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

$$\frac{dy}{dx} = 52 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = 26 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

வார்த்தை கற்றலில்

$$\text{தொராய மாற்றம்} = dy$$

$$= 26 \frac{1}{\sqrt{1}} (0.1)$$

$$= 2.6$$

$$\approx 3 \text{ வார்த்தைகள்}$$

$$\text{பி) } x=4 \quad dx = \Delta x = 4.1 - 4$$

$$dx = 0.1$$

$$dy = 26 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

வார்த்தை கற்றலின் தொராய

$$\text{மாற்றம்} = dy$$

$$= 26 \frac{1}{\sqrt{4}} (0.1)$$

$$= 26 \frac{1}{2} (0.1)$$

$$= 1.3$$

≈ 1 கார்த்திகை

11) 10 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனசதுரத்தின் பக்கங்களுக்கும் 0.2 செ.மீ கனத்திற்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. வகையீடுகளை பயன்படுத்தி அதன் வர்ணப்பூச்சிற்குத் தேவையான கனத்தான கன செ.மீ வர்ணம் பயன்படுத்தப்பட்டது என காண்க, மேலும் துல்லியமாக வர்ண அளவு என்ன என்பதையும் காண்க.

பக்கம் $a = 10$ செ.மீ

வர்ணத்தின் தடிமன் $da = 0.2$

கனசதுரத்தின் கனஅளவு $V = a^3$

$$\frac{dV}{da} = 3a^2$$

$$dV = 3a^2 da$$

வர்ணப்பூச்சின் கனஅளவு

தேவையான $= dV$

$$= 3(10)^2 (0.2)$$

$$= 60 \text{ செ.மீ}^2$$

வர்ணத்தின் கனஅளவு $\approx 60 \text{ செ.மீ}^2$

துல்லியமான வர்ணப்பூச்சின்

கனஅளவு $= V(10.2) - V(10)$

$$= (10.2)^3 - 10^3 = 1066.208 - 1000$$

$$= 66.208 \text{ செ.மீ}^3$$

ஒரு மாறிகளின் உடைய சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி தன்மை.

சார்பின் எல்லை

$F: A \rightarrow R$ என்க F ஆனது

ஒவ்வொரு $(L-\epsilon, L+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ க்கும்

$(x,y) \in B_\delta(u,v) \setminus \{(u,v)\}$, $\delta > 0$

$$\Rightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$$

எனவாறு (u,v) ன் ஒரு அண்மை

புள்ளி $B_\delta \subset A$ இருக்கும்,

(8)

எனில் F ன் எல்லை L எனப்படும்

தொடர்ச்சி தன்மை

$A \subset R^2$; $F: A \rightarrow R$ என்க சார்பு

$F(u,v)$ இல் தொடர்ச்சி எனில்

i) (u,v) ல் F வறையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது

$$\text{ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (u,v)} F(x,y) = L$$

$$\text{iii) } L = F(u,v)$$

பயிற்சி 8.3

$$\text{i) சார்பு } g(x,y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3} \text{ க்கு}$$

எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால்

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} g(x,y) \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$$

$$= \frac{3(1)^2 - 1(2)}{1^2 + 2^2 + 3}$$

$$= \frac{3-2}{1+4+3}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

② எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால்

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y + 2}\right) \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y + 2}\right) = \cos\left(\frac{0+0}{0+0+2}\right)$$

$$= \cos 0$$

$$= 1$$

$$\text{③ } (x,y) \neq (0,0) \text{ க்கு } f(x,y) = \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

எனில் $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ என நிறுவுக.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(y-x)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= 0(0+0)$$

$$= 0 //$$

④ ஸ்லைஸ் மதிப்பு இருக்குமானால்
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{e^x \sin y}{y}\right)$ க்கு
 மதிப்பிடுக.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{e^x \sin y}{y}\right) &= \cos\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x \sin y}{y}\right) \\ [\because \text{கொடுப்பு காரிய விதிப்படி}] &= \cos\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^x\right) \cdot \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{y}\right) \\ &= \cos(e^0 \cdot 1) \\ &= \cos(1). \end{aligned}$$

5) $(x,y) \neq (0,0)$ க்கு $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
 மற்றும் $g(0,0) = 0$ என்க

(i) ஆவ்வாறு $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$
 கோடுகளைப் பார்த்தாலும்

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ என நிறுவுக.

(ii) ஆவ்வாறு $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 பரவலையின்போது
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \frac{k}{1+k}$ என
 நிறுவுக.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \\ y = mx \text{ எனப் பதிலிட} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 m x}{x^2 (x^2 + m^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{0 + m^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \\ y = kx^2 \text{ எனப் பதிலிட} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 k x^2}{x^4 + k^2 x^4} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 k}{x^4 (1 + k^2)} \\ &= \frac{k}{1 + k^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{1 + k^2}$$

6) காற்று $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$, ஆவ்வாறு
 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ க்கும் தொடர்ச்சியானது
 என நிறுவுக

(i) ஆவ்வாறு $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ எனப் பதிலிட
 ஏதாவது மூலக் புள்ளி என்க.

$$\text{(ii)} f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$$

$f(a,b) = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1}$ எனப் பதிலிட ஆவ்வாறு
 (a,b) க்கும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{(ii)} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} = f(a,b)$$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ல் $f(x,y)$ க்கு எல்லை
 உள்ளது.

$$\text{(iii)} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b) = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

எனவே f எனப் பதிலிட ஆவ்வாறு
 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ க்கும் தொடர்ச்சியானது.

⑦ காற்று $g(x,y) = e^y \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$
 மற்றும் $g(0,0) = 1$ என்க புள்ளி $(0,0)$
 இல் g தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(i) $g(0,0) = 1$ என தொடர்புக்கப்பட்டுள்ளது
 எனவே $(0,0)$ ல் $g(x,y)$ வரையறுக்கப்
 பட்டுள்ளது.

$$\text{(ii)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$(0,0)$ ல் $g(x,y)$ க்கு எல்லை உள்ளது.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1 = g(0,0) = L$

$\therefore (0,0)$ ல் g சூதாது
தொடர்ச்சியாக உள்ளது;

பகுதி: வகைக்கெடுக்கல்

கிடைசு: ராய்ட்டுடன் கீழே

$F: A \rightarrow R$ என்ற சார்பு A ல்
 f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்படும்
சுற்று தொடர்ச்சியானதாகவும்
இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$
என்பதாக இருக்கும்.

இங்கு $A \subset R^2$

இலாபிஸாஸின் சுண்பாடு

$A \subset R^2$ என்க $U: A \rightarrow R^2$
என்ற சார்பு $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in R$

எனவே இருக்குமானால் U சூதாது
 A ல் சீரானது எனலாம், இது
இலாபிஸாஸின் சுண்பாடு என்பதும்,

பயிற்சி 3.4

i) பின்வரும் சார்புகளுக்கு
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பகுதி
வகைக்கெடுக்கல் காண்க.

ii) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 5x + 2$
(2,-5) ல்

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y + 0 + 5 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y + 5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-5) &= 6(2) - 2(-5) + 5 \\ &= 12 + 10 + 5 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2x + 2y + 0 + 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(2,-5) &= -2(2) + 2(-5) \\ &= -4 - 10 \\ &= -14 \end{aligned}$$

(ii) $g(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5x + 2$ (1,-2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x + 0 + 5$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,-2) = 6(1) + 5 = 11$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 + 2y + 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,-2) = 2(-2) = -4,$$

(iii) $h(x,y,z) = x \sin(xy) + z^2 x$
(2, $\frac{\pi}{4}$, 1)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x \cos xy + \sin xy (1) + z^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(2, \frac{\pi}{4}, 1) &= 2 \cos 2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} + 1^2 \\ &= 0 + 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x \cos xy (x) + 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(2, \frac{\pi}{4}, 1) = 2 \cos 2 \frac{\pi}{4} (2) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 + 2zx$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(2, \frac{\pi}{4}, 1) = 2(2)(1) = 4,$$

(iv) $G(x,y) = e^{x+3y} \log(x^2+y^2)$, (-1,1)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{x+3y} (\log(x^2+y^2))' + \log(x^2+y^2) (e^{x+3y})'$$

$$= e^{x+3y} \left(\frac{1}{x^2+y^2} 2x \right) + \log(x^2+y^2) e^{x+3y} (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{x+3y} \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(-1,1) &= e^{-1+3} \left(\frac{2(-1)}{1+1} + \log(1+1) \right) \\ &= e^2 \left(-\frac{2}{2} + \log 2 \right) \\ &= e^2 (\log 2 - 1) \end{aligned}$$

(11)

$$\frac{\partial G}{\partial y} = e^{x+3y} \left(\frac{2y}{x^2+y^2} \right) + \log(x^2+y^2) e^{x+3y} \quad (3)$$

$$= e^{x+3y} \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + 3 \log(x^2+y^2) \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} (-1, 1) = e^{-1+3} \left(\frac{2}{1+1} + 3 \log(1+1) \right)$$

$$= e^2 \left(\frac{2}{2} + 3 \log 2 \right)$$

$$= e^2 (1 + \log 2^3)$$

$$= e^2 (1 + \log 8)$$

2) பின்வரும் சார்புகளுக்கு f_x, f_y காணிக் கெயும் $f_{xy} = f_{yx}$ எனக் காட்டுக.

i) $f(x, y) = \frac{3x}{y + \sin x}$

$$f_x = \frac{(y + \sin x)(3) - 3x(\cos x)}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_x = \frac{3y + 3\sin x - 3x\cos x}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_y = 3x \left(\frac{-1}{(y + \sin x)^2} \right) (1)$$

$$f_y = \frac{-3x}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-3x}{(y + \sin x)^2} \right)$$

$$= \frac{(y + \sin x)^2 (-3) + 3x(2(y + \sin x)(\cos x))}{(y + \sin x)^4}$$

$$= \frac{(y + \sin x)(-3(y + \sin x) + 6x\cos x)}{(y + \sin x)^4}$$

$$f_{xy} = \frac{3(2x\cos x - y - \sin x)}{(y + \sin x)^3} \quad \text{--- ①}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3y + 3\sin x - 3x\cos x}{(y + \sin x)^2} \right)$$

$$= \frac{(y + \sin x)^2 (3 + 0) - (3y + 3\sin x - 3x\cos x)(2(y + \sin x))}{(y + \sin x)^4}$$

$$= (y + \sin x) \left(\frac{3(y + \sin x) - 2 \times 3(y + \sin x - x\cos x)}{(y + \sin x)^4} \right)$$

$$= \frac{3(y + \sin x - 2y - 2\sin x + 2x\cos x)}{(y + \sin x)^3}$$

$$= \frac{3(2x\cos x - y - \sin x)}{(y + \sin x)^3} \quad \text{--- ②}$$

①, ② விருந்து

$$f_{xy} = f_{yx}$$

ii) $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

$$f_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_x = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{-x}{y^2} \right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{-x}{y^2} \right)$$

$$f_y = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(-1) + x(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{--- ①}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(y)' - y(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(1) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yx} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{--- ②}$$

①, ② விருந்து $f_{xy} = f_{yx}$

(12)

$$(iii) f(x,y) = \cos(x^2 - 3xy)$$

$$f_x = -\sin(x^2 - 3xy) (2x - 3y)$$

$$f_y = -\sin(x^2 - 3xy) (0 - 3x)$$

$$f_y = 3x \sin(x^2 - 3xy)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y)$$

$$= 3x (\cos(x^2 - 3xy) (2x - 3y) + \sin(x^2 - 3xy) 3)$$

$$f_{xy} = 3 [(2x^2 - 3xy) \cos(x^2 - 3xy) + \sin(x^2 - 3xy) 3]$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x)$$

$$= -(2x - 3y) \cos(x^2 - 3xy) (-3x) + (-\sin(x^2 - 3xy) (-3))$$

$$f_{yx} = 3 [(2x^2 - 3xy) \cos(x^2 - 3xy) + \sin(x^2 - 3xy) 3]$$

(1) (2) விடும்போது

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$(3) \text{ If } U(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{xy} + 3z^2y$$

எனில் $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, மற்றும் $\frac{\partial U}{\partial z}$ ஐக் காண்க.

$$U = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} + 3z^2y$$

$$U = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3z^2y$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y} + y \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 3z^2$$

$$= \frac{-x^2 + y^2}{xy^2} + 3z^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 + 0 + 3y(2z) = 6yz$$

$$(4) \text{ If } U(x,y,z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$$

எனில் $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3} \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

(5) பின்வரும் சார்புகளுக்கு g_{xy} , g_{yx} மற்றும் g_{yx} ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$(i) g(x,y) = xe^y + 3x^2y$$

$$g_x = e^y + 3y(2x) = e^y + 6xy$$

$$g_y = xe^y + 3x^2$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = e^y + 6x$$

$$g_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (g_x) = 0 + 6y = 6y$$

$$g_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (g_y) = xe^y + 0 = xe^y$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = e^y + 6x$$

$$(ii) g(x,y) = \log(5x + 3y)$$

$$g_x = \frac{5}{(5x + 3y)}$$

$$g_y = \frac{3}{5x + 3y}$$

$$g_{xx} = 5 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(5)} = \frac{-25}{(5x+3y)^2} \quad (13)$$

$$g_{yy} = 3 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(3)} = \frac{-9}{(5x+3y)^2}$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = 5 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(3)}$$

$$g_{yx} = \frac{-15}{(5x+3y)^2}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = 3 \left(\frac{-1}{(3y+5x)^2} \right)^{(5)}$$

$$g_{xy} = \frac{-15}{(5x+3y)^2}$$

$$(iii) g(x, y) = x^2 + 3xy - 7y + \cos 5x$$

$$g_x = 2x + 3y - 5 \sin 5x$$

$$g_y = 0 + 3x - 7 + 0 = 3x - 7$$

$$g_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (g_y) = 0$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = 3(1) = 3$$

$$g_{xx} = 2 - 5 \cos 5x (5) = 2 - 25 \cos 5x$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = 0 + 3 - 0 = 3$$

$$(6) w(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ என}$$

காட்டுக,

$$w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -x \left(-\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2 - 1} (2x) \right) + (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (-1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

இதேபோல,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= 0.$$

$$(7) v(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ காட்டுக.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y) + (x \cos y - y \sin y) (e^x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x [\cos y + x \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x (\cos y) + (\cos y + x \cos y - y \sin y) (e^x)$$

$$= e^x [\cos y + \cos y + x \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x [2 \cos y + x \cos y - y \sin y] \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x (-x \sin y - y \cos y - \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^x (-x \cos y + y \sin y - \cos y - \cos y) = e^x (-2 \cos y - x \cos y + y \sin y) \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = e^x [2\cancel{\cos y} + x\cancel{\cos y} - y\cancel{\sin y} - 2\cancel{\cos y} - x\cancel{\cos y} + y\cancel{\sin y}]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

⑧ $w(x, y) = xy + \sin(xy)$ සමඟ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ സമാനത.}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + \cos xy (y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y(1 + \cos xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = y(0 - \sin xy) + (1 + \cos xy) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1 - xy \sin xy + \cos xy - 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x + \cos xy (x)$$

$$= x (1 + \cos xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = x(c - \sin xy(y)) + (1 + \cos xy)c$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1 - xy \sin xy + \cos xy \quad \text{--- (2)}$$

①, ② லிருந்து $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$

9) $V(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$

எனில் $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$ என நிறுவுக.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2 + 3xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 3z^2 + 3xy$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0 + 3x = 3x \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 + 3xz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = 3x \quad \text{--- (2)}$$

①, ② வினாக்கள் $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$

(10) ஒரு நிகழ்வைக் குறிப்பிட்டு வாய்நூல்

இரு விதமான சாணிப்பாண்டுகளை
உற்பத்தி செய்கின்றது, அவற்றில் A வகை
சாணிப்பாண்டை x எண்ணிக்கையும்,
B வகை சாணிப்பாண்டை y எண்ணிக்கையும்,
உண்டாக்கி, வாரம் வாரம் 10000
செலுத்துச் சாட்டுகின்ற (நிபாயிஸ் முறை)

$$R(x,y) = 80x + 90y + 0,04xy - 0,05x^2 - 0,05y^2$$

10. இன்றை $C(x,y) = 8x + 6y + 2000$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

தரப்படும்போது, $P(x, y)$ ஐக் காண்க.

ii) $\frac{\partial P}{\partial x}(1200, 1800)$ and $\frac{\partial P}{\partial y}(1200, 1800)$

உதிகியவற்றை கண்டு சித்திகளை விளக்கிக்,

2) இலாபம் = வரவு - செலவு

$$P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$

$$= 80x + 90y + 0.04xy - 0.05x^2 - 0.05y^2 - 8x - 6y - 2000$$

$$P(x,y) = 72x + 84y + 0.04xy - 0.05x^2 - 0.05y^2 - 2000$$

$$(ii) \frac{\partial P}{\partial x} = 72 + 0.04y - 0.05(2x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(1200, 1800) = 72 + 0.04(1800) - 0.1(1200)$$

$$= 72 + 72 - 120$$

$$= 24$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 84 + 0.04x - 0.05(2y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(1200, 1800) = 84 + 0.04(1200) - 0.1(1800)$$

$$= 84 + 48 - 180$$

$$= -48$$

$$(1200, 1800) \text{ si } \frac{\partial P}{\partial x} = 24 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -48$$

y ஐ மாநிலியாக வைத்துக் கொண்டு x ஐ அதிகரிக்கும்போது இலாயம் அதிகரிக்கும்.

பல மாறிகள் கொண்டு சார்பின் தோராயத் தொகைய மதிப்பு மற்றும் வகையீடு.

① தோராயத் தொகைய மதிப்பு (x_0, y_0) ல் $F(x, y)$ க்கு

$$L(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

② $F(x, y, z)$ ன் தோராயத் தொகைய மதிப்பு (x_0, y_0, z_0) ான்ற புள்ளியில்

$$L(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

③ F ன் வகையீடு $F = F(x, y)$
 $df = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$
 இங்கு $dx = \Delta x, dy = \Delta y$

④ $F(x, y, z)$ ன் வகையீடு
 $df = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$
 இங்கு $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$

பயிற்சி 8.5

① $w(x, y) = x^3 - 3xy + 2y^2, x, y \in \mathbb{R}$
 ானில் $(1, -1)$ ல் w ன் தோராயத் தொகைய மதிப்பு காண்க.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1, -1) = 3 + 3 = 6$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -3x + 4y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1, -1) = -3 - 4 = -7$$

$$w(1, -1) = 1^3 - 3(1)(-1) + 2(-1)^2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

தோராயத் தொகைய மதிப்பு

$$L(x, y) = w(1, -1) + \frac{\partial w}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial w}{\partial y}(1, -1)(y + 1) = 6 + 6(x - 1) - 7(y + 1) = 6x - 7y - 7$$

② $z(x, y) = x^2y + 3xy^4, x, y \in \mathbb{R}$
 ானில் $(2, -1)$ ில் z ன் தோராயத் தொகைய மதிப்பு காண்க

$$z(2, -1) = 2^2(-1) + 3(2)(-1)^4 = -4 + 6 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, -1) = 2(2)(-1) + 3(-1)^4 = -4 + 3 = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2, -1) = 2^2 + 12(2)(-1)^3 = 4 - 24 = -20$$

தோராயத் தொகைய மதிப்பு

$$L(x, y) = z(2, -1) + \frac{\partial z}{\partial x}(2, -1)(x - 2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2, -1)(y + 1)$$

$$= 2 + (-1)(x - 2) - 20(y + 1) = 2 - x + 2 - 20y - 20 = -x - 20y - 16$$

$$L(x, y) = -(x + 20y - 16)$$

③ $v(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + 7, x, y \in \mathbb{R}$
 ானில் வகையீடு dv ஈக் காண்க.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial v}{\partial y} = -x + \frac{y}{2}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$dv = (2x-y)dx + (-x+\frac{y}{2})dy$$

4) $V(x,y,z) = xy + yz + zx$,
 $x, y, z \in \mathbb{R}$ எனில் வகையீடு dv
 காண்க.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y + 0 + z = y + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + z + 0 = x + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + y + x = x + y$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dv = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

ஆய்வுக் கல்வியில் 5) காண்க

2) $W(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$

$x, y, z \in \mathbb{R}$ எனில் $(2, -1, 0)$ என்ற
 புள்ளியில் W இன் திசையன் வேகம்
 காண்க. (நிச்சயப்படுத்தி காண்க)

சார்புள்ள சார்பு விதி

1) $w = f(x, y)$, x, y என்னும்
 t ல் அமைந்த சார்புகளானால்

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

2) $w = f(x, y, z)$, $x = x(s, t)$
 $y = y(s, t)$ எனில்

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

பயிற்சி 8.6

1) சார்பு $u(x, y) = x^2y + 3xy^4$,
 $x = e^t$ மற்றும் $y = \sin t$, எனில்
 $\frac{du}{dt}$ இன் காண்க மூலம்

$t=0$ ல் அமைந்த சார்புகளானால்

$$u = x^2y + 3xy^4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^4 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$x = e^t$$

$$y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)e^t + (x^2 + 12xy^3)\cos t$$

$$\frac{du}{dt} = (2e^t \sin t + 3 \sin^4 t)e^t + (e^{2t} + 12e^t \sin^3 t)\cos t$$

$t=0$ என பிரதியிட

$$\frac{du}{dt} = (2e^0 \sin 0 + 3 \sin^4 0)e^0 + (e^{2 \cdot 0} + 12e^0 \sin^3 0)\cos 0$$

$$= (0+0)1 + (1+0)1 = 0+1$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = 1}$$

2) $u(x, y, z) = xy^2z^3$, $x = \sin t$,
 $y = \cos t$, $z = 1 + e^{2t}$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

$$u = xy^2z^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = 1 + e^{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dz}{dt} = 2e^{2t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= y^2z^3 \cos t + 2xyz^3(-\sin t) + 3xy^2z^2(2e^{2t})$$

$$= \cos^2 t (1 + e^{2t})^3 \cos t + 2 \sin t \cos t (1 + e^{2t})^3 (-\sin t)$$

$$+ 3 \sin t \cos^2 t (1 + e^{2t})^2 2e^{2t}$$

$$\frac{du}{dt} = (1 + e^{2t})^2 [\cos^3 t (1 + e^{2t}) - 2 \sin^2 t \cos t (1 + e^{2t}) + 6 e^{2t} \sin t \cos^2 t]$$

$$\frac{dw}{dt} = (1+e^{2t})^2 [\cos^3 t (1+e^{2t}) - \sin t \sin 2t (1+e^{2t}) + 6e^{2t} \sin t \cos^2 t]$$

③ $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t$
 $y = e^t \sin t$ மற்றும் $z = e^t \cos t$

எனில் $\frac{dw}{dt}$ ஐக் காண்க.

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2z$$

$$x = e^t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t \cos t + \sin t e^t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dz}{dt} = e^t (-\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= 2x e^t + 2y e^t (\cos t + \sin t) + 2z e^t (\cos t - \sin t)$$

$$= 2e^t [x + y(\cos t + \sin t) + z(\cos t - \sin t)]$$

$$= 2e^t [e^t + e^t \sin t (\cos t + \sin t) + e^t \cos t (\cos t - \sin t)]$$

$$= 2e^t e^t [1 + \sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t]$$

$$= 2e^{2t} [1 + 1]$$

$$\frac{dw}{dt} = 4e^{2t}$$

④ $U(x, y, z) = xyz$, $x = e^t$

$$y = e^t \cos t, \quad z = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{dU}{dt}$ ஐ காண்க.

$$U = xyz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = xy$$

$$x = e^t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t (-\sin t) + e^t (-1) \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= yz (-e^t) + xz (-e^t (\sin t + \cos t)) + xy \cos t$$

$$= e^t [-e^t \cos t \sin t + \sin t (-e^t (\sin t + \cos t)) + e^t \cos t \cos t]$$

$$= e^{2t} [-\sin t \cos t - \sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t]$$

$$= e^{2t} [\cos^2 t - \sin^2 t - 2 \sin t \cos t]$$

$$= e^{2t} [\cos 2t - \sin 2t]$$

5) If $w(x, y) = 6x^3 - 3xy + 2y^2$,

$$x = e^s, \quad y = \cos s, \quad s \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{dw}{ds}$ ஐக் காண்க மற்றும் $s=0$ இல் அதன் மதிப்பைக் காண்க.

$$w = 6x^3 - 3xy + 2y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 18x^2 - 3y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -3x + 4y$$

$$x = e^s, \quad y = \cos s$$

$$\frac{dx}{ds} = e^s, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin s$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

$$= (18x^2 - 3y) e^s + (-3x + 4y) (-\sin s)$$

$$= (18e^{2s} - 3\cos s) e^s + (-3e^s + 4\cos s) (-\sin s)$$

$$\frac{dw}{ds} = 18e^{3s} - 3e^s \cos s - 4 \sin s \cos s + 3e^s \sin s$$

(18)

$z=0$ என பிரதியிட

$$\frac{dw}{ds} = 18e^0 - 3e^0 \cos 0 - 4 \sin 0 \cos 0 + 3e^0 \sin 0$$

$$= 18 - 3$$

$$\frac{dw}{ds} = 15$$

(6) $z(x, y) = x \tan^{-1}(xy)$

$$x = t^2, y = se^t, s, t \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{\partial z}{\partial s}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial t}$ ஆகியன $s=t=1$ இல் மதிப்பிடுக.

$$z = x \tan^{-1}(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{1}{1+x^2y^2} y + \tan^{-1}(xy) (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{1}{1+x^2y^2} x$$

$$x = t^2, y = se^t$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0, \frac{\partial x}{\partial t} = 2t, \frac{\partial y}{\partial s} = e^t, \frac{\partial y}{\partial t} = se^t$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \tan^{-1}(xy) \right) 0 + \frac{x^2}{1+x^2y^2} (e^t)$$

$$= \frac{x^2 e^t}{1+x^2y^2} = \frac{t^4 e^t}{1+t^4 e^{2t} s^2}$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1 \cdot e^1}{1+1 \cdot e^2} = \frac{e}{1+e^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \tan^{-1}(xy) \right) 2t + \left(\frac{x^2}{1+x^2y^2} \right) se^t \text{ put } s=t=1 \text{ என பிரதியிட}$$

$$= \left(\frac{t^2 se^t}{1+t^4 s^2 e^{2t}} + \tan^{-1} t^2 se^t \right) 2t + \left(\frac{t^4}{1+t^4 s^2 e^{2t}} \right) se^t$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{e}{1+e^2} + \tan^{-1} e \right) 2 + \frac{1}{1+e^2} e$$

$$= \frac{2e}{1+e^2} + 2 \tan^{-1} e + \frac{e}{1+e^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{3e}{1+e^2} + 2 \tan^{-1} e,$$

(7) $U(x, y) = e^x \sin y$ எனக் கொண்டு

$$x = st^2, y = s^2 t, s, t \in \mathbb{R},$$

$\frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial t}$ காண்க. மற்றும் $s=t=1$ இல் அவற்றை மதிப்பிடுக.

$$U = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$x = st^2, \quad y = s^2 t$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = t^2, \frac{\partial x}{\partial t} = 2st, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2st, \frac{\partial y}{\partial t} = s^2$$

$$(i) \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= e^x \sin y (t^2) + e^x \cos y (2st)$$

$$= e^x (t^2 \sin y + 2st \cos y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = e^{st^2} (t^2 \sin s^2 t + 2st \cos s^2 t)$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial U}{\partial s} = e^1 (\sin 1 + 2 \cos 1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e (\sin 1 + \cos 1)$$

$$(ii) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= e^x \sin y (2st) + e^x \cos y (s^2)$$

$$= se^x (2t \sin y + s \cos y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = se^{st^2} (2t \sin s^2 t + s \cos s^2 t)$$

put $s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e^1 (2 \sin 1 + \cos 1)$$

(8) $z(x, y) = x^3 - 3x^2 y^3$ எனக் கொண்டு

$$x = se^t, y = se^{-t}, s, t \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial z}{\partial s} \text{ மற்றும்}$$

$\frac{\partial z}{\partial t}$ க்கு காண்க

$$z = x^3 - 3x^2 y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 9x^2 y^2$$

$$x = se^t \quad y = se^{-t} \quad (19)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^t, \frac{\partial x}{\partial t} = se^t, \frac{\partial y}{\partial s} = e^{-t}, \frac{\partial y}{\partial t} = -se^{-t}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (3x^2 - 6xy^3)e^t + (-9x^2y^3)e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3s^2e^{2t} - 6se^t s^3e^{-3t})e^t \\ &\quad + (-9s^2e^{2t} s^2e^{-2t})e^{-t} \\ &= 3s^2e^t (e^{2t} - 2e^{-2t} s^2 - 3s^2e^{-2t}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 3s^2e^t (e^{2t} - 5e^{-2t} s^2)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (3x^2 - 6xy^3)se^t + (-9x^2y^3)(-se^t) \\ &= (3s^2e^{2t} - 6se^t s^3e^{-3t})se^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad + 9s^2e^{2t} s^2e^{-2t} se^t \\ &= (3s^2e^{2t} - 6s^4e^t e^{-3t})se^t \\ &\quad + 9s^5e^{-t} \end{aligned}$$

$$= 3s^3e^{3t} - 6s^5e^{-t} + 9s^5e^{-t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 3s^3e^{3t} + 3s^5e^{-t}$$

$$9) w(x, y, z) = xy + yz + zx$$

$$x = u - v, y = uv, z = u + v$$

$$u, v \in \mathbb{R} \text{ எனில் } \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \text{ காண்க}$$

மற்றும் $(\frac{1}{2}, 1)$ இல் அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$w = xy + yz + zx$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = y + x$$

$$x = u - v, \quad y = uv, \quad z = u + v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \frac{\partial y}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 1, \frac{\partial z}{\partial v} = 1$$

$$\text{ii) } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= (y+z)(1) + (x+z)v + (y+x)1$$

$$\begin{aligned} &= (uv + uv) + (u - v + uv)v + (uv + uv) \\ &= 2uv + 2u + 2uv \\ &= 4uv + 2u \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2u(2v + 1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}(\frac{1}{2}, 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} (2 + 1) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= (y+z)(-1) + (x+z)u + (y+x)1 \end{aligned}$$

$$= -y - z + (x+z)u + y + x$$

$$= -u - v + (u - v + uv)u + u - v$$

$$= -2v + (2u)u$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 2(u^2 - v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial v}(\frac{1}{2}, 1) &= 2(\frac{1}{4} - 1) = \frac{1}{2} - 2 \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

சமபடித்தான சார்புகள் மற்றும் ஆய்லரின் தேற்றம்

① F என்பது ஒரு சமபடித்தான சார்பு எனில்

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^P F(x, y)$$

அல்லது

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^P F(x, y, z)$$

இந்த P என்பது சார்பு F இன் படி என்பதும்.

② ஆய்லரின் தேற்றம்

F என்பது A ல் சமபடித்தான

சார்பு P படி 2-தடவது எனில்

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = Pf$$

(20)

பயிற்சி 8.7

i) பின்வரும் ஒவ்வொரு சார்பும்
சமபடித்தானதா இல்லையா எனக்
கண்டு சமபடித்தானது எனில்
அதன் படிமையும் காண்க.

$$(i) f(x, y) = x^2y + 6x^3 + 7$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^2 \lambda y + 6(\lambda x)^3 + 7$$

$$= \lambda^3 x^2 y + 6\lambda^3 x^3 + 7$$

λ^3 ஐ மூலபடியாக எண்ணிய
சமபடி இயல்பு

$\therefore f$ சமபடி சமபடித்தான சார்பு
அல்ல.

$$(ii) h(x, y) = \frac{6x^2y^3 - 11y^5 + 9x^4y}{2020x^2 + 2019y^2}$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = \frac{6\lambda^2 x^2 \lambda^3 y^3 - 11\lambda^5 y^5 + 9\lambda^4 x^4 \lambda y}{2020\lambda^2 x^2 + 2019\lambda^2 y^2}$$

$$= \frac{\lambda^5 (6x^2y^3 - 11y^5 + 9x^4y)}{\lambda^2 (2020x^2 + 2019y^2)}$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 h(x, y)$$

$h(x, y)$ சமபடி மீ 3 மூல
சமபடித்தான சார்பு ஆகும்.

$$(iii) g(x, y, z) = \frac{\sqrt{3x^2 + 5y^2 + z^2}}{4x + 7y}$$

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{\sqrt{3\lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2}}{4\lambda x + 7\lambda y}$$

$$= \frac{\lambda (\sqrt{3x^2 + 5y^2 + z^2})}{\lambda (4x + 7y)}$$

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^0 g(x, y, z)$$

g சமபடி மீ $n=0$ மூல
சமபடித்தான சார்பு ஆகும்.

$$(iv) u(x, y, z) = xy + \sin\left(\frac{y^2 - z^2}{xy}\right)$$

$$u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 xy + \sin\left(\frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 z^2}{\lambda^2 xy}\right)$$

$$= \lambda^2 xy + \sin\left(\frac{y^2 - z^2}{xy}\right)$$

இதில் 2 மீ λ^2 ஐ மூலபடியாக

எண்ணிய சமபடி இயல்பு

சமபடி u சமபடி சமபடித்தான சார்பு
அல்ல.

$$2) f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3$$

சமபடி சார்பு சமபடித்தானது சமபடித்தானது,
 f மீ படிம கணக்கிட f மீ
ஆய்வு மீ கணக்கிட சமபடித்தானது.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 \lambda y + 3\lambda^3 x \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 y + 3\lambda^3 x y^2 + \lambda^3 y^3$$

$$= \lambda^3 (x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$$

f சமபடி மீ $n=3$ மூல
சமபடித்தான சார்பு, ஆய்வு மீ கணக்கிட

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

சமபடித்தானது

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + 3y^2$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2x^2 + 6xy + 3y^2$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 6xy^2 + 3y^3 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2$$

$$- 2x^2y + 6xy^2 + 3y^3$$

$$= 3x^3 - 6x^2y + 9xy^2 + 3y^3$$

$$= 3(x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

சமபடித்தானது

③ $g(x, y) = x \log\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில் காண்பது
 சமவெக்தாண காண்பது
 படிதைய காண்பதிலுட்கு ஏத்கு ஆய்லாபின்
 கதற்குத்கை காண்பதற்கு,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \log\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$= \lambda \left(x \log \frac{y}{x} \right)$$

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda' g(x, y)$$

g எனபது படி $n=1$ எனல சமவெக்தாண
 காண்பது ஆலாபின் கதற்குப்படி

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = 1g$$

காண்பதற்கு

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x \left(\log \frac{y}{x} \right)' + \log \left(\frac{y}{x} \right) (x)'$$

$$= x \frac{1}{y/x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \log \frac{y}{x} (1)$$

$$= -\frac{x}{y} \left(\frac{y}{x^2} \right) + \log \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -1 + \log \frac{y}{x}$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} = -x + x \log \frac{y}{x} \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \frac{1}{y/x} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{y}$$

$$y \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①+②} \Rightarrow x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = -x + x \log \frac{y}{x} + x$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = 1g$$

ஆலாபின்
 கதற்கு காண்பதற்குப்படி.

$$\text{④ } u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}} \text{ எனில்}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u \text{ என நினைவுக,}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}}$$

$$= \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^{1/2} (\sqrt{x+y})}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{3/2} u(x, y)$$

u எனபது படி $n=3/2$ எனல

சமவெக்தாண காண்பது

ஆலாபின் கதற்குப்படி

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u //$$

$$\text{⑤ } v(x, y) = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x+y} \right) \text{ எனில்}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \text{ என நினைவுக}$$

சுதான-I

v எனபது ஒரு சமவெக்தாண காண்பது

$$\text{அல்ல, } v = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x+y} \right)$$

எதிர்மடகைக கடுக

$$e^v = \frac{x^2 + y^2}{x+y} = u \text{ எனில்}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda (x+y)}$$

$$= \lambda' u(x, y)$$

u எனபது படி $n=1$ எனல
 சமவெக்தாண காண்பது

ஆலாபின் கதற்குப்படி

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1 u$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} (e^v) + y \frac{\partial}{\partial y} (e^v) = 1 e^v$$

$$x e^v \frac{\partial v}{\partial x} + y e^v \frac{\partial v}{\partial y} = e^v$$

e^v ஆல் கடுக

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

சுதான-II

$$v = \log (x^2 + y^2) - \log (x+y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x - \frac{1}{x+y}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x+y}$$

கடுகலாண

(22)

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{y}{x+y}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - \frac{x+y}{x+y}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} - 1 = 2-1$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

நிறுவப்பட்டது.

$$⑥ w(x,y,z) = \log \left(\frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2} \right)$$

$$\text{எனில் } x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z}$$

ஐக் காண்க.

w என்பது ஒரு சமஸுத்தான

சார்பு அல்ல

$$w = \log \left(\frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2} \right)$$

எதிர் மட்டிக்க எடுக்க.

$$e^w = \frac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}$$

என்க

$$u(x,y,z) = \frac{\lambda^7(5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4)}{\lambda^2(x^2+y^2)}$$

$$u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^5 (u(x,y,z))$$

u என்பது n=5 ஐ உடைய

சமஸுத்தான சார்பு ஆகும்.

யூனின் தேற்றப்படி

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 5u$$

$u = e^w$ என பிரதியிட

$$x \frac{\partial (e^w)}{\partial x} + y \frac{\partial (e^w)}{\partial y} + z \frac{\partial (e^w)}{\partial z} = 5e^w$$

$$x e^w \frac{\partial w}{\partial x} + y e^w \frac{\partial w}{\partial y} + z e^w \frac{\partial w}{\partial z} = 5e^w$$

e^w ஆல் வகுக்க

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 5 //$$

—X—

சு. கார்த்திகேயன்
நிருவாகி மாண்புமிகு

9715634957

$$PI = \frac{P}{V} + \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

மேலும் காண்க

$$\left(\frac{P}{V} \right) \left(\frac{dV}{dx} \right) = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{P}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{P}{V} \frac{dV}{dx}$$

9. தொலைக நுண் கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

1. மண் தொலைகயீடு

இடது குறை விதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] \Delta x$$

வலது குறை விதி

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)] \Delta x$$

நடு குறை விதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \dots + f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})] \Delta x$$

பயிற்சி-9.1

1) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும் பிரிவினையுடன் இடது குறை விதியை பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x dx$ க்கு தொகைய

மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \quad x_4=1.4 \quad x_5=1.5$$

$$\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

இடது குறை விதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_4)] \Delta x$$

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x dx &\approx [f(1) + f(1.1) + f(1.2) + f(1.3) + f(1.4)] 0.1 \\ &= (1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4) 0.1 \\ &= 6 \times 0.1 \end{aligned}$$

$$\int_1^{1.5} x dx = 0.6$$

② $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும்

பிரிவினையுடன் வலது குறை விதியை பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x^2 dx$

க்கு தொகைய மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \quad x_4=1.4 \quad x_5=1.5$$

$$\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

வலது குறை விதி

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_5)] \Delta x$$

$$\approx [f(1.1) + f(1.2) + f(1.3) + f(1.4) + f(1.5)] 0.1$$

$$\approx [1.1^2 + 1.2^2 + 1.3^2 + 1.4^2 + 1.5^2] 0.1$$

$$\begin{aligned} &= [1.21 + 1.44 + 1.69 + 1.96 + 2.25] 0.1 \\ &= 8.55 \times 0.1 \end{aligned}$$

$$\int_1^{1.5} x^2 dx \approx 0.855$$

3) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும் பிரிவினையுடன் நடு குறை விதியை பயன்படுத்தி

$\int_1^{1.5} (2-x) dx$ க்கு தொகைய மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3$$

$$x_4=1.4 \quad x_5=1.5 \quad \Delta x = 0.1$$

$$f(x) = 2-x$$

நடு குறை விதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \dots + f(\frac{x_4+x_5}{2})] \Delta x$$

$$\approx [f(\frac{1+1.1}{2}) + f(\frac{1.1+1.2}{2}) + f(\frac{1.2+1.3}{2}) + f(\frac{1.3+1.4}{2}) + f(\frac{1.4+1.5}{2})] 0.1$$

$$\approx [f(1.05) + f(1.15) + f(1.25) + f(1.35) + f(1.45)] 0.1$$

$$= [(2-1.05) + (2-1.15) + (2-1.25) + (2-1.35) + (2-1.45)] 0.1$$

$$\begin{aligned} &= [0.95 + 0.85 + 0.75 + 0.65 + 0.55] 0.1 \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

$\int_a^b f(x) dx$ ஐ மதிப்பிட எல்லைக் குத்தி

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f(a + (b-a)\frac{r}{n})$$

$a=0, b=1$ எனில்

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

பயிற்சி 9.2

- i) கீழ்க்காணும் தொகையீடுகளை கூட்டலின் எல்லைகளாகக் காண்க.

ii) $\int_0^1 (5x+4) dx$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$f(x) = 5x+4$$

$$f\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{5r}{n} + 4$$

$$\sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right) = \sum_{r=1}^n \frac{5r}{n} + 4$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{5r}{n} + \sum_{r=1}^n 4$$

$$= \frac{5}{n} \sum_{r=1}^n r + 4 \sum_{r=1}^n 1$$

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{5}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 4n$$

$$\leq 1 = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5n(n+1)}{2} + 4n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 4$$

$$= \frac{5}{2} (1+0) + 4 = \frac{5}{2} + 4$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\int_0^1 (5x+4) dx = \frac{13}{2}$$

எளிதானதால் $\int_0^1 (5x+4) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x \right]_0^1$
 $= \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$

(ii) $\int_1^2 (4x^2-1) dx$ $a=1$
 $b=2$
 $f(x) = 4x^2-1$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$f(x) = 4x^2-1$$

$$f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = 4\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 - 1$$

$$= 4\left(1 + \frac{r^2}{n^2} + \frac{2r}{n}\right) - 1$$

$$\sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = 4 \sum_{r=1}^n \left(1 + \frac{r^2}{n^2} + \frac{2r}{n}\right) - \sum_{r=1}^n 1$$

$$= 4 \sum_{r=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{r=1}^n r^2 + \frac{8}{n} \sum_{r=1}^n r - \sum_{r=1}^n 1$$

$$= 4n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= 3n + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} (n+1)(2n+1) + 4(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(3n + \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) + 4(n+1) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= 3 + \frac{2}{3} (1+0)(2+0) + 4(1+0)$$

$$= 3 + \frac{4}{3} + 4 = \frac{25}{3}$$

எளிதானதால்

$$\int_1^2 (4x^2-1) dx = \left[\frac{4x^3}{3} - x \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 2 \right) - \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{28}{3} - 1 = \frac{25}{3}$$

முதல் தொகை முண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்

$f(x)$ எல்லை $[a, b]$ என்ற பகுதியில்

இடைவெளியில் வகையறுக்கப்பட்டு
 தொடர்ச்சியான சார்பு, $F(x) = \int_a^x f(u) du$,

$$a < x < b \text{ எனில் } \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (3)$$

i.e $F(x)$ ஆனது $f(x)$ ன் அநிர்வகையர் ஆகும்.

இரண்டாம் தொடரக நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்.

$f(x)$ என்கு $[a, b]$ ல் வரையறுக்கப் பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $F(x)$ ஆனது $f(x)$ ன் அநிர்வகையர் எனில்,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

பண்புகள்

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du \quad a < b$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

இங்கு $a < c < b$

$$4) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

α, β மாறிலிகள்

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$6) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$7) \int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(2a-x)) dx$$

$$8) f(x) \text{ ஒரு இரட்டை சார்பு எனில்}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$9) f(x) \text{ ஒரு ஒற்றை சார்பு எனில்}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$10) f(2a-x) = f(x) \text{ எனில்}$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$11) f(2a-x) = -f(x) \text{ எனில்}$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0$$

$$12) \int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

இங்கு $f(a-x) = f(x)$ எனும்பொழுது.

பயிற்சி 9.3

i) பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காண்க.

$$i) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$$

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$$

$$= \left[\frac{1}{2(2)} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_3^4$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{4-2}{4+2} \right| - \log \left| \frac{3-2}{3+2} \right| \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \frac{2}{6} - \log \frac{1}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{2}{6} \times \frac{5}{1}$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{5}{3}$$

$$(ii) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} \quad I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4$$

$$= (x+1)^2+2^2$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2^2+(x+1)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{1+1}{2} - \tan^{-1} \frac{-1+1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi}{8}$$

$$(iii) I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$x = \sin t$ எனில்

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$dx = \cos t dt$$

$x=0$ எனில் $t=0$

$x=1$ எனில் $t=\pi/2$

x	0	1
t	0	$\pi/2$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}} dt \cos t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin t} \times \sqrt{1-\sin t}}{\sqrt{1+\sin t} \sqrt{1-\sin t}} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin t)^2}{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin t}{\cos t} \cos t dt$$

$$= [t + \cos t]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - (0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(iv) I = \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2} \right) dx$$

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + C$$

$$= \left[e^x \tan \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= e^{\pi/2} \tan \frac{\pi}{4} - e^0 \tan 0$$

$$= e^{\pi/2}$$

$$(4) (v) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \sin^3 \theta d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$\cos \theta = t$ எனில்

$$-\sin \theta d\theta = dt$$

$$\sin \theta d\theta = -dt$$

$\theta=0$ எனில்

$$t = \cos 0 = 1$$

$\theta = \pi/2$ எனில்

$$t = 0$$

θ	0	$\pi/2$
t	1	0

$$I = \int_1^0 t^{1/2} (1-t^2) (-dt)$$

$$= \int_1^0 \left(t^{1/2} - t^{5/2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{7/2}}{7/2} \right]_1^0 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \right) - 0$$

$$= \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$$

$$(vi) \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$x = \tan \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$x=0$ எனில்

$$\tan \theta = 0$$

$\theta=0$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$x=1$ எனில்

$$\tan \theta = 1$$

$\theta = \pi/4$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan^2 \theta}{(1+\tan^2 \theta)^2} \sec^2 \theta d\theta$$

x	0	1
θ	0	$\pi/4$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan^2 \theta}{(\sec^2 \theta)^2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sec^2 \theta} - \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} [\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin 0]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$$

(5)

② பின்வரும் வரையறுத்த

தொகையிடல்களை, தொகையிடலின்
பண்புகளை பயன்படுத்தி மதிப்பு
காண்க.

(i) $I = \int_{-5}^5 x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx.$

$$f(x) = x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$$f(-x) = -x \cos\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{-(e^x-1)}{e^x+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$f(x)$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\therefore I = 0.$$

(ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1) dx$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1) dx$$

$$f(x) = x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1$$

$$f(x) \text{ ல் } x^5, x \cos x, \tan^3 x$$

இவை ஒற்றைச் சார்புகள்

இவற்றின் தொகைகள் = 0

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^5 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan^3 x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx$$

$$I = 0 + 0 + 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx$$

$$= \left[x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2}$$

$$I = \pi$$

(iii) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x dx.$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x dx$$

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f(-x) = \sin^2(-x) = \sin^2 x = f(x)$$

$f(x)$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx.$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1 - \cos 2x}{2} \right] dx$$

$$= \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{2} \right] - (0 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(iv) $I = \int_0^{2\pi} x \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right) dx$

$$f(x) = \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(2\pi - x) = \log \left(\frac{3+\cos(2\pi-x)}{3-\cos(2\pi-x)} \right)$$

$$= \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(2\pi - x) = f(x)$$

$$\int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

$$a = 2\pi$$

$$f(a-x) = f(x) \text{ எனில்}$$

$$I = \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi} \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right) dx$$

$$I = 2\pi \int_0^{\pi} \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right) dx$$

$$\left[\because \int_0^{2\pi} g(\cos x) dx = 2 \int_0^{\pi} g(\cos x) dx \right]$$

$$I = 2 \int_0^{\pi} \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right) dx$$

$$f(x) = \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(\pi-x) = \log \left(\frac{3+\cos(\pi-x)}{3-\cos(\pi-x)} \right)$$

$$= \log \left(\frac{3-\cos x}{3+\cos x} \right)$$

$$= -\log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(\pi-x) = -f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x) dx = 0$$

$$f(2a-x) = -f(x)$$

$$I = 0$$

$$(v) \quad I = \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(2\pi-x) = (\sin(2\pi-x))^4 (\cos(2\pi-x))^3$$

$$= (-\sin x)^4 (\cos x)^3$$

$$= \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(2\pi-x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$I = 2 \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(\pi-x) = \sin^4(\pi-x) (\cos(\pi-x))^3$$

$$= -\sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(\pi-x) = -f(x)$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0 \quad f(2a-x) = -f(x)$$

$$I = 0$$

$$(vi) \quad \int_0^1 |5x-3| dx$$

$$|5x-3| = \begin{cases} (5x-3) & 5x-3 > 0 \text{ or } x > \frac{3}{5} \\ -(5x-3) & (5x-3) \leq 0 \text{ or } x \leq \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x-3 & x > \frac{3}{5} \\ -(5x-3) & x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 |5x-3| dx$$

$$= \int_0^{3/5} -(5x-3) dx + \int_{3/5}^1 (5x-3) dx$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{(5x-3)^2}{2} \right]_0^{3/5} + \frac{1}{5} \left[\frac{(5x-3)^2}{2} \right]_{3/5}^1$$

$$= -\frac{1}{10} [0 - (-3)^2] + \frac{1}{10} [2^2 - 0]$$

$$= -\frac{1}{10} (-9) + \frac{4}{10} = \frac{9+4}{10}$$

$$= \frac{13}{10}$$

$$(vii) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$JF = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$t = \sin^2 \theta$$

$$dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$dt = \sin 2\theta d\theta$$

$$t=0 \quad \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$t = \sin^2 x \quad \sin^2 \theta = \sin^2 x \quad \theta = x$$

$$I_1 = \int_0^x \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

t	0	$\sin^2 x$
θ	0	x

$$I_1 = \int_0^x \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$t = \cos^2 \theta$$

$$JF = \cos^2 \theta$$

$$dt = -2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$t=0 \quad \cos^2 \theta = 0$$

$$\theta = \pi/2$$

$$t = \cos^2 x \Rightarrow \theta = x$$

t	0	$\cos^2 x$
θ	$\pi/2$	x

$$I_2 = \int_{\pi/2}^x -\theta \sin 2\theta d\theta$$

$$I = \int_0^x \theta \sin 2\theta d\theta - \int_{\pi/2}^x \theta \sin 2\theta d\theta$$

$$= \int_0^x \theta \sin 2\theta d\theta + \int_x^{\pi/2} \theta \sin 2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \sin 2\theta d\theta}{u \quad dv}$$

$$u = \theta \quad dv = \sin 2\theta d\theta$$

$$u' = 1 \quad v = \int \sin 2\theta d\theta$$

$$= \left[uv - u'v_1 + \dots \right]_0^{\pi/2} \quad v = -\frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$v_1 = -\frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= \left[\theta \left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right) - 1 \left(-\frac{\sin 2\theta}{4}\right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos \pi}{2}\right) + 0 \right] - \left[0 + 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

மாற்றி மாற்றி

விதிக்கிறீர் கற்றுக்கொள்ளுங்கள்

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right] = \left\{ \frac{d}{dx} (\psi(x)) \right\} f(\psi(x))$$

$$- \left\{ \frac{d}{dx} (\phi(x)) \right\} f(\phi(x))$$

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \sin^2 t dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^2 t dt \quad \text{--- ①}$$

விதிக்கிறீர் கற்றுக்கொள்ளுங்கள்

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (\sin^2 x) \sin^2 \sqrt{\sin^2 x} - 0$$

$$+ \frac{d}{dx} (\cos^2 x) \cos^2 \sqrt{\cos^2 x} - 0$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot (x) + 2 \cos x (-\sin x) \cdot x$$

$$= x \sin 2x - x \sin 2x$$

$$f'(x) = 0$$

தொடர்ச்சியில் $f(x) = c$
 i.e $f(x)$ ஒரு மாறாத மாறாது
 மாறாது $f(\pi/4) = c$ என
 எடுத்துக்கொள்வோம்

⑦

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin^2 t dt + \int_0^{\sqrt{x}} \cos^2 t dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} 1 dt = \frac{\pi}{2} [t]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{x}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$(viii) \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$x = \tan t \quad \text{or} \quad \sin t$$

$$dx = \sec^2 t dt$$

$$x=0 \Rightarrow \tan t=0 \quad t=0$$

$$x=1 \quad \tan t=1 \quad t=\pi/4$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan t) \sec^2 t dt}{1+\tan^2 t}$$

x	0	1
t	0	$\pi/4$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan t) \sec^2 t dt}{\sec^2 t}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan t) dt \quad \text{--- ①}$$

$$f(t) = 1 + \tan t$$

$$a = \pi/4 \quad f(\pi/4 - t) = \log(1 + \tan(\pi/4 - t))$$

$$= \log \left(1 + \frac{\tan \pi/4 - \tan t}{1 + \tan \pi/4 \tan t} \right)$$

$$= \log \left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right)$$

$$= \log \left(\frac{1 + \tan t + 1 - \tan t}{1 + \tan t} \right)$$

$$f(\pi/4 - t) = \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right)$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) dt \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow I + I = \int_0^{\pi/4} \left(\log(1 + \tan t) + \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) \right) dt$$

$$2I = \int_0^{\pi/4} \left(\log(1 + \tan t) \times \frac{2}{1 + \tan t} \right) dt$$

$$2I = \int_0^{\pi/4} \log 2 \, dt$$

$$2I = \log 2 \left[t \right]_0^{\pi/4}$$

$$I = \frac{1}{2} \log 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right]$$

$$I = \frac{\pi}{8} \log 2$$

$$(IX) I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

$$a = \pi$$

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1 + \sin x} = f(x)$$

$$f(\pi - x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^a x f(x) \, dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) \, dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \tan^2 x) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - (\sec^2 x - 1)) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\sec x - \tan x + x \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(\sec \pi - \tan \pi + \pi) - (\sec 0 - \tan 0 + 0) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(-1 - 0 + \pi) - (1 - 0) \right]$$

$$I = \frac{\pi}{2} [\pi - 2]$$

⑧

$$(x) \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} \, dx$$

$$= \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}} \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \, dx \quad \text{--- (1)}$$

$$a = \pi/8 \quad b = 3\pi/8 \quad a + b = \frac{4\pi}{8} = \pi/2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$f(\pi/2 - x) = \frac{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}}$$

$$f(\pi/2 - x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a + b - x) \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx \quad \text{--- (2)}$$

① + ②

$$I + I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} 1 \, dx$$

$$2I = \left[x \right]_{\pi/8}^{3\pi/8} = \left[\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right]$$

$$2I = \frac{2\pi}{8} \quad I = \frac{\pi}{8}$$

(XI)

$$I = \int_0^{\pi} x (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)) \, dx$$

$$f(x) = \sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)$$

$$a = \pi \quad f(a - x) = f(\pi - x)$$

$$= \sin^2 \sin(\pi-x) + \cos^2 \cos(\pi-x) \quad (9)$$

$$= \sin^2 \sin x + \cos^2 (-\cos x)$$

$$= \sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x$$

$$f(a-x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} [\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)] dx$$

மேலும்

$$f(2a-x) = f(x) \text{ எனில்}$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$2a = \pi$$

$$a = \pi/2$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x) dx \quad \text{--- ①}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) + \cos^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$= \sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x) dx \quad \text{--- ②}$$

①, ② க்கு கூட்ட

$$I + I = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x + \sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x) dx$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi/2} (1+1) dx$$

$$2I = 2\pi \left[x \right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \pi \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

பெர்னாலி. சூத்திரம்

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

பயிற்சி 9.4

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக,

$$1) \int_0^1 x^3 e^{-2x} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{u} \frac{e^{-2x}}{dv}$$

$$u = x^3$$

$$dv = e^{-2x}$$

$$v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$u' = 3x^2$$

$$v_1 = \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$u'' = 6x$$

$$v_2 = -\frac{1}{8} e^{-2x}$$

$$u''' = 6$$

$$v_3 = \frac{1}{16} e^{-2x}$$

$$u^{iv} = 0$$

$$I = \int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

$$I = \left[x^3 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - 3x^2 \frac{1}{4} e^{-2x} + 6x \left(-\frac{1}{8} \right) e^{-2x} - 6 \frac{1}{16} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$= \left[-\frac{e^{-2}}{2} - \frac{3}{4} e^{-2} - \frac{6}{8} e^{-2} - \frac{6}{16} e^{-2} \right] - \left[0 + 0 + 0 - \frac{6}{16} e^0 \right]$$

$$= -e^{-2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \right] + \frac{3}{8}$$

$$= -e^{-2} \left[\frac{4+6+6+3}{8} \right] + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} - e^{-2} \frac{19}{8}$$

$$= \frac{1}{8} (3 - 19e^{-2})$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{\sin(3 \tan^{-1} x) \tan^{-1} x}{1+x^2} dx$$

$$\tan^{-1} x = t \text{ எனில்}$$

$$x=0 \quad t = \tan^{-1} 0 = 0$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt$$

$$x=1 \quad t = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

x	0	1
t	0	$\pi/4$

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin 3t (t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{t}{u} \frac{\sin 3t}{dv}$$

$$u = t \quad dv = \sin 3t \, dt \quad (10)$$

$$v = -\frac{\cos 3t}{3}$$

$$u' = 1 \quad v_1 = -\frac{1}{9} \sin 3t$$

$$u'' = 0$$

$$\int u \, dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

$$I = \left[t \left(-\frac{1}{3} \cos 3t \right) - 1 \left(-\frac{1}{9} \sin 3t \right) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \right] - [0 + 0]$$

$$= -\frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{9} \right)$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos 135^\circ = \cos (180 - 45) = -\cos 45$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3) \quad I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x} \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\sin^{-1}x = t \text{ எனில்}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$$

$$x=0 \Rightarrow t = \sin^{-1}0 = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} e^t t \, dt$$

x	0	1/√2
t	0	π/4

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{t}{u} \frac{e^t dt}{dw}$$

$$u = t$$

$$dw = e^t dt$$

$$v = e^t$$

$$u' = 1$$

$$v_1 = e^t$$

$$u'' = 0$$

$$I = uv - u'v_1 - \dots$$

$$= \left[t e^t - 1 e^t \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} e^{\pi/4} - e^{\pi/4} \right) - (0 - 1)$$

$$I = e^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + 1$$

$$4) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{u} \frac{\cos 2x \, dx}{dw}$$

$$u = x^2 \quad dv = \cos 2x \, dx$$

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$u' = 2x \quad v_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$$

$$u'' = 2 \quad v_2 = -\frac{\sin 2x}{8}$$

$$u''' = 0$$

$$I = \left[x^2 \frac{1}{2} \sin 2x - 2x \left(-\frac{1}{4} \cos 2x \right) + 2 \left(-\frac{1}{8} \sin 2x \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} \right] - (0 + 0 + 0)$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} (-1) - 0$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

முதலாம் பகுதி நெகாண்ட்ரெக்ட்

பயிற்சி 9.5

$$\text{மதிப்பிடுக } (ci) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 5 \right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 5} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan^2 x + 5} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{6 + \tan^2 x}$$

$$\tan x = t \text{ எனில்} \\ \sec^2 x \, dx = dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=\tan 0=0$$

$$x=\pi/2 \Rightarrow t=\tan \pi/2=\infty$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{6+t^2}$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

$$a^2=6$$

$$a=\sqrt{6}$$

இது முறையற்ற தொகையிடல்

இது முறையற்ற தொகையிடல்

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{6}} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0] = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5\sec^2 x + 4\tan^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5(1+\tan^2 x) + 4\tan^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5+9\tan^2 x}$$

$\tan x = t$ என்க

$$\sec^2 x dx = dt$$

$$x=0 \quad t=0$$

$$x=\pi/2 \quad t=\tan \pi/2 = \infty$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{5+9t^2}$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

இது முறையற்ற தொகையிடல்

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{9 \left(\frac{5}{9} + t^2 \right)} dt = \frac{1}{9} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 + t^2}$$

$$a = \sqrt{5}/3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\pi}{2\sqrt{5/3}}$$

$$I = \frac{\pi}{6\sqrt{5}}$$

குறையற்ற தொகையிடல்

(i) n இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒற்றை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3}$$

$$(2) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

m, n மிகைகூறுகள்

3)

(i) n இரட்டை, m இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \dots \frac{1}{m+2}$$

$$\cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒரு ஒற்றை, m இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \dots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1}$$

(iii) n இரட்டை m ஒற்றை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx =$$

$$= \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{m-3}{m+n-2} \dots \frac{2}{n+3} \cdot \frac{1}{n+1}$$

பயிற்சி 9.6

1) பின்வரும் தொலைக்காட்சி மாதிரிப்புகள்.

$$(i) I = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

$n=10$ இரட்டை எண்

$$I = \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{63\pi}{512}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$$

$n=7$ (odd) ஒற்றை எண்

$$I = \frac{6^2}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$(iii) I = \int_0^{\pi/4} \sin^6 2x dx$$

 $2x = t$ என்க

$2dx = dt$

$dx = \frac{dt}{2}$

$x=0 \quad t=0$

$x=\pi/4 \quad t=2\pi/4=\pi/2$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt$$

 $n=6$ இரட்டை எண்

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{64}$$

$$(iv) I = \int_0^{\pi/6} \sin^5 3x dx$$

 $3x = t$ என்க

$3dx = dt$

$dx = \frac{dt}{3}$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=\pi/6 \Rightarrow t=\pi/2$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt$$

 $n=5$ ஒற்றை எண்

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{45}$$

(12)

$$(v) I = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$$

$m=2 \quad n=4$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{4-1}{2+4} \times \frac{4-3}{2+4-2} \times \frac{2-1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

தொலைக்காட்சி

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{16} \left[1 - \frac{5}{6} \right] = \frac{3\pi}{16} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{32}$$

$$(vi) I = \int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4} dx$$

 $\frac{x}{4} = t$ என்க

$dx = 4dt$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=2\pi \Rightarrow t=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t dt$$

 $n=7$ ஒற்றை எண்

$$= 4 \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{64}{35}$$

$$(vii) I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^5 \theta d\theta$$

 $m=3 \quad n=5$ ஒற்றை எண்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1}$$

(13)

$$= \frac{5-1}{3+5} \frac{5-3}{3+5-2} \times \frac{1}{3+1}$$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$(viii) I = \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

$$m=2 \quad n=3$$

$$I = \frac{2! \times 3!}{(2+3+1)!} = \frac{2 \times 6}{6!} = \frac{2 \times 6}{6 \times 5!}$$

$$= \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

கனம் தொழக்கயிடல்

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$a=1$ எனில்

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

$$(3) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)! = n$$

(கனம் n) $n = (n-1)!$

பயிற்சி 9.7

மதிப்பிடுக

$$(i) \int_0^{\infty} x^5 e^{-3x} dx$$

$$n=5 \quad a=3$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I = \frac{5!}{3^{5+1}} = \frac{5!}{3^6}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x} dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\tan x} \sec^6 x dx$$

$\tan x = t$ எனில்

$$\sec^2 x dx = dt$$

$$x=0 \quad t=\tan 0=0$$

$$x=\pi/2 \quad t=\tan \pi/2=\infty$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\tan x} \sec^4 x \sec^2 x dx$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$= \int_0^{\infty} (1+t^2+t^4) e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt + \int_0^{\infty} 2e^{-t} t^2 dt$$

$$+ \int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt$$

$$= 0! + 2(2!) + 4! \quad n=4$$

$$= 1 + 4 + 24$$

$$= 29$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = 32, \quad \alpha > 0$$

எனில் α மதிப்பை காண்க

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx$$

$\alpha x^2 = t$ எனில்

$$\alpha x = \frac{dt}{dx} \quad x^2 = \frac{t}{\alpha}$$

$$x dx = \frac{dt}{2\alpha}$$

$$x=0 \quad t=0$$

$$x=\infty \quad t=\infty$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t}{\alpha} \frac{dt}{2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} t^1 e^{-t} dt$$

$$I = \frac{1}{2\alpha^2} (1!) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

மதிப்பிடுக $I = 32$

$$\frac{1}{2\alpha^2} = 32$$

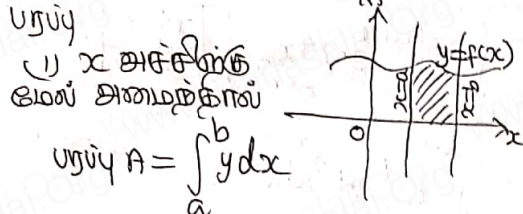
$$\frac{1}{2\alpha^2} = 64 \quad \alpha^2 = \frac{1}{64}$$

$$\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\alpha > 0$$

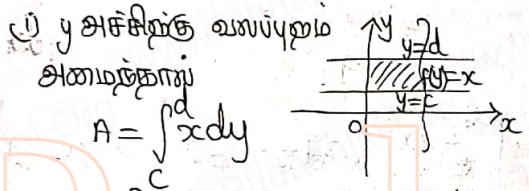
14) ஒதாக்கையிடல் கூலம் பரப்பு காண்க

- 1) கோடுகள் $x=a$, $x=b$ மற்றும் வளைவான $y=f(x)$, x அச்ச இவற்றால் அடையும் அளவுகத்தின் பரப்பு



- ii) x அச்சிற்கு கீழ் அமைந்தால் பரப்பு $A = \int_a^b (-y) dx$.
-

- 2) வளைவான $x=f(y)$ கோடுகள் $y=c$, $y=d$ மற்றும் y அச்ச இவற்றால் அடையும் பரப்பு



- ii) y அச்சிற்கு இடதுபுறம் அமைந்தால் $A = \int_c^d (-x) dy$
-

- 3) $y=f(x)$, $y=g(x)$ தனித்த இரு வளைவான்களால் அடையும் அளவுகத்தின் பரப்பு

$$A = \int_a^b (y_U - y_L) dx$$

- ii) $x=f(y)$, $x=g(y)$ தனித்த இரு வளைவான்களால் அடையும் அளவுகத்தின் பரப்பு

$$A = \int_c^d (x_R - x_L) dy$$

பயிற்சி 9.8

- 1) $3x-2y+6=0$, $x=-3$, $x=1$ மற்றும் x -அச்ச ஆகியவற்றால் அடையும் அளவுகத்தின் பரப்பு காண்க.

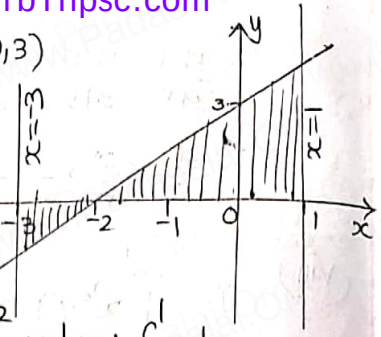
$$3x-2y+6=0$$

$$-2y = -3x-6$$

$$y = \frac{3}{2}x+3$$

$$x=0 \Rightarrow y=3 (0,3)$$

$$y=0 \Rightarrow 3x=-6 \\ x=-2 \\ (-2,0)$$



$$\begin{aligned} \text{பரப்பளவு } A &= \int_{-2}^1 -y dx + \int_{-2}^1 y dx \\ &= \int_{-2}^1 (-\frac{3}{2}x-3) dx + \int_{-2}^1 (\frac{3}{2}x+3) dx \\ &= \left[-\frac{3x^2}{4} - 3x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{3x^2}{4} + 3x \right]_{-2}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{3(1)}{4} - 3(1) \right] - \left[-\frac{3(4)}{4} - 3(-2) \right] \\ &\quad + \left[\frac{3(1)}{4} + 3(1) \right] - \left[\frac{3(4)}{4} + 3(-2) \right] \\ &= (-3+6) - (-27+9) + \left[\frac{3}{4} + 3 + 6 \right] \\ &= 3 + 27 - 9 + \frac{3}{4} + 6 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{15}{2} \text{ க.அ.}$$

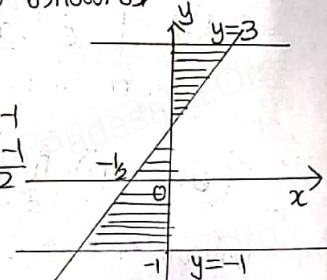
- 2) $2x-y+1=0$, $y=-1$, $y=3$ மற்றும் y அச்ச ஆகியவற்றால் அடையும் அளவுகத்தின் பரப்பை காண்க.

$$2x-y+1=0$$

$$\begin{aligned} -y &= -2x-1 & 2x &= y-1 \\ y &= 2x+1 & x &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

$$x=0 \Rightarrow y=1 (0,1)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} (-\frac{1}{2},0)$$



$$\text{பரப்பளவு} = \int_{-1}^3 x dy = \int_{-1}^1 -x dy + \int_1^3 x dy$$

$$= \int_{-1}^1 -\frac{1}{2}(y-1) dy + \int_1^3 \frac{1}{2}(y-1) dy$$

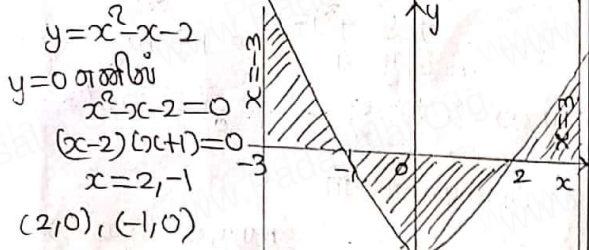
$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{4} [(1-1)^2 - (-1-1)^2] + \frac{1}{4} [(3-1)^2 - (1-1)^2]$$

$$= -\frac{1}{4} (0-4) + \frac{1}{4} (4-0)$$

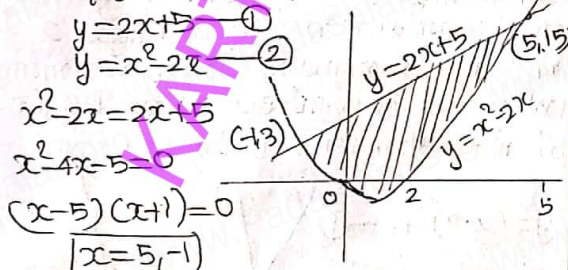
$$= \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 1+1 = 2 \text{ க.அ.}$$

3) வண்ணவகை $2+x-x^2+y=0$, (15)
 x அச்சு, $x=-3$ மற்றும் $x=3$ ஆகிய
 வற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



பரப்பை $= \int_{-3}^{-1} y dx + \int_{-1}^2 -y dx + \int_2^3 y dx$
 $= \int_{-3}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx$
 $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3$
 $= \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{-27}{3} - \frac{9}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right)$
 $+ \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right)$
 $= \left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{2} + 4 \right) + \frac{54}{3} - \frac{9}{2} - \frac{4}{2} - 2 - \frac{16}{3} + \frac{8}{2} + 3$
 $= -\frac{2}{3} + 3 + \frac{54}{3} - 12 - \frac{16}{3} + 12 = \frac{54-18}{3} + 3$
 $= 12 + 3 = 15$ ச.அ.

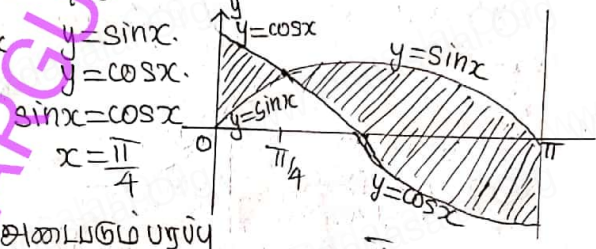
4) கோடு $y=2x+5$ மற்றும் பரவணையம்
 $y=x^2-2x$ ஆகியவற்றால் அடைபடும்
 அரங்கத்தின் பரப்பை காண்க.



$x=5$ ① $\Rightarrow y=15$ (5,15)
 $x=-1$ ② $\Rightarrow y=3$ (-1,3)
 பரப்பு $= \int_{-1}^5 (y_U - y_L) dx$
 $= \int_{-1}^5 ((2x+5) - (x^2-2x)) dx$

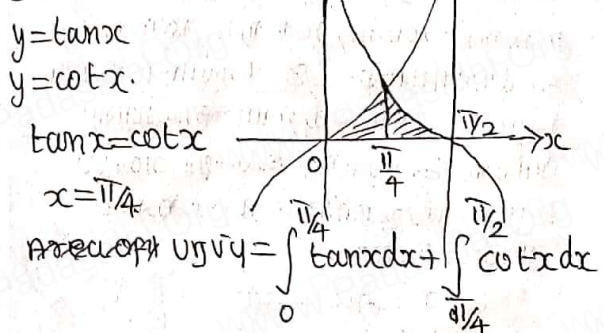
$= \int_{-1}^5 (5+4x-x^2) dx$
 $= \left[5x + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^5$
 $= (25 + 50 - \frac{125}{3}) - (-5 + 2 - \frac{1}{3})$
 $= 75 - \frac{125}{3} + 3 - \frac{1}{3} = 78 - \frac{126}{3}$
 $= 36$ ச.அ.

5) வண்ணவகை $y=\sin x$, $y=\cos x$
 மற்றும் கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=\pi$
 ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



அடைபடும் பரப்பு
 $= \int_0^{\pi/4} (y_U - y_L) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (y_U - y_L) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$
 $= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi}$
 $= (\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0) - (\cos \pi + \sin \pi) + (\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4})$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (0+1) - (-1+0) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{4}{\sqrt{2}} - 1 + 1 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$ ச.அ.

6) $y=\tan x$, $y=\cot x$ மற்றும்
 கோடுகள் $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$
 ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



$$= [\log \sec x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + [\log \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \log \sec \frac{\pi}{4} - \log \sec 0 + \log \sin \frac{\pi}{2} - \log \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \log \sqrt{2} - \log 1 + \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \log \sqrt{2} + \log \sqrt{2} = 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

ச.அ.

7) பரவணையம் $y^2 = x$ மற்றும் கோடு $y = x - 2$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அளவுகத்தின் பரப்பை காண்க.

$$y^2 = x \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 = x - 2 \quad \text{--- ②}$$

$$(x-2)^2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 - x = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1, 4$$

$$\text{②} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1 \quad (1, -1)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2 \quad (4, 2)$$

வெட்டும் புள்ளிகள் $(1, -1), (4, 2)$

$$\text{அடைபடும் பரப்பு} = \int_{-1}^2 (x_R - x_L) dy$$

$$= \int_{-1}^2 (y+2 - y^2) dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \left[\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9}{2} \text{ ச.அ.}$$

8) ஒரு குகைப் தளவாக $x=0, x=4$ $y=4$ மற்றும் $y=0$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் சதுர நிலத்தின் பரப்பை

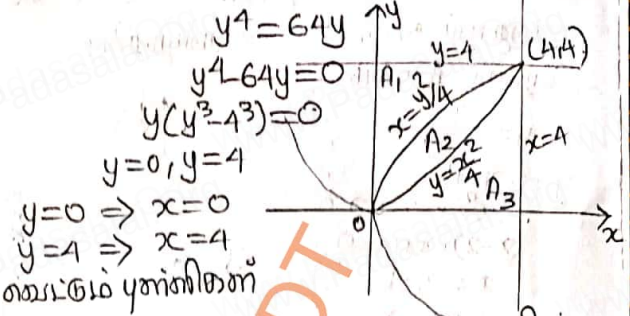
$y^2 = 4x$ மற்றும் $x^2 = 4y$ என்ற வளைவற்றின் வாயிலாக தண்ணீரடை

மனைவி, மகன், மற்றும் மகன் ஆகியோர்க்கு 3 சமவாகங்களைப் பிரிக்க விரும்புகிறார் அவ்வாறு பிரிக்க இயலுமா, இயலுமெனில் ஆய்வொருவருக்கும் கிடைக்கும் பரப்பை காண்க.

$$x^2 = 4y \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 = 4x \quad \text{--- ②}$$

$$x = \frac{y^2}{4} \quad \text{①} \Rightarrow \frac{y^4}{16} = 4y$$



சதுரவடிவ வடிவின் பரப்பு $= 4^2 = 16$ ச.அ.

$$\text{பரப்பு } A_1 = \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_1 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$$\text{பரப்பு } A_3 = \int_0^4 y dx = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_3 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$$\text{பரப்பு } A_2 = \text{சதுரப்பரப்பு} - (A_1 + A_3)$$

$$= 16 - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right)$$

$$= 16 - \frac{32}{3} = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$\therefore$ மூன்றாண்டு சமமாக பிரித்து பிரிக்க கிடைக்கக்கூடியது. பட்ட சமவாகப்பரப்பு $= \frac{16}{3}$ ச.அ.

9) P என்பது $y = (x-2)^2 + 1$ என்ற வளைவரைக்கு ஒரு மீச்சிற் புள்ளி. P என்ற புள்ளியானது P-ன் சாய்வு 2 உள்ளவாறு வளைவரையின் மீது உள்ளது. அதில் வளைவரைக்கும் நாண் P-க்கும் கிடைசில் அடைபடும் பரப்பை காண்க.

$$y = (x-2)^2 + 1 \quad \text{--- ①}$$

x-ஐ மூல-வளைவில

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2)$$

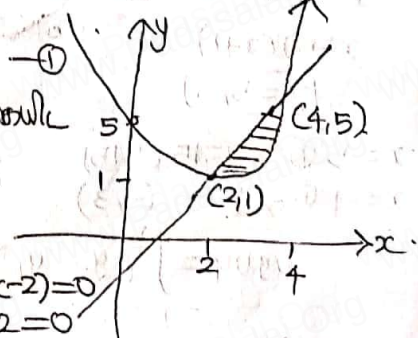
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$y'' = 2 \quad x = 2 \text{ அதில் } y'' = 2 > 0$$

y-க்கு $x = 2$ ன் சாய்வு மீச்சிற்



$x=2$ எனில் பிரதியிட

$$y = (2-2)^2 + 1 = 1$$

இவ்வாய்வினை $P(2,1)$.

இவ் சாய்வு $m=2$.

பெண் சமன்பாடு $y=mx+C$

$$y=2x+C$$

இது $(2,1)$ வழி செல்லும்

$$1=2(2)+C$$

$$1-4=C \quad C=-3$$

பெண் சமன்பாடு $y=2x-3$ — (2)

$$①, ② \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 2x - 3$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1 - 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x=2, 4$$

$$x=2 \quad ① \Rightarrow y=0+1=2 \quad (2,1)$$

$$x=4 \quad ① \Rightarrow y=4+1=5 \quad (4,5)$$

வெட்டும் புள்ளிகளை $(2,1)$, $(4,5)$

$$\text{பரப்ப} = \int_2^4 (y_u - y_L) dx$$

$$= \int_2^4 (2x-3 - ((x-2)^2 - 1)) dx$$

$$= \int_2^4 (2x-4 - (x-2)^2) dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{2x^2}{2} - 4x - (x-2)^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{2x^3}{6} - 4x - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{16-16}{3} - \frac{2^3}{3} - \frac{(4-8-0)}{3} \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8+12}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ ச.அ.}$$

10) $x^2 + y^2 = 16$ என்க வட்டத்திற்கும் $y^2 = 6x$ என்க பரவளைவுத்திற்கும் லொதுவான அரங்கத்தின் பரப்பை காண்க

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 = 6x \quad \text{--- ②}$$

$$① \Rightarrow x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x+8)(x-2) = 0$$

$$x = -8, 2$$

$$x = -8 \text{ எனில்}$$

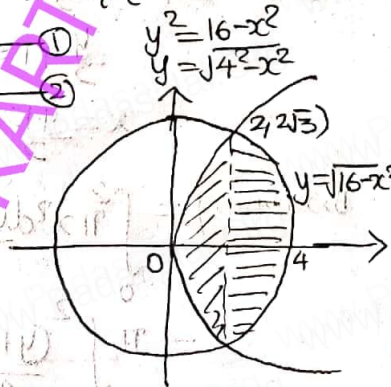
$$y^2 = 6(-8)$$

$$y^2 = -48 \text{ லொதுங்காது}$$

$$x = 2 \text{ எனில்}$$

$$y^2 = 12 \quad y = \pm 2\sqrt{3}$$

வெட்டும் புள்ளிகள் $(2, 2\sqrt{3})$, $(2, -2\sqrt{3})$



அடைபடும் அரங்கத்தின்

$$\text{பரப்ப} = 2 \left[\int_0^2 \sqrt{6x} dx + \int_2^4 \sqrt{4^2 - x^2} dx \right]$$

$$= 2 \left[\int_0^2 \sqrt{6} x^{1/2} dx + \int_2^4 \sqrt{4^2 - x^2} dx \right]$$

$$= 2 \left[\left(\sqrt{6} \frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^2 + \left[\frac{x}{2} \sqrt{4^2 - x^2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \frac{x}{4} \right] \Big|_2^4 \right]$$

$$= 2 \left[\sqrt{6} \frac{2^{3/2}}{3/2} \right] + \left[\frac{4}{2} (0) + 8 \sin^{-1}(1) \right] - \left(\frac{2}{2} \sqrt{4^2 - 2^2} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left[\frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{3} + 8 \frac{\pi}{2} - \sqrt{12} - 8 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{4\sqrt{12}}{3} + 4\pi - \sqrt{12} - \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{12}}{3} + \frac{8\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} (2\sqrt{3} + 8\pi)$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 4\pi) \text{ ச.அ.}$$

கணிதமைய

① $y=f(x)$ என்க வளைவதையின் $x=a$, $x=b$ x அச்ச இவற்றால் அடைபடும் பரப்பை x அச்சை பற்றி சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமைய

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

② $x=f(y)$ என்க வளைவதையின் $y=c$, $y=d$ y அச்ச இவற்றால் அடைபடும் பகுதியை y அச்சை பற்றி சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமைய

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

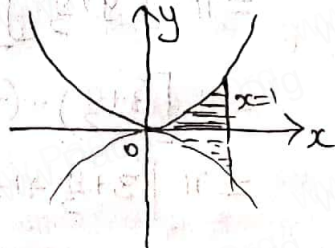
பயிற்சி 9.9

1) $y=2x^2$, $y=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தை x அச்சை லொதுத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமையை காண்க.

$$y=2x^2$$

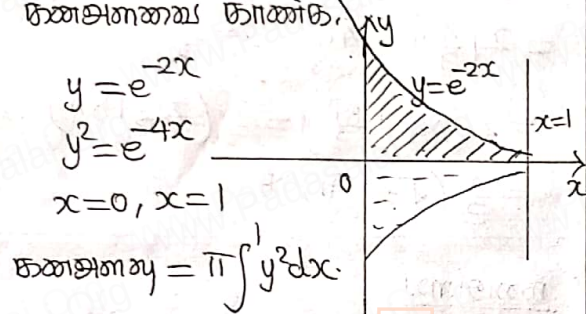
$$y=0 \Rightarrow x=0$$

$$x=1$$



$$\begin{aligned}
 \text{கனஅளவு } V &= \pi \int_0^1 y^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 4x^4 dx \\
 &= 4\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\
 &= \frac{4\pi}{5} [1-0] \\
 &= \frac{4\pi}{5} \text{ க.அ.}
 \end{aligned}$$

2) $y=e^{-2x}$ $y=0$, $x=0$ மற்றும் $x=1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x அச்சை லொடுத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திட்டுஸாருகின் கனஅளவை காண்க.

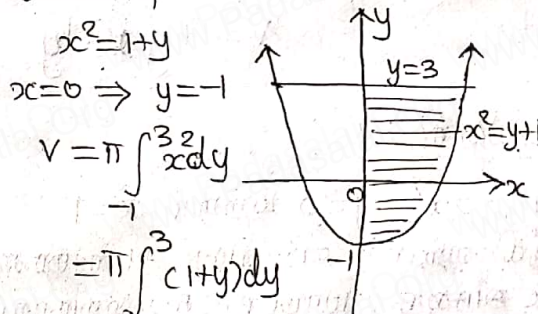


$$\text{கனஅளவு} = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 e^{-4x} dx \\
 &= \pi \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4} [e^{-4} - e^0] \\
 &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-4}) \text{ க.அ.}
 \end{aligned}$$

3) $x^2=1+y$ மற்றும் $y=3$

ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை y அச்சை லொடுத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திட்டுஸாருகின் கனஅளவு காண்க.



$$V = \pi \int_{-1}^3 x^2 dy$$

$$= \pi \int_{-1}^3 (1+y) dy$$

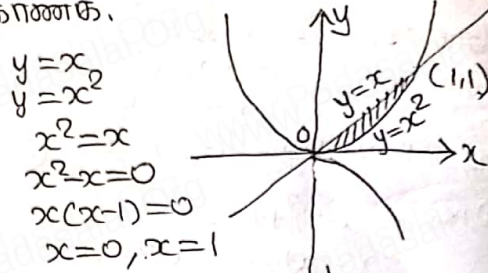
$$= \pi \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^3$$

$$= \pi \left[\left(3 + \frac{9}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \pi \left[3 + \frac{9}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right] = \pi \left[4 + \frac{8}{2} \right] = 8\pi \text{ க.அ.}$$

(18)

4) $y=x$ மற்றும் $y=x^2$ ஒன்றை வளைவுகளுக்காக அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு R எனில், R ஐ x அச்சை லொடுத்து 360° சுழற்றுவதால் உருவாகும் திட்டுஸாருகின் கனஅளவை காண்க.



$$\text{கனஅளவு} = \pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx$$

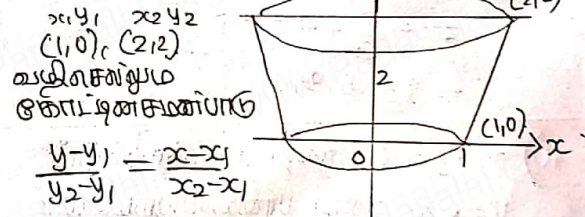
$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{5-3}{15} \right] = \frac{2\pi}{15} \text{ க.அ.}$$

5) ஒரு தொன்குஸன் ஆனது குதர்வட்ட வடிவின் கிடைக்கண்டம் வடிவிலிருந்து (புடக்கியிருக்கவாறு) அதன் கனஅளவை தொன்குஸியிடல் டிரம் காண்க.



$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-1}{2-1}$$

$$\frac{y}{2} = x-1$$

$$\frac{y}{2} + 1 = x$$

$$x = \frac{y+2}{2}$$

$$\text{கனஅளவு} = \int_0^2 \pi x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{y+2}{2} \right)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(y+2)^3}{3} \right]_0^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{12} [(2+2)^3 - 2^3] \\
 &= \frac{\pi}{12} [64 - 8] = \frac{\pi 56}{12 \cdot 3} \\
 &= \frac{14\pi}{3} \text{ க.அ}
 \end{aligned}$$

6. ஒரு தாழ்ப்புண்ணியானது நீர்வட்ட நினைம் வடிவில் உள்ளது. இந்த நீர்வட்ட நினைமத்தைப் பெற முதலச்சின் நீளம் 20 மீட்டர் குற்றச்சின் நீளம் 10 மீட்டர் கொண்டு நீர்வட்டத்தைச் சூழ்ந்து வளைந்தும் தாழ்ப்புண்ணியின் கனஅளவை மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

$$2a = 20$$

$$a = 10$$

$$a^2 = 100$$

$$2b = 10$$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

நீர்வட்ட சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{100}$$

$$y^2 = \frac{25}{100} (100 - x^2)$$

கனஅளவு = 2 (சூழ்ந்து வளைந்தும் 2 மீட்டர் கனஅளவு)

$$= 2 \int_0^{10} \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{10} \frac{1}{4} (100 - x^2) dx$$

$$= \frac{2\pi}{4} \left[100x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(1000 - \frac{10^3}{3}) - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2000}{3} \right]$$

$$= \frac{1000\pi}{3} \text{ க.அ}$$

6. காந்தத்தையன்
மீட்டர் மாவட்டம்

(19)

ச.கா. 9.69

$$y = \log x, y = 0, x = 0, y = 2.$$

அடைபடும் பரப்பை y அச்சைப் பொறுத்து சூழ்ந்து வளைந்தும் 2 மீட்டர் கனஅளவு மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

$$y = \log x$$

மீட்டர் கனஅளவு

$$e^y = x$$

$$x^2 = e^{2y}$$

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 e^{2y} dy$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} [e^4 - e^0]$$

$$= \frac{\pi}{2} [e^4 - 1] \text{ க.அ}$$

4 மீட்டர் கனஅளவில் $x^2 = e^y$ என எடுத்துக்கொண்டு 2 மீட்டர் கனஅளவு மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

ச.கா. 9.21

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$f(\pi - x) = \frac{1}{1 + \sin(\pi - x)} = f(x)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} [\tan x - \sec x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} [(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$$

$$= \frac{\pi}{2} [(0 - 1) - (0 - 1)] = \frac{\pi}{2} (2)$$

$$= \pi \text{ (4 மீட்டர் கனஅளவில் } \pi \text{ க.அ 2 என எடுத்துக்கொண்டு 2 மீட்டர் கனஅளவு மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.)}$$

வணக்க நெடு சமண்பாட்டினர் வயிலாச

ചിത്രം (ORDER) ലാറ്റിനും 419

ஒரு யணாக்ரகஞ் சுண்ணாம்புப்
காணப்படும் திக் உயர்ந்த யணாக்
ரகஞ்சின் வரிசையே அச்சுண்ணாம்பு
வரிசை (order) ஆகும்.

41.9 (DEGREE)

ஒரு வகைகளாக இரு சமண்பாட்டை
மல்லுதுப்பு கதாவை வடிவில் எடுத்த
இயலுமையில், அச்சமண்பாட்டில்
கதாவும் மிக உயர்ந்த வரிசை
உடைய வகைகளாக இருக்கின்றன
படியே அச்சமண்பாட்டின் படி
என்பதும்.

* ஒரு வகைக்கெடு சமன்பாட்டை
மிகையாக வரிசை கொண்டு வகைக்கெடு
வை முதன்மை அடிப்படையில் கொண்டு
பயன்படுத்தி கோவை சமன்பாட்டை
எடுத்த உதாரணத்தில் வை வரிசை அச்சுமண்
-பாட்டின் படியை வகையாக்கி
முடியாது

பயிற்சி 10.1)

1. பின்வரும் உணவுகளுக்கு சமன்பாடுகள்
ஆவ்வளவு அளவின் வரிசை மற்றும் 119
(கிருங்குமாராஸ்) ஆலியவற்றை காண்க.

ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right) + xy = \cot x$

ചാിന്നാഴ=1
പിറ്റ =1

$$(ii) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{2/3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{2/3} = 3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4$$

கனபுத்த

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \left(3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4\right)^3$$

ചരിത്രം = 3
പുറം = 2

$$(iii) \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x \sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\text{ചരിത്രം} = 2$$

இச்சுண்பாட்டை அநுசூலிய மனநிலைக்கு
நகாண்டு பல்புறப்புகாணை சுண்பாடாக
எடுத இயலாது எனவே

படி வகுப்புகள் கட்டிடத்தில்.

$$(iv) \sqrt{\frac{dy}{dx}} - 4 \frac{dy}{dx} - 7x = 0$$

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 4 \frac{dy}{dx} + 7x$$

வர்க்கப்படுத்த

$$\frac{dy}{dx} = \left(4 \frac{dy}{dx} + 7x \right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 56x\frac{dy}{dx} + 49x^2$$

$$16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 56x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + 49x^2 = 0$$

ചാക്കിട = 1
 119 = 2

$$(v) \quad y \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 = x$$

ചരിത്ത = 1
 പല = 4

$$(vi) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

உரிக்கப்படுத்த

$$(x^2)^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

ചിരിയ്ക്ക = 2
 ലഗ് = 2

$$(vii) \left(\frac{dz}{dx^2} \right)^3 \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$$

வாங்கப் படுத்த

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ചരിത്രം = 2 $\Rightarrow$ $119 = 6$

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2} = xy + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

↪ வரிசை=2

இதை ஒரு பல்படிப்படுகாணவ
யாக எடுத்த இயலாது.
(வகைகளெல்லாம்)

படி = வகையறுக்கப்படவில்லை.

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

x ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையிட

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 5\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

↪ வரிசை=3
படி=1

(x) $x = e^{xy \frac{dy}{dx}}$

இருபுறமும் டெக்ரை எடுக்க

$\log x = xy \left(\frac{dy}{dx}\right)$

↪ வரிசை=1
படி=1

(புத்தகவிடை தவறு)

வகைகள் எடுக்க சமன்பாடுகளை
வகைப்படுத்தல்

* ஒரே ஒரு சமன்பாட்டின்

ஸ்பாஸுத்து ஆனது அந்தக்
கோடிட்ட சார்புகளின் சாதாரண
வகைகளைக் கொண்டு வகைகளைக்
சமன்பாடு சாதாரண வகைகளைக்
சமன்பாடு எனப்படும்

* இதே போல பகுதிவகைகளுக்கு
களை டெக்ரை கொண்டு
பகுதி வகைகளைக் சமன்பாடு எனப்படும்.

வகைகளைக் சமன்பாட்டின் உருவாக்கம்

பயிற்சி.10.2

1) பின்வரும் இயற்பியல் சூழ்நிலைகள்
ஆய்வொன்றையும், வகைக்கொடு
சமன்பாடாக எடுத்துக்.

அ) ரேடியம் சிதைவுறும் வீதமானது
காணப்படும் அளவு ஏ க்கு
நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

t நேரத்தில் ரேடியத்தின் அளவு
Q என்க

$\frac{dQ}{dt} \propto Q$

$\frac{dQ}{dt} = kQ$ (k ஒரு மாறிலி)

ii) ஒரு நகரத்தின் மக்கள்தொகை P ஆனது
மக்கள்தொகை மற்றும் 5,00,000 க்கும்
மக்கள் தொகைக்கும் உள்ள வேறுபாடு
ஆகியவற்றை ஸ்பாஸுக்கி கிடைக்கும்
மூலப்பிடித்த நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

t நேரத்தில் மக்கள்தொகை P

மாறுமீதம் $\propto P(5,00,000 - P)$

$\frac{dP}{dt} \propto P(5,00,000 - P)$

$\frac{dP}{dt} = kP(5,00,000 - P)$

iii) ஒரு ஸ்பாஸுத்தின் வையப்பதிவை T ஆய்
ஸ்பாஸுத்து ஆகி அடுத்தும் P-ன்
மாறுமீதமானது, ஆகி அடுத்தத்திற்கு
நேர்விகிதத்திலும், வையப்பதிவின்
வர்க்கத்திற்கு நேர்விகிதத்திலும்
உள்ளது.

வையப்பதிவை T ஆ

ஸ்பாஸுத்து P மாறுமீதம் $\propto \frac{P}{T^2}$

$\frac{dP}{dT} \propto \frac{P}{T^2}$

$\frac{dP}{dT} = \frac{kP}{T^2}$

(t ஐ ஸ்பாஸுத்து என புத்தகவிடையில்
கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $\frac{dP}{dT}$ தவறு)

iv) ஒரு சோயியல் தொகைக்கு ஒரு
வகுப்பிற்கு வகுப்புகளும் 8% வட்டி
தொகையானது தொடர்ச்சியாக

அசையுடன் சேர்க்கப்படுகிறது. மேலும்
மற்றொரு முதலீட்டிலிருந்து ஆய்வொரு
ஆண்டும் கிடைக்கும் வரவு ₹400
இத் தொகையுடன் தொடர்ச்சியாக
சேர்க்கப்படுகிறது.

t நேரத்தில் தொகை x என்க

$\frac{dx}{dt} \propto x$

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad k = 8\% = \frac{8}{100}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8}{100} x$$

400 ரொகை வட்டாவட்டம்
சொர்க்கப்படுகிறது.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{28}{100} x + 400$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{25} + 400,$$

2) ஒரு கோளவடிவ மைதந்தி.
ஆனது அதன் வளைபரப்பின்
மாறுகீதத்திற்கு ஒரேவிகிதத்தில்
ஆவியாகிறது. மைதந்தியின்
ஆரத்தின் மாறுகீதத்தை 2-ம் அளவில்
வளைகளுக்கு சமன்பாட்டை 2-வாங்குக.

7 அளவு ஆரத்தைய கோளவடிவ
மைதந்தியின் கனஅளவு V என்க
வளைபரப்பு 3 என்க

கனஅளவு மாறு $\propto$ வளைபரப்பு
விதம் (கூறகிறது)

$$\frac{dV}{dt} \propto r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \propto (4 \pi r^2)$$

$$\frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = -k(4\pi r^2)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^2}{r^2} k$$

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

வளைகளுக்கு சமன்பாட்டை

2-வாங்குக.

பயிற்சி 10.3

1. ஒரு தளத்தில் (i) ஒரேகூத்து
அல்லாத ஒரேகூகோடுகள் (ii)
கிடைமட்டம் அல்லாத ஒரேகூகோடுகள்
ஆகிய ரொகப்புகளின் வளைகளுக்கு
சமன்பாடுகளை காண்க.

(i) ரொகூத்து அல்லாத ஒரேகூகோடுகள்
ஒரேகூகோடு ரொகூப்பின் சமன்பாடு

$$ax + by + c = 0$$

(3)

இங்கு $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

a, b என்பன இரு மாறிலிகள் 2-ம் அளவு
(c இல்லாமலும் இருக்கலாம்)

இருகூறு வளைகூத்து
 x ஐ ரொகூத்து

$$ax + by' = 0$$

$$y' = -\frac{a}{b}$$

$b=0$ எனில்.
ரொகூத்து
கோடு கிடைக்கும்

$$y'' = 0 \quad \text{அதாவது} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 //$$

(ii) கிடைமட்டம் அல்லாத ஒரேகூகோடு
ரொகூப்பின் சமன்பாடு

$$ax + by = c \quad a \neq 0$$

y ஐ ரொகூத்து வளைகூது

$$a \frac{dx}{dy} + b = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a}$$

$a=0$ எனில்
கிடைமட்டகோடு
கிடைக்கும்

மீண்டும் y ஐ ரொகூத்து வளைகூது

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

2) $x^2 + y^2 = r^2$ எனும் வட்டத்தை இரண்டு
அல்லாத ஒரேகூகோடுகளின் வளைகூகளுக்கு
சமன்பாட்டை காண்க.

$x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்திற்கு
வளைபரப்பும் ஒரேகூகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \quad \text{--- (1)}$$

(1) மட்டும் மாறிலி மாறுகூகூது
 r ரொகூக்கப்பட்ட மாறிலி மாறுகூது

ஒருகூறு x ஐ ரொகூது வளைகூது

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\Rightarrow y = \frac{dy}{dx} x \pm r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y - x \frac{dy}{dx} = \pm r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

வர்க்கப்படுத்த

$$\left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 = r^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

3) ஆதிப்புள்ளி வழியாக ரொகூது,
மைதந்தை x அச்சின் மீது ரொகூட்ட அல்லாத
வட்டங்களின் வளைகூகளுக்கு சமன்பாட்டை
காண்க.

ஆதிப்புள்ளி வழி ரொகூது மைதந்தை
($a, 0$) மைதந்தை வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2 \quad (4)$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad (1)$$

x ஐ ஸ்பாடுத்து
வகையிட



a மட்டுமே மாறாததால்
மாறிலி

$$2(x-a) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad a - \text{மாறாததால்}$$

$$x-a = -y \frac{dy}{dx}$$

$$a = x + y \frac{dy}{dx}$$

$$(1) \Rightarrow (-y \frac{dy}{dx})^2 + y^2 = (x + y \frac{dy}{dx})^2$$

$$y^2 (\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = x^2 + y^2 (\frac{dy}{dx})^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

4) ரெக்டங்குலம் $4a$ மீட்டும் x அச்சுக்கு
இணையான அச்சுக்களை கொண்டு,
பரவணைய நொதுப்பின் வகைக்கெடு
சமன்பாட்டை காண்க.

பரவணைய நொதுப்பின்
சமன்பாடு

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

h, k மட்டுமே மாறாததால் மாறிலி
 x ஐ ஸ்பாடுத்து வகையிட

$$2(y-k)y' = 4a(1)$$

$$(y-k)y' = 2a \quad (2)$$

மீண்டும் x ஐ ஸ்பாடுத்து வகையிட

$$(y-k)y'' + y' y' = 0$$

$$(y-k) = \frac{-y'^2}{y''}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{-y'^2}{y''} y' = 2a$$

$$-y'^3 = 2ay''$$

$$2ay'' + y'^3 = 0$$

5) சூன (0, -1) மீட்டும் y அச்சு
அச்சாகவும் கொண்டு பரவணைய
குறப்பத்தின் வகைக்கெடு சமன்பாட்டை
காண்க

பரவணைய நொதுப்பின் சமன்பாடு

$$(x-0)^2 = 4a(y+1) \quad (1)$$

a மட்டுமே மாறாததால் மாறிலி

x ஐ ஸ்பாடுத்து வகையிட

$$2x = 4a \frac{dy}{dx} \quad x = 2ay'$$

$$\frac{x}{y'} = 2a$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = 2\left(\frac{x}{y'}\right)(y+1)$$

$$\frac{x^2 y'}{x} = 2y+2$$

$$xy' - 2y - 2 = 0$$

6) ஆதிபுள்ளியை மையமாகவும் ரெக்டங்குலம்
 y அச்சின் மீது குவியங்கனையும் கொண்டு
நீள்வட்ட நொதுப்பின் வகைக்கெடு
சமன்பாட்டை காண்க.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

a, b மாறாததால் மாறிலிகள்

x ஐ ஸ்பாடுத்து வகையிட

$$\frac{2x}{b^2} + \frac{2yy'}{a^2} = 0$$

$$2 \div \frac{x}{b^2} + \frac{yy'}{a^2} = 0 \quad (2)$$

மீண்டும் x ஐ ஸ்பாடுத்து வகையிட

$$\frac{1}{b^2} + \frac{yy'' + y'y'}{a^2} = 0 \quad (3)$$

$\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}$ ஆகிக்கிட

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x & yy' & 0 \\ 1 & yy'' + y'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2(0-0) - y^2(0-0) + 1(xy y'' + y'^2 - yy') = 0$$

$$xy y'' + xy'^2 - yy' = 0$$

7) $y = Ae^{8x} + Be^{-8x}$ எனும் சமன்பாட்டை
கொண்ட வகையற்ற குறப்பத்தின்
வகைக்கெடு சமன்பாட்டை காண்க. இங்கு
 A, B என்ன இரு மாறிலிகள்.

௧௧ லபா. வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = 8Ae^{8x} - 8Be^{-8x}$$

மீண்டும் ௧௧ லபா. வகையிட

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 64Ae^{8x} + 64Be^{-8x} \\ &= 64(Ae^{8x} + Be^{-8x})\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 64y$$

8). $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிப்பிடப்படும் வளைவறையின் வகைகளுக்கு சமன் பட்டை காண்க.

$$xy - x^2 = ae^x + be^{-x}$$

a, b மாறாத மாநிலிகள்

௧ லபா. வகையிட

$$xy' + y - 2x = ae^x - be^{-x}$$

மீண்டும் ௧ லபா. வகையிட

$$xy'' + y' + y' - 2 = ae^x + be^{-x}$$

$$xy'' + 2y' - 2 = xy - x^2$$

$$xy'' + 2y' + x^2 - xy - 2 = 0$$

சாதாரண வகைகளுக்கு சமன்பாடுகளின் தீர்வு

பயிற்சி 10.4

① மின்னும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் அதற்கெதிரே தொடுக்கப்பட்ட வகைகளுக்கு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக் காட்டுக.

$$i) y = 2x^2 ; xy' = 2y$$

$$y = 2x^2 \quad \text{--- ①}$$

௧ லபா. வகையிட

$$y' = 4x$$

௧ லபா. வகையிட

$$xy' = 4x^2$$

$$xy' = 2(2x^2)$$

$$xy' = 2y$$

⑤

$$ii) y = ae^x + be^{-x} ; y'' - y = 0$$

௧ லபா. வகையிட (கிடுகிறது)

$$y' = ae^x - be^{-x}$$

$$y'' = ae^x + be^{-x}$$

$$y'' = y$$

$$y'' - y = 0$$

2). $y = e^{mx}$ எனும் சாய்வு தொடுக்கப்பட்ட வகைகளுக்கு சமன்பாட்டின் தீர்வாக அமையுமாறு m-ன் மதிப்புகளை காண்க.

$$i) y' + 2y = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$y = e^{mx}$$

௧ லபா. வகையிட

$$y' = e^{mx}(m)$$

$$y' = my$$

$$y' - my = 0 \quad \text{--- ②}$$

①, ② லபா. வகையிட

$$-m = 2$$

$$m = -2$$

$$ii) y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\Rightarrow y - my = 0$$

$$y' = my$$

௧ லபா. வகையிட

$$y'' - my' = 0 \Rightarrow y'' = mmy$$

$$y'' = m^2y$$

$$\Rightarrow m^2y - 5my + 6y = 0$$

$$y(m^2 - 5m + 6) = 0$$

$$y = 0, m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m = 2, 3,$$

③ தகையும் ரூபாளியில் ஒரு வளைவறையின் தொடுகாட்டின் சாய்வு அப்புள்ளியின் y அச்ச தொலைவின் 4 மடங்கின் தகையத்தியாகும். மேலும் வளைவறை (2,5) வகைய ரெஸ்கிற்றுகளில் வளைவறையின் சமன்பாட்டை காண்க.

$$\text{சாய்வு} = \frac{1}{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y}$$

$$1y dy = dx$$

மீதானதையிட $\int 1y dy = \int dx$

$$\frac{2 \times y^2}{2} = x + C$$

$$2y^2 = x + C \quad \text{--- ①}$$

இது (2,5) மூலம் செல்கிறது

$$\text{①} \Rightarrow 2(5)^2 = 2 + C$$

$$50 - 2 = C$$

$$C = 48$$

எதனையானது சமன்பாடு

$$2y^2 = x + 48$$

4). $y = e^{-x} + mx + n$ என்பது

$$e^x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) - 1 = 0 \text{ எனும்}$$

வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

$$y = e^{-x} + mx + n$$

m, n மாறிலிகள்

இருகூறையுள்ள x ஐ dx வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(-1) + m$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 1$$

$$e^x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) - 1 = 0$$

எனக்காட்டுகப்பட சார்பு வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

5). $y = ax + \frac{b}{x}$, $x \neq 0$ என்பது

$x^2 y'' + xy' - y = 0$ எனும் வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

$$y = ax + \frac{b}{x} \quad \text{--- ①}$$

a, b இரு மாறிலிகள் என்பதை x ஐ dx வகையிட

$$y' = a + b \left(-\frac{1}{x^2} \right) \quad \text{--- ②}$$

மீண்டும் x ஐ dx வகையிட

$$y'' = 0 + \frac{2b}{x^3} \quad \text{--- ③}$$

$$2b = x^3 y''$$

$$b = x^3 y'' / 2$$

$$\text{⑥} \Rightarrow y' = a - \frac{x^2 y''}{2} \times \frac{1}{x^2}$$

$$y' = a - \frac{x y''}{2}$$

$$y' + \frac{x y''}{2} = a$$

$$\text{①} \Rightarrow y = \left(y' + \frac{x y''}{2} \right) x + \frac{x^2 y''}{2x}$$

$$y = x y' + \frac{x^2 y''}{2} + \frac{x^2 y''}{2}$$

$$y = x y' + \frac{x^2 y''}{2}$$

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

மாற்றுகூறையுள்ள

(1, 2, 3)

விதித்து a, b ன்

எனக்காட்டுக

மூலம்

$$\begin{vmatrix} y & x & \frac{1}{x} \\ y' & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ y'' & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$y \left(\frac{2}{x^3} - 0 \right) - x \left(\frac{y' \cdot 2}{x^3} + \frac{y''}{x^2} \right) + \frac{1}{x} (0 - y'') = 0$$

$$\frac{2y}{x^3} - \frac{2y'}{x^2} - \frac{y''}{x} - \frac{y''}{x} = 0$$

$$-\frac{2y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} + \frac{2y}{x^3} = 0$$

$$-\frac{x^3}{2} \text{ ஆல் பெருக்க } x^2 y'' + x y' - y = 0$$

6) $y = a e^{-3x} + b$ என்பது $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = 0$

எனும் வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக இங்கு a, b ஏதேனும் இரு எதிர்த்தர மாறிலிகள்

$$y = a e^{-3x} + b$$

x ஐ dx வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = a(-3) e^{-3x} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -3a e^{-3x} \quad \text{--- ①}$$

மீண்டும் x ஐ dx வகையிட

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 9a e^{-3x}$$

2) ரெக்டிங்குலா க விரும் வான்குடை நிதையயின் திசையகம்
 V ஆனது $V \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$ எனும் சமன்பாட்டை நிதைய ரெய்கிறது,
 இங்கு g மற்றும் k என்பன மாநிலிகள் ஆகும், ஆரம்பநிலையில் V
 மற்றும் x ஆகிய கிரண்டும் யுக்கியமானால் V ஓ x ன் சார்பாக காண்க.

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$$

$$\frac{v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)} = g dx$$

$-\frac{2}{k^2}$ ஆல் இருபுறமும் ரெருக்க

$$\frac{-\frac{2v}{k^2} dv}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2} dx$$

ரெண்கயில் $\int \frac{-\frac{2v}{k^2} dv}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2} \int dx$

$$\log \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2} x + C \quad \text{--- (1)}$$

ஆரம்ப நிலையில் $v=0, x=0$

$$\text{(1)} \Rightarrow \log 1 = 0 + C$$

$$\boxed{C=0}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \log \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2gx}{k^2} + 0$$

taking antilog ரெருக்க

$$1 - \frac{v^2}{k^2} = e^{-\frac{2gx}{k^2}}$$

$$1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}} = \frac{v^2}{k^2}$$

$$k^2 \left(1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right) = v^2 //$$

3) ஒரு வண்ணவற்றயின் சாய்வு $\frac{y-1}{x^2+x}$ ஆகும் வண்ணவற்ற $(1,0)$

எனும் யுள்ளி வுதிச் ரெய்யுமணில் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x}$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} dx$$

(Using partial fraction)

$$\frac{dy}{y-1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

எதிர்த்தகவல்:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\log y - 1 = \log x - \log(x+1) + \log c$$

$$\log(y-1) = \log \frac{xc}{x+1}$$

Using anti log எதிர்த்தகவல்

$$y-1 = \frac{cx}{x+1} \quad \text{--- (1)}$$

இது (1,0) வரது எதிர்த்தகவல்

$$\therefore 0-1 = \frac{c}{1+1}$$

$$-1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -2$$

$$\text{(1)} \Rightarrow y-1 = \frac{-2x}{x+1}$$

$$y = 1 - \frac{2x}{x+1}$$

$$= \frac{x+1-2x}{x+1}$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

4) பின்வரும் வகைதெடுக சமன்பாடு 1+x // கண்டு பிடிக்க.

$$\text{ii) } \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integrating

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin^{-1} y = \sin^{-1} x + c$$

$$\text{(ii) } y dx + (1+x^2) \tan^{-1} x dy = 0$$

$$y dx = -(1+x^2) \tan^{-1} x dy$$

$$\frac{dx}{(1+x^2) \tan^{-1} x} = -\frac{dy}{y}$$

take $v = \tan^{-1} x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$dv = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$$

$$\text{Integrating } \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\log v = -\log y + \log c$$

$$\log v + \log y = \log c$$

$$\log vy = \log c$$

taking anti log

$$vy = c$$

$$y \tan^{-1} x = c //$$

(10)

$$(iii) \sin \frac{dy}{dx} = a, y(0) = 1$$

$$\sin \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} a$$

$$dy = \sin^{-1} a \, dx$$

$$\text{Integrating } \int dy = \sin^{-1} a \int dx$$

$$y = (\sin^{-1} a) x + C \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{When } x=0, y=1 \quad (1) \Rightarrow 1 = \sin^{-1} a (0) + C$$

$$\boxed{C=1}$$

$$(1) \Rightarrow y = (\sin^{-1} a) x + 1$$

$$\frac{y-1}{x} = \sin^{-1} a$$

$$\sin\left(\frac{y-1}{x}\right) = a //$$

$$(iv) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^3 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y + x^3 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + e^x) e^y$$

$$e^{-y} dy = (x^3 + e^x) dx$$

$$\text{Integrating } \int e^{-y} dy = \int (x^3 + e^x) dx$$

$$-e^{-y} = \frac{x^4}{4} + e^x + C_1$$

$$e^x + e^{-y} + \frac{x^4}{4} = -C_1$$

$$e^x + e^{-y} + \frac{x^4}{4} = C$$

$$(v) (e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$$

$$(e^y + 1) \cos x \, dx = -e^y \sin x \, dy$$

$$\frac{\cos x \, dx}{\sin x} = -\frac{e^y}{e^y + 1} dy$$

$$\text{Integrating } \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = -\int \frac{e^y}{e^y + 1} dy$$

$$\log \sin x = -\log(e^y + 1) + \log C$$

$$\log \sin x + \log(e^y + 1) = \log C$$

$$\log \sin x (e^y + 1) = \log C$$

$$\text{taking anti-log } (e^y + 1) \sin x = C$$

$$(vi) (y \, dx - x \, dy) \cot\left(\frac{x}{y}\right) = n y^2 \, dx$$

$$\frac{y \, dx - x \, dy}{y^2} \cot \frac{x}{y} = n \, dx$$

(11)

$$\cot\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = n dx$$

Integrating $\int \cot\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = n \int dx$

$$\log \sin \frac{x}{y} = nx + C$$

taking antilog $\sin\left(\frac{x}{y}\right) = e^{nx+C}$

(vii) $\frac{dy}{dx} - x\sqrt{25-x^2} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{25-x^2}$$

$$dy = x\sqrt{25-x^2} dx$$

put $25-x^2 = t$

$$-2x = \frac{dt}{dx}$$

$$x dx = \frac{dt}{-2}$$

$$\therefore dy = \sqrt{t} \left(\frac{dt}{-2}\right)$$

Integrating $\int dy = \int t^{1/2} dt$

$$+2y = -\frac{t^{3/2}}{3/2} + 2C$$

multiply both sides
by $\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}(2y) = -t^{3/2} + \frac{3}{2}(2C)$$

$$3y = -(25-x^2)^{3/2} + 3C$$

(viii) $x \cos y dy = e^x (x \log x + 1) dx$

$$\cos y dy = e^x \frac{(x \log x + 1)}{x} dx$$

$$\cos y dy = e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= (e^x \log x + e^x \frac{1}{x}) dx$$

$$= \log x d(e^x) + e^x d(\log x)$$

$$\cos y dy = d(e^x \log x)$$

Integrating

$$\int \cos y dy = \int d(e^x \log x)$$

$$\sin y = e^x \log x + C$$

G. Karthikeyan
Thiruvananthi

$$\boxed{d(uv) = u dv + v du}$$

(ix) $\tan y \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$$\tan y \frac{dy}{dx} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2 \cos x \cos y$$

$$\frac{\tan y dy}{\cos y} = 2 \cos x dx$$

$$\sec y \tan y dy = 2 \cos x dx$$

Integrating

$$\int \sec y \tan y dy = \int 2 \cos x dx$$

$$\sec y = 2 \sin x + C$$

(12)

$$(x) \quad \frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{Let } x+y=z$$

diff w. r to x

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \tan^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \tan^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = \sec^2 z \Rightarrow \frac{dz}{\sec^2 z} = dx$$

$$\cos^2 z dz = dx$$

$$\left(\frac{1 + \cos 2z}{2} \right) dz = dx$$

$$\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{2} \sin 2z \right] = x + C$$

$$z = x+y$$

$$\frac{1}{2} \left[(x+y) + \frac{1}{2} \sin 2(x+y) \right] = x + C$$

$$\frac{1}{2} \left[(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x+y) \cos(x+y) \right] = x + C$$

$$\frac{1}{2} \left[(x+y) + \sin(x+y) \cos(x+y) \right] = x + C$$

(Homogeneous Differential Equation)

சமவத்தான வகைகளைக் காண்பதற்கு

(Exercise 10.6) பயிற்சி 10.6

① பின்வரும் சமவத்தான, சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$1) \left[x + y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx = x \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$$

$$\frac{x + y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவத்தான வகைகளைக் காண்பதற்கு
put $y = vx$ எனப்பிடுக

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \frac{x + vx \cos vx}{x \cos vx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{x(1 + v \cos v)}{x \cos v} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1 + v \cos v}{\cos v} - v = x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1 + v \cos v - v \cos v}{\cos v} = x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{\cos v} = x \frac{dv}{dx}$$

(15)

$$\frac{dx}{x} = \cos v dv$$

ஒதுகக்கூடிய

$$\int \cos v dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

Replace v by $\frac{y}{x}$

$$\sin \frac{y}{x} = \log|x| + \log|C|$$

Log எடுத்துக்கொண்டு

$\log C$	$\log x $
$\log x$	$\log x $

$$2) (x^3 + y^3) dy - x^2 y dx = 0$$

$$(x^3 + y^3) dy = x^2 y dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad \text{--- ①}$$

put $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\text{①} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 vx}{x^3 + v^3 x^3}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^3 v}{x^3(1 + v^3)}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v^4}{1 + v^3}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1 + v^3}$$

$$\frac{1 + v^3}{v^4} dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^4} + \frac{1}{v}\right) dv = -\frac{dx}{x} \quad \text{--- ②}$$

integrating $\int v^{-4} dv + \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \log|v| = -\log|x| + \log|C|$$

$$\log|v| + \log|C| - \log|x| = \frac{1}{3v^3}$$

$$\log\left|\frac{vx}{C}\right| = \frac{1}{3v^3}$$

Replace $v = \frac{y}{x}$

$$\log\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{1}{3\frac{y}{x}} = \frac{x}{3y}$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{x}{3y}$$

taking anti log

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{\frac{x}{3y}}$$

$$y = \pm C e^{\frac{x}{3y}}$$

Thus.

$$y = C e^{\frac{x}{3y}}$$

where $C = \pm C$

$$\text{③ } y e^{\frac{x}{y}} dx = (x e^{\frac{x}{y}} + y) dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x e^{\frac{x}{y}} + y}{y e^{\frac{x}{y}}} \quad \text{--- ①}$$

ஒதுகக்கூடிய வ.ச.

put $x=vy$

$$\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{x}{y} = v$$

① ⇒

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{vy e^{vy/y} + y}{y e^{vy/y}}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{y(v e^v + 1)}{y e^v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{v e^v + 1}{e^v} - v$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{v e^v + 1 - v e^v}{e^v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{1}{e^v}$$

$$e^v dv = \frac{dy}{y}$$

Integrating $\int e^v dv = \int \frac{dy}{y}$

$$e^v = \log|y| + \log|C|$$

$$e^{xy} = \log|cy|$$

$$4) 2xy dx + (x^2 + 2y^2) dy = 0$$

$$2xy dx = -(x^2 + 2y^2) dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^2 - 2y^2}{2xy} \quad \text{--- ①}$$

put $x=vy$

$$\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

$$\text{①} \Rightarrow v + y \frac{dv}{dy} = \frac{-(v^2 y^2 + 2y^2)}{2vy^2}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{-y^2(v^2 + 2)}{2vy^2}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-v^2 - 2}{2v} - v$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-v^2 - 2 - 2v^2}{2v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-(3v^2 + 2)}{2v}$$

$$\text{--- ②} \quad \frac{2v dv}{(3v^2 + 2)} = -\frac{dy}{y}$$

$$\text{Integrating} \quad \frac{1}{3} \int \frac{6v dv}{(3v^2 + 2)} = - \int \frac{dy}{y}$$

$$\log|3v^2 + 2| = -3 \log|y| + \log|C|$$

$$\log|3v^2 + 2| + 3 \log|y| = \log|C|$$

$$\log|(3v^2 + 2)y^3| = \log|C|$$

put $v = \frac{x}{y}$ and taking anti log

$$(3 \frac{x^2}{y^2} + 2) y^3 = |C|$$

$$\begin{aligned} |3x^2 y + 2y^3| &= |C| \\ 3x^2 y + 2y^3 &= \pm C \\ 3x^2 y + 2y^3 &= C \end{aligned}$$

$$(y^2 - 2xy) dx = (x^2 - 2xy) dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு ஈயஸ்ஜத்தான வ.ஈ

put $y=vx$ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 x^2 - 2xvx}{x^2 - 2xvx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2(v^2 - 2v)}{x^2(1 - 2v)}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 2v}{1 - 2v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 2v - v + 2v^2}{1 - 2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 3v}{1 - 2v}$$

$$\frac{1-2v}{3(v^2-v)} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1-2v}{v(v-1)} dv = 3 \frac{dx}{x}$$

Using partial fraction (பகுதி) $\left(-\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}\right) dv = 3 \frac{dx}{x}$ பின்னங்களைப் பிரிப்பதை பயன்படுத்த

Integrating $\int \frac{dv}{v-1} + \int \frac{dv}{v} = -3 \int \frac{dx}{x}$

$$\log|v-1| + \log|v| = -3 \log|x| + \log|c|$$

$$\log|v(v-1)| + 3 \log|x| = \log|c|$$

$$\log|(v^2-v)| + \log|x^3| = \log|c|$$

$$\log|x^3(v^2-v)| = \log|c|$$

taking antilog

$$|x^3(v^2-v)| = |c|$$

putting $v = \frac{y}{x}$

$$|x^3(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x})| = |c|$$

$$\frac{x^3 y^2}{x^2} - \frac{x^3 y}{x} = \pm c$$

$$xy^2 - x^2 y = \pm c$$

$$xy^2 - x^2 y = c$$

where $c = \pm c$

⑥ $x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ --- (1) இது ஒரு ஈயஸ்ஜத்தான வ.ஈ

put $y=vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow x(v + x \frac{dv}{dx}) = vx - x \cos^2 \frac{vx}{x}$$

$$vx + x^2 \frac{dv}{dx} = vx - x \cos^2 v$$

$$x^2 \frac{dv}{dx} = -x \cos^2 v$$

G. Karthikeyan
Thiruvannur DT

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Integrating } \int \sec^2 v dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\tan v = -\log|x| + \log|c|$$

$$\tan v = \log\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\tan\frac{y}{x} = \log\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\text{taking antilog } e^{\tan\frac{y}{x}} = \left|\frac{c}{x}\right|$$

$$xe^{\tan\frac{y}{x}} = \pm c$$

$$\therefore xe^{\tan\frac{y}{x}} = c$$

$$\textcircled{7} (1+3e^{y/x})dy + 3e^{y/x}(1-y/x)dx = 0$$

$$(1+3e^{y/x})dy = -3e^{y/x}(1-y/x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3e^{y/x}(1-y/x)}{1+3e^{y/x}} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவர்க்கமான வ.ச.

$$\text{put } y/x = v \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^{vx} (1-vx)}{1+3e^{vx}}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^v (1-v)}{1+3e^v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^v + 3ve^v}{1+3e^v} - v$$

$$= \frac{-3e^v + 3ve^v - v(1+3e^v)}{1+3e^v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-(3e^v + v)}{3e^v + 1}$$

$$xdv = \frac{-(3e^v + v)}{(3e^v + 1)} dx$$

$$\left(\frac{3e^v + 1}{3e^v + v}\right) dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Integrating } \int \frac{3e^v + 1}{3e^v + v} dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\log|3e^v + v| = -\log|x| + \log|c|$$

$$\log|x(3e^v + v)| = \log|c|$$

$$\text{taking antilog } |3xe^{y/x} + vx| = |c|$$

Replace v by y/x $|3xe^{y/x} + y| = |C| \Rightarrow 3xe^{y/x} + y = \pm C$

$$3xe^{y/x} + y = C \quad \text{--- (1)}$$

when $x=1 \Rightarrow y=0$

$$\Rightarrow 3e^0 + 0 = C$$

$$C = 3$$

$$\Rightarrow 3xe^{y/x} + y = 3 //$$

⑧ $(x^2 + y^2) dy = xy dx$, given $y(1) = 1$

மேலும் $y(x_0) = e$, எனில் x_0 கண்டறியுங்கள்.

$$(x^2 + y^2) dy = xy dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவர்க்கமான வ.ச

put $y = vx$ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{vx}{x^2 + v^2 x^2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 v}{x^2(1 + v^2)} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 v - v^3}{1 + v^2}$$

$$dv \frac{1 + v^2}{v^3} = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^3} + \frac{v}{v^3}\right) dv = -\frac{dx}{x}$$

integrating

$$\int v^{-3} dv + \int \frac{1}{v} dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-2}}{-2} + \log|v| = -\log|x| + \log|C|$$

$$\log\left|\frac{v}{x}\right| = \frac{1}{2v^2}$$

taking antilog, $\left|\frac{v}{x}\right| = e^{\frac{1}{2v^2}}$

Replacing $v = y/x$ $\left|\frac{y}{x}\right| = e^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$y = \pm C e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$y = C e^{\frac{x^2}{2y^2}} \quad \text{--- (1)}$$

given $x=1, y=1$ $\Rightarrow 1 = C e^{\frac{1}{2}}$

$$C = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \quad \text{--- (2)}$$

$$y(x_0) = e$$

$$y = e \Rightarrow e = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x_0^2}{2e^2}}$$

$$e^1 e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x_0^2}{2e^2}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x_0^2}{2e^2}$$

$$\frac{3 \times 3e^2}{2} = \frac{x_0^2}{2}$$

$$x_0^2 = 3e^2$$

$$x_0 = \pm \sqrt{3}e //$$

I இது y ல் ஒருவியது $\frac{dy}{dx} + py = q$ இங்கு p, q எவை x ன் சார்புகள்
 (i) தொகையீட்டு காரணி $IF = e^{\int p dx}$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு
 $y(IF) = \int q(IF) dx + c$

II x ல் ஒருவியது

(i) $\frac{dx}{dy} + px = q$ இங்கு p, q எவை y ன் சார்புகள்.
 (ii) தொகையீட்டு காரணி $IF = e^{\int p dy}$
 (iii) தீர்வு y க்கு $x(IF) = \int q(IF) dy + c$

பயிற்சி 10.7

பின்வரும் ஒருவியல் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க,

① $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$

divide by $\cos x$ $\frac{dy}{dx} + y \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

$p = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, q = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

$\frac{dy}{dx} + py = q$ y ல் ஒருவியது

$IF = e^{\int p dx}$
 $= e^{\int \tan x dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$

solution is

$y(IF) = \int q(IF) dx + c$

$y \sec x = \int \sec x \sec x dx + c$

$y \sec x = \int \sec^2 x dx + c$

$y \sec x = \tan x + c$

$\frac{y}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + c$

multiply by $\cos x$

$y = \sin x + c \cos x$

② $(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1$

divide by $1-x^2$ $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$

$p = \frac{-x}{1-x^2}, q = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} + py = q$ y ல் ஒருவியது

$$\begin{aligned} \text{IF} &= e^{\int p dx} \\ &= e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} \\ &= e^{\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{\log(1-x^2)^{1/2}} \\ &= e^{\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{\log(1-x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\text{IF} = \sqrt{1-x^2}$$

solution is

$$y(\text{IF}) = \int q(\text{IF}) dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2} \sqrt{1-x^2} dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x + C$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$p = \frac{1}{x}, \quad q = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + py = q \quad \text{இது } y \text{ ல் தொல்வது}$$

$$\begin{aligned} \text{IF} &= e^{\int p dx} \\ &= e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} \end{aligned}$$

$$\text{IF} = x$$

solution is

$$y(\text{IF}) = \int q(\text{IF}) dx + C$$

$$yx = \int \sin x (x) dx + C$$

$$xy = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{dv} dx + C$$

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx + C \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$xy = -x \cos x + \sin x + C$$

$$xy + x \cos x = \sin x + C$$

$$x(y + \cos x) = \sin x + C$$

$$\textcircled{4} \quad (x^2+1) \frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{x^2+4}$$

divide by x^2+1

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1} y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$$

$$p = \frac{2x}{x^2+1} \quad q = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} + py = q, \quad \text{இது } y \text{ ல் தொல்வது}$$

$$\text{IF} = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\log(x^2+1)} = x^2+1$$

solution is

$$y(\text{IF}) = \int q(\text{IF}) dx + C$$

$$y(x^2+1) = \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1} dx + C$$

$$= \int \sqrt{x^2+4} dx + C$$

$$y(x^2+1) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} + \frac{2^2}{2} \log|x+\sqrt{x^2+4}| + C$$

$$y(x^2+1) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} + 2 \log|x+\sqrt{x^2+4}| + C$$

$$5) (2x-10y^3)dy + ydx = 0$$

$$ydx = -(2x-10y^3)dy$$

$$y \frac{dx}{dy} = -2x + 10y^3$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2x}{y} + \frac{10y^3}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 10y^2$$

$$P = \frac{2}{y} \quad Q = 10y^2$$

$$\frac{dx}{dy} + Px = Q$$

Thus is linear in x

$$IF = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \log y} = e^{\log y^2} = y^2$$

solution is

$$x(IF) = \int Q(IF) dy + C$$

$$xy^2 = \int 10y^2 (y^2) dy + C$$

$$= 10 \int y^4 dy + C$$

$$= \frac{10 y^5}{5} + C$$

$$xy^2 = 2y^5 + C$$

$$6) x \sin x \frac{dy}{dx} + (x \cos x + \sin x) y = \sin x$$

divide by $x \sin x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} y = \frac{\sin x}{x \sin x}$$

$$P = \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} \quad Q = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \text{This is linear in } y$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} dx}$$

$$= e^{\log(x \sin x)} = x \sin x$$

$$\text{solution is } y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y(x \sin x) = \int \frac{1}{x} (x \sin x) dx + C$$

$$xy \sin x = -\cos x + C$$

$$7) (y - e^{\sin^{-1} x}) \frac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$(y - e^{\sin^{-1} x}) \frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2}$$

(2)

$$y - e^{\sin^{-1}x} = -\frac{dy}{dx} \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{1-x^2} + y = e^{\sin^{-1}x}$$

divide by $\sqrt{1-x^2}$ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad Q = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = e^{\sin^{-1}x}$$

solution is $y(IF) = \int Q(IF) dx + C$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\sin^{-1}x} dx + C$$

$$= \int e^t e^t dt + C$$

$$= \int e^{2t} dt + C$$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2t}}{2} + C$$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2} + C$$

put $\sin^{-1}x = t$
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

③ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x)\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$

$$P = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} \quad Q = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx}$$

$$= e^{\int \frac{2dt}{1-t^2}} = e^{\int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)}}$$

$$= e^{\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt} = e^{\log(1+t) - \log(1-t)}$$

$$= e^{\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} = e^{\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$IF = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} (1-\sqrt{x}) dx + C$$

$$= x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C //$$

G. KARTHIKEYAN
GGHSS
Tirumakottai
Tirunavur dist

(22)

$$(9) (1+x+xy^2) \frac{dy}{dx} + (y+y^3) = 0$$

$$1+x+xy^2 \frac{dy}{dx} = -(y+y^3)$$

$$1+x(1+y^2) = -y(1+y^2) \frac{dx}{dy}$$

$$y(1+y^2) \frac{dx}{dy} + x(1+y^2) = -1$$

divide by $(1+y^2)y$ $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{-1}{y(1+y^2)}$

$P = \frac{1}{y}$ $Q = \frac{-1}{y(1+y^2)}$ This is linear in x

$$IF = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\log y} = y$$

solution is

$$x(IF) = \int Q(IF) dy + C$$

$$xy = \int \frac{-1}{y(1+y^2)} y dy + C$$

$$xy = -\tan^{-1} y + C$$

$$xy + \tan^{-1} y = C$$

$$10) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = \frac{\sin 2x}{\log x}$$

$$P = \frac{1}{x \log x}$$

$$Q = \frac{\sin 2x}{\log x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\log \log x}$$

$$IF = \log x$$

solution is

$$y(IF) = \int Q IF dx + C$$

$$y \log x = \int \frac{\sin 2x}{\log x} \log x dx + C$$

$$y \log x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$y \log x + \frac{\cos 2x}{2} = C$$

$$(11) (x+a) \frac{dy}{dx} - 2y = (x+a)^4$$

divide by $x+a$ $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+a} = (x+a)^3$

$$P = -\frac{2}{x+a} \quad Q = (x+a)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{2}{x+a} dx}$$

$$= e^{-2 \log(x+a)} = e^{\log(x+a)^{-2}}$$

$$= (x+a)^{-2}$$

$$IF = \frac{1}{(x+a)^2}$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y \left(\frac{1}{(x+a)^2} \right) = \int \frac{1}{(x+a)^2} (x+a)^2 dx + C$$

$$y \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2}{2} + C$$

$$2y = (x+a)^2 + 2C(x+a)^2$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} - \frac{3x^2}{1+x^3} y$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3} y = \frac{\sin^2 x}{1+x^3}$$

$$P = \frac{3x^2}{1+x^3} \quad Q = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{3x^2}{1+x^3} dy} = e^{\log(1+x^3)} = (1+x^3)$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \int \frac{\sin^2 x}{1+x^3} (1+x^3) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(13) x \frac{dy}{dx} + y = x \log x$$

divide by x

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$$

$$P = \frac{1}{x} \quad Q = \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$$

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx = \int x \log x dx + C$$

$$xy = \int \frac{x \log x}{u} \frac{dx}{dv} + C$$

$$xy = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx + C$$

$$xy = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$4xy = 2x^2 \log x - x^2 + 4C$$

$$u = \log x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(24)

$$14) x \frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

$$\text{divide by } x \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x \log x$$

$$P = \frac{2}{x} \quad Q = x \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2}$$

$$IF = x^2$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx^2 = \int x \log x \cdot x^2 dx + C$$

$$= \int \log x \cdot \frac{x^3}{3} dx + C \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right.$$

$$= \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx + C \quad \left\{ \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right.$$

$$= \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

$$yx^2 = \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

$$15) \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{Given } x=1 \text{ then } y=2$$

$$P = \frac{3}{x} \quad Q = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad (\text{This is linear in } y)$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \log x} = e^{\log x^3}$$

$$IF = x^3$$

$$\text{solution is } y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx^3 = \int \frac{1}{x^2} \cdot x^3 dx + C$$

$$yx^3 = \int x dx + C$$

$$yx^3 = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{given } y=2 \text{ when } x=1 \quad \text{(1)} \Rightarrow 2(1)^3 = \frac{1^2}{2} + C$$

$$2 - \frac{1}{2} = C$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow yx^3 = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$2yx^3 = x^2 + 3 //$$

பயன்பாடுகள்

(25)

பயிற்சி-10.8

1. துணுதுயிர்வளின் எப்போதிலும் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கையின் எப்போதும் கீழ்க்காணும் ஆகிய காரணப்படி பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கை விகிதமாக உள்ளது. இப்போதிலும் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை மூலமாக காரணம் என்னால் 10 மணி நேர முடியில் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு இருக்கும்?

t நேரத்தில் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கை A என்க

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

(i) $t=0$ எனில் $A=A_0$

$$\text{①} \Rightarrow A_0 = ce^0 \quad \boxed{C=A_0}$$

$$\text{①} \Rightarrow A = A_0 e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

(ii) $t=5$ எனில் $A=3A_0$

$$\text{②} \Rightarrow 3A_0 = e^{5k} A_0 \quad \boxed{e^{5k} = 3}$$

(iii) $t=10$ எனில் $A=?$

$$\begin{aligned} \text{②} \Rightarrow A &= A_0 e^{10k} \\ &= A_0 (e^{5k})^2 \\ &= A_0 (3^2) \\ &= 9A_0 \end{aligned}$$

10 மணி நேர முடியில்

பாக்டீரியாக் கள் ஆறம்பு அளவை போல 9 மடங்கு இருக்கும்.

2) ஒரு நகரத்தின் மக்கள்தொகை வளர்ச்சி கீழ்க் t நேரத்தில் உள்ள மக்கள்தொகையின் விகிதமாக உள்ளது. நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40 ஆண்டுகளில் 3,00,000 லிருந்து 4,00,000 ஆக அதிகரித்துள்ளது எனில் t நேரத்தில் அந்நகரத்தின் மக்கள்தொகையை காண்க

t நேரத்தில் மக்கள்தொகை A என்க

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

$t=0$ எனில் $A=3,00,000$

$$\text{①} \Rightarrow 3,00,000 = ce^0$$

$$\boxed{C=3,00,000}$$

$$\text{①} \Rightarrow A = 3,00,000 e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

(ii) $t=40$ எனில் $A=4,00,000$

$$\text{②} \Rightarrow 4,00,000 = 3,00,000 e^{40k}$$

$$\frac{4}{3} = e^{40k}$$

$$(e^k)^{40} = \frac{4}{3}$$

$$e^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{40}}$$

②ல் பதிலிட

$$A = 3,00,000 (e^k)^t$$

$$= 3,00,000 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$$

3) மின்னோட்ட மற்றும் தன்மின் தூண்டல் கொண்ட ஒரு மின்சுற்றின் மின் இயக்கு விசையின் எல்லை $E = Ri + L \frac{di}{dt}$ ஆகும். இங்கு E என்பது மின்சுற்று மிகைக்கப்படும் மின் இயக்குவிசை, R என்பது மின்னோட்ட மற்றும் L என்பது தன்மின் தூண்டல் ஆகும். $E=0$ எனும்போது t நேரத்தில் மின்சாரம் i ஆக காண்க.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

L ஆல் வகுக்க

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$$

$$P = \frac{R}{L}, Q = \frac{E}{L} \text{ என்க}$$

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

இதில் Q லின் வகைகளைக் காண்போம்

$$\begin{aligned} IF &= e^{\int P dt} = e^{\int \frac{R}{L} dt} \\ &= e^{\frac{Rt}{L}} \end{aligned}$$

தேவையான தீர்வு

$$i(IF) = \int g(IF) dt + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \int \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}} dt + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{L} \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{\frac{R}{L}} + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{R} e^{\frac{Rt}{L}} + C \quad \text{--- (1)}$$

$E=0$ எனில்

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = 0 + C$$

$$i = C e^{-\frac{Rt}{L}}$$

4) மினாடிக்கு 10 மீ. வேகத்தில் இயங்கும் ஒரு மின்விசைப்படகின் இயந்திரம் நிறுத்தப்படுகிறது. அதன் பின்னர் அதே வேகம் ஒரு காலத்தில் (இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட பிறகு) மின் விசைப்படகின் வேகம் குறையும் வீதமானது அந்த காலத்தில் அதன் திசைவேகத்திற்கு சமமாக உள்ளது. இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட 2 மினாடி களுக்கு பிறகு விசைப்படகின் திசைவேகம் காண்க.

t காலத்தில் திசைவேகம் V எனில் வேகம் குறையும் வீதம் = திசைவேகம்

$$-\frac{dv}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{v} = -dt$$

$$\text{தொகையிட } \int \frac{dv}{v} = - \int dt$$

$$\log v = -t + \log c$$

$$\log \frac{v}{c} = -t$$

$$\frac{v}{c} = e^{-t}$$

$$v = c e^{-t} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0 \text{ எனில் } v=10$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 10 = c e^0 \quad \boxed{c=10}$$

$$\boxed{v = 10 e^{-t}} \quad \text{--- (2)}$$

$$t=2 \text{ எனில் } \textcircled{2} \Rightarrow v = 10 e^{-2}$$

$$v = \frac{10}{e^2}$$

5) வரலாற்றில் 5% தொகை ஆண்டு வீதத்தில் ஒருவாடு 10,000 தகவல் வரலாற்றில் குறைந்த செலவாகியது. 18 மாதங்களுக்கு பின்னர் அவர் வரலாற்றில் குறைந்த செலவாகியது. அதற்கு

t காலத்தில் வரலாற்றின் தொகை A எனில்

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$k = 5\%$$

$$k = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A$$

$$A = c e^{0.05t} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0 \text{ எனில் } A=10,000$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 10,000 = c e^0$$

$$\boxed{c=10,000}$$

$$A = 10,000 e^{0.05t} \quad \text{--- (2)}$$

$$t = \frac{3}{2} \text{ எனில்}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow A = 10,000 e^{0.075}$$

$$A = 10,000 e^{0.075}$$

6) ஒரு மாதிரியில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் சிதைவு வீதமானது அந்த மாதிரியில் காணப்படும் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 100 ஆண்டு கால இடைவெளியில் ஒரு மாதிரியில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் எண்ணிக்கையில் 10% சிதைவுகிறது. 1000 ஆண்டுகள் காலத்தில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் எண்ணிக்கையில் எவ்வளவு மீதமிருக்கும்?

t காலத்தில் (மீதமிருக்கும்)

கதிரியக்க பொருளின் அளவு A எனில்

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = c e^{kt} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0 \text{ எனில் } A=A_0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A_0 = c e^0 \quad \boxed{c=A_0}$$

$$A = A_0 e^{kt} \quad (2)$$

(27)

(ii) $t=100$ எனில் $A = \frac{90}{100} A_0$
 $A = \frac{9}{10} A_0$

உத்பிரதிகரி
 $\frac{9}{10} A_0 = A_0 e^{100k}$
 $e^{100k} = \frac{9}{10}$

(iii) $t=1000$ எனில்
 $\Rightarrow A = A_0 e^{1000k}$
 $A = A_0 (e^{100k})^{10}$
 $= A_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = A_0 \frac{9^{10}}{10^{10}}$
 $A = A_0 \frac{9^{10}}{10^{10}} \times 100\%$
 $= A_0 \frac{9^{10}}{10^8} \%$

7) வெப்பநிலை 25°C ஆக உள்ள ஒரு அளவையில் வைக்கப்பட்டுள்ள நீரின் வெப்பநிலை 10°C ஆகும். 10 நிமிடங்களில் நீரின் வெப்பநிலை 80°C ஆக குறைந்துவிடுகிறது. எனில்

(i) 20 நிமிடங்களுக்கு விண்ணர் நீரின் வெப்பநிலை

(ii) வெப்பநிலை 40°C ஆக இருக்கும்போது நேரம் காண்க.

$$\log\left(\frac{11}{15}\right) = -0.3101, \log 5 = 1.6094$$

t நேரத்தில் வெப்பநிலை T என்க
 அளவையின் வெப்பநிலை S என்க
 $S = 25^\circ$

$$\frac{dT}{dt} \propto T - S$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - S)$$

$$T - S = ce^{kt}$$

$$T - 25 = ce^{kt} \quad (1)$$

(i) $t=0$ எனில் $T=100$

$$\Rightarrow 100 - 25 = ce^0$$

$$c = 75^\circ$$

$$\Rightarrow T - 25 = 75e^{kt} \quad (2)$$

(ii) $t=10$ எனில் $T=80$

$$\Rightarrow 80 - 25 = 75e^{10k}$$

$$\frac{55}{75} = e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{11}{15}$$

(i) $t=20$ எனில்

உத்பிரதிகரி

$$T - 25 = 75(e^{10k})^2$$

$$= 75(e^{10k})^2$$

$$= 75 \left[\frac{11}{15} \times \frac{11}{15} \right]$$

$$T - 25 = \frac{121}{3}$$

$$T = 25 + 40.33$$

$$T = 65.33^\circ\text{C}$$

(ii) இலிருந்து $\frac{11}{15} = e^{10k}$

$$\log \frac{11}{15} = 10k$$

$$-0.3101 = 10k$$

$$-0.3101 = k$$

$$k = -0.03101$$

$T=40$ எனில்

உத்பிரதிகரி

$$40 - 25 = 75e^{kt}$$

$$\frac{15}{75} = e^{kt}$$

$$e^{kt} = 5$$

$$-kt = \log 5$$

$$t = \frac{1.6094}{0.03101} \times \frac{10000}{10000}$$

$$t = \frac{16094}{310.1}$$

$$t = 51.89 \text{ நிமிடங்கள்}$$

(8) காண 10,00 மணிக்கு எவன் ஒருவர் அமகந்தரா அணை சதையன் அடுப்பிலிருந்து சூடான காலியை வெளியில் எடுத்து அது

www.Padasalai.Net
www.TrbTnpSC.com
28
குளிர்வதற்காக அருகில் உள்ள
சமையல் அறையில் வைக்கிறார்.
அந்தறத்தில் காபியின் வெப்பநிலை 180°F
ஆகும். 10 நிமிடங்களுக்கு பிறகு அதன்
வெப்பநிலை 160°F ஆகும். சமையல்
அறையின் நிலையான வெப்பநிலை
 70°F எனில்

பு) காலை 10.15 மணிக்கு காபியின்
வெப்பநிலை காண்க.
பு) வெப்பநிலை $130^{\circ}\text{F} - 140^{\circ}\text{F}$ க்கு
இடைப்பட்டதாக இருக்கும்போது அவர்
காபியை அடுத்த நினைத்தால்
அந்தறத்திற்கு இடையில் அவர்காபியை
அடுத்த வேண்டும்.

t நேரத்தில் தேநீரின் வெப்பநிலை
T என்க

$$S = 70$$

S - அறைவெப்பநிலை

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T-S)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-S)$$

$$T-S = ce^{kt}$$

$$T-70 = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் T=180

$$\text{①} \Rightarrow 180 - 70 = ce^0$$

$$c = 110$$

$$T-70 = 110e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

t=10 எனில் T=160

$$\text{②} \Rightarrow 160 - 70 = 110e^{10k}$$

$$\frac{90}{110} = e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{9}{11}$$

பு) t=15 எனில் T=?

② இலிருதியில

$$T-70 = 110e^{15k} = 110e^{\frac{30k}{2}}$$

$$= 110(e^{10k})^{3/2}$$

$$= 110\left(\frac{9}{11}\right)^{3/2}$$

$$= 110 \cdot \frac{9}{11} \left(\frac{9}{11}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = 0.9045$$

$$= 90(0.9045)$$

$$T-70 = 81.4$$

$$T = 70 + 81.4$$

$$T = 151.4^{\circ}\text{F}$$

பு) K க்கு மண்டலிய வேண்டும்

$$\text{③} \Rightarrow \frac{9}{11} = e^{10k}$$

$$\log \frac{9}{11} = 10k$$

$$-0.2006 = k$$

$$k = -0.02006$$

T=130 எனில் t=?

$$\text{②} \Rightarrow 130 - 70 = 110e^{kt}$$

$$\frac{60}{110} = e^{-0.02006t}$$

$$\log \frac{6}{11} = -0.02006t$$

$$-0.606135 = -0.02006t$$

$$t = 30.216 \text{ நிமிடம்}$$

T=140 எனில்

$$\text{②} \Rightarrow 140 - 70 = 110e^{kt}$$

$$\frac{70}{110} = e^{kt}$$

$$\log \frac{7}{11} = kt$$

$$-0.45198 = -0.02006t$$

$$\frac{0.452}{0.02006} = t$$

$$t = 22.53 \text{ நிமிடம்}$$

வெப்பநிலை 130-140 வரும் நேரம்

காலை 10.22 - 10.30 வரை

(தோறாயமாக)

9) ஒரு பத்திரத்தில் 100°C வெப்பநிலையில்
கொதித்து கொண்டிருக்கும் திராசுது t=0
மேலும் அதற்குள் அப்பி விடுவது
இருக்கி. குளிர்வதற்காக சமையலறையில்
வைக்கப்படுகிறது. 5 நிமிடங்களுக்குப்
பிறகு திரின் வெப்பநிலை 80°C , மேலும்
5 நிமிடங்களுக்கு பிறகு திரின் வெப்பநிலை

65°C ஆக குறைகிறது எனில்
சமையலறையின் வெப்பநிலையை காண்க.

t காலத்தில் தீரின் வெப்பநிலை T என்க
அறைவெப்பநிலை S என்க

$$\frac{dT}{dt} \propto T-S$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-S)$$

$$T-S = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் T=100

$$\text{①} \Rightarrow 100-S = ce^0$$

$$c = 100-S$$

$$\text{①} \Rightarrow T-S = (100-S)e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

t=5 எனில் T=80

$$\text{②} \Rightarrow 80-S = (100-S)e^{5k}$$

$$e^{5k} = \frac{80-S}{100-S}$$

t=10 எனில் T=65

$$\text{②} \Rightarrow 65-S = (100-S)e^{10k}$$

$$= (100-S)(e^{5k})^2$$

$$= \frac{(100-S)(80-S)(80-S)}{(100-S)(100-S)}$$

$$65-S = \frac{(80-S)^2}{100-S}$$

$$6500 - 65S + S^2 = 6400 - 160S + S^2$$

$$6500 - 6400 = 160S - 65S$$

$$5S = 100$$

$$S = 20^\circ\text{C}$$

அறைவெப்பநிலை = 20°C

10) ஆரம்பத்தில் ஒரு தொட்டியில் 50 லி. தூய்மையான தீர் 20°C ல் ஒரு லி. தொட்டிக்கு ஆரம்ப t=0 ல் ஒரு லி. தீரில் 2 கிராம் வீதம் கரைக்கப்பட்ட 20°C கரைசலானது ஒரு நிமிடத்திற்கு 3 லி வீதம் தொட்டியில் விடப்படுகிறது. இக்கரைசல் நன்கு கலக்கப்பட்டு அதே வீதத்தில் தொட்டியிலிருந்து வெளியேறுகிறது. t > 0 எனும்

உட்காலம் ஒரு தொட்டியில் 20°C ல் உள்ள 20 லி. தீரில் கரைக்க,

t காலத்தில் தொட்டியில் 20 லி. தீரில் கரைக்க

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 20x \quad \text{--- ①}$$

$$20 - 20x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 20x$$

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 20x$$

$$= -\frac{20}{50} \left(x - \frac{2 \times 50}{2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{20}{50} (x-100)$$

$$\frac{dx}{x-100} = -\frac{20}{50} dt$$

$$\int \frac{dx}{x-100} = -\frac{20}{50} \int dt$$

$$\log(x-100) = -\frac{20t}{50} + \log c$$

$$\log\left(\frac{x-100}{c}\right) = -\frac{20t}{50}$$

$$\frac{x-100}{c} = e^{-\frac{20t}{50}}$$

$$x-100 = ce^{-\frac{20t}{50}} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் x=0

$$\text{①} \Rightarrow 0-100 = ce^0$$

$$c = -100$$

$$\text{①} \Rightarrow x-100 = -100 \left(e^{-\frac{20t}{50}} \right)$$

$$x = 100 - 100 e^{-\frac{20t}{50}}$$

$$x = 100 \left(1 - e^{-\frac{20t}{50}} \right)$$

Dr. கார்த்திகேயன்
திருவாரூர் மாவட்டம்
9715634957

11. நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்

சமவாய்ப்பு மாற்றம்: ஒரு சமவாய்ப்பு மாற்றம்

X என்பது 3 எண்கள் கூறுவையிலிருந்து R எனும் மெய்யெண் கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்படும் சார்பாகும்.

ஒரு சமவாய்ப்பு மாற்றிக்கான கூறுவையி

$S = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ என்க.

X என்பது S ன் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புடைய சார்பு என்க.

கிடைக்கக்கூடிய $R_x = \{X(w) / w \in S\}$ ஆகும்.

$w_{11}, w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1k} \in S$ -க்கு x என்பது

X ன் ஒரு சாத்தியமான மதிப்பு எனில்

x ன் நேர்மாறு மதிப்பு $= \{w_{11}, w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1k}\}$

எகா 11.1 இது நான்யங்களை ஒரு நேர சீரான

-படுகின்றன. X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையை

இந்த்தான், (i) கூறுவையிலுள்ள எண்கள் (ii) 1-ன்

நேர்மாறு மதிப்புகள் காண்க. (iii) சமவாய்ப்பு

மாற்றின் மதிப்புகள் மற்றும் நேர்மாறு

மதிப்புகளின் உள்ள உறுப்புகளின் எண்-

-ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு: (i) கிடைக்கக்கூடிய ஒரு நேர

சுண்டப்படும் போது கூறுவையி

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ஆகும்.

(ii) X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க

$\therefore X(HH) = 0$

$X(HT) = 1, X(TH) = 1$

$X(TT) = 2$

$\therefore X$ ன் மதிப்புகள் $= 0, 1, 2$.

$X(w) = \begin{cases} 0 & w = HH \\ 1 & w = HT, TH \\ 2 & w = TT \end{cases}$

$\therefore 1$ ன் நேர்மாறு மதிப்புகள் $= \{TH, HT\}$

(iii).

சமவாய்ப்பு மாற்ற X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	2	1	4

மீதி 11-1 1) X என்பது நேர சீரான நான்யங்களை ஒரு சமயத்தில் ஒரு நேர சீரான போது கிடைக்கக்கூடிய எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாற்றியான X-ஐ மதிப்பு -களையும், அதன் நேர்மாறு மதிப்புகளின் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு: நேர சீரான நான்யங்களை ஒரு நேர சீரான போது கூறுவையி

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THT, TTT\}$

X என்பது கிடைக்கக்கூடிய எண்ணிக்கை என்க.

$X(HHH) = 0 \rightarrow 1$

$X(HHT) = 1, X(HTH) = 1 \rightarrow 3$

$X(HTT) = 2, X(THT) = 2 \rightarrow 3$

$X(TTH) = 2 \rightarrow 3$

$X(TTT) = 3 \rightarrow 1$

$\therefore X$ ன் மதிப்புகள் $0, 1, 2, 3$

$X(w) = \begin{cases} 0 & w = HHH \\ 1 & w = HHT, HTH, TTH \\ 2 & w = HTT, THT, TTH \\ 3 & w = TTT \end{cases}$

சமவாய்ப்பு மாற்றின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

எகா 11.2 சீரான கிடைக்கக்கூடிய உருட்டல்

-படுகின்றன. X என்பது கிடைக்கக்கூடிய

பக்கையின் கிடைக்கக்கூடிய எண்ணிக்கை மொத்த

கூட்டுத்தொகை எனில் (i) கூறுவையி

(ii) X எனும் சமவாய்ப்பு மாற்ற எண்கள்

மதிப்புகள் (ii) 10-ஐ நேர்மாறு மதிப்புகள்

மற்றும் (iv) X-ன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சிகிச்சைக்குக் காண்க.

தீர்வு: உறுப்புகள் S =

- i) $\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

$$n(S) = 36$$

(ii) X என்பது கருவகையின் கிடைக்கும் எண்ணின் கருவத்தொகை என்க.

$\therefore$ X-ன் மதிப்புகள்

$$= \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

(iii) 10-ன் நேர்மாறு பிம்பம்
 $= \{ (4,6), (5,5), (6,4) \}$

(iv) X-ன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

X-ன் மதிப்புகள்	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	மொத்தம்
X-ன் நேர்மாறு பிம்பம்	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

எகா 11.3 ஒரு ஜாடியில் 2 வயள்ள பந்தங்கள்

மற்றும் 3 சிவப்பு பந்தங்கள் உள்ளன.

சமவாய்ப்பு முறையில் 3 பந்தங்கள் ஜாடியிலிருந்து

தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. X என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் சிவப்பு பந்தங்களின் எண்ணிக்கை

குறிப்பிடப்படும், சமவாய்ப்பு மாதிரி X-ன்

மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு

பிம்பங்களின் எண்ணிக்கையையும்

காண்க. (short-method)

$$X(1) = 3C_1 \times 2C_2 \quad X(2) = 3C_2 \times 2C_1$$

$$X(3) = 3C_3 \times 2C_0$$

தீர்வு: $2W + 3B = 5$
 X என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் சிவப்பு பந்தங்களின் எண்ணிக்கை என்க.
 $S = \{ w_1, w_2, r_1, w_1, w_2, r_2, w_1, w_2, r_3, w_1, r_1, r_2, w_1, r_2, r_3, w_1, r_1, r_3, w_2, r_1, r_2, w_2, r_2, r_3, w_2, r_1, r_3, r_1, r_2, r_3 \}$

$$n(S) = 10 = {}^5C_3$$

சமவாய்ப்பு மாதிரி X-ன் மதிப்புகள்

$$1, 2, 3$$

$$\left. \begin{aligned} X(w_1, w_2, r_1) &= 1, & X(w_1, w_2, r_2) &= 1 \\ X(w_1, w_2, r_3) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} X(w_1, r_1, r_2) &= 2, & X(w_1, r_2, r_3) &= 2 \\ X(w_1, r_1, r_3) &= 2, & X(w_2, r_1, r_2) &= 2 \\ X(w_2, r_2, r_3) &= 2, & X(w_2, r_1, r_3) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$X(r_1, r_2, r_3) = 3$$

X-ன் மதிப்புகள்	1	2	3	மொத்தம்
X-ன் நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	3	6	1	10

பயிற்சி 1.1) 4) 6 சிவப்பு மற்றும் 3 கருப்பு

பந்தங்கள் உள்ள ஒரு கைப்பைக்களத்தில்

கிடைக்கும் பந்தங்கள் சீரான முறையில் தேர்ந்தெடுக்க

பெறப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்

பெறும் மூன்று சிவப்பு பந்தங்களுக்கும்

₹ 15 வசூலாகவும், தேர்ந்தெடுக்கப்படும்

மூன்று கருப்பு பந்தங்களுக்கும் ₹ 10

தொற்பதாகவும் கொள்க. வசூலும்

தொகையை X குறிப்பதாகக் கொண்டு பின்

X-ன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன்

நேர்மாறு பிம்பங்களின் புள்ளிகளின்

எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு: மொத்த பந்தங்கள் = 6R + 3B = 14

கரு பந்தங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன

$$\therefore n(S) = {}^{14}C_3 = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364$$

X என்பது வசூலும் தொகை என்க.

$$X(\text{கிரைஞ்சும சிவப்பு பந்தங்கள்}) = ₹ 2(15) \\ = ₹ 30$$

$$X(\text{ஒரு சிவப்பு மற்றும் ஒரு கருப்பு பந்தம்}) \\ = ₹ 15 - ₹ 10 = ₹ 5$$

$$X(\text{கிரைஞ்சும கருப்பு பந்தங்கள்}) = ₹ 2(-10) \\ = - ₹ 20$$

$$\therefore X \text{ன் மதிப்புகள் } 30, 5, -20$$

$$X = 30 \text{ எனில் } \text{பொருளாறு பிம்பங்களை}$$

2௦௦௭ உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை:

$$(6 \text{ Red } \& 8 \text{ Blue})$$

$$X = 30 \text{ எனில் } = {}^6C_2 \times {}^8C_0$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 1 = 15$$

$$X = 5 \text{ எனில் } = {}^6C_1 \times {}^8C_1$$

$$= 6 \times 8 = 48$$

$$X = -20 \text{ எனில் } = {}^6C_0 \times {}^8C_2 \\ = 1 \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

X ன் மதிப்புகள்	30	5	-20	எனது
பொருளாறு பிம்பங்களை 2௦௦௭ உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	15	48	28	91

3) ஒரு கூடையில் 5 மாங்கனிகள் மற்றும் 4 ஆப்பிள்கள் உள்ளன. அதிலிருந்து ஒன்று பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் பழங்கள் ஆப்பிள்கள் எனில், சமவாய்ப்பு மாற்றமான X க்கின் மதிப்புகளையும் அதன் பொருளாறு பிம்பங்களை 2௦௦௭ புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

$$\text{Sol:} \therefore \text{ஒவ்வொரு பழங்களை} = 5 \text{ மா} + 4 \text{ ஆ} \\ = 9$$

கிரைஞ்சும ஒன்று பழங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.

$$\therefore n(S) = {}^9C_2 = \frac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 1 \times 1} = 84$$

$\therefore X$ ன் மதிப்பு தேர்ந்தெடுக்கும் பழங்களின் 2௦௦௭ ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை என்க.

$$\therefore X \text{ ன் மதிப்புகள் } 0, 1, 2, 3$$

பொருளாறு பிம்பத்தில் 2௦௦௭ புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை:

$$X = 0 \text{ எனில் } = X(MMM)$$

$$(\text{ஒன்றுமே மாம்பழங்கள்}) \\ = {}^5C_3 \times {}^4C_0 = \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 1 \times 1} \times 1$$

$$= 10$$

$$X = 1 \text{ எனில் } = {}^5C_2 \times {}^4C_1$$

$$(1 \text{ ஆ } 2 \text{ மா}) = 10 \times 4 = 40$$

$$X = 2 \text{ எனில் } = {}^5C_1 \times {}^4C_2$$

$$(2 \text{ ஆ } 1 \text{ மா}) = 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \\ = 30$$

$$X = 3 \text{ எனில் } = {}^5C_0 \times {}^4C_3$$

$$(3 \text{ ஆ}) = 1 \times 4C_3 \\ = 1 \times 4 = 4$$

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	எனது
பொருளாறு பிம்பத்தில் 2௦௦௭ உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	10	40	30	4	84

2) 52 சீட்டுகளை உடைய ஒரு சீட்டுக் கட்டிவிடுவதற்கு கிரைஞ்சும ஒன்று சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சீட்டுகள் கறுப்பு எனில், சமவாய்ப்பு மாற்றமான X -ன் மதிப்புகளையும் அதன் பொருளாறு பிம்பங்களை 2௦௦௭ புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

Sol: 52 சீட்டுகள், உடைய ஒரு சீட்டுக் கட்டிவிடுவதற்கு 2 சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$$

52 சீட்டுகளில் 26 கறுப்புக்காரும்,
26 சிவப்புக்காரும் கிடைக்கும்.

X என்பது தேர்ந்தெடுக்கப்
பெறும் சீட்டுகளில் உள்ள
கறுப்புச் சீட்டுகளின்
எண்ணிக்கை என்க.

Red - diamond,
heart,
Black - club,
spade

$\therefore$ X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2.

$$\begin{aligned} X=0 \text{ எனில்} & (26B + 26R) \\ & = 26C_0 \times 26C_2 \\ & = 1 \times \frac{13 \times 25}{2 \times 1} \\ & = 325 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X=1 \text{ எனில்} & = 26C_1 \times 26C_1 \\ & = 26 \times 26 = 676 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X=2 \text{ எனில்} & = 26C_2 \times 26C_0 \\ & = 325 \end{aligned}$$

X இன் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
போன்றொரு பம்பங்கின் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	325	676	325	1326

5. சிறு பக்க பக்கை ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தில்
"2" எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன்
இரண்டு பக்கங்களில் "3" எனவும்,
மீதமுள்ள இரண்டு பக்கங்களில் "4" எனவும்
உள்ளது. கிடைசுறு பக்கை 2 கட்டப்பட்டு
உள்ளது. X என்பது கிடை 2 கட்டல்களில்
- கிடை. X என்பது கிடை 2 கட்டல்களில்
கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை
குறிக்கிறது எனில், X - இன் மதிப்புகளையும்
மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களின்
புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர். பக்கையின் மேல் 2 உள்ள எண்கள்
2, 3, 3, 4, 4, 4 ஆகும்.

X என்பது பக்கையைய கிடைசுறு
2 கட்டல் போது கிடைக்கும் எண்களின்
கூட்டுத்தொகை என்க.

பெறுபெறும்

I \ II	2	3	3	4	4	4
2	4	5	5	6	6	6
3	5	6	6	7	7	7
3	5	6	6	7	7	7
4	6	7	7	8	8	8
4	6	7	7	8	8	8
4	6	7	7	8	8	8

அட்டவணைபிடிக்க

X இன் மதிப்புகள்	4	5	6	7	8	மொத்தம்
போன்றொரு பம்பங்கின் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

எகா 11.4 6 வயள்ள மற்றும் 4 கறுப்பு
பந்தங்கள் கொண்ட ஒரு ஜாடியிலிருந்து
கிடை பந்தங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில்
தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. தேர்ந்தெடுக்கப்
பெறும் ஒவ்வொரு கறுப்பு
பந்திற்கும் ₹ 2.00 வசூலிடப்படும்.
தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு வயள்ள
பந்திற்கும் ₹ 2.00 திரைபதமாகவும் கொடுக்க
வெல்லும் தொகையை X குறிப்பதாகக்
கொண்டால், X - இன் மதிப்புகளையும்
மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களின்
புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

$$\text{தீர்.} \therefore \text{மொத்த பந்தங்கள்} = 10 \quad (6W + 4B)$$

இதிலிருந்து 2 பந்தங்கள் எடுக்கப்
படுகின்றன.

$$\therefore n(S) = 10C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

X என்பது வெல்லும் தொகை என்க.

இரண்டு கறுப்பு எண்கள்

$$X = ₹ 2(30) = ₹ 60$$

1 கறுப்பு 1 வயள்ள எண்

$$X = ₹ 30 - ₹ 20 = ₹ 10$$

இரண்டு வயள்ள எண்

$$X = ₹ 2(-20) = -₹ 40$$

$\therefore X$ ன் மதிப்புகள் 60, 10, -40

கோர்மானு பிழ்ப்புகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$X=60 \Rightarrow 4C_2 \times 6C_0 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 = 6$$

(கூறன் 600 கருப்பு)

$$X=10 \Rightarrow 4C_1 \times 6C_1 = 4 \times 6 = 24$$

(1B, 1W)

$$X=-40 \Rightarrow 4C_0 \times 6C_2 = 1 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(2W)

X ன் மதிப்புகள்	60	10	-40	மொத்த -45
கோர்மானு பிழ்ப்புகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	6	24	15	45

சமவாய்ப்பு மாற்றியின் உண்ககை :-

- 1) தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றி
- 2) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாற்றி

தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றி :-

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ என்ற மாற்றியின் விச்சி
எளிதெதிர்நீக்கதாக இருந்தால், அதன்
தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றியாகும்.

நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு :-

X என்ற தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றியின்

தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

எனின் X ன் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

$$f(x_k) = P(X = x_k), \quad k=1, 2, \dots, n, \dots$$

என வரை

- பற்றுகப்படுகிறது.

பண்புகள் :-

$$(i) f(x_k) \geq 0 \quad k=1, 2, \dots, n, \dots$$

$$(ii) \sum_k f(x_k) = 1$$

கூவிப்புப் பரவல் சார்பு (அ) பரவல் சார்பு
(Cumulative Distribution Function)

தனித்த சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் கூவிப்பு
பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

கூவி cdf எனவும் குறிக்கப்படும்.

cdf ன் பண்புகள் :-

$$1) 0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $F(x)$ ஒரு மெய் மதிப்புடைய
கூறையுறாச் சார்பாகும்.

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$$

5) $F(x)$ ஒரு வளப்பக்கத்தையுள்
சார்பு ஆகும். $(\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a))$

$$6) P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$7) P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

$$8) P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

தொ 11.7 சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன்
நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு $f(x)$ என்பது

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

எனின், (i) அதன் கூவிப்புப் பரவல் சார்பு
காண்க. அதன் மேலாக (ii) $P(X \leq 3)$
மற்றும் (iii) $P(X > 2)$ ஆகியவற்றைக்
காண்க.

தொ 11.8 (i) கூவிப்புப் பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$

$$\therefore F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = \frac{1}{12}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) \\ = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{12} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{12} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$(i) P(X \leq 3) = F(3) = \frac{11}{12}$$

$$(ii) P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) \\ = 1 - P(X \leq 1) \\ = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

எகா 11.8 ஓர் கிராமத்தின் பக்கத்தில் இரு பக்கத்தில் "1" எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அதன் கிடை பக்கங்களை "2" எனவும், மீதமுள்ள மேல் பக்கங்களை "3" எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. கிடை மூன்று பக்கம் உருட்டப்படுகிறது. இது மூன்று எழுத்துகள் மொத்த தொகையை X குறிக்கிறது எனில்

- (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு காண்க.
(ii) குவிப்புப் பதவன் சார்பு காண்க.
(iii) $P(3 \leq X < 6)$ காண்க.
(iv) $P(X \geq 4)$ காண்க.

தீர்வு:- பக்கம் மூன்று 2-ம் எண் 1, 2, 2, 3, 3, 3.

X என்பது கிடை மூன்று எழுத்துகள் மொத்த தொகை என்க.

∴ கிராமத்தின்

I \ II	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

∴ அட்டவணைப்பிடுகிறது.

X எழுத்துகள் 2, 3, 4, 5, 6.

$$\therefore P(X=2) = \frac{1}{36}, P(X=3) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{10}{36}, P(X=5) = \frac{12}{36}$$

$$P(X=6) = \frac{9}{36}$$

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x)$:

x	2	3	4	5	6
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

(ii) குவிப்புப் பதவன் சார்பு $F(x)$:

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} \\ = \frac{27}{36}$$

$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} \\ = \frac{36}{36} = 1$$

∴ இவ்வழிபாடு சார்ந்து

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{15}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{27}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$(iii) P(3 \leq X < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}$$

$$(iv) P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$$

எகா 11.10 ஒரு தனிநிலை சார்ந்து X = கன்
நிகழ்தகவு நிறைவு சார்ந்து

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

எனவே (i) $P(2 < X < 6)$ (ii) $P(2 \leq X < 5)$

(iii) $P(X \leq 4)$ (iv) $P(3 < X)$ காண்க.

தீர்வு: $\sum f(x) = 1$ எனப்பதால்
 $k + 2k + 6k + 5k + 6k + 10k = 1$
 $30k = 1$

$$k = \frac{1}{30}$$

$$(i) P(2 < X < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 6k + 5k + 6k = 17k = \frac{17}{30}$$

$$(ii) P(2 \leq X < 5) = f(2) + f(3) + f(4)$$

$$= 2k + 6k + 5k = 13k = \frac{13}{30}$$

$$(iii) P(X \leq 4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

$$= k + 2k + 6k + 5k = 14k = \frac{14}{30}$$

$$(iv) P(3 < X) = P(X > 3)$$

$$= f(4) + f(5) + f(6)$$

$$= 5k + 6k + 10k = 21k = \frac{21}{30}$$

P. ANURADHA

எகா 11.5 இது சீரான நாணயங்கள் ஒரு
கூறுதல் சித்திரம் உட்படுத்தி உள்ளது. (ஒரு சீரான
நாணயம் இது ஒரு சித்திரம் உட்படுத்தி உள்ளது
கூறுதல் சித்திரம் தலைகடிகல் எண்ணிக்கை
-கூறுதல் நிகழ்தகவு நிறைவு சார்ந்து காண்க.

தீர்வு: இது நாணயங்கள் சித்திரம் உட்படுத்தி
கூறுதல் சித்திரம் $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

கூறுதல் சித்திரம் X என்னவது கிடைக்கும்
தலைகடிகல் எண்ணிக்கை என்ன?

$$\therefore X(HH) = 2, X(HT) = X(TH) = 1$$

$$X(TT) = 0$$

$$\therefore X \text{ க் கூறுதல் சித்திரம் } 0, 1, 2$$

$$\therefore P(X=0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{4}, P(X=2) = \frac{1}{4}$$

X	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

எகா 11.6 இது சீரான பக்கங்கள் ஒரு
கூறுதல் சித்திரம் உட்படுத்தி உள்ளது. கிடைத்த
நாணயங்களின் எண்ணிக்கைகளை நிகழ்தகவு
நிறைவு சார்ந்து காண்க.

தீர்வு: இது சீரான பக்கங்கள் உட்படுத்தி
கூறுதல் சித்திரம் $S =$

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
 $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
 $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$$n(S) = 36$$

மூலக்கூறு X என்பது கிடைத்த நான்டுகளின் எண்ணிக்கை என்க.

$\therefore X$ எடுத்தல் 0, 1, 2.

$$P(X=0) = f(0) = \frac{25}{36}$$

$$P(X=1) = f(1) = \frac{10}{36}$$

$$P(X=2) = f(2) = \frac{1}{36}$$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

பயிற்சி 11.2 : (i) இன்று சோடி நாண்டல்

-கள் ஒரு நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் நூல்களின் எண்ணிக்கைகளை நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பினை காண்க.

Sol:- இன்று நாண்டல்களை சுண்டும் போது கிடைக்கக்கூடிய நூல்களின்

எண்ணிக்கைகள் $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, TTT, THT, THT\}$

$$\therefore n(S) = 8$$

X என்பது கிடைக்கும் நூல்களின் எண்ணிக்கை என்க.

$\therefore X$ எடுத்தல் 0, 1, 2, 3

$$\therefore f(0) = P(X=0) = \frac{1}{8} \quad \rightarrow \{TTT\}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \{HTH, HTH, TTH, THT\}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \{HHT, HTH, TTH\}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{8} \quad \rightarrow \{HHH\}$$

$$\therefore \text{நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0, 3 \\ \frac{3}{8} & x=1, 2 \end{cases}$$

2) ஒரு சிறுபக்க பக்கடலின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இரண்டு பக்கங்களில் '3' எனவும் டிரைவ் ஏதாவது இன்று

பக்கங்கள் 5 எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. பக்கடலின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இரண்டு பக்கங்களில் '3' எனவும் டிரைவ் ஏதாவது இன்று

(i) நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு (ii) குவி பரவல் சார்பு (iii) $P(4 \leq X < 10)$ (iv) $P(X > 6)$

Sol:- பக்கடலின் மொத்த எண்ணிக்கை 1, 3, 3, 5, 5, 5

X	1	3	3	5	5	5
$f(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$n(S) = 36$
 X என்பது பக்கடலின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இரண்டு பக்கங்களில் '3' எனவும் டிரைவ் ஏதாவது இன்று

$$f(2) = \frac{1}{36}, f(4) = \frac{4}{36}, f(6) = \frac{10}{36}$$

$$f(8) = \frac{12}{36}, f(10) = \frac{9}{36}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & x=2 \\ \frac{4}{36} & x=4 \\ \frac{10}{36} & x=6 \\ \frac{12}{36} & x=8 \\ \frac{9}{36} & x=10 \end{cases}$$

(i) குவி பரவல் சார்பு:

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=2) + P(X=4) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$F(6) = P(X \leq 6) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$$

$$F(8) = P(X \leq 8) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}$$

$$F(10) = P(X \leq 10) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8) + P(X=10)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$(ii) P(4 \leq X < 10) = P(X=4) + P(X=6) + P(X=8)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$(iv) P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=8) + P(X=10)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$$

3. மகன் மற்றும் மகளுக்கு சமவாய்ப்பு நிகழ்தகவுகள் அளக்கத் தகு 4 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள மகன்களின் அண்ணிக்கைகளுக்கு நிகழ்தகவு நிறைவு சார் - பிணையுள் குவிவு பரவல் சார்பிணையுள் காண்க.

$$\text{தீர்வு: } n(S) = 2^4 = 16.$$

X என்பது குடும்பத்தில் உள்ள மகன் - களின் அண்ணிக்கைகளை அளக்க.

$\therefore X$ ன் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4

$$P(X=0) = \frac{4C_0}{16} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = \frac{4C_1}{16} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=2) = \frac{4C_2}{16} = \frac{6}{16}$$

$$P(X=3) = \frac{4C_3}{16} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=4) = \frac{4C_4}{16} = \frac{1}{16}$$

குவிவுப் பரவல் சார்பு:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

X	0	1	2	3	4
F(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

4) ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றி 0, 1 மற்றும் 2 மதிப்புக்களை மட்டுமே காட்டும் என்க. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{k} & k=0,1,2 \\ 0 & x \text{ கூலி மதிப்புக்கள்} \end{cases}$

தீர்வு: அனைத்து நிகழ்தகவு நிறைவு சார்பிற்கு (i) K-ஐ மதிப்பு

(ii) குவிவுப் பரவல் சார்பு (iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\text{தீர்வு: } f(0) = \frac{0^2+1}{k} = \frac{1}{k}$$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{k} = \frac{2}{k}, \quad f(2) = \frac{2^2+1}{k} = \frac{5}{k}$$

(i) $\sum f(x) = 1$ என்பதால்

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{5}{k} = 1 \Rightarrow \frac{8}{k} = 1 \Rightarrow k=8$$

(ii) குவிவுப் பரவல் சார்பு

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \\ = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} = \frac{3}{k} = \frac{3}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{5}{k} = \frac{8}{k} = \frac{8}{8} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$f(1) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) \\ = 1 - P(X \leq 0) \\ = 1 - F(0) \\ = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(6) ஒரு சமவாய்ப்பு லாபி X க்கு நிகழ்தகவு (ii) காண்பதானது

x	1	2	3	4	5
f(x)	k ²	2k ²	3k ²	2k	3k

எனவே (i) K மதிப்பு (ii) $P(2 \leq X < 5)$ (iii) $P(3 < X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: $\sum f(x) = 1$ என்பதால்,

$$i) \quad k^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1 \\ 6k^2 + 5k = 1 \\ 6k^2 + 5k - 1 = 0 \\ k = \frac{1}{6}, -1$$

$K = -1$ என்பது ஏற்கத்தக்கது

$$\therefore K = \frac{1}{6}$$

$$(ii) \quad P(2 \leq X < 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ = 2k^2 + 3k^2 + 2k = 5k^2 + 2k \\ = 5\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5+12}{36} = \frac{17}{36}$$

$$(iii) \quad P(3 < X) = P(X > 3) \\ = P(X=4) + P(X=5) = 2k + 3k \\ = 5k = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$5) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \leq x < 0 \\ 0.35 & 0 \leq x < 1 \\ 0.60 & 1 \leq x < 2 \\ 0.85 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு லாபியின் குகிப்பரவல் சார்பின் (i) நிகழ்தகவு நிறைவுசார்பு (ii) $P(X < 1)$ மற்றும் (iii) $P(X \geq 2)$ காண்க.

தீர்வு: X என்பது தனிநிலை சமவாய்ப்பு லாபி என்பதால், X க் மதிப்புகள் -1, 0, 1, 2, 3

$$f(-1) = P(X = -1) = F(-1) - F(-1^-) \\ = 0.15 - 0 = 0.15$$

$$f(0) = P(X = 0) = F(0) - F(0^-) \\ = 0.35 - 0.15 = 0.20$$

$$f(1) = P(X = 1) = F(1) - F(1^-) \\ = 0.60 - 0.35 = 0.25$$

$$f(2) = P(X = 2) = F(2) - F(2^-) \\ = 0.85 - 0.60 = 0.25$$

$$f(3) = P(X = 3) = F(3) - F(3^-) \\ = 1 - 0.85 = 0.15$$

x	-1	0	1	2	3
f(x)	0.15	0.20	0.25	0.15	0.15

$$(i) \quad P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) \\ = 0.15 + 0.20 = 0.35$$

$$(ii) \quad P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) \\ = 0.25 + 0.15 = 0.40$$

$$7) F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாநியன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு எனில் (i) நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு (ii) $P(X < 3)$ மற்றும் (iii) $P(X \geq 3)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: (i) X என்பது தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாநி என்பதால் X ன் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4

$$\therefore f(0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$f(1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

$$f(3) = F(3) - F(2) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{9}{10} - \frac{8}{10} = \frac{1}{10}$$

$$f(4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{10-9}{10} = \frac{1}{10}$$

$\therefore$ நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\sum f(x) = 1$$

$$(i) P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$(ii) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

எகா 11-9 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள

குவிப்புப் பரவல் சார்பு $F(x)$ -ன் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாநி X -ன் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பைக் காண்க.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25 & -2 \leq x < -1 \\ 0.60 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

D. Anuradha

$$\begin{cases} 0.90 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

கேள்வி (i) $P(X < 0)$ மற்றும் (ii) $P(X \geq -1)$ காண்க.

தீர்வு: X ன் மதிப்புகள் -2, -1, 0, 1

$$f(-2) = F(-2) - F(-2^-) = 0.25 - 0 = 0.25$$

$$f(-1) = F(-1) - F(-2) = 0.60 - 0.25 = 0.35$$

$$f(0) = F(0) - F(-1) = 0.90 - 0.60 = 0.30$$

$$f(1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.90 = 0.10$$

$\therefore$ நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

x	-2	-1	0	1	
$f(x)$	0.25	0.35	0.30	0.10	$\sum f(x) = 1$

$$(i) P(X < 0) = P(X=-2) + P(X=-1) \\ = 0.25 + 0.35 = 0.60$$

$$(ii) P(X \geq -1) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) \\ = 0.35 + 0.30 + 0.10 = 0.75$$

தொடர்ச்சியானப் பரவல்கள்

$X: S \rightarrow R$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாநி R ன் உட்கணமான I ன் குகைத் தொகுப்பைப் பெறும் என்க.

$$P(X=x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \text{என்பது}$$

X ன் ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாநியாகும்.

நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு:

தொடர்ச்சியானப் பரவல் மாநியின் $x \in [a, b]$ எனும் ஒரு உண்மையான மிகச்சிறிய மிகப்பெரிய x -ற்கும் $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ எனில் $f(x)$ என்ற குறைவற்ற மெய்யெண் மதிப்புடைய சார்பானது, நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆகும்.

$$\text{பண்புகள்: (i) } f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

குறிப்பு பரவல் சார்பு:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

பண்புகள்: 1) $0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F(x)$ ஒரு குறைவற்ற அச்சார்பாகும்.

3) $F(x)$ எல்லாத்தரும் தொடர்ச்சியாகும்

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

5) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

6) $P(a < x < b) = P(a \leq x < b)$
 $= P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$
 $= F(b) - F(a)$

எகா 11.11 $f(x) = \begin{cases} cx^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{உள்ளுறு மதிப்பு} \\ & \text{—கருக்து}$

எனும் சார்பு ஒரு அபுத்த சார்பு எனும் மாறிலி

(— உள் மதிப்பு காண்க. (பொது (i) $P(1.5 < X < 3.5)$)

(ii) $P(X \leq 2)$ (iii) $P(3 < X)$ காண்க.

தீர்வு: $f(x)$ என்பது நிகழ்தகவு அபுத்த

சார்பு (p.d.f.) என்பதால்,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^4 cx^2 dx = 1 \Rightarrow c \left(\frac{x^3}{3} \right)_1^4 = 1$$

$$\Rightarrow c \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) = 1$$

$$\Rightarrow c \left(\frac{63}{3} \right) = 1 \Rightarrow c(21) = 1$$

$$\boxed{c = \frac{1}{21}}$$

(i) $P(1.5 < X < 3.5) = \int_{1.5}^{3.5} f(x) dx$

$$= \int_{1.5}^{3.5} cx^2 dx = c \left(\frac{x^3}{3} \right)_{1.5}^{3.5}$$

$$= \frac{1}{21} \left(\frac{(3.5)^3}{3} - \frac{(1.5)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{63} (42.875 - 3.375)$$

$$= \frac{1}{63} (39.5) = \frac{395}{630} = \frac{79}{126}$$

(ii) $P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^2 f(x) dx$

$$= \int_1^2 cx^2 dx = c \left(\frac{x^3}{3} \right)_1^2$$

$$= \frac{1}{21} \times \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{21} \times \frac{7}{3} = \frac{1}{9}$$

(iii) $P(3 < X) = \int_3^{\infty} f(x) dx$

$$= \int_3^4 cx^2 dx = \frac{1}{21} \left(\frac{x^3}{3} \right)_3^4$$

$$= \frac{1}{63} (64 - 27) = \frac{37}{63}$$

எகா 11.12 $f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ -x+3 & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{உள்ளுறு} \\ & \text{மதிப்பு} \\ & \text{—கருக்து} \end{cases}$

என்பது சமவாய்ப்பு மாறிலி X -கன்

நிகழ்தகவு அபுத்த சார்பு $f(x)$ எனும்

(i) பரவல் சார்பு $F(x)$ (ii) $P(1.5 \leq X \leq 2.5)$

அகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:- $x < 1$ எனும் $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$

$1 \leq x < 2$ எனும் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx + \int_1^x (u-1) du$

$$= \left(\frac{u^2}{2} - u \right)_1^x = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}$$

2 ≤ x < 3 எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du + \int_1^2 (u-1) du$
 $+ \int_2^x (3-u) du$
 $= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2} \right]_2^x$
 $= \frac{(2-1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} - \left[\frac{(3-x)^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right]$
 $= \frac{1}{2} - \frac{(3-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(3-x)^2}{2}$

x ≥ 3 எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du + \int_1^2 (u-1) du$
 $+ \int_2^3 (3-u) du + \int_3^x 0 dx$
 $= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2} \right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2} \right]_2^3 + 0$
 $= 0 + \frac{1}{2} - \left[\frac{0}{2} - \frac{1}{2} \right] + 0$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

∴ குவியல் பரவல் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

(ii) $P(1.5 \leq x \leq 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$
 $= 1 - \frac{(3-2.5)^2}{2} - \frac{(1.5-1)^2}{2}$
 $= 1 - \frac{(0.5)^2}{2} - \frac{(0.5)^2}{2}$
 $= 1 - \frac{0.25}{2} - \frac{0.25}{2}$
 $= 1 - \frac{0.50}{2} = 1 - 0.25$
 $= 0.75$

11.14 : சமவாய்ப்பு மாதிரி X-ஐக் கருதுக
 நிகழ்தகவு அளர்ந்த சார்பு $f(x) = \begin{cases} k & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{பிறகு} \end{cases}$

எனில் (i) பரவல் சார்பு (ii) $P(X < 3)$
 (iii) $P(2 < X < 4)$ (iv) $P(3 \leq X)$ காண்க.

தீர்வு: $f(x)$ நிகழ்தகவு அளர்ந்த சார்பு
 எனப்பதால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int_1^5 k dx = 1 \Rightarrow k(x)_1^5 = 1$$

$$\Rightarrow k(5-1) = 1$$

$$k(4) = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{4}}$$

(i) குவியல் பரவல் சார்பு

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

x < 1 எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du = 0$

1 ≤ x < 5 எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du + \int_1^x k du$
 $= 0 + k(u)_1^x$

$$= k(x-1) = \frac{1}{4}(x-1) = \frac{x-1}{4}$$

x ≥ 5 எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du + \int_1^5 k du$
 $+ \int_5^x 0 du$

$$= 0 + (ku)_1^5 + 0 = k(5-1)$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{x-1}{4} & 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

$$(i) P(X < 3) = P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(ii) P(2 < X < 4) = P(2 \leq X \leq 4) \\ = F(4) - F(2) = \frac{4-1}{4} - \frac{2-1}{4} \\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(iv) P(3 \leq X) = P(X \geq 3) \\ = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) \\ = 1 - \frac{3-1}{4} = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

உதா 11.15 ஒரு மின்சாரத் திட்டின் ஆயுட்காலத்தைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாநிலம் X -இன் நிகழ்தகவு அபர்த்த சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ ஆகும்.}$$

(i) k க்கு மதிப்பு காண்க (ii) பரவல் சார்பு
(iii) $P(X < 2)$ (iv) X -இன் குறைந்தபட்சம் நான்கு நேர அளவுகளுக்கான நிகழ்தகவு காண்க. (v) $P(X=3)$

தீர்வு: (i) $f(x)$ நிகழ்தகவு அபர்த்த சார்பு என்பதால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} k e^{-2x} dx = 1 \Rightarrow k \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{-2} (e^{-\infty} - e^0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{-2} (0 - 1) = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k=2}$$

$$(ii) \text{ பரவல் சார்பு } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$x \leq 0 \text{ எனில் } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$$

$$x > 0 \text{ எனில் } F(x) = \int_0^x k e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow F(x) = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^x$$

$$= \left[-\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^0}{2} \right]$$

$$= 1 - e^{-2x}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

$$(iii) P(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-2(2)} = 1 - e^{-4}$$

(iv) குறைந்தபட்சம் நான்கு நேர அளவு - கனவாக்கான நிகழ்தகவு $= P(X \geq 4)$

$$= 1 - P(X < 4) = 1 - F(4)$$

$$= 1 - (1 - e^{-2(4)})$$

$$= 1 - 1 + e^{-8} = e^{-8}$$

$$(v) P(X=3)$$

X தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாநிலம் என்பதால் $P(X=3) = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 11.3

1) சமவாய்ப்பு மாநில X -இன் நிகழ்தகவு அபர்த்த சார்பு $f(x) = \begin{cases} k x e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

எனில் k -க்கு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு: $f(x)$ நிகழ்தகவு அபர்த்த சார்பு என்பதால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_0^{\infty} k x e^{-2x} dx = 1$$

$$k \left[\frac{x e^{-2x}}{-2} + \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow \boxed{k=4}$$

$$n=1 \\ a=2 \\ \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx \\ = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

2) சமவாய்ப்பு மாந் X -கின் நிகழ்தகவு

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{பிற} \\ & \text{மதிப்புகள்} \end{cases}$$

எனின்,

(i) $P(0.2 \leq x < 0.6)$

(ii) $P(1.2 \leq x < 1.8)$

(iii) $P(0.5 \leq x < 1.5)$ காண்க.

தீர்வு: $P(0.2 \leq x < 0.6) = \int_{0.2}^{0.6} f(x) dx$

$$= \int_{0.2}^{0.6} x dx = \left(\frac{x^2}{2} \right)_{0.2}^{0.6}$$

$$= \frac{1}{2} [(0.6)^2 - (0.2)^2] = \frac{1}{2} [0.36 - 0.04]$$

$$= \frac{1}{2} [0.32] = 0.16$$

(i) $P(1.2 \leq x < 1.8) = \int_{1.2}^{1.8} (2-x) dx$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right)_{1.2}^{1.8} = \frac{1}{2} (4x - x^2)_{1.2}^{1.8}$$

$$= \frac{1}{2} [4(1.8) - (1.8)^2] - \left(4(1.2) - (1.2)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} [7.2 - 3.24] - [4.8 - 1.44]$$

$$= \frac{1}{2} [3.96 - 3.36] = \frac{1}{2} (0.60)$$

$$= 0.30 = 0.3$$

(ii) $P(0.5 \leq x < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f(x) dx$

$$= \int_{0.5}^1 x dx + \int_1^{1.5} (2-x) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} \right)_{0.5}^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right)_1^{1.5}$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(0.5)^2}{2} \right) + \left(\frac{2(1.5) - (1.5)^2}{2} \right) - \left(\frac{2(1) - (1)^2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{0.25}{2} \right) + \frac{6 - 2.25}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1 - 0.25 + 6 - 2.25 - 3}{2} = \frac{4 - 2.50}{2}$$

$$= \frac{1.50}{2} = 0.75$$

3) ஒரு பாலி விற்பனையகத்தில் விகிதவாக்கிப்பெரும் பாலின் அளவு சமவாய்ப்பு மாந் X என்க. குறைந்தபட்சம் 200 லி மற்றும் அதிகபட்சம் 600 லி பற்களால் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} K & 200 \leq x \leq 600 \\ 0 & \text{பிறமதிப்புகள்} \end{cases}$ எனின், (i) K மதிப்பு காண்க.

(ii) பரவல் சார்பு காண்க (iii) 300 லி மற்றும் 500 லி கிளபெய் தினாசரி விற்பனை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

தீர்வு: (i) $f(x)$ நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு என்பதால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{200}^{600} K dx = 1 \Rightarrow K(x)_{200}^{600} = 1$$

$$\Rightarrow K(600 - 200) = 1$$

$$\Rightarrow K(400) = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{400}}$$

(ii) $x < 200$ எனின் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$

$200 \leq x \leq 600$ எனின்

$$F(x) = \int_{-\infty}^{200} 0 dx + \int_{200}^x K dx$$

$$= 0 + K(x)_{200}^x$$

$$= \frac{1}{400} (x - 200) = \frac{x - 200}{400}$$

$$x > 600 \text{ எனில் } F(x) = \int_{-\infty}^{200} 0 dx + \int_{200}^{600} k dx + \int_{600}^x 0 dx$$

$$= 0 + k(x)_{200}^{600} + 0$$

$$= \frac{1}{400} (600 - 200) = \frac{400}{400} = 1$$

$$\therefore \text{பரவல் சார்பு } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 200 \\ \frac{x-200}{400} & 200 \leq x \leq 600 \\ 1 & x > 600 \end{cases}$$

(iii) 200-ல் மற்றும் 500-ல் இடையே திணிவு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \int_{200}^{500} f(x) dx = \int_{200}^{500} k dx$$

$$= k \left[x \right]_{200}^{500} = \frac{1}{400} [500 - 200]$$

$$= \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

4) சமவாய்ப்பு மாதிரி X-இன் நிகழ்தகவு அபுத்த சார்பு $f(x) = \begin{cases} k e^{-x/3}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

எனில்

(i) k மதிப்பு (ii) பரவல் சார்பு (iii) $P(X < 3)$

(iv) $P(5 \leq X)$ (v) $P(X \leq 4)$ சூழியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:- $f(x)$ நிகழ்தகவு அபுத்த சார்பு என்பதால், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_0^{\infty} k e^{-x/3} dx = 1$$

$$k \left(\frac{e^{-x/3}}{-\frac{1}{3}} \right)_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow -3k \left(e^{-x/3} \right)_0^{\infty} = 1$$

$$-3k (e^{-\infty} - e^0) = 1 \Rightarrow -3k (0 - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 3k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{3}}$$

(i) பரவல் சார்பு:

$$x \leq 0 \text{ எனில் } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du = 0$$

$$x > 0 \text{ எனில் } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_0^x k e^{-u/3} du$$

$$= 0 + k \left(\frac{e^{-u/3}}{-\frac{1}{3}} \right)_0^x$$

$$= \frac{k}{-1/3} \left(e^{-x/3} - e^0 \right) = e^0 - e^{-x/3}$$

$$= 1 - e^{-x/3}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/3} & x > 0 \end{cases}$$

(ii) $P(5 \leq X) = P(X \geq 5)$

$$= 1 - P(X < 5) = 1 - F(5)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-5/3} \right) = e^{-5/3}$$

$$= e^{-5/3}$$

(iv) $P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{-4/3}$

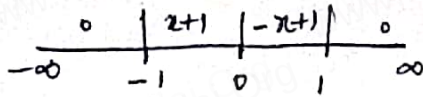
5) சமவாய்ப்பு மாதிரி X-இன் நிகழ்தகவு

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) பரவல் சார்பு $F(x)$ (ii) $P(-0.5 \leq x \leq 0.5)$ காண்க.

தீர்வு:- $x < -1$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$

$-1 \leq x < 0$ எனில்



$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^x (u+1) du$$

$$= 0 + \left(\frac{u^2}{2} + u \right)_{-1}^x = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)^2}{2}$$

$0 \leq x < 1$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_{-1}^0 (u+1) du$

$$+ \int_0^x (-u+1) du$$

$$= 0 + \left(\frac{u^2}{2} + u \right)_{-1}^0 + \left(-\frac{u^2}{2} + u \right)_{0}^x$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) - (0 + 0)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x = \frac{1 - x^2 + 2x}{2}$$

$x \geq 1$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_{-1}^0 (u+1) du$

$$+ \int_0^x (-u+1) du + \int_1^x 0 dx$$

$$= 0 + \left(\frac{u^2}{2} + u \right)_{-1}^0 + \left(-\frac{u^2}{2} + u \right)_{0}^1 + 0$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1-x^2+2x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(ii) $P(-0.5 \leq x \leq 0.5) = F(0.5) - F(-0.5)$

$$= \frac{1 - (0.5)^2 + 2(0.5)}{2} - \frac{(-0.5+1)^2}{2}$$

$$= \frac{1 - 0.25 + 1}{2} - \frac{0.25}{2}$$

$$= \frac{2 - 0.5}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

6. சமவாய்ப்பு மாதிரி X -இன் பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+x) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

எனில் (i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$

(ii) $P(0.3 \leq X \leq 0.6)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:- $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$

$\therefore$ நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{மற்ற இடங்களில்} \end{cases}$$

(ii) $P(0.3 \leq X \leq 0.6) = F(0.6) - F(0.3)$

$$= \frac{1}{2} [(0.6)^2 + 0.6] - \frac{1}{2} [(0.3)^2 + 0.3]$$

$$= \frac{1}{2} [0.36 + 0.6] - \frac{1}{2} [0.09 + 0.3]$$

$$= \frac{1}{2} [0.96 - 0.39] = \frac{1}{2} (0.57)$$

$$= 0.285$$

எனது 11.13 ௮௮ சமவாய்ப்பு மாதிரி X -இன்

பரவல் சார்பு, $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$

எனில்,

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$

(ii) $P(0.2 \leq X \leq 0.7)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases}$

∴ நிகழ்தகவு அபர்த்த சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{வறு கிடைக்கவில்லை} \end{cases}$$

$$(ii) P(0.2 \leq x \leq 0.7) = F(0.7) - F(0.2) \\ = 0.7 - 0.2 \\ = 0.5$$

கணித எதிர்பார்ப்பு:

X என்ற சமவாய்ப்பு லாபியின் நிகழ்தகவு சார்பு $f(x)$ எனில், அதன் கணித எதிர்பார்ப்பு,

$$E(x) = \begin{cases} \sum x f(x), & X \text{ தனிநிலைவாய்ப்பு} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & X \text{ அடிநிலைவாய்ப்பு} \end{cases}$$

Note: i) $E(g(x)) = \sum g(x) f(x)$ $g(x)$ தனிநிலைவாய்ப்பு எனில்

ii) $E(1) = 1$

பரவற்படி:

$$Var(x) = E(x - E(x))^2$$

$$\therefore \text{திட்டலக்கம் } \sigma = \sqrt{Var(x)}$$

பண்புகள்:-

(i) $E(ax+b) = aE(x) + b$

(ii) $E(ax) = aE(x)$

(iii) $E(a) = a$

(iv) $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

(v) $Var(ax+b) = a^2 Var(x)$

(vi) $Var(ax) = a^2 Var(x)$

(vii) $Var(a) = 0$

சும 11.16 திட்டக்காலத்தும் சார்பு ஒரு நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பினைக் குறிக்கிறது என்க.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	c^2	$2c^2$	$3c^2$	$4c^2$	c	$2c$

(i) C-ன் மதிப்பு (ii) சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

Sol:- $f(x)$ நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு என்பதால், $\sum f(x) = 1$

$$\Rightarrow c^2 + 2c^2 + 3c^2 + 4c^2 + c + 2c = 1$$

$$\Rightarrow 10c^2 + 3c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$$

$c = -\frac{1}{2}$ என்பது ஏற்பாடுகொடுக்காது.

$$\therefore c = \frac{1}{5}$$

x	1	2	3	4	5	6	Total
f(x)	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\sum f(x) = 1$
$xf(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\sum xf(x) = \frac{115}{25}$
$x^2 f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{64}{25}$	$\frac{125}{25}$	$\frac{360}{25}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{585}{25}$

(ii) சராசரி $E(x) = \sum x f(x) = \frac{115}{25}$

$$E(x) = 4.6$$

பரவற்படி $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{115}{25}\right)^2$$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 = \frac{585}{25} - \frac{529}{25}$$

$$= \frac{56}{25} = 2.24$$

P. ANURADHA

பயிற்சி 11.4 கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு

லாபி X க்கு நிகழ்தகவு மிகுந்த சாத்தியக்கூறுகள்
சராசரி லாபமும் பரவல்பு காண்க.

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x=2, 5 \\ \frac{1}{5} & x=0, 1, 3, 4 \end{cases}$$

தீ.

x	0	1	2	3	4	5	Σx
f(x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
xf(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{23}{10}$
x ²	0	1	4	9	16	25	-
x ² f(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{25}{10}$	$\frac{81}{10}$

$$\text{சராசரி } E(X) = \sum x f(x) = \frac{23}{10} = 2.3$$

$$\begin{aligned} \text{பரவல்பு } Var(X) &= \sum x^2 f(x) - \left(\sum x f(x) \right)^2 \\ &= \frac{81}{10} - \left(\frac{23}{10} \right)^2 \\ &= 8.1 - 5.29 = 2.81 \end{aligned}$$

$$(ii) f(x) = \frac{4-x}{6} \quad x=1, 2, 3$$

$$x=1 \Rightarrow f(x) = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$x=2 \Rightarrow f(x) = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6}$$

$$x=3 \Rightarrow f(x) = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

x	1	2	3	Total
f(x)	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\sum f(x) = 1$
xf(x)	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\sum xf(x) = \frac{10}{6}$
x ²	1	4	9	
x ² f(x)	$\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{20}{6}$

$$\therefore \text{சராசரி } E(X) = \sum x f(x) = \frac{10}{6}$$

$$= 1.66 \dots$$

$$= 1.67$$

$$\begin{aligned} \text{பரவல்பு } Var(X) &= \sum x^2 f(x) - \left(\sum x f(x) \right)^2 \\ &= \frac{20}{6} - \left(\frac{10}{6} \right)^2 \\ &= \frac{120}{36} - \frac{100}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0.555 \dots \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

2) நான் குதிரைப் பந்தகம் மற்றும் தேயு
கூடுப் பந்தகம் களாண்ட ஒரு கூடையி
-லிருந்து பதிலாக திடீர்த் திடீர்த்
திரு பந்தகம் வளையின் சாத்தியக்கூறு
-கின்றன. திடீர்த் பந்தக வளையின்
சாத்தியக்கூறு கூறுகளை X என்க.
X- க்கு நிகழ்தகவு மிகுந்த சாத்தியக்கூறு
சராசரிமையும் காண்க.

$$\text{தீ.:- மொத்த பந்தகம்} = 4R + 3B = 7$$

திருநாற்கூறு 2 பந்தகம் பதிலாக
திடீர்த் திடீர்த் சாத்தியக்கூறு
-கின்றன.

X என்பது சாத்தியக்கூறு பந்தகம்
திருப்பாக திருக்கும் சாத்தியக்கூறு
என்க.

$$\therefore X \text{ க்கு மதிப்புகள் } 0, 1, 2.$$

$$f(0) = P(X=0) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= P(X=1) = P(R+B) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= P(X=2) = P(RR) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

x	0	1	2	Total
f(x)	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\sum f(x) = 1$
சராசரி	$= \sum x f(x) = 0 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$			

$$\therefore X = 40 \text{ எனில் } f(40) = \frac{4C_2 \times 8C_0}{28 \times 66} = \frac{6}{66}$$

$$X = 10 \text{ எனில் } f(10) = \frac{4C_1 \times 8C_1}{18 \times 66} = \frac{32}{66}$$

$$X = -20 \text{ எனில் } f(-20) = \frac{4C_0 \times 8C_2}{28 \times 66} = \frac{28}{66}$$

X	40	10	-20	Total
f(x)	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	$\Sigma f(x) = 1$
xf(x)	$\frac{240}{66}$	$\frac{320}{66}$	$\frac{-560}{66}$	$\Sigma xf(x) = 0$

$\therefore$ எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பும்

தொகை $E(X) = \Sigma xf(x) = 0$

மேலும் $E(X^2) = \Sigma x^2 f(x)$

$$= \frac{1600 \times 6}{66} + \frac{100 \times 32}{66} + \frac{400 \times 28}{66}$$

$$= \frac{9600 + 3200 + 11200}{66} = \frac{24000}{66}$$

$$\therefore \text{பரவற்படி } V(X) = \Sigma x^2 f(x) - (\Sigma xf(x))^2$$

$$= \frac{4000}{11} - 0$$

$$\therefore V(X) = \frac{4000}{11}$$

எனது 11.18 :- $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகள்} \end{cases}$

எனது 11.18 இல் கொடுத்த அடித்த சார்பு உண்மையில் சமவாய்ப்பு மாதிரி X-க்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு: X தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாதிரி என்பதால்,

$$\text{சராசரி } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \cdot \frac{n!}{a^{n+1}} = \lambda \cdot \frac{1!}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \cdot \frac{2!}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore \text{பரவற்படி } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\therefore V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

எனது 11.4

i) ii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகள்} \end{cases}$

சராசரி, பரவற்படி காண்க.

தீர்வு: சராசரி $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^2 x 2(x-1) dx$

$$= 2 \int_1^2 x^2 - x dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 2 \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = 2 \left[\frac{7}{3} - \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2 \left(\frac{14-9}{6} \right) = \frac{5}{3}$$

$$\therefore E(X) = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_1^2 x^2 (x-1) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\
 &= 2 \left[\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right] \\
 &= 2 \left[\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right] = 2 \left[\frac{15}{4} - \frac{7}{3} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{45 - 28}{12} \right] = \frac{17}{6} \\
 \therefore \text{பரவற்பு } Var X &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\
 &= \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{17}{6} - \frac{25}{9} = \frac{51}{18} - \frac{50}{18} = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$
எனவே சராசரி, பரவற்பு காண்க.

தீர்வு: சராசரி $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
 $= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1!}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
 $= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \right] = 2$
 $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

$$\begin{aligned}
 Var X &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\
 &= 8 - (2)^2 = 8 - 4 = 4
 \end{aligned}$$

5) ஒரு பயணிகள் கிரயஸ் மூல்தவரூப அணுமணி அணிந்திருக்கும் ஒரு நினைவுப் - திரை சதிரிபாண அணிந்திருக்கிறதே. ஒரு மூல்தவரூப நாள் காணாமல், ஒரு மூல்தவரூப தனது கிரயஸ் கிரயஸ் நினைவுத்திரை தவிர்த்து, மூல்தவரூப

ரயஸ் நினைவுத்திரை அணியும் அணிந்திருக்கிற ரயஸ் கிரயஸ் காந்திரைக்கும் அணிந்திருக்கிற X என நினைவுகளைக் குறிக்கலாம். X-ன் நினைவுத்திரை அணிந்த சராசரி

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனவே சமவாய்ப்பு மூல்த X-ன் எதிர் பார்ப்பு மதிப்பை காண்க.

தீர்வு: X-ன் எதிர் பார்ப்பு மதிப்பு

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^{30} \frac{1}{30} x dx = \frac{1}{30} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{30} \\
 &= \frac{1}{30} \cdot \frac{(30)^2}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ நிமிஷங்கள்}
 \end{aligned}$$

6) காண்க தயாரிக்கப்படும் பொது அலகில் காண்க மணிநேரம் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு மின்னணு சாதனமொன்றின் பகுதியையும் அணிந்திருக்கிற அணிந்த சராசரி $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{பிற} \end{cases}$

எனவே கிரயஸ் சாதனத்தின் எதிர் பார்ப்பு மதிப்பு அலகில் காண்க.

தீர்வு: எதிர் பார்ப்பு மதிப்பு அலகில் காண்க

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^{\infty} 3x e^{-3x} dx = 3 \int_0^{\infty} x e^{-3x} dx \\
 &= 3 \cdot \frac{1!}{3^2} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

7) சமவாய்ப்பு மூல்த X-ன் நினைவுத்திரை அணிந்த சராசரி $f(x) = \begin{cases} 16x e^{-4x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
ஆகும். சமவாய்ப்பு மூல்த X-ன் சராசரி மற்றும் பரவற்பு காண்க.

தீர்வு: சராசரி $E(X) = \int_0^{\infty} 16x^2 e^{-4x} dx$
 $= 16 \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x} dx = 16 \cdot \frac{2!}{4^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{பரவற்படி} &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ E(X^2) &= \int_0^{\infty} 16x^3 e^{-4x} dx = 16 \int_0^{\infty} x^3 e^{-4x} dx \\ &= 16 \cdot \frac{3!}{4^4} = \frac{4 \times 6}{4^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Var } X &= \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

அறிஞர் பரவல்கள்

1) ஒரு புள்ளி பரவல் :

$$f(x) = P(X=x_0) = 1$$

கிடைக்கக்கூடிய பரவல்கள்:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_0 \\ 1 & x_0 \leq x < \infty \end{cases}$$

சராசரி $E(X) = x_0$

பரவற்படி $\text{Var } X = 0$

2) இரு புள்ளி பரவல் :

a) சமச்சீரற்ற உணர்வு:

$$f(x) = \begin{cases} p & x=x_1 \quad (0 < p < 1) \\ 1-p & x=x_2 \end{cases}$$

கிடைக்கக்கூடிய பரவல்கள்:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p & x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & x \geq x_2 \end{cases}$$

$$\text{சராசரி } E(X) = px_1 + qx_2 \quad (q=1-p)$$

$$\text{பரவற்படி } \text{Var}(X) = pq(x_2 - x_1)^2$$

b) சீரான உணர்வு: $p=q=\frac{1}{2}$ எனில்,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x=x_1 \\ \frac{1}{2} & x=x_2 \end{cases} \quad 0 < p < 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{1}{2} & x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & x \geq x_2 \end{cases}$$

$$\text{சராசரி } E(X) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\text{பரவற்படி } V(X) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

3) தெய்வப் பரவல் :-

$X(\text{தெய்வம்})=1$, $X(\text{தோல்வியுறு})=0$ என
உணர்வுக்கப்படுக சமவாய்ப்பு மாற்றி X க்கு

$$f(x) = \begin{cases} p & x=1 \\ q & x=0 \end{cases} \quad (0 < p < 1) \quad (q=1-p)$$

எனவே X என்பது தெய்வப் பரவல் சமவாய்ப்பு
மாற்றி எனவும் $f(x)$ தெய்வப் பரவல்
எனவும் அழைக்கப்படும்.

$X \sim \text{Ber}(p)$ எனவே X க்கு நிகழ்தகவு
பரவல்

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x=0,1$$

ஆகவே

தெய்வப் பரவல்

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \leq x < 1 \quad (q=1-p) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{சராசரி } E(X) = p \quad (\mu = p)$$

$$\text{Var } X = pq$$

$$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = pq \end{cases}$$

பொருள் பரவல்

பொருள் சமவாய்ப்பு மாற்றி X என
-வது n -சார்பற்ற செயற்கைகள்
தெய்விகளின் எண்ணிக்கையைக்
கொண்டிருக்க சமவாய்ப்பு
நிகழ்தகவு p மற்றும் தோல்வியின்
நிகழ்தகவு q எனவே X -ன் நிகழ்தகவு
பரவல்

$$f(x) = {}^n C_x p^x q^{n-x} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$\text{சராசரி } \mu = np$$

$$\text{பரவற்படி } \sigma^2 = npq = np(1-p)$$

$$\text{கிடைக்க } p+q=1$$

கூற்று: $p = q = \frac{1}{2}$ எனும் போது

சராசரி $\frac{n}{2}$, பரவல் $\frac{n}{4}$ ஆகும்.

எகா 11.19 பின்வருவனவற்றிற்கு நடுநிலைப் பரவல் காணவும்.

- (i) ஒரு சீரான நாணயங்கள் ஒரு குறை சிண்டப்படுகின்றன மற்றும் சீரானகரின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க.
(ii) ஒரு சீரான பகடை 10 குறை 2 டட்டப் படுகிறது மற்றும் எண் 4 தேர்வுவதின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க.

தீர்வு: - (i) $n = 5$.

X என்பது சீரானகரின் எண்ணிக்கை என்க

$\therefore$ நடுநிலைப் பரவல் $p = \frac{1}{2}$
பரவல் $q = \frac{1}{2}$

$\therefore$ நடுநிலைப் பரவல்:

$$f(x) = nC_x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$f(x) = 5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} \quad x = 0 \text{ to } 5$$

$$f(x) = 5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad x = 0 \text{ to } 5$$

(ii) $n = 10$.

X என்பது எண் 4 தேர்வுவதின் எண்ணிக்கை என்க.

$$p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = \frac{5}{6}$$

$$\therefore f(x) = nC_x p^x q^{n-x} \quad x = 0, \dots, n$$

$$f(x) = 10C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{10-x} \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

பயிற்சி 11.5

1) கீழ்க்காணும் நடுநிலைப் பரவல் $B(n, p)$ க்காக $P(X=k)$ என்பதைக் காண்க. (i) $n=6, p=\frac{1}{3}, k=3$

$$(i) P(X=x) = nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ = 6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$$

$$\therefore P(X=3) = 6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{27} \times \frac{8}{27} \\ = \frac{160}{729}$$

(ii) $n=10, p=\frac{1}{5}, k=4$

$$P(X=x) = 10C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-x}$$

$$\therefore P(X=4) = 10C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \\ = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \\ = 210 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

(iii) $n=9, p=\frac{1}{2}, k=7$

$$P(X=k) = nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=7) = 9C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ = 9C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{36}{512} = \frac{9}{128}$$

எகா 11.20 பத்து வினாக்கள் தொகுதி ஒரு பல்வாய்ப்புத் தேர்வில், ஒவ்வொரு

வினாவிற்கும் நான்கு தவறச் சிதறல் விடைகளில் ஒன்று சரியான விடையாகும்.

உலகத்தின் அடிப்படையிலே ஒரு மாணவர்

விடையளிக்கிறார் என்க. சரியான

விடைகளின் எண்ணிக்கையை X

குறிக்கிறது என்க (i) நடுநிலைப் பரவல்

(ii) மாணவர் ஒரு சரியான விடைகள் அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு (iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு விடை சரியானதாக இருக்க நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

Ex X என்பது வலுநீரின் எண்ணிக்கை.
என்க.

$\therefore X$ ன் மதிப்புகள் $0, 1, 2, 3, \dots, 10$

நிள்கு கவனச்சிதறல் விடைகளில்

புள்ளி சரிவானது என்பதால்,

$$p = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4} \text{ ஆக } n = 10.$$

$$(i) \therefore f(x) = nC_x p^x q^{n-x} \quad x=0 \text{ to } 10$$

$$\Rightarrow f(x) = 10C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \quad x=0 \text{ to } 10$$

(ii) ஒரு சரியான விடைகளை சிளிப்பதற்

-கான நிகழ்தகவு $= P(X=7)$

$$= f(7) = 10C_7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= 10C_3 \cdot \frac{1}{4^7} \cdot \frac{3^3}{4^3}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{3^3}{4^{10}} = 120 \left(\frac{3}{4^{10}}\right)$$

(iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு சரியான விடை
-யளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - f(0) = 1 - 10C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

எகா 11.21 ஒரு ந.குறப்பு மாந் X கன்
சராசரி மற்றும் பரவற்பு குறைபை 2 மற்றும்
1.5 ஆகும். (i) $P(X=0)$ (ii) $P(X=1)$

(iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:- சராசரி $np = 2$ — (1)

பரவற்பு $npq = 1.5$

$$\Rightarrow \frac{npq}{np} = \frac{1.5}{2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(1) ன் பிரதியிட

$$n \times \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow n = 8$$

$$(i) P(X=x) = nC_x p^x q^{n-x}$$

$$(i) P(X=0) = 8C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$= 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$(ii) P(X=1) = 8C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$= 8 \times \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$(iii) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

எகா 11.22 ABC நெடுமம் தயாரிக்கும்
பொருட்களில் சராசரியாக 20% பொருட்கள்
குறைபாடுள்ளவை எனக் கண்டறியப்பட்டது.
சமவாய்ப்பு குறைபாடு கிதிருகிறது 6 பொருட்கள்
குறைந்ததைக் கண்டறிந்தது. மேலும் குறைபாடுள்ள
பொருட்களின் எண்ணிக்கையை X
குறித்தால் (i) கிருபொருட்கள் குறைபாடு
-எனவை (ii) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள்
குறைபாடுள்ளது (iii) குறைந்தபட்சம் கிரு
பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை,
ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவு காண்க.

$$\underline{\text{தீர்வு}}:- n = 6, p = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

X என்பது குறைபாடுள்ள பொருட்களின்
எண்ணிக்கை என்க.

$$f(x) = nC_x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(x) = 6C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{6-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, 6$$

(i) கிரு குறைபாடுள்ள பொருட்களுக்கான நிகழ்தகவு = $f(2)$

$$= {}^6C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{4^4}{5^4}$$

$$= 15 \cdot \left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு = $P(X \leq 1)$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$= {}^6C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^6 + {}^6C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= 1 \times 1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6 + 6 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= \frac{4^6}{5^6} + 6 \times \frac{4^5}{5^6} = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^5 \frac{10}{5} = 2 \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

(ii) குறைந்தபட்சம் கிரு பொருட்கள் குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

பயிற்சி 11.5

1) கீழ்க்காணும் ந.ருறுப்புப் பரவலி $B(n, p)$ -க்காக $P(X=k)$ எண்பது

2) எந்த முயற்சியிலும் ஒரு கிண்கிணத்திற்கு தாக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். பத்து முறை கிண்கிண சிவந்தாக்க முயற்சிக்கிறார் எண்கிண்கிண்க. கிண்கிணத்தாக்க

(i) சரியாக 4 முறைகள் (ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை தாக்குவதற்கு சிகிச்சைநீர்ந்தாக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு: $n=10, p=\frac{1}{4}$

$$\therefore q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(X=x) = {}^nC_x p^x q^{n-x} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

(i) சரியாக 4 முறைகள் கிண்கிணத்தாக்க நிகழ்தகவு = $P(X=4)$

$$= {}^{10}C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை கிண்கிண தாக்குவதற்கான நிகழ்தகவு = $P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

3) கீழ்க்காணும் சோதனைகளில் ந.ருறுப்புப் பரவலைப் பயன்படுத்தி சமவாய்ப்பு மாந் X -ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

(i) 100 தடவை ஒரு சீரான நாணயம் சிண்டப்படுகிறது. தளைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

(ii) 240 தடவை ஒரு சீரான பக்கை சிண்டப்படுகிறது. எண் நாண்டு தோன்றி வந்ததான எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

தீர்வு: (i) $n=100$.

X என்பது நாணயம் சிண்டுதலின் தளைகளின் எண்ணிக்கை என்க.

$$\therefore p = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{சராசரி} = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$\text{பரவற்படி} = npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

(ii) $n=240$.

X என்பது பக்கை 2 முறைகளில் எண் 4 -இன் எண்ணிக்கை என்க.

$$\therefore p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$= (0.9)^{11} (1.2 + 0.9) = 2.1 (0.9)^{11}$$

$$(ii) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - [12C_0 (0.9)^0 (0.1)^{12} + 12C_1 (0.9)^1 (0.1)^{11}]$$

$$= 1 - [1 \times 1 (0.9)^{12} + 12(0.1)(0.9)^{11}]$$

$$= 1 - (0.9)^{11} [0.9 + 1.2]$$

$$= 1 - [2.1(0.9)^{11}]$$

7. ஒரு நடுநிலைப் பரவல் மாதிரி X -இன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 6 மற்றும் 2 ஆகும். (i) நிகழ்தகவு மிகுந்தது (ii) $P(X=3)$ (iii) $P(X \geq 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: சராசரி $np = 6$ ——— ①

திட்டவிலக்கம் $\sqrt{npq} = 2$

Squaring, $npq = 4$

$$\Rightarrow \frac{npq}{np} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{மேல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள } n\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \Rightarrow n = 18$$

(i) $\therefore$ நிகழ்தகவு மிகுந்தது

$$P(X=x) = nC_x p^x q^{n-x} \quad x=0,1,\dots,n$$

$$P(X=x) = 18C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{18-x} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$(ii) P(X=3) = 18C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

$$(iii) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - \left[18C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{18} + 18C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \left[1 \times 1 \times \frac{2}{3} + 18 \times \frac{1}{3} \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \left[\frac{2}{3} + 6 \right] = 1 - \frac{20}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{17}$$

8) $4P(X=4) = P(X=2)$ மற்றும் $n=6$ எனும்படி உள்ள $X \sim B(n, p)$ க்கு பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\text{தீர்வு: } 4P(X=4) = P(X=2), \quad n=6$$

$$4 \left[{}^6C_4 p^4 q^2 \right] = {}^6C_2 p^2 q^4$$

$$4 \frac{p^4}{p^2} = \frac{q^4}{q^2}$$

$$\Rightarrow 4p^2 = q^2 \Rightarrow 4p^2 = (1-p)^2$$

$$4p^2 = 1 + p^2 - 2p$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 1 - p^2 + 2p = 0$$

$$\Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{3}, -1$$

$p = -1$ என்பது பொருத்ததல்ல.

$$\therefore p = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{சராசரி} = np = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

9) 5 சாற்பற்றை சோதனைகளை n மூலம் ஒரு நடுநிலைப் பரவலின் 1 மற்றும் 2 வெற்றிக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4096 மற்றும் 0.2048 ஆகும். நடுநிலைப் பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவல்-படி காண்க.

$$\text{தீர்வு: } n=5 \Rightarrow P(X=x) = {}^5C_x p^x q^{5-x}$$

$$P(X=1) = {}^5C_1 p^1 q^4 = 5p q^4 = 0.4096$$

$$P(X=2) = {}^5C_2 p^2 q^3 = 10p^2 q^3 = 0.2048$$

$$\Rightarrow \frac{10p^2 q^3}{5p q^4} = \frac{0.2048}{0.4096} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4p = q$$

$$4p = 1 - p$$

$$5p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{5}$$

$$\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \text{சராசரி} = np = 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

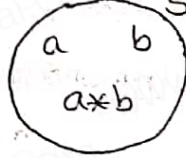
$$\text{பரவல்-படி} = npq = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

நடுநடுப்புச் செயலிகள்

வகையாற்றை (அடைவப்பண்பு)

செயல்பு மெய்யுறையுள்ள கணம் என்க. $\forall a, b \in S$ க்கும் தனித்த $a \times b$ ஆனது $a \times b \in S$ எனும்படி அமைப்பது மட்டும், $\times$ ஆனது S ல் நடுநடுப்பு செயலி எனப்படும்.

பெ. நார்த்திகேயன், PGT
பெ. எஸ். கிருமங்கோண்டை
தருவாரூர் மாவட்டம்



1) பரிமாற்றுப்பண்பு

ஆவனாரு $a, b \in S$ க்கும்
 $a \times b = b \times a$

2) சேர்ப்புப் பண்பு

$\forall a, b, c \in S$ க்கு
 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3) சமன்புப் பண்பு

$e \in S$ எனப்படு S -ன் சமனி
மூலம் எனில்
 $\forall a \in S$ க்கு $a \times e = e \times a = a$

4) எதிர்மறைப் பண்பு

b எனப்படு a ன் எதிர்மறை
மூலம் எனில்
 $\forall a \in S$ $a \times b = b \times a = e$
 $b = a^{-1}$ ஆகும்

பயிற்சி 12.1

1. கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள
கணங்களின் மீது வகையாற்றக்கப்
பட்டிருக்கும் $\times$ ஆர் நடுநடுப்புச்
செயலியா எனத் தீர்மானிக்க.

அ) R ன் மீது $a \times b = a \cdot |b|$

$a, b \in R$ என்க
 $\Rightarrow |b| \in R$

$a \cdot |b| \in R$

$\Rightarrow a \times b \in R \quad \forall a, b \in R$

$a, b \in R \Rightarrow a \times b \in R$

$\times$ ஆனது R ல் நடுநடுப்பு செயலி ஆகும்

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ -ன் மீது

$a \times b = (a, b)$ -ல் சிலியது

$a, b \in A$ என்க

எடுத்துக்காட்டாக $\min(1, 2) = 1 \in A$

$\min(1, 5) = 1 \in A$

$\min(2, 3) = 2 \in A$

$\therefore \min(a, b) \in A$

$a \times b \in A \quad \forall a, b \in A$

$a, b \in A \Rightarrow a \times b \in A$

$\times$ ஆனது A ல் நடுநடுப்பு செயலியாகும்

(iii) $a \times b = a \sqrt{b}$, R ன் மீது

$a, b \in R$ என்க

மிகை எண்களுக்கு $a \sqrt{b} \in R$ என
இருப்பினும்

குறை எண்களுக்கு $a \sqrt{b} \notin R$

$\because 2, -2 \in R$
 $2\sqrt{-2} \notin R$

$\Rightarrow a \times b \notin R$

எனவே $\times$ ஆனது R ல் நடுநடுப்பு
செயலி அல்ல.

2) Z -ன் மீது $\otimes$ என்ற செயலி
பின்வருமாறு வகையாற்றக்கப்பட்டுள்ளது.

$(m \otimes n) = m^n + n^m ; \forall m, n \in Z$

$\otimes$ ஆனது Z ல் அடைவப் பண்பை
பூர்த்தி செய்யுமா?

பெற்றுள்ளதா?

$m, n \in Z$ என்க

2தாரணமாக $m=2$ $n=-2$ எனில்

$m^n + n^m = 2^{-2} + (-2)^2$

$= \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \notin Z$

$m^n + n^m \notin Z$

$m \otimes n \notin Z$

எனவே $\otimes$ ஆனது Z ல் நடுநடுப்பு
செயலி அல்ல.

③ R ன் மீது $*$ ஆனது

$(a*b) = a+b+ab-7$ என வரையறுக்கப் பட்டால் $*$ R ன் மீது அடையுபவற்றா? அவ்வாறானால் $3 * \left(\frac{-7}{15}\right)$ காண்க.

$a, b \in R$ என்க

$$\Rightarrow a, b, ab \in R$$

$$\Rightarrow a+b+ab-7 \in R$$

$$\Rightarrow a*b \in R$$

$\therefore *$ ஆனது R ல் அடையுபவற்றா

$$3 * \left(\frac{-7}{15}\right)$$

$$a*b = a+b+ab-7$$

$$3 * \left(\frac{-7}{15}\right) = 3 - \frac{7}{15} + 3\left(\frac{-7}{15}\right) - 7$$

$$= \frac{45-7-21-105}{15} = \frac{45-133}{15}$$

$$= \frac{-88}{15}$$

$$\textcircled{4} A = \{a + \sqrt{5}b, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

என்க வடிவம்மான எருக்கல் A ன் மீது ஆர் A -க்குப் பற்றிச் செயல் ஆகுமா என பரிசோதிக்க.

$$x = a + \sqrt{5}b \quad y = c + \sqrt{5}d$$

$$x, y \in A \text{ மற்றும் } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} xy &= (a + \sqrt{5}b)(c + \sqrt{5}d) \\ &= ac + 5bd + \sqrt{5}ad + \sqrt{5}bc \\ &= (ac + 5bd) + \sqrt{5}(ad + bc) \end{aligned}$$

$$\therefore xy \in A$$

$$x, y \in A \Rightarrow xy \in A$$

$\therefore$ வடிவம்மான எருக்கல் A ன் ஆர் A -க்குப் பற்றிச் செயல்படும்.

⑤ $*$ என்க ஆர் A -க்குப் பற்றிச் செயல்படும்

என் மீது வரையறுக்கப் படுகிறது

$$a*b = \frac{a+b}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}, *$$

அடையுபவற்றா, பரிமாற்றப்பண்பு

②

செய்யப்பண்பு ஆகியவற்றை நினைவு எடுக்கிறதா என சோதிக்க.

① அடையுபவற்றா

$$a, b \in \mathbb{Q} \quad a, b \text{ எப்படி விகிதவடிவம்}$$

$$\Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow a*b \in \mathbb{Q}$$

$$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a*b \in \mathbb{Q}$$

$*$ ஆனது $\mathbb{Q}$ ல் அடையுபவற்றா,

② பரிமாற்றப்பண்பு

$$a*b = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$a*b = b*a \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

$*$ ஆனது பரிமாற்றப்பண்பை நினைவு எடுக்கிறது,

③ செய்யப்பண்பு

$$a*(b*c) = a*\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \left(\frac{b+c}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{2a + b + c}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$a*(b*c) = \frac{2a + b + c}{4} \quad \text{--- ①}$$

$$(a*b)*c = \left(\frac{a+b}{2}\right)*c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$(a*b)*c = \frac{a+b+2c}{4} \quad \text{--- ②}$$

①, ② லிருந்து

$$(a*b)*c \neq a*(b*c)$$

$\mathbb{Q}$ ல் $*$ ஆனது செய்யப்பண்பை நினைவு எடுக்கிறது,

(ii) $*$ ஆனது சமனிப்பண்பு மற்றும்

தனிமண்பண்பு ஆகியவை ஏன் மீது உண்மையாகுமா என சோதிக்க

$$a*b = \frac{a+b}{2}; \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

① சமனிப பண்பு

$a \in G$ என்க

e என்பது G ன் சமனிபுயப்பு என்க

$\times$ ன் வகையணதல்படி $a \times e = \frac{a+e}{2}$

e ன் வகையணதல்படி $a \times e = a$

$$\frac{a+e}{2} = a$$

$$a+e = 2a$$

$$e = 2a - a$$

$$e = a$$

$\forall a \in G$

ஆவ்வாறு உறுவ்பும் சமனிபுயப்பு இது நவநாது

எனவே $\times$ க்கு சமனிபுயப்பு இல்லை

சமனிபண்பை நிறைவு செய்வாது.

② எதிர்மறைப்பண்பு

$\times$ க்கு சமனிபுயப்பு இல்லை

எனவே $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$ உறுவாது
வகையணதல் இயலாது

$\times$ ஆனது எதிர்மறை பண்பை நிறைவு செய்வாது.

(சமனி பண்பு இல்லை எனவே எதிர்மறை பண்பு இல்லை) என ஒரு வரியில் எழுதலாம்

⑥ $\times$ என்ற ஈருறுப்பு செயலி ஆனது

$A = \{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் மீது

பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்படலாம்

பின்வரும் பட்டியலை பூர்த்தி செய்க

$\times$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

i) அட்ட வகையிலிருந்து

$$b \times a = c$$

$$\therefore a \times b = c \quad \times \text{ ஆனது பரிமாற்று பண்பு உடையது}$$

$$ii) c \times a = a \Rightarrow a \times c = a$$

$$iii) b \times c = a \Rightarrow c \times b = a$$

$\times$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

⑦ $A = \{a, b, c, d\}$ என்ற கணத்தின் மீது

$\times$ என்ற ஈருறுப்பு செயலியை பின்வரும் பட்டியலுடன் கருதுக

$\times$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

இது பரிமாற்றுப்பண்பு மற்றும் சேர்ப்பு பண்புகளை எபற்றுகின்றன?

① பரிமாற்று பண்பு

$$a \times b = c \quad \text{ஆனால்} \quad b \times a = d$$

$$\Rightarrow a \times b \neq b \times a$$

$$a \times c = b \quad \text{ஆனால்} \quad c \times a = c$$

$$\Rightarrow a \times c \neq c \times a$$

எனவே $\times$ ஆனது பரிமாற்றுப்பண்பு உடையதல்ல.

② சேர்ப்பு பண்பு

$$(a \times b) \times c = c \times c = a$$

$$a \times (b \times c) = a \times b = c$$

$$\therefore (a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$$

$\times$ ஆனது சேர்ப்பு பண்பை உடையதல்ல.

$$⑧ \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{என்பவைகள்}$$

ஒரு மாதிரியான வகையிலான உதைய ஒத்தும் சீனது பூலியன் அணிகளின் அணி

④ (i) $A \vee B$ (ii) $A \wedge B$ (iii) $(A \vee B) \wedge C$

(iv) $(A \wedge B) \vee C$ ஆகியவைகளை காண்க.

$$(i) A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) (A \vee B) \wedge C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) (A \wedge B) \vee C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9 (i) M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in R - \{0\} \right\}$$

* என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க * ஆனது M ல் அடையுபெற்றுள்ளதா, அவ்வாறானால் * ஆனது M ன் மீது பரிமாற்று பண்பு, சோம்பு பண்புகளையும் நிறைவு செய்யுமா என சோதிக்க.

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$A, B \in M$ இங்கு $x, y \in R - \{0\}$
 $x \neq 0, y \neq 0$

① அடையுபண்பு

$A, B \in M$ என்க

$$AB = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \because x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \Rightarrow xy \neq 0 \end{matrix}$$

$AB \in M$

$A, B \in M$ பிறகு $AB \in M$

i.e. $A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$

* ஆனது M ல் அடையுபெற்றுள்ளது.

② பரிமாற்று பண்பு

$A, B \in M$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+xy & xy+xy \\ xy+xy & xy+xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2yx & 2yx \\ 2yx & 2yx \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$A * B = B * A$$

* ஆனது M ல் பரிமாற்று பண்பை நிறைவு செய்கிறது

③ சோம்பு பண்பு

அணிகளின் பெருக்கல் எப்போதும்

சோம்பு பண்பிற்கு உட்படம்

$$i.e. A * (B * C) = (A * B) * C.$$

$\forall A, B, C \in M$

* ஆனது M ன் மீது சோம்பு பண்பு நிறைவு செய்கிறது.

$$(ii) M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in R - \{0\} \right\}$$

* என்பது M ன் மீது அடையுபெற்றுள்ளதா (* - அணிப் பெருக்கல்), அவ்வாறு எனில் M -ன் மீது கணியணிபு எதிர்மறை பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனவும் சோதிக்க.

① அடையுப்பண்பு

$$A, B \in M \quad A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in M$$

$$A * B \in M$$

$$A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$$

* ஆனது அடையுப் பண்பு என்பது,

② சமனிப்பண்பு

$$E = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} \text{ என்பது } M \text{ ன் சமனித்துவத் தனித} \\ A \in M \text{ க்கு}$$

$$AE = A$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$2xe = x$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

M ன்

சமனித்துவத்

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$$

இதிலுள்ள $EA = A \quad \forall A \in M$
எனவும் காணலாம்.

M ஆனது சமனித்துவப் பண்பு என்பது
சமனித்துவப் பண்பு என்பதும்,

③ எதிர்மறைப் பண்பு

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} \text{ என்பது } A \text{ ன்} \\ \text{எதிர்மறைத் தனித} \quad A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in M$$

$$AA^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \\ 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2xx^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{4x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in M \text{ என்பது}$$

A ன் எதிர்மறை

இதிலுள்ள $A^{-1}A = E \quad \forall A \in M$
எனவும் காணலாம்.

* ஆனது எதிர்மறைப் பண்பு என்பதும்,

10) i) $A = \mathbb{Q} - \{1\}$ என்க A ன் மீது
* பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$x * y = x + y - xy \quad * \text{ ஆனது } A \text{ ன் மீது}$$

அடையுப் பண்பு என்பது அவ்வாறானால்

A ன் மீது * ஆனது பரிமாற்றுப் பண்பு

மற்றும் இசைவுப் பண்புகளை
நினைவு செய்யுமா என இசைக்க?

$$A = \mathbb{Q} - \{1\}$$

$$x, y \in A \text{ என்க} \quad x \neq 1, y \neq 1$$

$$x * y = x + y - xy$$

① அடையுப்பண்பு

$$x, y \in A \text{ என்க}$$

$$\therefore x \neq 1, y \neq 1$$

$$x - 1 \neq 0, y - 1 \neq 0$$

$$(x - 1)(y - 1) \neq 0$$

$$xy - x - y + 1 \neq 0$$

$$1 \neq x + y - xy$$

$$x * y \neq 1$$

$$\therefore x * y \in A$$

$$x, y \in A \Rightarrow x * y \in A$$

* ஆனது A ன் அடையுப் பண்பு என்பது.

② பரிமாற்றுப் பண்பு

$$x, y \in A \text{ என்க}$$

$$x * y = x + y - xy$$

$$= y + x - yx$$

$$x * y = y * x$$

* ஆனது பரிமாற்றுப் பண்பு என்பதும்
நினைவு செய்யுமா

③ இசைவுப் பண்பு

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z$$

$$= (x+y-xy) + z - (x+y-xy)z$$

$$(x+y) * z = x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$x * (y * z) = x * (y+z-yz)$$

$$= x + (y+z-yz) - x(y+z-yz)$$

$$x * (y * z) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$$

①, ② விருந்து

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

* ஆனது சேர்ப்பு பண்புக்கு உட்படும்.

(ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ என்க. A இல் $x * y = x+y-xy$ என வரையறுக்கப்பட்டால், * அடையுமற்றும்கா? அவ்வாறானால் A இல் $x * y$ ஆனது கணமில்லாதது, எதிர்மறை பண்புகளை நினைவு எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.

① அடையுமற்றும்கா?

$$x, y \in A \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow x \neq 1, y \neq 1$$

$$x-1 \neq 0, y-1 \neq 0$$

$$(x-1)(y-1) \neq 0$$

$$xy - x - y + 1 \neq 0$$

$$1 \neq x+y-xy$$

$$x * y \neq 1 \Rightarrow x * y \in A$$

* ஆனது A இல் அடையுமற்றும்கா?

② கணமில்லாதது

e எனப்படுக A இல் கணமில்லாதது என்க

$$x \in A \text{ என்க}$$

* இன் வரையறுப்படி

$$x * e = x + e - xe$$

e இன் வரையறுப்படி

$$x * e = x$$

$$x + e - xe = x$$

$$e(1-x) = 0$$

$$e = \frac{0}{1-x} = 0$$

$$\boxed{e=0 \in A} \text{ எனப்படுக கணமில்லாதது}$$

கணமில்லாதது நினைவு எடுத்துக் கொள்ளு.

③ எதிர்மறை பண்பு

x^{-1} எனப்படுக x இன் எதிர்மறை என்க $x \in A$

* இன் வரையறுப்படி $x * x^{-1} = x + x^{-1} - xx^{-1}$

x^{-1} இன் வரையறுப்படி $x * x^{-1} = e$

$$x + x^{-1} - xx^{-1} = e$$

$$x^{-1} - xx^{-1} = 0 - x$$

$$x^{-1}(1-x) = -x$$

$$\boxed{x^{-1} = \frac{-x}{1-x} \in A}$$

x இன் எதிர்மறை $x^{-1} = \frac{-x}{1-x}$ $\forall x \in A$

எதிர்மறை வரையறுப்படி நினைவு எடுத்துக் கொள்ளு.

நடைபிடி தர்க்கவியல்

கூற்று மற்றும் அதன் மெய் மதிப்பு

கூற்று எனப்படுக ஒரு சாதாரண வாக்கியமாகும். இதன் மெய்மதிப்பு 2 வகைமை அல்லது தவறு என வகைமை. இறுதியில் கவனம் செலுத்த வேண்டும், ஒரு கூற்று 2 வகைமை எனில் மெய்மதிப்பு 1 அல்லது 0.

ஒரு கூற்று தவறு எனில் மெய்மதிப்பு 0 எனப்படும். F அல்லது 0 என குறிப்பிடுகிறோம்.

தர்க்க இணைப்புகள் அதன்

மெய்மதிப்பு அட்டவணைகள்

① அல்ல (NOT) $[\neg]$

$$P \quad \neg P$$

$$T \quad F$$

$$F \quad T$$

② மற்றும் (AND) $[\wedge]$

$$P \quad Q \quad P \wedge Q$$

$$T \quad T \quad T$$

$$T \quad F \quad F$$

$$F \quad T \quad F$$

$$F \quad F \quad F$$

③ அல்லது OR [V]

P	q	$P \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

④ நிபந்தனை கூற்று ($\rightarrow$)

P	q	$P \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤ இரு நிபந்தனைக் கூற்று ($\leftrightarrow$)

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

⑥ விலக்கி வைத்தல் (Exclusive OR) $\oplus$ OR (∇)

P	q	$P \nabla q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

மையமம் :-

ஒரு கூட்டு கூற்றின் மையமதிப்பு எல்லா நினைககளிலும் T ஆக இருப்பின் அக்கூட்டுகூற்று மையமம் என்பர். இதை T என குறிப்பிடுவர்.

குறண்பாடு :-

ஒரு கூட்டு கூற்றின் மையமதிப்பு எல்லா நினைககளிலும் F என இருப்பின் அது குறண்பாடு, இதை F என குறிப்பிடுவர்.

நிச்சயமின்மை :-

ஒரு கூற்று மையமமும் அல்ல

⑦

குறண்பாடும் அல்ல எனில் அதற்கு நிச்சயமின்மை என்னுடையர்,

பயிற்சி 12.2

i) P என்பது ஜீபிடர் ஒரு கோளாகும் மற்றும் Q என்பது இந்தியா ஒரு தீவு " மின்வடும் கூற்றுகளுக்கூரிய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாகக்கியங்களை அமைக்க

P : ஜீபிடர் ஒரு கோளம்

Q : இந்தியா ஒரு தீவு

ii) $\neg P$ ஜீபிடர் ஒரு கோளம் அல்ல

iii) $P \wedge \neg Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் மற்றும் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல

iv) $\neg P \vee Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் அல்ல அல்லது இந்தியா ஒரு தீவு

v) $P \rightarrow \neg Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் எனில் மின்வார் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல.

vi) $P \leftrightarrow Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் எனினால் மட்டுமே இந்தியா ஒரு தீவு.

2. P மற்றும் Q என்ற கூற்று மாறிகளைக் கொண்டு மின்வடும் ஒருவாறு வாகக்கியத்தையும் குறியீட்டு அமைப்பில் எழுதுக.

P : 19 ஒரு பகா எண்

Q : ஒரு சூக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம்

i) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல மற்றும் ஒரு சூக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம்

$\neg P \wedge Q$

ii) 19 ஒரு பகா எண் அல்லது ஒரு சூக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமமல்ல

P V $\neg$ q

- (iii) 19 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அணைத்து இகாணாங்களுக்கும் சமம்.

P $\wedge$ q

- (iv) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல.

 $\neg$ p

- 3) பின்வரும் கூற்றுக்கு மைய மதிப்பை தீர்மானிக்க

- (i) $6+2=5$ எனில், பாலின் திரும்பும் வண்ணம்.

p : $6+2=5$ F

q : பாலின் திரும்பும் வண்ணம்

குறியீடு வடிவம் $p \rightarrow q$
 $F \rightarrow T = T$

p $\rightarrow$ இன் மைய மதிப்பு T

- (ii) சீனா ஆசியாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{3}$ ஒரு முக்கோணம்.

p : சீனா ஆசியாவில் உள்ளது

q : $\sqrt{3}$ ஒரு முக்கோணம்

குறியீடு வடிவம் $p \vee q$
 $F \vee F = F$

p $\vee$ q இன் மைய மதிப்பு F

- (iii) $5+5=9$ என்பது மையமல்ல அல்லது யூசி ஒரு கோள்

p : $5+5=9$ என்பது மையம்

q : யூசி ஒரு கோள்

குறியீடு வடிவம் $\neg p \vee q$ மைய மதிப்பு $T \vee T = T$ $\neg p \vee q$ இன் மைய மதிப்பு T

- (iv) 11 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு சமவகத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சமம்.

p : 11 ஒரு பகா எண்

q : ஒரு சமவகத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சமம்.

குறியீடு வடிவம் $p \wedge q$
 $T \wedge F = F$

p $\wedge$ q இன் மைய மதிப்பு F

- 4) பின்வரும் வாக்கியங்களில் எது கூற்று?

(i) $4+7=12$ (இது ஒரு கூற்று)

(ii) நீ என்ன சொத்து கொண்டுக்கொண்டாய்? (கூற்று அல்ல)

(iii) $3^n \leq 81, n \in \mathbb{N}$

(இது ஒரு கூற்று)

(iv) மயில் நுழைந்த பிறகு

(இது ஒரு கூற்று)

(v) இந்த மனை எவ்வளவு உயரம்!

(இது கூற்று அல்ல)

(i), (iii), (iv) இவை கூற்றுகள்.

- 5) பின்வரும் கூற்றுகள் சம்பந்தமான மனதவை, எதிர்மறை மற்றும் இருமனது களை எடுத்து.

(i) x, y ஒன்றை ஒன்று $x=y$ என்றவாறு உள்ளது எனில், பின்னர் $x^2=y^2$

x, y ஒன்றை ஒன்று

p : $x=y$ என்றவாறு உள்ளது.q : $x^2=y^2$

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் குறியீடு

வடிவம் $[p \rightarrow q]$ ① மனதவை:- $q \rightarrow p$

x மற்றும் y ஒன்றை ஒன்று

 $x^2=y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில்பின்னர் $x=y$.② எதிர்மறை:- $\neg p \rightarrow \neg q$

x, y என்ற இரு எண்கள் $x \neq y$ எனவேயானது உண்மை எனில் பின்னர் $x^2 \neq y^2$

③ தொர்மானு $\neg q \rightarrow \neg p$

x, y என்ற இரு எண்கள் $x^2 \neq y^2$ எனவேயானது உண்மை எனில் பின்னர் $x \neq y$

5 (ii) ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் எனில், பின்னர் இது ஒரு ரெக்டங்கிளாகும்,

P : ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம்

Q : ஒரு நாற்கரம் ஒரு ரெக்டங்கிளாகும்

தொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் குறியீட்டு வடிவம் $P \rightarrow Q$

① மறுதலம்: $Q \rightarrow P$

ஒரு நாற்கரமானது ரெக்டங்கிளாகும் எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரமாகும்.

② தெரிமறை: $\neg P \rightarrow \neg Q$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சதுரம் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு ரெக்டங்கிளாகும் அல்ல.

③ தொர்மானு :- $\neg q \rightarrow \neg p$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு ரெக்டங்கிளாகும் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரம் அல்ல.

6) பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க.

(i) $\neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

6. கார்த்திகேயன்
இ.க.ஆ., அ.ம.உ.ம.நி.வள்ளி
திருமகக்காட்டை, திருவாரூர் (DT)

(ii) $\neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(iii) $(P \vee Q) \vee (\neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee (\neg Q)$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

(iv) $(\neg P \rightarrow r) \wedge (P \leftrightarrow Q)$

P	Q	r	$\neg P$	$\neg P \rightarrow r$	$P \leftrightarrow Q$	$(\neg P \rightarrow r) \wedge (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

6. கார்த்திகேயன்
இ.க.ஆ., அ.ம.உ.ம.நி.வள்ளி
திருமகக்காட்டை, திருவாரூர் (DT)

⑦ பின்வரும் கூற்றுகளில் எவைகள்

மெய்மை அல்லது குறையாடுகின்ற அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க.

ப) $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$

⑩

$$\neg(P \wedge q) \wedge \neg(P \vee q)$$

P	q	$P \wedge q$	$P \vee q$	$\neg(P \vee q)$	$(\neg(P \vee q) \wedge \neg(P \wedge q))$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் F எனவே இது ஒரு "மெய்யம்"

$$\text{vi) } ((P \vee q) \wedge (\neg P)) \rightarrow q$$

P	q	$P \vee q$	$\neg P$	$(P \vee q) \wedge \neg P$	$((P \vee q) \wedge \neg P) \rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் T எனவே இது ஒரு மெய்யம்

$$\text{vii) } (P \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow q)$$

P	q	$P \rightarrow q$	$\neg P$	$\neg P \rightarrow q$	$(P \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் F, T இரண்டும் உள்ளது, எனவே இது ஒரு "நிச்சயமின்மை"

$$\text{viii) } ((P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r)$$

P	q	r	$P \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$P \rightarrow r$	$(P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$((P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் T எனவே இது ஒரு "மெய்யம்"

$$\text{⑪) } \neg(P \wedge q) \equiv \neg P \vee \neg q \text{ எனக் காட்டுக.}$$

LHS அட்டவகை ①

P	q	$P \wedge q$	$\neg(P \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

RHS அட்டவகை ②

P	q	$\neg P$	$\neg q$	$\neg P \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

8cii)

(11) $\neg(P \rightarrow q) \equiv P \wedge \neg q$ எனக் காட்டுக.

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$P \rightarrow q$	$\neg(P \rightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg q$	$P \wedge \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி உள்ளன.
எனவே $\neg(P \rightarrow q) \equiv P \wedge \neg q$

9). $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$ என நியூயக்

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$q \rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் சமமாக உள்ளன.
எனவே $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

10) $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$ ஆகியவைகள் சமானமற்றவை என காட்டுக.

அட்டவணை (1)

P	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

அட்டவணை (2)

P	q	$q \rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் சமமற்றவை.

$$p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$$

11) $\neg(P \leftrightarrow q) \equiv P \leftrightarrow \neg q$ எனக் காட்டுக.

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$P \leftrightarrow q$	$\neg(P \leftrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg q$	$P \leftrightarrow \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி உள்ளன.
 $\therefore \neg(P \leftrightarrow q) \equiv P \leftrightarrow \neg q$

12) மையமை அட்டவணையை பயன்படுத்தாமல் $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ என்பது ஒரு மையம் அல்லது ஒரு குறண்பாடா என சாதிக்க.

(2)

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \rightarrow P) &\equiv P \rightarrow (\neg Q \vee P) \\
 &\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee P) \\
 &\equiv \neg P \vee (P \vee \neg Q) \quad (\text{உயரிதழ்ந்து பண்பு படி}) \\
 &\equiv (\neg P \vee P) \vee \neg Q \quad (\because \text{உகம்பு பண்பினிப்படி}) \\
 &\equiv T \vee \neg Q \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

$\therefore P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ என்பது ஒரு மெய்யொருமம்

13) மெய்யை அட்டவணைகைய பண்புபடுத்தி $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ மற்றும் $\neg P$ என்ற இரண்டும்கள் தரக்க கமொன மொனையையொன உகாதிக்க,

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

அட்டவணையின் உ வது மற்றும் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி 2-ம்மொன. எனவே $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv \neg P$

14) மெய்யை அட்டவணைகைய பண்புபடுத்தாமல் $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$ என திரிவிக்க,

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\equiv P \rightarrow (\neg Q \vee R) \\
 &\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\
 &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \quad (\because \text{உகம்பு பண்பினிப்படி}) \\
 &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee R
 \end{aligned}$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$$

மறுமப்பட்டது,

15) $P \rightarrow (\neg Q \vee R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ என்பதை மெய்யை அட்டவணைகைய பண்புபடுத்தி திருந்துக,

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \vee R$	$P \rightarrow (\neg Q \vee R)$	$\neg P \vee (\neg Q \vee R)$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

மெய்யை அட்டவணையின் கடைசி இரண்டு நிரல்கள் கமொன 2-ம்மொன எனவே $P \rightarrow (\neg Q \vee R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R)$

உ. கார்த்திகேயன் அ.ம.ம.நி.பள்ளி திருமகலகாட்டை கருவாடு மாவட்டம்