பாடசாலை

www.Padasalai.Net

படங்களை தொடுக! பாடசாலை வலைதளத்தை சமூக ஊடகங்களில் பின்தொடர்க!! உடனுக்குடன் புதிய செய்திகளை Notifications-ல் பெறுக!

You Tube

Zoom Touch Below Links Download!

12th Standard	Syllabus	Books	Study Materials – EM	Study Materials - TM	Practical	Online Test (EM & TM)
	Monthly Q&A	Mid Term Q&A	Revision Q&A	PTA Book Q&A	Centum Questions	Creative Questions
	Quarterly Exam	Half Yearly Exam	Public Exam	NEET		

11th Standard	Syllabus	Books	Study Materials – EM	Study Materials - TM	Practical	Online Test (EM & TM)
	Monthly Q&A	Mid Term Q&A	Revision Q&A	Centum Questions	Creative Questions	
	Quarterly Exam	Half Yearly Exam	Public Exam	NEET		

10th Standard	Syllabus	Books	Study Materials - EM	Study Materials - TM	Practical	Online Test (EM & TM)
	Monthly Q&A	Mid Term Q&A	Revision Q&A	PTA Book Q&A	Centum Questions	Creative Questions
	Quarterly Exam	Half Yearly Exam	Public Exam	NTSE	SLAS	

9th Standard	Syllabus	Books	Study Materials	1st Mid Term	2nd Mid Term	3rd Mid Term
	Quarterly Exam	Half Yearly Exam	Annual Exam	RTE		

8th Standard	Syllabus	Books	Study Materials	1st Mid Term	2nd Mid Term	3rd Mid Term
	Term 1	Term 2	Term 3	Public Model Q&A	NMMS	Periodical Test

7th Standard	Syllabus	Books	Study Materials	1st Mid Term	2nd Mid Term	3rd Mid Term
	Term 1	Term 2	Term 3	Periodical Test	SLAS	

6th Standard	Syllabus	Books	Study Materials	1st Mid Term	2nd Mid Term	3rd Mid Term
	Term 1	Term 2	Term 3	Periodical Test	SLAS	

1st to 5th Standard	Syllabus	Books	Study Materials	Periodical Test	SLAS	
	Term 1	Term 2	Term 3	Public Model Q&A		

Exams	TET	TNPSC	PGTRB	Polytechnic	Police	Computer Instructor
	DEO	BEO	LAB Asst	NMMS	RTE	NTSE

Portal	Matrimony	Mutual Transfer	Job Portal

Volunteers	Centum Team	Creative Team	Key Answer Team

Downloads	LESSON PLAN	Department Exam	Income Tax	Forms & Proposals	Fonts	Downloads
	Proceedings	GO's	Regulation Orders	Pay Orders	Panel	

Padasalai – Official Android App – Download Here

Kindly Send Your Study Materials, Q&A to our Email ID – Padasalai.net@gmail.com

ARTHI

Every second watching my black eye

Learn every second ,
Learn every person,
Learn everything,

COMPLEX NUMBER

12

Mr DEEPAK M.Sc.,M.A.,B.Ed.,DCA.,
Mrs ARTHIDEEPAK B.E(ECE).,

Mail: darthi99ktp@gmail.com
Ph.number: 9944249262

2. Complex Number

properties of complex numbers:

under Additions

* Let z_1, z_2 and z_3 are complex numbers

(i) closure property ⇒ அடைவுப் பண்பு

$z_1 + z_2$ is a complex numbers

(ii) commutative property ⇒ பரிமாற்றுப் பண்பு

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(iii) Associative property ⇒ சேர்ப்பு பண்பு

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

(iv) Additive identity ⇒ சமனி பண்பு

$$z + 0 = 0 + 2 = z$$

(v) Additive inverse ⇒ எதிர்மறை பண்பு

$$(z + -z) = (-z + z) = 0$$

under Multiplication

(i) closure property

$z_1 z_2$ is also a complex number

(ii) commutative property

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(iii) Associative property

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com

(iv) Multiplicative identity

$$z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$$

(v) Multiplicative inverse

$$z \cdot W = W \cdot z = 1$$

$$W = z$$

$$W - z^{-1}$$

Distributive property (Multiplication distributes over addition)
பங்கீட்டுப்பண்பு

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Also, $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

* conjugate of $x + iy$ is $x - iy$
* $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
* $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
* Let $a + ib = \sqrt{x + iy}$ then

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}}$$

* $|z - z_0| < r$ represents the points interior of the circle
* $|z - z_0| > r$ represents the points exterior of the circle
* $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
* $\arg\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \arg z_1 - \arg z_2$
* $\arg(z^n) = n \arg z$
* Alternate form of $\cos\theta + i\sin\theta$ is $\cos(2k\pi+\theta) + i\sin(2k\pi+\theta)$, $k \in Z$

Euler's formula

* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ or $z = re^{i\theta}$
* If $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ then

  $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$
* $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
* $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$ A $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$

  $= \cos n\theta - i\sin n\theta$

* $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ A $\sin\theta + i\cos\theta$

$= i(\cos\theta - i\sin\theta)$

* $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$

where w is the n^{th} .... root of unity

$1 - \omega\cdot\omega^2 \dots \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$

$\omega^{n-k} = \omega^{-k} = (\bar{\omega})^k \quad 0 \le k \le n-1$

* $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^4 = 1$, $i^{-4} = 1$, $(i)^{-1} = -i$,

$(i)^{-2} = -1$, $(i)^{-3} = i$

* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ is valid only if atleast one of a, b is non - negative.

when $z_1 = x_1 + iy_1$ and $z_2 = x_2 + iy_2$ then

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

---

properties of complex conjugates

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left[\frac{z_1}{z_2}\right]} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

(5) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

(6) $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(7) $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$, where n is an integer

(8) z is real iff $z = \bar{z}$

(9) z is purely imaginary iff $z = -\bar{z}$

(10) $\bar{\bar{z}} = z$

properties of modulus of a complex number

(1) $|z| = |\bar{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
(triangle inequality)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(6) $|z^n| = |z|^n$, where n is an integer

(7) $Re(z) \leq |z|$

(8) $Re(z) \leq |z|$

கலப்பெண்கள்

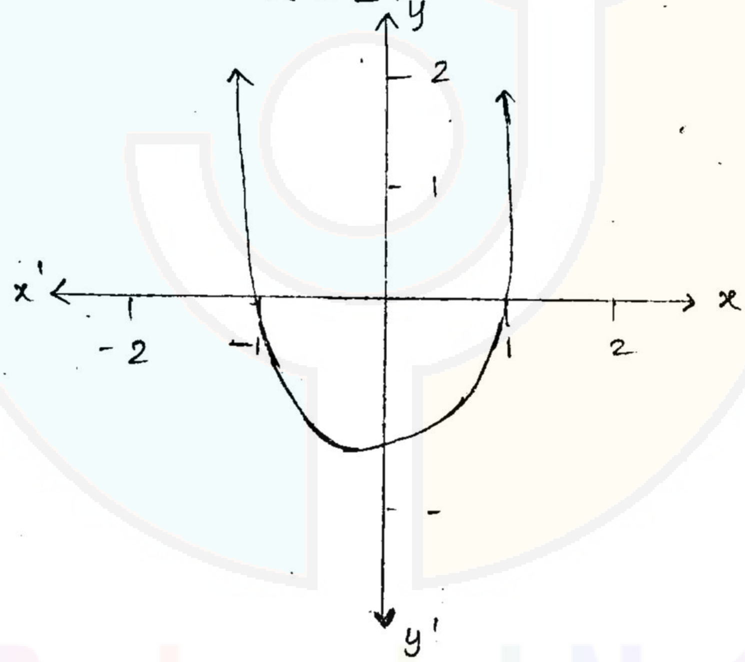
சமன்பாடு : 1

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$



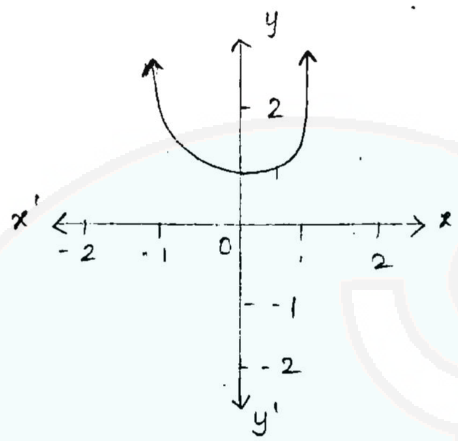
$x = -1$ மற்றும் $x = 1$ என்ற இரண்டு மெய் எண் தீர்வுகள் உள்ளன.

இச்சமன்பாட்டை தீர்ப்பது என்பதும் $f(x) = x^2 - 1$ என்ற வளைவரையின் x வெட்டுத்துண்டுகளை காண்பதும் ஒன்றுதான்.

x- அச்சை வளைவரை $(-1, 0)$ மற்றும் $(1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

சமன்பாடு 2 :

$$x = \pm\sqrt{-1}$$



சமன்பாடு (2) க்கு மெய் தீர்வுகள் இல்லை

$f(x) = x^2+1$ என்ற வளைவரை வரைபடத்திலிருந்து இது x அச்சை வெட்டாது.

இதற்கான காரணம் என்னவென்றால், ஒரு மெய் எண்ணை வர்க்கப்படுத்தி ஒரு குறை எண்ணைப் பெறுவது என்பது இயலாத காரியமாகும்.

கற்பனை அலகு i ன் அடுக்குகள் :

(i) $i^0 = 1$

(ii) $i^1 = i$

(iii) $i^2 = -1$

(iv) $i^3 = (i)^2(i) = (-1)(i) = -i$

(v) $i^4 = (i)^2(i)^2 = (-1)(-1) = 1$

(vi) $(i)^{-1} = \frac{1}{i}\times\frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

(vii) $(i)^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

(viii) $(i)^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{-1} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{-1} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{i}{-(i)^2} = \frac{i}{+1}$

(ix) $(i)^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} \times \frac{1}{-1} = \frac{1}{1} = 1$

குறிப்பு :

$(i)^n = (i)^{4q+k} = (i)^{4q}(i)^k = (i^4)^q (i)^k = (1)^q (i)^k$

$= i^k$

எ.கா : 2.1

i) i^7

தீர்வு :

$i^7 = (i)^{4+3}$

$= (i)^4 (i)^3$

$= (1)(-i)$

$= -i$

ii) i^{1729}

தீர்வு :

$i^{1729} = i^{1728}\, i$

$= (1)(i)$

$= i$

4) 1729 (432
16
12
12
9
8
1

(iii) $i^{-1924} + i^{2018}$

தீர்வு :

$$i^{-1924} + i^{2018} = i^{-1924} + (i)^{2016+2}$$

$$= (1) + i^{2}$$

$$= (1) + (-1)$$

$$= 0$$

$4 \,)\, 1924 \,(\, 481$; 16 ; 32 ; 32 ; 4 ; 4 ; 0

$4 \,)\, 2018 \,(\, 54$; 20 ; 12 ; 16 ; 0

---

iv $\sum_{n=1}^{102} i^{n}$

தீர்வு :

$$\sum_{n=1}^{102} i^{n} = (i^{1} + i^{2} + i^{3} + i^{4}) + (i^{5} + i^{6} + i^{7} + i^{8}) + \ldots\ldots + (i^{97} + i^{98} + i^{99} + i^{100}) + i^{101} + i^{102}$$

$$= \{ i + (-1) + (-i) + 1] + \ldots\ldots + i + (-1)$$

$$= 0 + i - 1$$

CQ i i^{15}

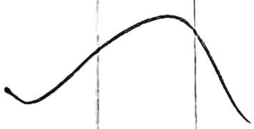
தீர்வு :

$$(i)^{15} = (i)^{4} (i)^{4} (i)^{4} (i)^{3}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times -i$$

$$= (1)(-i)$$

$$= -i$$



CQ (ii) $(i)^{21}$

தீர்வு :

$= (i)^4 (i)^4 (i)^4 (i)^4 (i)^4 (i)^1$

$= 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times i$

$= (1)(+i)$

$= i$

CQ iii $(i)^{1729}$

தீர்வு :

$= (i)^{1728} \quad (i)^1$

$= 1 \times i$

$= i$

CQ iv $(i)^{2018}$

தீர்வு :

$= (i)^{2016} \quad (i)^2$

$= 1 \times (-1)$

$= -1$

CQ v $(i)^{-1924}$

தீர்வு:

$(i)^{-1924} = \frac{1}{i^{1924}}$

$= \frac{1}{1} = 1$

v) $\sum_{n=1}^{102} i^n$

தீர்வு

$$\sum_{n=1}^{102} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \ldots + i^{101} + i^{102}$$

$$= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \ldots + i + i^2$$

$$= 0 + 0 + \ldots + i + i^2$$

$$= i + i^2$$

$$= i - 1$$

---

vi) $i\, i^2\, i^3 \ldots i^{40}$

தீர்வு:

$$i\, i^2\, i^3 \ldots i^{40} = i^{1+2+3+\ldots+40}$$

$$= i^{\frac{40(40+1)}{2}}$$

$$= i^{\frac{40(41)}{2}}$$

$$= i^{820}$$

$$= 1$$

i^{820}, $4 \overline{)820}(205$, 20, 20, 0, $= 1$

Complex Numbers

Exercise : 2.1

Simplify the following :-

i) $i^{1947} + i^{1950}$

Soln :

$$i^{1947} + i^{1950} = (i)^3 + (i)^2$$
$$= -i + (-1)$$
$$= -i - 1$$
$$= -1 - i$$

ii) $i^{1948} - i^{-1869}$

Soln :

$$(i)^{1948} - (i)^{-1869} = (i)^0 - (i)^{-1}$$
$$= 1 + i$$

iii) $\sum_{n=1}^{12} i^n$

Soln :

$$\sum_{n=1}^{12} i^n = (i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + (i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12})$$
$$= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1)$$
$$= 0 + 0 + 0$$
$$= 0$$

iv) $i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$

Soln :

$$i^{59} + \frac{1}{i^{59}} = (i)^{59} + (i)^{-59}$$
$$= (i)^3 + (i)^{-3}$$
$$= -i + i$$
$$= 0$$

v) $i\, i^2\, i^3 \ldots i^{2000}$

Soln :

$$(i)\,(i)^2\,(i)^3 \ldots (i)^{2000} = i^{1+2+3\ldots+2000}$$
$$= (i)^{\frac{2000(2001)}{2}}$$
$$= (i)^{1000(2001)}$$
$$= (i)^{2001000}$$
$$= (i)^0 = 1$$

vi) $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

Soln :

$$\sum_{n=1}^{10} i^{n+50} = (i)^{1+50} + (i)^{2+50} + \ldots + (i)^{10+50}$$
$$= (i)^{51} + (i)^{52} + \ldots + (i)^{60}$$

Taking $(i)^{50}$ common we get

$$= (i)^{50}\left[(i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + i^9 + i^{10}\right]$$

$$= (i)^{50}\left[0 + 0 + i^{9} + i^{10}\right]$$

$$= (i)^{50}\left[i + i^{2}\right]$$

$$= (i)^{50}(i - 1)$$

$$= (i)^{2}(i - 1)$$

$$= i^{3} - i^{2}$$

$$= -i + 1$$

$$= 1 - i$$

Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com

www.Padasalai.Net www.TrbTnpsc.Com

கலப்பெண்கள்

2m **செவ்வக வடிவம்:**

ஒரு கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம் என்பது $(x+iy)$ அ $(x+yi)$ ஆகும்.

இங்கு, x மற்றும் y ஆகியவை மெய்யெண்களாகும்.

இதில் x என்பது கலப்பெண்ணின் மெய்பகுதி எனவும் y என்பது கற்பனை பகுதி எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது.

குறிப்பு:

பூஜ்ஜியம் மட்டும் தான் ஒரே நேரத்தில் முழுவதும் மெய்யெண்ணாகவும், கற்பனை எண்ணாகவும் இருக்கும்.

வரையறை:

1m இரண்டு கலப்பெண்கள் $z_1 = x_1 + iy_1$ (ம) $z_2 = x_2 + iy_2$ ஆகியவை சமமாக இருக்க தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $Re(z_1) = Re(z_2)$ மற்றும் $Im(z_1) = Im(z_2)$

அதாவது $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

எ.கா:

$$\alpha + i\beta = -7+3i$$

$$\alpha = -7$$

$$\beta = 3$$

Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com

ஆர்கன் தளம் (Argan plane) :

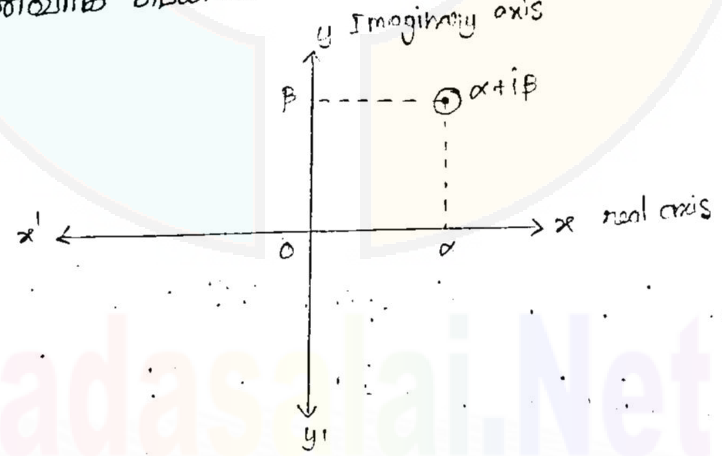
ஒரு கலப்பெண் $z = x+iy$ ஐ அதே ஒரு வழியில் (x, y) என்ற மெய்யெண்களின் வரிசை ஜோடியாக எழுதலாம். $3-8i$, 6 மற்றும் $-4i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் முறையே $(3,-8)(6,0),(0,-4)$ என வரிசை ஜோடிகளாக எழுதலாம்.

இவ்வாறாக, $z = x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணை (x, y) என்ற புள்ளியால் ஆய அச்சு தளத்தில் தொடர்புபடுத்தலாம்.

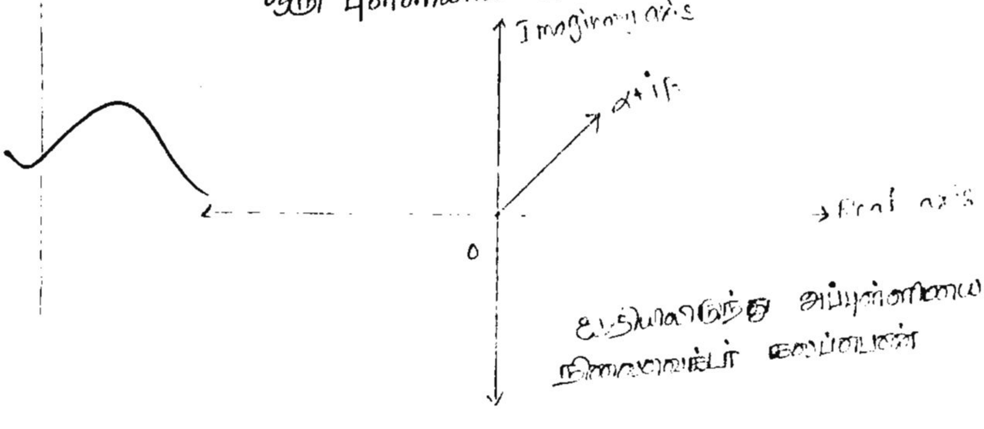
x அச்சை மெய்யெண்ணாகவும், y அச்சை கற்பனை அச்சாகவும் கொண்டால் xy தளத்தை கலப்பெண் தளம் (அ) ஆர்கண்டு தளம் என்கிறோம்.

குறிப்பு :

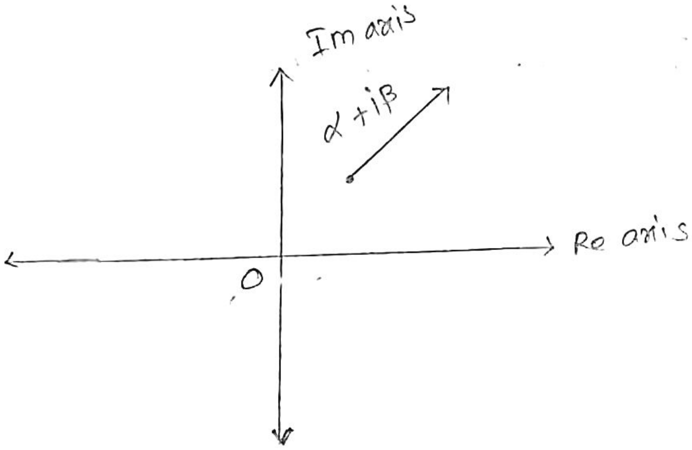
ஆர்கண்டு தளம் என்ற பெயரானது சுவிட்சர்லாந்தைச் சார்ந்த கணிதவியலாளர் ஜீன் ஆர்கண்ட் என்பவரின் நினைவாக பெயரிடப்பட்டது.



ஒரு புள்ளியாக கலப்பெண்

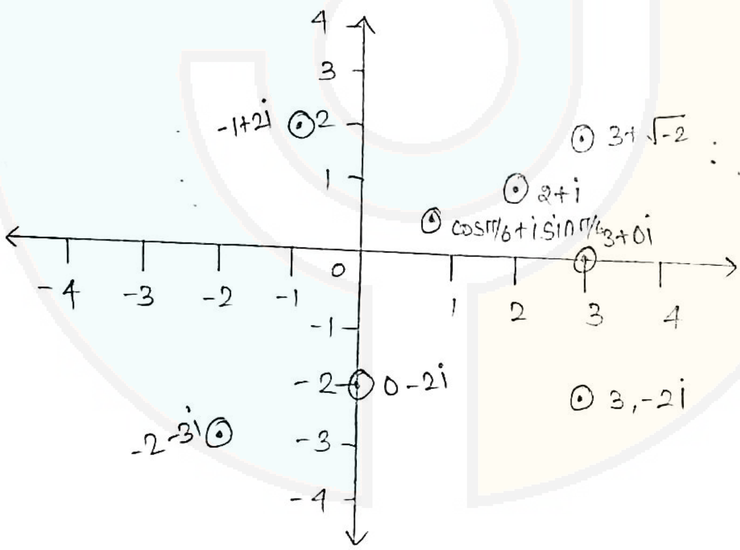


உட்பிகைந்த அப்புள்ளியைக் குறிக்கும் நிலை வெக்டர் கலப்பெண்



விளக்க எடுத்துக்காட்டு:

$2+i,\ -1+2i,\ 3-2i,\ 0-2i,\ 3+\sqrt{-2},\ -2-3i,\ \cos\pi/6+i\sin\pi/6$ மற்றும் $3+0i$ ஆகியவற்றை ஆர்கண்ட் தளத்தில்



கலப்பெண்களின் மீதான இயற்கணிதச் செயல்பாடுகள்

Algebraic operations on complex Numbers

கலப்பெண்களின் திசையிலிப் பெருக்கம்

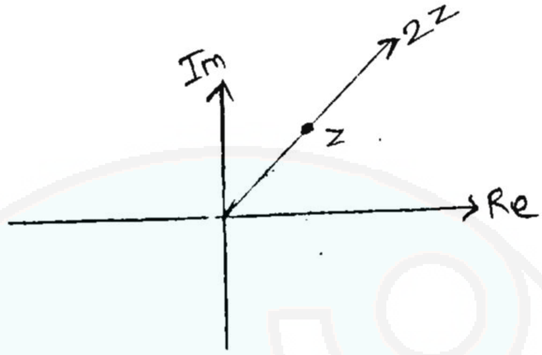
$$z = x + iy$$

$$kz = (kx) + (ky)i$$

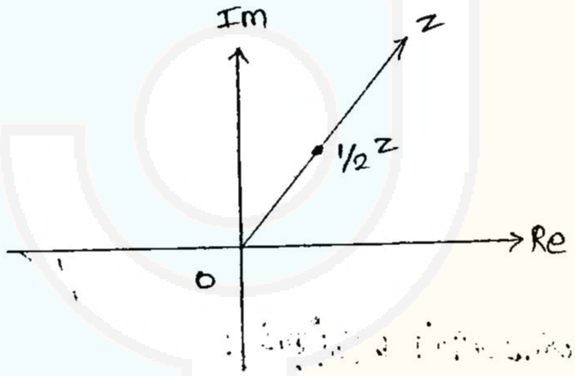
குறிப்பாக

$0z = 0, \; 1z = z, \; (-1)z = -z$

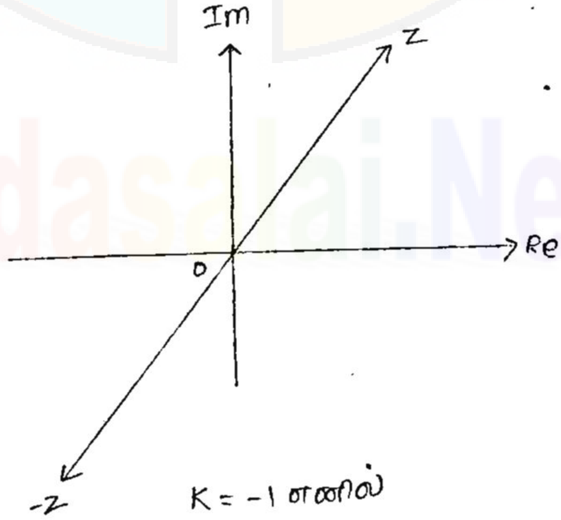
$K = 2, \; 1/2, \; -1$



$K=2$ எனில்



$K=\frac{1}{2}$ எனில்



$K=-1$ எனில்

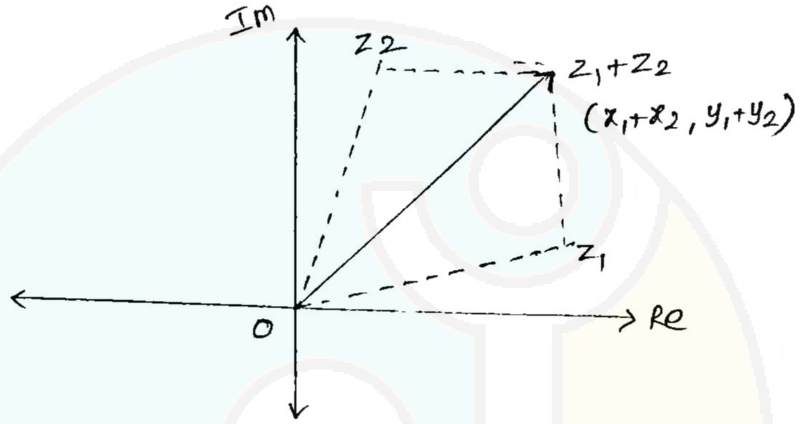
கலப்பெண்களின் கூட்டல் :

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



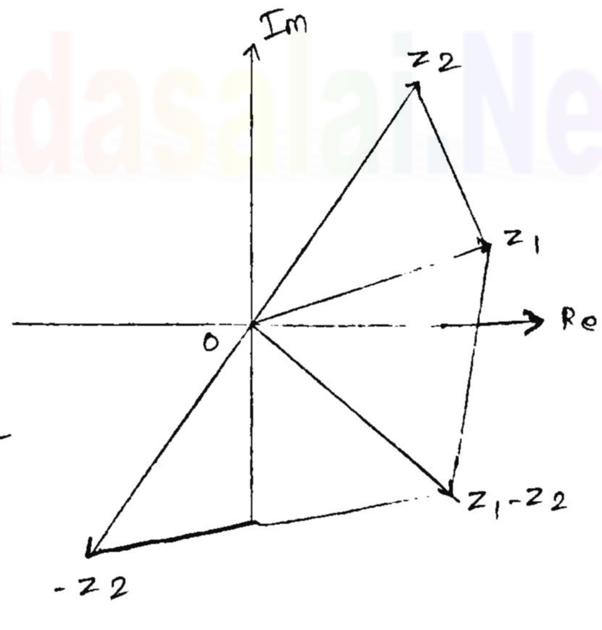
கலப்பெண்களின் கழித்தல் :

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$



Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com

கலப்பெண்களின் பெருக்கல் :

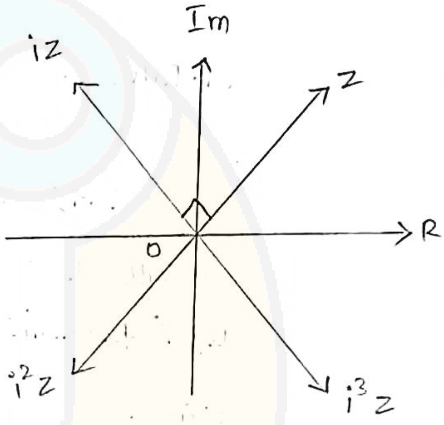
$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

மேற்குறிப்பு



z ஐ i ஆல் பெருக்குதல்

$$z = x + iy$$

$$iz = i(x + iy)$$

$$= -y + ix$$

கலப்பெண் iz என்பது கலப்பெண் z ஐ 90° (அ) π/2 ரேடியன் கடிகார எதிர்திசையில் ஆதியை பொருத்து சுழற்றுவது ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு : 2

i) $z_1 = 6 + 7i$

$z_2 = 3 - 5i$

தீர்வு :

$$z_1 + z_2 = (6 + 7i) + (3 - 5i)$$

$$= (6 + 3) + 7i - 5i$$

$$= 9 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = (6 + 7i) - (3 - 5i)$$

$$= 6 + 7i - 3 + 5i$$

$$= 3 + 12i$$

(ii) $z_1 = 2+3i$

$z_2 = 4+7i$

$z_1 z_2 = (2+3i)(4+7i) = 8+14i+12i+21i^2$

$= 8+12i+14i-21$

$z_1 z_2 = -13+26i$

எ.கா: 2.2 ✓ (1)

$(2+i)x + (1-i)y + 2i - 3$ மற்றும் $x + (-1+2i)y + 1 + i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் yன் மெய் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$z_1 = (2+i)x + (1-i)y + 2i - 3$

$= 2x + xi + y - yi + 2i - 3$

$= (2x+y-3) + i(x-y+2) \rightarrow (1)$

$z_2 = x + (-1+2i)y + 1 + i$

$= x - y + 2yi + 1 + i$

$= (x - y + 1) + i(2y+1) \rightarrow (2)$

$z_1 = z_2$

$(2x+y-3) + i(x-y+2) \quad (x-y+1) + i(2y+1)$

இருபுறமும் மெய் பகுதிகளை ஒப்பிட்டு

$2x+y-3 = x-y+1$

$2x + y - 3 - x + y - 1 = 0$

$x + 2y - 4 = 0$

$x + 2y = 4 \rightarrow (3)$

இருபுறமும் கற்பனை பகுதிகளை சமப்படுத்த.

$x - y + 2 = 2y + 1$

$x - y + 2 - 2y - 1 = 0$

$x - 3y + 1 = 0$

$x - 3y = -1 \rightarrow (4)$

(3) - (4)

$$\begin{array}{rcl} x + 2y &=& 4 \\ x - 3y &=& -1 \\ (-) \quad (+) & & (+) \\ \hline 5y &=& 5 \end{array}$$

$y = \frac{5}{5}$

$y = 1$

$y = 1$ எனில் (3) ல் பிரதியிட,

$(3) \Rightarrow x + 2(1) = 4$

$x = 4 - 2$

$x = 2$

தீர்வு:

$x = 2$
$y = 1$

Exercise : 2.2

1. Evaluate the following if $z = 5-2i$ and $w = -1+3i$.

i) $z + w$.

Soln

$z = 5-2i$

$w = -1+3i$

$z+w = (5-2i)+(-1+3i)$

$= (5-1)+(-2i+3i)$

$= 4+i$

ii) $z - iw$

$= (5-2i)-i(-1+3i)$

$= 5-2i+i-3i^2$

$= 5-2i+i+3$

$= 8-i$

iii) $2z + 3w$

$= 2(5-2i)+3(-1+3i)$

$= 10-4i-3+9i$

$= 7+5i$

iv) $z^2 + 2zw + w^2$

$= (5-2i)^2 + 2(5-2i)(-1+3i) + (-1+3i)^2$

$= 25+4i^2-20i+2[-5+15i+2i-6i^2]+1+9i^2+2(-1)(3i)$

$= 25+(-4)-20i+2(-5+17i+6)+1-9-6i$

$= 21-20i+2(17i+1)-8-6i$

$= 21-20i+2+34i-8-6i$

$= 15+8i$

v) zw

$= (5-2i)(-1+3i)$

$= -5+15i+2i-6i^2$

$= -5+15i+2i+6$

$= 1+17i$

vi) $(z+w)^2$

$= [(5-2i)+(-1+3i)]^2$

$= [(5-1)+(-2i+3i)]^2$

$= (4+i)^2$

$= 16+i^2+8i$

$= 16 - 1 + 8i$

$= 15 + 8i$

2. Given the complex number $z = 2+3i$, represent the complex numbers in Argand diagram.

i) z, iz and $z+iz$.

Soln

$z = 2+3i$

can be represented as $(2,3)$

$iz = i(2+3i)$

$= 2i + 3i^2 = 2i + 3(-1)$

$= 2i - 3 = -3 + 2i$

can be represented as $(-3,2)$

$z + iz = (2+3i) + i(2+3i)$

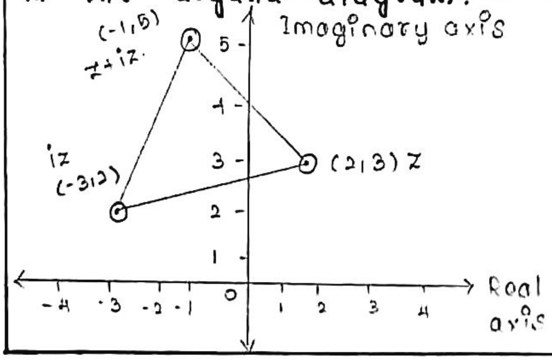
$= 2 + 3i + 2i + 3i^2$

$= 2 + 5i + 3(-1)$

$= -1 + 5i$

can be represented as $(-1,5)$

in the argand diagram.



ii) z, $-iz$ and $z - iz$

Soln

$z = 2+3i$

can be represented as $(2,3)$.

$-iz = -i(2+3i) = -2i - 3i^2$

$= -2i + 3$

$= 3 - 2i$

can be represented as $(3,-2)$.

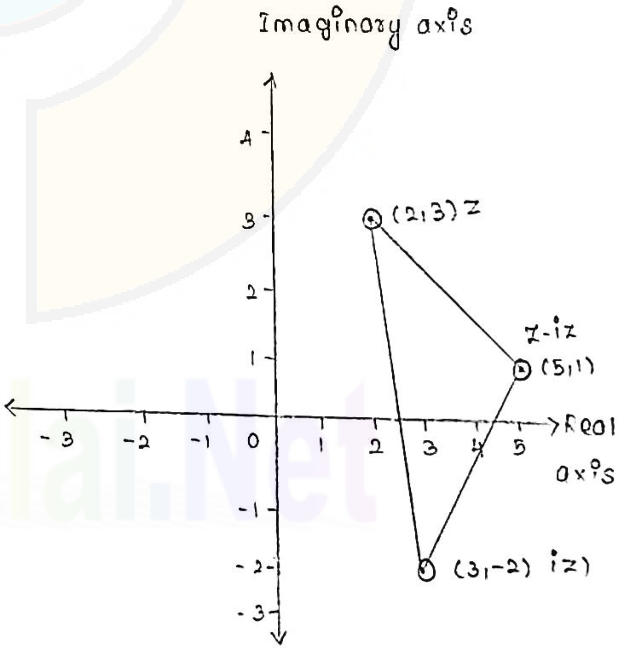
$z - iz = (2+3i) - i(2+3i)$

$= 2 + 3i - 2i - 3i^2$

$= 2 + i + 3$

$= 5 + i$

can be represented as $(5,1)$



3. Find the values of the real numbers x and y, if the complex numbers.

$(3-i)x-(2-i)y+2i+5$ and $2x+(-1+2i)y+3+2i$ are equal.

Soln :

Given: $(3-i)x-(2-i)y+2i+5$

$= 3x-ix-2y+iy+2i+5$

$= (3x-2y+5)+i(-x+y+2) \rightarrow (1)$

Given $2x+(-1+2i)y+3+2i$

$= 2x-y+2yi+3+2i$

$= (2x-y+3)+i(2y+2) \rightarrow (2)$

From (1) and (2) are equal

$(3x-2y+5)+i(-x+y+2) = (2x-y+3)+i(2y+2)$

Equating the real part of both sides.

$3x-2y+5 = 2x-y+3$

$3x-2x-2y+y+5-3 = 0$

$x-y+2 = 0 \rightarrow (3)$

Equating an imaginary part of both sides.

$-x+y+2 = 2y+2$

$-x+y+2-2y-2 = 0$

$-x-y-0 = 0$

$x+y = 0.$

(3) - (4) We get

$x-y = -2 \rightarrow (3)$

$x+y = 0 \rightarrow (4)$

$(-)\ (-)\ \ (-)$

$-2y = -2$

$(3) - (4) \Rightarrow \quad -2y = -2$

$y = 1$

Put $y=1$ in (3) equation

$(3) \Rightarrow \quad x - (1) = -2$

$x = -2 + 1$

$x = -1$

Result :

$x = -1$
$y = 1$

கலப்பெண்களின் பண்புகள் :

Basic Algebraic properties of complex numbers

கூட்டலைப் பொறுத்து :

I அடைவு பண்பு

z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்கள் என்க. எனவே, இவற்றின் கூடுதல் z_1+z_2 உம் ஒரு கலப்பெண் ஆகும்.

II பரிமாற்றுப்பண்பு

z_1, z_2 என்பது ஏதேனும் இரு கலப்பெண் என்க.

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$

III சேர்ப்பு பண்பு

$z_1, z_2, z_3 \in C$ என்க.

$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$$

IV கூட்டல் சமனி

எந்த ஒரு கலப்பெண் z க்கும் $0 = 0+0i$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை $z+0 = 0+z = z$ என்றவாறு காணலாம்.

$0 = 0+0i$ என்ற கலப்பெண்ணினை கூட்டல் சமனி என்கிறோம்.

V கூட்டல் நேர்மாறு

எந்த ஒரு கலப்பெண் z க்கும் $-z$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை $z+(-z) = (-z)+z = 0$ என்றவாறு காணலாம்.

z ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z$ என்கிறோம்.

பெருக்கலை பொருத்து

அடைவு பண்பு :

$$z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 z_2 \in C$$

பரிமாற்று பண்பு :

$$z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1$$

சேர்ப்பு பண்பு

$$z_1, z_2, z_3 \in C \Rightarrow (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

பெருக்கல் சமனி

எந்த ஒரு கலப்பெண் z க்கு $1 = 1+0i$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை

$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ என்றவாறு காணலாம்.

$1 = 1+0i$ என்ற கலப்பெண்ணினை பெருக்கல் சமனி என்கிறோம்.

பெருக்கல் நேர்மாறு :

எந்த ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் z க்கும் w என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை

$zw = wz = 1$ என்றவாறு காணலாம்.

z ன் பெருக்கல் நேர்மாறு w ஆகும்.

w வை z^{-1} என குறிப்பர்.

பங்கீட்டு விதி (கூட்டலின் மேல் பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதி)

$$z_1, z_2, z_3 \in C \Rightarrow z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

$$(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$$

கூட்டலின் பரிமாற்று விதி :

Statement:

ஏதேனும் இரு கலப்பெண் z_1 (ம) z_2 விற்கும்

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ எனப் பெறலாம்.

Proof

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$

$$z_1 + z_2 = (x_1+iy_1)+(x_2+y_2)$$

$$= (x_1+x_2) + i(y_1+y_2) \rightarrow ①$$

$$z_2 + z_1 = (x_2+iy_2)+(x_1+iy_1)$$

$$= (x_2+x_1)+i(y_2+y_1)$$

$$= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \rightarrow ②$$

from ① and ②

R.H.S are equal so L.H.S are equal

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

குறிப்பு :

$$z^m z^n = z^{mn}$$

$$\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$$

$$(z^m)^n = z^{mn}$$

$$(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m$$

Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com

கலப்பெண்களின் அடிப்படை இயற்கணித பண்புகள்

Basic Algebraic properties of complex numbers

பெருக்கலுக்கான நேர்மாறு பண்பு

statement

பூஜ்ஜியமற்ற எந்த ஒரு கலப்பெண் $z = x+iy$ க்கும் பெருக்கல் நேர்மாறு ஆனது $\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$ ஆகும்.

proof

$z^{-1} = u+iv$ என்பது $z = x+iy$ ன் நேர்மாறு என்க.

$zz^{-1} = 1$

$(x+iy)(u+iv) = 1$

$ux + ivx + iuy + i^2vy = 1$

$ux + ivx + iuy - vy = 1$

$(ux-vy) + i(vx+uy) = 1+0i$

இருபுறமும் மெய்(ம) கற்பனை பகுதிகளை சமப்படுத்த

$ux - vy = 1 \rightarrow (1)$

$vx + uy = 0 \rightarrow (2)$

$(1) \times x \Rightarrow ux^2 - vxy = x \rightarrow (3)$

$(2) \times y \Rightarrow vxy + uy^2 = 0 \rightarrow (4)$

$ux^2 + uy^2 = x$

$u(x^2+y^2) = x$

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$ என (3)இல் பிரதியிட

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)x^2 - Vxy = x$$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} - Vxy = x$$

$$-Vxy = x - \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$-Vxy = \frac{x^3 + xy^2 - x^3}{x^2+y^2}$$

$$-Vxy = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$V = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \times \frac{1}{xy}$$

$$V = \frac{y}{x^2+y^2}$$

தீர்வு :

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$V = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Exercise : 2.3

1. If $z_1 = 1-3i$, $z_2 = -4i$ and $z_3 = 5$, show that

i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Soln

L.H.S

$z_1 + z_2 = (1-3i) + (-4i)$

$= 1-7i$

$(z_1+z_2)+z_3 = (1-7i) + 5$

$= 6-7i \rightarrow (1)$.

R.H.S

$z_2 + z_3 = -4i+5$

$z_1 + (z_2+z_3) = (1-3i) + (-4i+5)$

$= 6-7i \rightarrow (2)$.

From (1) and (2).

L.H.S = R.H.S

$\therefore (z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2+z_3)$.

ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

Soln

L.H.S

$z_1 z_2 = (1-3i)(-4i)$

$= -4i + 12i^2$

$= -4i - 12$

$(z_1 z_2) z_3 = (-4i-12)\,5$

$= -20i - 60 \rightarrow (1)$.

R.H.S

$z_2 z_3 = (-4i)(5)$

$= -20i$

$z_1(z_2 z_3) = (1-3i)(-20i)$

$= -20i - 60 \rightarrow (2)$.

From (1) and (2).

L.H.S = R.H.S

$\therefore z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

2. If $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$ and $z_3 = 5+4i$ show that

i) $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Soln

L.H.S

$z_1(z_2+z_3) = 3(-7i+5+4i)$

$= 3(5-3i)$

$= 15-9i \rightarrow (1)$.

R.H.S

$z_1 z_2 = (3)(-7i)$

$= -21i$

$z_1 z_3 = (3)(5+4i)$

$= 15+12i$

$(z_1 z_2) + (z_1 z_3) = -21i + 15 + 12i$

$= 15-9i \rightarrow (2)$.

From (1) and (2).

L.H.S = R.H.S

$z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

ii). $(z_1+z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

$z_1+z_2 = 3+(-7i)$

$= 3-7i$

$(z_1+z_2)z_3 = (3-7i)(5+4i)$

$= 43-23i \rightarrow (1)$.

$z_2 z_3 = -7i(5+4i)$

$= -35i - 28(i)^2$

$= -35i + 28$

$z_1 z_3 = 3(5+4i)$

$= 15+12i$

$z_1 z_3 + z_1 z_3 = (-35i+28) + (15+12i)$

$= 43-23i$.

$\therefore (z_1+z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. If $z_1 = 2+5i$, $z_2 = -3-4i$ and $z_3 = 1+i$, find the additive and multiplicative inverse z_1, z_2 and z_3.

Soln.

Additive :

$z_1 = 2+5i$

Additive inverse of a $-z_1 = -2-5i$.

$z_2 = -3-4i$

Additive inverse of a $-z_2 = -(-3-4i)$

$= 3+4i$.

$z_3 = 1+i$

Additive inverse of a $-z_3 = -(1+i)$

$= -1-i$.

Multiplicative : $z_1 = 2+5i$. Multiplicative inverse of a $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i}$ $= \frac{2-5i}{(2)^2-(5i)^2}$ $= \frac{2-5i}{4-25i^2}$ $= \frac{2-5i}{4-25(-1)}$ $= \frac{2-5i}{29}$ $z_2 = -3-4i$ z_2 Multiplicative inverse of $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3-4i} \times \frac{-3+4i}{-3+4i}$ $= \frac{-3+4i}{(-3)^2-(4i)^2}$ $= \frac{-3+4i}{9+16}$ $= \frac{-3+4i}{25}$ $z_3 = 1+i$ z_3 Multiplicative inverse of $\frac{1}{z_3} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$ $= \frac{1-i}{1-i^2}$	$= \frac{1-i}{1+1}$ $= \frac{1-i}{2}$

ஒரு கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண் :

Conjugate of a complex Number

வரையறை :

$x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண் $x-iy$ என வரையறுக்கப்படுகிறது

குறிப்பு :

z என்ற ஒரு கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண் $\bar{z}$ என குறிப்பிடப்படுகிறது.

1m z ன் இணை கலப்பெண்ணை பெறுவதற்கு i க்கு பதிலாக $-i$ ஐ z ல் பிரதியிட வேண்டும்.

எ.கா :

$3+4i$ ன் இணை கலப்பெண் $3-4i$

$7-4i$ ன் இணை கலப்பெண் $7+4i$

1m இணை கலப்பெண்ணின் பண்புகள் :

1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

4) $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

6) $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

7) $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$ இங்கு, n ஒரு முழுஎண்

பண்பு!
ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ என நிரூபி

நிரூபணம்

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, மற்றும் x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$ என்க.

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} \\ &= \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) \\ &= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) \\ &= \bar{z}_1+\bar{z}_2.\end{aligned}$$

இதனை கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான கலப்பெண்களுக்கும் இதனை விரிவுபடுத்தலாம். $\overline{z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\cdots+\bar{z}_n$ ■

பண்பு

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ இங்கு x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$.

நிரூபணம்

$z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ என்க.

ஆகவே, $z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

எனவே, $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

மேலும் $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

ஆகவே, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$. ■

பண்பு

z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால். இருந்தால் மட்டுமே $z = -\bar{z}$.

நிரூபணம்

$z = x + iy$ என்க. வரையறையின்படி $\bar{z} = x - iy$ ஆகும்.

எனவே, $z = -\bar{z}$

$\Leftrightarrow \quad x + iy = -(x - iy)$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow$ z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண்.

இதுபோலவே, இணைக் கலப்பெண்களின் மற்ற பண்புகளையும் நிறுவலாம். ■

8) z ஒரு மெய்யெண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = \bar{z}$

9) z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = -\bar{z}$

10) $\bar{\bar{z}} = z$

எ.கா: 2.3

$\frac{3+4i}{5-12i}$ யை $x+iy$ வடிவில் எழுதுக. இதிலிருந்து மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை காண்க.

$$\frac{3+4i}{5-12i} = \frac{3+4i}{5-12i} \times \frac{5+12i}{5+12i}$$

$$= \frac{15+36i+20i+48i^2}{(5)^2-(12i)^2}$$

$$= \frac{15+56i+48(-1)}{25+144}$$

$$= \frac{15+56i-48}{169}$$

$$= \frac{-33+56i}{169}$$

$$= \frac{-33}{169} + \frac{56}{169}i$$

$$= \frac{-33}{169} + \frac{56}{169} i$$

Result :

Real part $= \frac{-33}{169}$

Imaginary part $= \frac{56}{169}$

எ.கா: 2.7

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ யை செவ்வக வடிவில் காண்க.

Take $\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

$$= \frac{(1+i)^2}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{1+i^2+2(1)(i)}{1+1}$$

$$= \frac{2i}{2}$$

$$= i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{i}$$

$$= (i)^{-1} = -i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (i)^3 - (-i)^3$$
$$= -i - (+i)$$
$$= -i - i$$
$$= -2i$$

எ.கா: 2.5

$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$ எனில் கலப்பெண் z ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.

$$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$$

$$2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$2z+6 = z-5i+4zi-20i^2$$

$$2z+6 = z-5i+4zi+20$$

$$2z+6 = z(1+4i)-5i+20$$

$$2z-z(1+4i) = -5i+20-6$$

$$(2-1-4i)z = -5i+14$$

$$(1-4i)\,z = -5i+14$$

$$z = \frac{-5i+14}{1-4i} \times \frac{1+4i}{1+4i}$$

$$= \frac{-5i-20i^2+14+56i}{(1)^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{-5i+20+14+56i}{-1+16}$$

$$= \frac{-5i+34+56i}{17} = \frac{34+51i}{17} = \frac{34}{17}+\frac{51}{17}i = 2+3i$$

எ.கா : 2.6

$z_1 = 3-2i$ (ம) $z_2 = 6+4i$ எனில் $\frac{z_1}{z_2}$ யை செவ்வக வடிவில் எழுதுக.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i} \times \frac{6-4i}{6-4i}$$

$$= \frac{(3-2i)(6-4i)}{(6)^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{18-12i-12i+8i^2}{36-16i^2}$$

$$= \frac{18-24i-8}{36-16(-1)}$$

$$= \frac{-24i+10}{36+16}$$

$$= \frac{-24i+10}{52}$$

$$= \frac{10-24i}{52}$$

$$= \frac{10}{52} - \frac{24}{52} i.$$

Result

Real part $= \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$

Imaginary part $= \frac{-24}{52} i = \frac{6}{13} i$

Padasalai.Net

எ.கா: 2.8

நிறுவுக:

i) $(2+i\sqrt{3})^{10}+(2-i\sqrt{3})^{10}$ ஒரு மெய் எண்

தீர்வு:

$z=(2+i\sqrt{3})^{10}+(2-i\sqrt{3})^{10}$ என்க.

$\bar{z}=\overline{(2+i\sqrt{3})^{10}+(2-i\sqrt{3})^{10}}$

$=\overline{(2+i\sqrt{3})^{10}}+\overline{(2-i\sqrt{3})^{10}}$ $[\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}]$

$=(\overline{2+i\sqrt{3}})^{10}+(\overline{2-i\sqrt{3}})^{10}$ $[\because (\overline{z^n})=(\bar{z})^n]$

$=(2-i\sqrt{3})^{10}+(2+i\sqrt{3})^{10}$

$\bar{z}=z \Rightarrow z$ is Real part

$\therefore z$ என்பது மெய்யெண்

ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$

தீர்வு:

$\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)=\frac{19+9i}{5-3i}\times\frac{5+3i}{5+3i}$

$=\frac{95+45i+57i+27i^2}{(5)^2-(3i)^2}$

$$= \frac{95-27+102i}{25+9}$$

$$= \frac{68+102i}{34}$$

$$= \frac{68}{34} + \frac{102}{34} i$$

$$= 2+3i \rightarrow (1)$$

$$\frac{8+i}{1+2i} = \frac{8+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{8+i-16i-2i^2}{(1)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{8-15i+2}{1+4}$$

$$= \frac{10-15i}{5}$$

$$= \frac{10}{5} - \frac{15i}{5}$$

$$= 2-3i \rightarrow (2)$$

$$z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}$$

$$\bar{z} = \overline{(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}}$$

$$= \overline{(2+3i)^{15}} - \overline{(2-3i)^{15}} \quad \left[\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\right]$$

$$= (\overline{2+3i})^{15} - (\overline{2-3i})^{15} \quad \left[\therefore (\overline{z^n}) = (\bar{z})^n\right]$$

$$= +(2-3i)^{15} - (2+3i)^{15}$$

$$= -\left[-(2-3i)^{15} + (2+3i)^{15}\right]$$

$$= -\left[+(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right] = -Z$$

Exercise : 2.4.

1. Write the following in the rectangular form:

i). $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$

Soln

$$\overline{(5+9i)+(2-4i)} = \overline{(5+2)+(9i-4i)}$$

$$= \overline{7+5i}$$

$$= 7-5i.$$

ii) $\frac{10-5i}{6+2i}$.

Soln

$$\frac{10-5i}{6+2i} = \frac{10-5i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i}$$

$$= \frac{60-30i-20i+10i^2}{(6)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{60-50i-10}{36+4}$$

$$= \frac{50-50i}{40}$$

$$= \frac{50}{40}(1-i)$$

$$= \frac{5}{4}(1-i).$$

iii) $\overline{3i} + \frac{1}{2-i}$

Soln :

$$\overline{3i} + \frac{1}{2-i} = -3i + \frac{1}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$= -3i + \frac{(2+i)}{2^2-i^2}$$

$$= -3i + \frac{(2+i)}{4+1}$$

$$= \frac{-15i+2+i}{5}$$

$$= \frac{-14i+2}{5}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{14}{5}i$$

$$= \frac{2}{5} + i\left(-\frac{14}{5}\right)$$

2. If $z = x+iy$, find the following in rectangular form.

i) $Re\left(\frac{1}{z}\right)$.

Soln

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = Re\left(\frac{1}{x+iy}\right)$$

$$= Re\left(\frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}\right)$$

$$= Re\left(\frac{x-iy}{x^2-(i^2y^2)}\right)$$

$$= Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$$

Real part is $\frac{x}{x^2+y^2}$

ii) $Re(i\bar{z})$.

Soln

$$Re(i\bar{z}) = Re(i(x-iy))$$

$$= Re(xi - i^2y)$$

$$= Re(ix+y)$$

$$= Re(y+ix)$$

Real part is y.

iii) $Im(3z+4\bar{z}-4i)$.

Soln

$$Im(3z+4\bar{z}-4i) = Im(3(x+iy)+4(x-iy)-4i)$$

$$= Im(3x+i3y+4x-i4y-4i)$$

$$= Im(7x+i(3y-4y-4))$$

$$= Im(7x+i(-y-4))$$

$\therefore$ Imaginary part is $-y-4$.

3. If $z_1 = 2-i$ and $z_2 = -4+3i$ find the inverse of z_1z_2 and $\frac{z_1}{z_2}$

Soln

i) $z_1 = 2-i$

$z_2 = -4+3i$

$$z_1z_2 = (2-i)(-4+3i)$$

$$= -8+4i+6i-3i^2$$

$$= -8+10i+3$$

$$= -5+10i$$

Inverse of $z_1 z_2$ is $\frac{1}{z_1 z_2}$

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{-5+10i} \times \frac{-5-10i}{-5-10i}$$

$$= \frac{-5-10i}{(-5)^2-(10i)^2}$$

$$= \frac{-5-10i}{25+100}$$

$$= \frac{-5-10i}{125}$$

$$= \frac{5(-1-2i)}{125}$$

$$= \frac{-1-2i}{25}$$

Inverse of $z_1 z_2$ is $\frac{1}{25}(-1-2i)$.

ii) $z_1 = 2-i$

$z_2 = -4+3i$

Inverse of $\frac{z_1}{z_2}$ is $\frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+3i}{2-i} = \frac{-4+3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$= \frac{-8+6i-4i+3i^2}{(2)^2-(i)^2}$$

$$= \frac{-8+2i-3}{4+1}$$

$$= \frac{-11+2i}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(-11+2i)$$

Inverse of $\frac{z_1}{z_2}$ is $\frac{1}{5}(-11+2i)$

4. The complex numbers u, v and w are related by $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$. If $v = 3-4i$ and $w = 4+3i$, find u in rectangular form.

Soln

$v = 3-4i$

$w = 4+3i$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$$

$$= \frac{1}{3-4i} + \frac{1}{4+3i}$$

$$= \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{4-3i}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$= \frac{3+4i}{9-16i^2} + \frac{4-3i}{16-(3i)^2}$$

$$= \frac{3+4i}{9+16} + \frac{4-3i}{16+9}$$

$$= \frac{3+4i}{25} + \frac{4-3i}{25}$$

$$= \frac{3+4i+4-3i}{25}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{7+i}{25}$$

$$u = \frac{25}{7+i} = \frac{25}{7+i} \times \frac{7-i}{7-i}$$

$= \frac{25(7-i)}{7^2-(i)^2}$

$= \frac{25(7-i)}{49+1}$

$= \frac{25(7-i)}{50}$

$= \frac{7-i}{2}.$

$u = \frac{1}{2}(7-i).$

5. Prove the following properties :

i) z is real if and only if $z = \bar{z}$

Soln

Let $z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$z = \bar{z}$

$\Leftrightarrow x+iy = x-iy$

$\Leftrightarrow x+iy-x+iy = 0$

$\Leftrightarrow 2iy = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$

[$\therefore$ 2 and i are constants]

When $y=0$, $z=x$ which is real

$\therefore z$ is purely real $\Leftrightarrow z=\bar{z}$.

ii) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ and $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Let $z = x+iy \rightarrow ①$.

Where x is the $Re(z)$ and y is the $Im(z)$

$\bar{z} = x-iy \rightarrow ②$.

$① + ② \Rightarrow z+\bar{z} = 2x$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = x$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z).$

$① - ② \Rightarrow z-\bar{z} = x+iy-x+iy$

$z-\bar{z} = 2iy$

$\frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z).$

⑥. Find the least value of the positive integer n for which $(\sqrt{3}+i)^n$. i) real ii) purely imaginary.

Soln :

Let $z = (\sqrt{3}+i)^n$

$= \left[2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n\right]$

Multiply and divide by 2

$= \left[2^n\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n\right]$

$= 2^n\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right]^n$

$= 2^n\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^n$

$z = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right] \rightarrow (1)$

$\bar{z} = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right] \rightarrow (2)$

Since z is real, $z=\bar{z}$

From (1) and (2).

$\cancel{2^n}\left[\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right] =$

$\cancel{2^n}\left[\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right]$

$2i\sin\frac{n\pi}{6} = 0$

$\sin\frac{n\pi}{6} = 0$

$\sin\frac{n\pi}{6} = \sin\pi$

$\frac{n\pi}{6} = \pi \quad [\because \sin\pi = 0$

$\frac{n}{6} = 1$

$\boxed{n = 6}$

ii) Since z is purely imaginary

$z = -\bar{z}$

$\cancel{2^n}\left[\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right] =$

$-\cancel{2^n}\left[\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right]$

$2\cos\frac{n\pi}{6} = 0$

$\cos\frac{n\pi}{6} = 0$

$\cos\frac{n\pi}{6} = \cos\pi/2$

$\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{6}_3} = \cancel{\pi}/\cancel{2}$

$\frac{n}{3} = 1$

$\boxed{n = 3}$

7. Show that

i) $(2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}$ is purely imaginary.

ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ is real.

Soln

i) $(2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}$

Let $z = (2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}$

$\bar{z} = \overline{(2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}}$

$= \overline{(2+i\sqrt{3})^{10}} - \overline{(2-i\sqrt{3})^{10}}$

$= (\overline{2+i\sqrt{3}})^{10} - (\overline{2-i\sqrt{3}})^{10}$

$= (2-i\sqrt{3})^{10} - (2+i\sqrt{3})^{10}$

$= -\left[(2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}\right]$

$\bar{z} = -z \Rightarrow z$ is purely imaginary

Hence $(2+i\sqrt{3})^{10} - (2-i\sqrt{3})^{10}$ is p.imaginary

11) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$

Soln

$$\frac{19-7i}{9+i} = \frac{19-7i}{9+i} \times \frac{9-i}{9-i}$$

$$= \frac{171-19i-63i+7i^2}{(9)^2-(i)^2}$$

$$= \frac{171-82i-7}{81+1}$$

$$= \frac{164-82i}{82}$$

$$= 2-i$$

$$\frac{20-5i}{7-6i} = \frac{20-5i}{7-6i} \times \frac{7+6i}{7+6i}$$

$$= \frac{140+120i-35i-30i^2}{(7)^2-(6i)^2}$$

$$= \frac{140+85i+30}{49+36}$$

$$= \frac{170+85i}{85}$$

$$= 2+i$$

$\therefore \left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12} =$

$(2-i)^{12}+(2+i)^{12}$

Let $z = (2-i)^{12}+(2+i)^{12}$

$\therefore \bar{z} = \overline{(2-i)^{12}+(2+i)^{12}}$

$= (\overline{2-i})^{12}+(\overline{2+i})^{12}$

$= (2+i)^{12}+(2-i)^{12}$

$= z$

$\therefore \bar{z} = z \Rightarrow z$ is purely real.

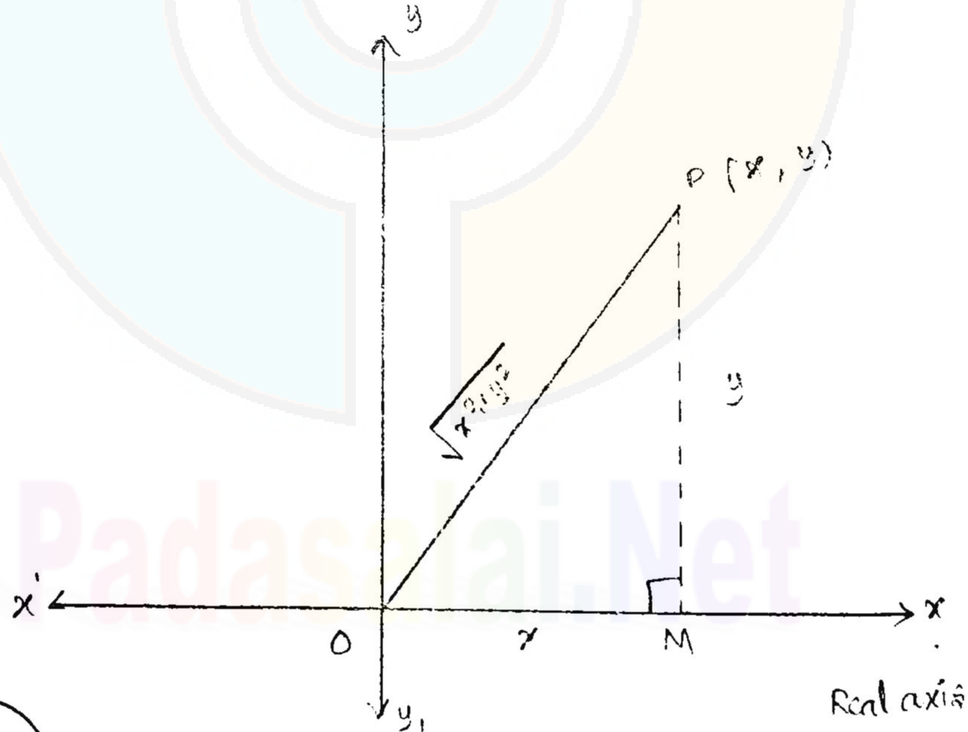
$\therefore \left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ is real.

ஒரு கலப்பெண்ணின் மட்டு மதிப்பு

Modulus of a complex number

மெய் எண் நேர்க்கோட்டில் மட்டு மதிப்பு என்பது எவ்வாறு ஆதிக்கும் அந்த எண்ணுக்கும் உள்ள தொலைவை குறிக்கிறதோ அதுபோலவே ஒரு கலப்பெண்ணின் மட்டு என்பது கலப்பெண் தளத்தில் ஆதிக்கும் அந்த எண்ணுக்கும் உள்ள தொலைவை குறிக்கின்றது.

ஆதியிலிருந்து ஆர்கண்ட் திசையில் $z = x+iy$ க்கு உள்ள தொலைவு என்பது ஒரு பக்கம் x மற்றும் மறு பக்கம் y ஆகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் நீளத்திற்கு சமமாகும்.



வரையறை:

$z = x+iy$ எனில்,

z ன் மட்டுமதிப்பினை $|z|$ என குறிப்பிடுகின்றோம்.

இதனை $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ என வரையறுப்போம்.

எ.கா:

i) $|i| = \sqrt{0^2+1^2}$

$= \sqrt{1^2}$

$= \sqrt{1}$

$= 1$

ii) $|-12i| = \sqrt{0^2+(-12)^2}$

$= \sqrt{144}$

$= 12$

iii) $z = 2+3i$ எனில் $|z|$ காண்க

$|z| = \sqrt{(2)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{4+9}$

$= \sqrt{13}$

குறிப்பு :

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

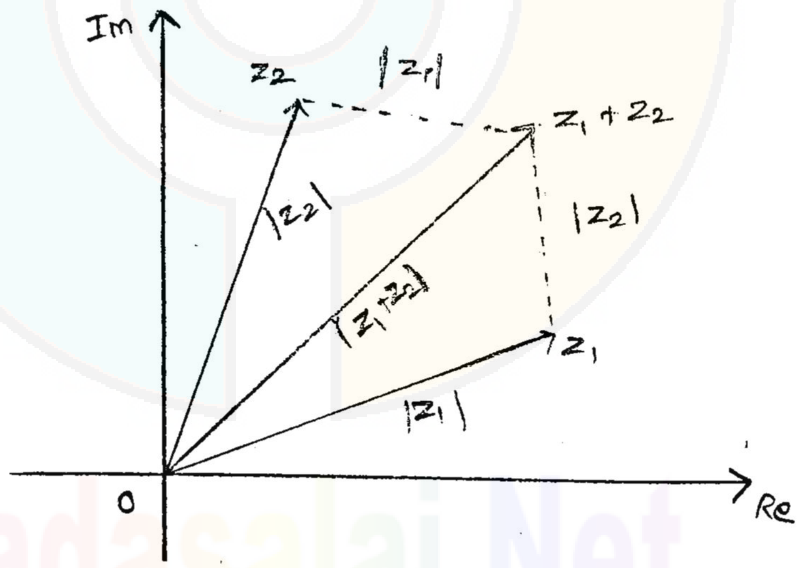
$|z|^2 = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\times 2}$

$= x^2-(iy)^2$

$= x^2+y^2$

$z\bar{z} = |z|^2$

வடிவ கணித விளக்கம்



O, z_1, z_2 மற்றும் z_1+z_2 ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தை கருதுவோம்.

வடிவியல் வாயிலாக z_1+z_2 உடன் தொடர்புடைய முக்கோணத்தின் பக்கம் மீதமுள்ள இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களை கூடுதலை விட

அதிகமாக இருக்காது என நாம் அறிவோம். இதனால் தான் இந்த பண்பினை முக்கோண சமனிலி என்கிறோம்.

குறிப்பு :

1. $|z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|+\ldots+|z_n|$

இங்கு $n = 2, 3, \ldots$

2. z_1 மற்றும் z_2 என்ற கலப்பெண்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$z_1 = x_1+iy$ மற்றும் $z_2 = x_2+iy_2$ எனில்

$$|z_1-z_2| = |(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

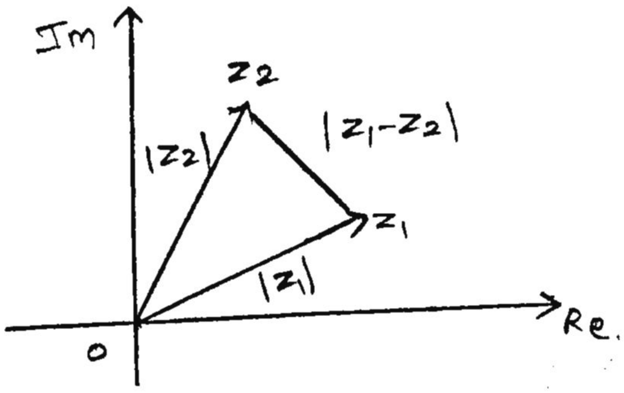
3. z_1 (ம) z_2 என்ற கலப்பெண்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|z_1-z_2|$ ஆகும்.

இதுபோலவே ஆதி z_1, மற்றும் z_2 ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தில் மேற்கூறிய வழிமுறையின் படி,

$$|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$



4. பெருக்கலின் எண்ணளவு என்பது எண்ணளவுகளின் பெருக்கல் பலனுக்கு சமம் ஆகும்.

z_1 (ம) z_2 என்ற ஏதேனும் இரண்டு கலப்பெண்களுக்கு

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ஆகும்.

நிரூபணம்

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \quad \because |z|^2 = z\bar{z}$$

$$= (z_1)(z_2)(\overline{z_1})(\overline{z_2}) \quad \because \overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$$

$$= (z\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2|z_2|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

5. கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் இதனை முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான கலப்பெண்களுக்கும் இதனை விரிவுபடுத்தலாம்.

$$|z_1 z_2 z_3 \ldots z_n| = |z_1||z_2||z_3||z_4| \ldots |z_n|$$

அதாவது கலப்பெண்களின் பெருக்கற்பலனின் மட்டு மதிப்பு என்பது அக்கலப்பெண்களின் மட்டுகளின் பெருக்கல் பலனுக்கு சமம் ஆகும்.

முக்கோண சமனிலி விதி

5m

Statement

இரு கலப்பெண்களின் கூடுதலின் மட்டு அவ்விரு எண்களின் மட்டுகளின் கூடுதலுக்கு குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும்.

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

Proof

z_1, z_2 இரு கலப்பெண்கள் என்க.

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) \quad \because |z|^2 = z\bar{z}$$

$$= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + z_2\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2} \quad [\bar{\bar{z}} = z$$

$$= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \quad [\because z+\bar{z} = 2Re(z)$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \quad \because Re(z) \leq |z|$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \quad \because |\bar{z}| = |z|$$

$$|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

எ.கா : 2.9

$z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-12i$, மற்றும் $z_3 = 6+8i$

எனில் $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_1+z_2|, |z_2-z_3|$

மற்றும் $|z_1+z_3|$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|z_2| = |5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$|z_3| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$z_1+z_2 = (3+4i)+(5-12i)$

$= (3+5)+(4-12)i$

$= 8-8i$

$|z_1+z_2| = |8-8i| = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$

$= \sqrt{2(64)} = 8\sqrt{2}$

$z_2-z_3 = (5-12i)-(6+8i)$

$= (5-6)+i(-12-8)$

$= -1+(-20i)$

$= -1-20i$

$|z_2-z_3| = |-1-20i| = \sqrt{(-1)^2+(-20)^2}$

$= \sqrt{1+400} = \sqrt{401}$

$$z_1 + z_3 = (3+4i) + (6+8i)$$
$$= (3+6) + i(4+8)$$
$$= 9 + 12i$$

$$|z_1 + z_3| = |9+12i| = \sqrt{9^2+12^2} = \sqrt{81+144}$$
$$= \sqrt{225}$$
$$= 15$$

எ.கா: 2.10

கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளை காண்க.

i) $\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right|$

$$\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+2i|} \quad \because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$
$$= \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+4}}$$
$$= \frac{\sqrt5}{\sqrt5}$$
$$= 1$$

ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right|$

தீர்வு:

$\left|\left(\overline{1+i}\right)(2+3i)(4i-3)\right|$

$= |(1-i)(2+3i)(4i-3)| \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$= |1-i|\,|2+3i|\,|4i-3|$

$= \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{4^2+(-3)^2}\right)$

$= \left(\sqrt{1+1}\right)\left(\sqrt{4+9}\right)\left(\sqrt{16+9}\right)$

$= (\sqrt{2})(\sqrt{13})(\sqrt{25})$

$= 5\sqrt{26}$

iii) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

$$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{|i|\,|(2+i)|^3}{|1+i|}$$

$$= \frac{\sqrt{1}\,\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^3}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$= \frac{(1)\left(\sqrt{4+1}\right)^3}{\left(\sqrt{1+1}\right)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

எ.கா: 2.11

$i, -2+i$, மற்றும் 3 ஆகியவற்றில் எந்த கலப்பெண் ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ளது?

தீர்வு:

$z = i, -2+i$, மற்றும் 3 ஆகியவற்றிக்கும் ஆதிக்கும் உள்ள தொலைவுகள்

$|z| = |i| = \sqrt{1^2} = 1$

$|z| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$|z| = |3| = \sqrt{3^2} = 3$

$1 < \sqrt{5} < 3$ எனவே ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ள கலப்பெண் 3 ஆகும்.

எ.கா: 2.12

z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகிய கலப்பெண்கள் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1+z_2+z_3| = 1$ என்றவாறு இருந்தால் $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$ ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = 1 \qquad |z_3| = 1$ எனக

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$|z_1|^2 = 1^2 \qquad |z_2|^2 = 1^2 \qquad |z_3|^2 = 1^2$$

$$z\bar{z}_1 = 1 \qquad z\bar{z}_2 = 1 \qquad z\bar{z}_3 = 1$$

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \qquad \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \qquad \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$$

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3|$$

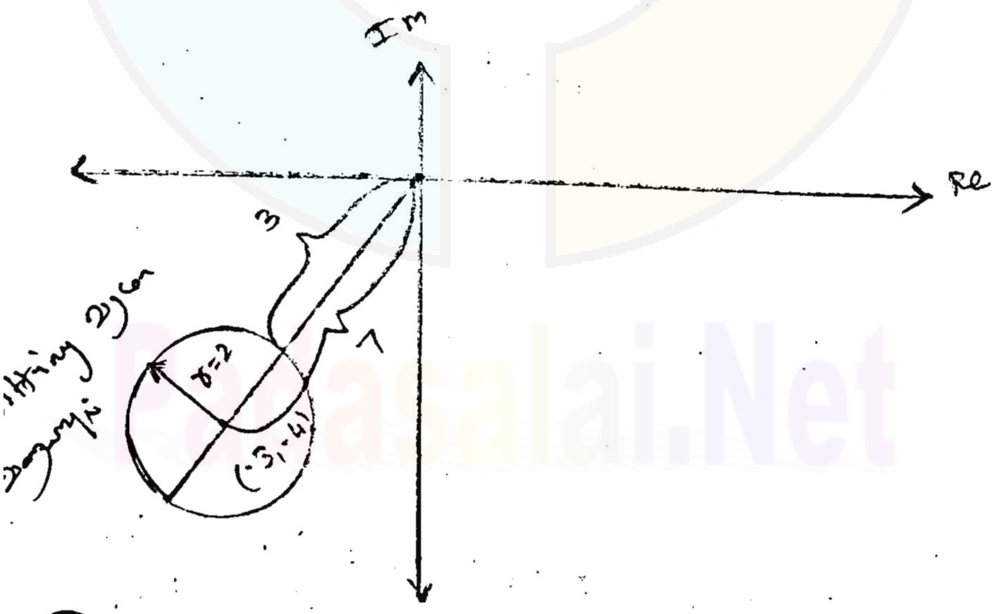
$$= |\overline{z_1 + z_2 + z_3}|$$

$$= |z_1 + z_2 + z_3|$$

$$= 1$$

எ.கா : 2.13

$|z| = 2$ எனில் $3 \leq |z+3+4i| \leq 7$ எனக் காட்டுக.



$$|z+3+4i| \leq |z| + |3+4i|$$

$$= 2 + \sqrt{3^2+4^2}$$

$$= 2 + \sqrt{9+16}$$

www.Padasalai.Net www.TrbTnpsc.Com

$= 2+\sqrt{25}$

$= 2+5$

$\leq 7 \rightarrow ①$

$|z+3+4i| \geq \big||z|-|3+4i|\big|$

$= \left|2-\sqrt{3^2+4^2}\right|$

$= |2-\sqrt{25}|$

$= |2-5|$

$= |-3|$

$\geq 3 \rightarrow ②$

① மற்றும் ② லிருந்து $3 \leq |z+3+4i| \leq 7$

குறிப்பு

கீழ் மற்றும் மேல் எல்லை மதிப்புகளை காண

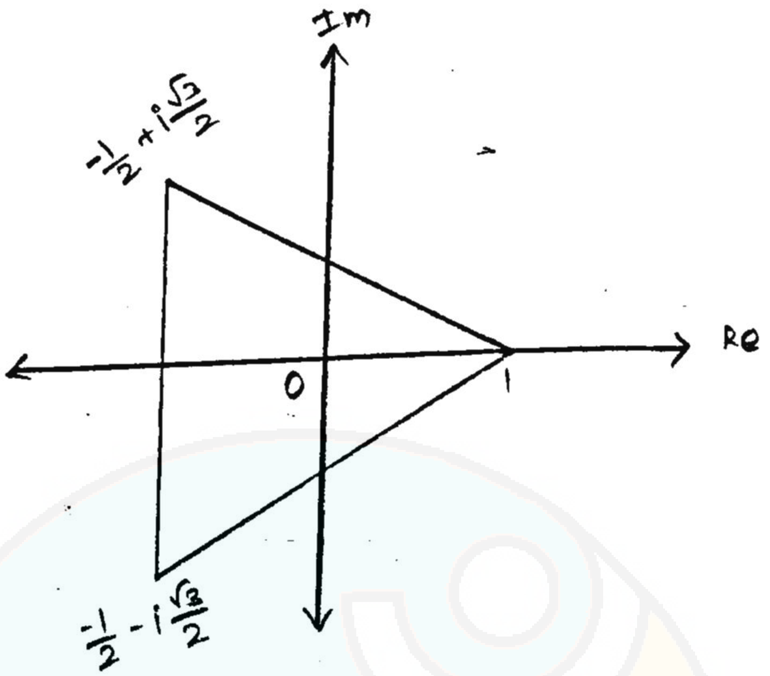
$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

எ.கா: 2.14

$1, \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, மற்றும் $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு:
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளியாக அமைய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் சமம் என நிறுவினால் போதும்.

Send Your Question Papers & Answer Keys to Our E-mail ID: Padasalai.Net@gmail.com



$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_1 - z_2| = \left|1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$= \left|1 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \left|\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \sqrt{\frac{12}{4}}$

$= \sqrt{3} \rightarrow (1)$

$$|z_2 - z_3| = \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \left|i\,2\sqrt{3}/2\right|$$

$$= |i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{3} \rightarrow (2)$$

$$|z_3 - z_1| = \left|\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{12}{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} \rightarrow (3)$$

பக்கங்களின் நீளங்கள் சமம்

எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின்

முனைப்புள்ளிகளாக அமையும்.

எ-கா: 2.15

z_1, z_2, z_3 என்ற கலப்பெண்கள் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ மற்றும் $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ எனவும் கருதுக $\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$

Soln:

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ என்க.

$|z_1|^2 = r^2 \quad |z_2|^2 = r^2 \quad |z_3|^2 = r^2$ [Squaring on both sides

$\Rightarrow \quad z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 = r^2 \quad [\because |z|^2 = z\bar{z}$

$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{\bar{z}_2}, \quad z_3 = \frac{r^2}{\bar{z}_3}$

$|z_1 + z_2 + z_3| = [r^2]\left[\left|\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_3}\right|\right]$

$= r^2 \left|\frac{\overline{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}}{|\bar{z}_1|\,|\bar{z}_2|\,|\bar{z}_3|}\right|$ ↓ CM (Cross multiplier)

$= r^2 \left|\frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{|z_1|\,|z_2|\,|z_3|}\right|$

$= r^2 \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{r^3}$

$|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{r}$

$r = \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{|z_1 + z_2 + z_3|}$

$r = \left|\frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$

எ-கா : 2.16

$z^2 = \bar{z}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு மூலங்கள் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு:

Given $z^2 = \bar{z}$

இருபுறமும் மட்டு காண

$$|z|^2 = |\bar{z}|$$

$$|z|^2 = |z|$$

$$|z|^2 - |z| = 0$$

$$|z|(|z| - 1) = 0$$

$$|z| = 0 \quad | \quad |z| - 1 = 0$$

$$|z| = 1$$

$|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ என்பது ஒரு தீர்வு.
is a solution

$$|z| = 1$$

$$z\bar{z} = 1$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$z^2 = \frac{1}{z} \quad [\because \text{Given data: } \bar{z} = z^2]$$

$$z^3 = 1$$

இதற்கு 3 பூஜ்ஜியமற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

ஆகவே பூஜ்ஜியத்தையும் சேர்த்து இதற்கு நான்கு தீர்வுகள் இருக்கும். It has 3 non-zero solutions. Hence including zero solution. Therefore 4 solution

Arthi Deepa.R
Kattuputhur

கலப்பெண்ணின் வர்க்கமூலம் (Square roots of a Complex Number)

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$ இங்கு $z = a+ib$ மற்றும் $b \neq 0$

குறிப்பு:

b குறை எனில் $\frac{b}{|b|} = -1$, x மற்றும் y ஆகியவை வெவ்வேறு குறியுடையவை. If b is negative $\frac{b}{|b|} = -1$, x and y have different signs

b மிகை எனில் $\frac{b}{|b|} = 1$, x மற்றும் y ஆகியவை ஒரே குறியுடையவை. If b is positive $\frac{b}{|b|} = 1$ x and y have same sign.

எ-கா: 2.17

$6-8i$ ன் வர்க்கமூலம் காண்க. (Find the square root of $6-8i$)

தீர்வு: $z = 6-8i$

$$|z| = |6-8i| = \sqrt{(6)^2+(-8)^2}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

வர்க்கமூலம் காண சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த applying the formula for square root we get

$$\sqrt{6-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} - i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right)$$

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$

b is Negative $\frac{b}{|b|} = -1$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{16}{2}} - i\sqrt{\frac{4}{2}}\right)$$
$$= \pm\left(\sqrt{8} - i\sqrt{2}\right)$$
$$= \pm\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$

பயிற்சி 2.5

1. கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களின் மட்டு மதிப்பினைக் காண்க.

i) $\frac{2i}{3+4i}$

தீர்வு:

$$z = \frac{2i}{3+4i}$$

$$|z| = \left|\frac{2i}{3+4i}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

ii) $\frac{2-i}{1+i} + \frac{1-2i}{1-i}$

தீர்வு:

$$z = \frac{2-i}{1+i} + \frac{1-2i}{1-i}$$

$$= \frac{(2-i)(1-i)+(1-2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2 - 2i - i + i^2 + (1 + i - 2i - 2i^2)}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{-i^2 - 4i + 3}{1+1}$$

$$= \frac{4 - 4i}{2}$$

$$= \frac{2(2-2i)}{2}$$

$z = 2 - 2i$

$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}$

---

iii) $(1-i)^{10}$

தீர்வு.

$z = (1-i)^{10}$

$|z| = |1-i|^{10}$

$= \left[\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right]^{10}$

$= \left[\sqrt{2}\right]^{10}$

$= (2)^{10 \times \frac{1}{2}}$

$= 2^5$

$= 32$

iv) $2i(3-4i)(4-3i)$

தீர்வு:

$$z = 2i(3-4i)(4-3i)$$

$$|z| = |2i(3-4i)(4-3i)|$$

$$= |2i|\,|3-4i|\,|4-3i|$$

$$= \sqrt{2^2}\,\sqrt{3^2+(-4)^2}\,\sqrt{4^2+(-3)^2}$$

$$= (2)\sqrt{9+16}\,\sqrt{16+9}$$

$$= (2)(5)(5)$$

$$|z| = 50$$

---

10. கீழ்க்காண்பவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $4+3i$

தீர்வு:

$$z = 4+3i$$

$$z = a+ib$$

$a = 4 \Rightarrow$ மிகை

$b = 3 \Rightarrow$ மிகை

$$|z| = \sqrt{(4)^2+(3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9}$$

$$|z| = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{a-ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{5+4}{2}} + i\sqrt{\frac{5-4}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

---

ii) $-6+8i$

தீர்வு :

$z = -6+8i$

$z = a+ib$

$a = -6$

$b = 8$

$$|z| = \sqrt{(-6)^2+8^2}$$

$$= \sqrt{36+64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$|z| = 10$

$$\sqrt{a-ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{10-6}{2}} + i(-1)\sqrt{\frac{10-(-6)}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{4}{2}} - i\sqrt{\frac{16}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{2} - i\sqrt{8}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}\right)$$

---

iii) $-5-12i$

தீர்வு:

$z = -5-12i$

$z = a+ib$

$a = -5 \Rightarrow$ குறை

$b = -12 \Rightarrow$ குறை

$|z| = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$

$= \sqrt{25+144}$

$= \sqrt{169}$

$|z| = 13$

$$\sqrt{a-ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\,\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{13-5}{2}} + i\sqrt{\frac{13+5}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}} + i\sqrt{\frac{18}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{4} + i\sqrt{9}\right)$$

$$= \pm(2+i3)$$

4) $|z| = 3$ எனில் $7 \leq |z+6-8i| \leq 13$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$|z+6-8i| \leq |z| + |6-8i|$$

$$= 3 + \sqrt{6^2+(-8)^2}$$

$$= 3 + \sqrt{36+64}$$

$$= 3 + \sqrt{100}$$

$$= 3 + 10$$

$$\leq 13 \rightarrow (1)$$

$$|z+6-8i| \geq \big|\, |z| - |6-8i| \,\big|$$

$$= \left| 3 - \sqrt{6^2+(-8)^2} \right|$$

$$= \left| 3 - \sqrt{36+64} \right|$$

$$= \left| 3 - \sqrt{100} \right|$$

$$= |3-10|$$

$$= |-7|$$

$\geq 7 \rightarrow (2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $7 \leq |z+6-8i| \leq 13$.

2. z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1| = |z_2| = 1$ மற்றும் $z_1 z_2 \neq -1$ எனில் $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ ஆர் மெய் எண் எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = 1$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$|z_1|^2 = 1^2 \qquad |z_2|^2 = 1$

$z_1 \overline{z_1} = 1 \qquad z_2 \overline{z_2} = 1$

$z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}} \qquad z_2 = \frac{1}{\overline{z_2}}$

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}}}{1 + \frac{1}{\overline{z_1}} \frac{1}{\overline{z_2}}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}}{\frac{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+1}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}}$$

$$= \frac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}} \times \frac{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}+1}$$

$$= \frac{\overline{z_2} + \overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2} + 1}$$

$$= \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 z_2} + 1}$$

$$= \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 z_2 + 1}}$$

$\therefore \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ என்பது முழுவதும் மெய்

3\. $10 - 8i$, $11 + 6i$ ஆகிய புள்ளிகளில் எப்புள்ளி $1 + i$ க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்?

தீர்வு:

$A(10 - 8i)$, $B(11 + 6i)$, $C(1 + i)$

A மற்றும் C க்கு இடைப்பட்ட தூரம் $= |(10 - 8i) - (1 + i)|$

$= |(10 - 1) + i(-8 - 1)|$

$= |9 - 9i|$

$= \sqrt{9^2 + (-9)^2}$

$= \sqrt{81 + 81}$

$= \sqrt{162} \rightarrow (1)$

B மற்றும் C க்கு இடைப்பட்ட தூரம் $= |(11+6i)-(1+i)|$

$= |(11-1)+i(6-1)|$

$= |10+5i|$

$= \sqrt{10^2+5^2}$

$= \sqrt{100+25}$

$= \sqrt{125} \rightarrow (2)$

(1), (2) லிருந்து ~~$\sqrt{130}$~~ $\sqrt{125} < \sqrt{162}$

$\sqrt{25 \times 5} < \sqrt{2 \times 81}$

$5\sqrt{5} \leq 9\sqrt{2}$

B என்ற புள்ளி C என்ற புள்ளிக்கு அருகாமையில் உள்ளது.

11+6i என்ற புள்ளி 1+i என்ற புள்ளிக்கு அருகாமையில் உள்ளது,

---

5. ~~|z| = 1 எனில்~~

6. $\left|z - \frac{2}{z}\right| = 2$ எனில் $|z|$ ன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகள் $\sqrt{3}+1$ மற்றும் $\sqrt{3}-1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\left|z - \frac{2}{z}\right| = 2 \rightarrow (1)$

$|z| = \left|z - \frac{2}{z} + \frac{2}{z}\right|$ [∵ $\frac{2}{z}$ ஐ கூட்டி கழிக்க]

$\leq \left|z - \frac{2}{z}\right| + \left|\frac{2}{z}\right|$ [∵ முக்கோண சமனிலி]

$= 2 + \left|\frac{2}{z}\right|$ [using ①]

$= 2 + \frac{|2|}{|z|}$

$= 2 + \frac{2}{|z|}$

$|z| = \frac{2|z|+2}{|z|}$

$|z|^2 = 2|z|+2$

$|z|^2 - 2|z| = 2$

$|z|^2 - 2|z| + 1^2 = 2+1$ [∵ இருபுறமும் 1ஐ கூட்டுக]

$[|z|-1]^2 = 3$ $|z|-1 = \pm\sqrt{3}$

வர்க்கமூலம் காண

$|z|-1 = \pm\sqrt{3}$

$\therefore |z| = \pm\sqrt{3}+1$

$(\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}+1)$

$(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})$

∴ மீப்பெருமதிப்பு $= \sqrt{3}+1$

மீச்சிறு மதிப்பு $= (\sqrt{3}+1) = (1-\sqrt{3})$

7. z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற மூன்று கலப்பெண்கள் $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $|z_3| = 3$, மற்றும் $|z_1+z_2+z_3| = 1$ என்றவாறு உள்ளது எனில், $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3| = 6$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$|z_1+z_2+z_3| = 1 \rightarrow (1)$$

$$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = 2 \qquad |z_3| = 3$$

$$|z_1|^2 = 1 \qquad |z_2|^2 = 2^2 \qquad |z_3|^2 = 3^2$$

$$z_1\overline{z_1} = 1 \qquad z_2\overline{z_2} = 4 \qquad z_3\overline{z_3} = 9$$

$$z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}} \qquad z_2 = \frac{4}{\overline{z_2}} \qquad z_3 = \frac{9}{\overline{z_3}}$$

$$|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3| = \left|9\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right)\left(\frac{4}{\overline{z_2}}\right)+4\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right)\left(\frac{9}{\overline{z_3}}\right)+\left(\frac{4}{\overline{z_2}}\right)\left(\frac{9}{\overline{z_3}}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{36}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}+\frac{36}{\overline{z_1}\,\overline{z_3}}+\frac{36}{\overline{z_2}\,\overline{z_3}}\right|$$

$$= \left|36\left(\frac{\overline{z_3}+\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}}\right)\right|$$

$$= 36\,\frac{|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|}{|\overline{z_1}||\overline{z_2}||\overline{z_3}|}$$

$$= 36\left(\frac{1}{|\bar{z}_1||z_2||z_3|}\right)$$

$$= 36\ \frac{1}{(1)(2)(3)}$$

$$= 36 \times \frac{1}{6}$$

$$= 6$$

8) z, iz மற்றும் $z+iz$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 50 சதுர அலகுகள் எனில், $|z|$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

z, iz மற்றும் $z+iz$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளியாக கொண்டு அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 50 சதுர அலகுகள்.

$$z = x+iy$$

$$iz = i.(x+iy)$$

$$= ix+i^2y$$

$$= ix-y$$

$$z+iz = x+iy+ix-y$$

$$=(x-y)+i(y+x)$$

z, $z+iz$ மற்றும் iz ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளியாக கொண்டு அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு A என்க.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x-y & x+y & 1 \\ -y & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(x+y-x) - y(x-y+y) + 1(x^2 - xy + xy + y^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[xy - xy + x^2 + y^2\right]$$

$$50 = \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$100 = x^2+y^2$$

வர்க்கமூலம் காண

$$\sqrt{100} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$10 = |z|$$

9. $z^3 + 2\bar{z} = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும் என நிறுவுக.

$$z^3 + 2\bar{z} = 0$$

$$z^3 = -2\bar{z}$$

இருபுறமும் மட்டு காண

$$|z^3| = |-2\bar{z}|$$

$$|z^3| = 2|\bar{z}|$$

$|z|^3 = 2|z|$

$|z|^3 - 2|z| = 0$

$|z|[|z|^2 - 2] = 0$

(i) $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ ஒரு தீர்வு

$|z^2| = 2$

$(z\bar{z})^2 = \sqrt{2}$

$z\bar{z} = \sqrt{2}$

$\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{z}$

கலப்பெண்களின் வடிவியல் மற்றும் நியமப்பாதை

எ.கா: 2.18

$z = 3+2i$ எனக் கொண்டு, z, iz மற்றும் $z+iz$ ஆகியவற்றை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க. இக்கலப்பெண்கள் ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$z = 3+2i$$

$$iz = i(3+2i)$$

$$= 3i+2i^2$$

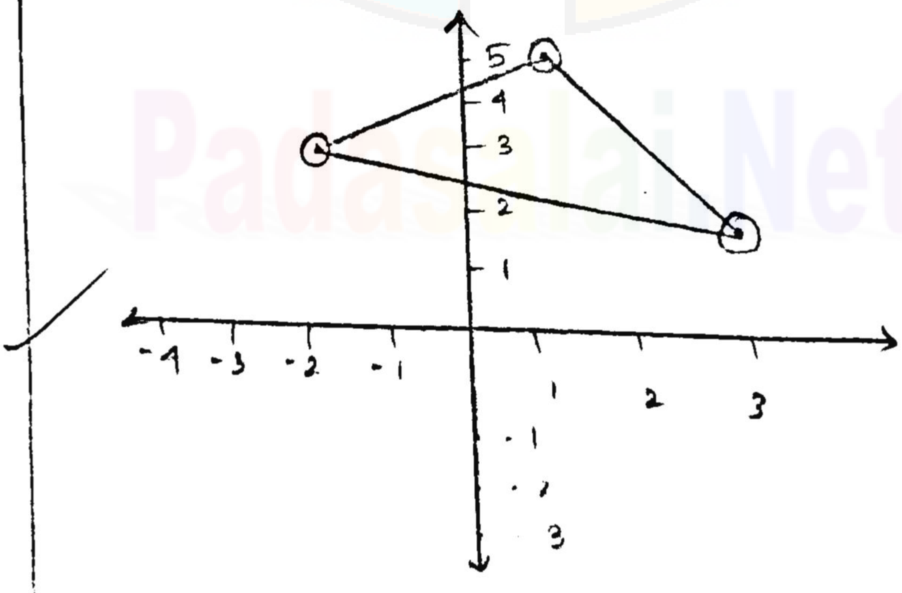
$$= 3i+2(-1)$$

$$= 3i-2$$

$$z+iz = (3+2i)+(3i-2)$$

$$= 3+2i+3i-2$$

$$= 1+5i$$



$|(AB)|^2 = |(OB - OA)|^2$

$= |1+5i - (3+2i)|^2$

$= |1+5i-3-2i|^2$

$= |-2+3i|^2$

$= \left(\sqrt{(2)^2+(3)^2}\right)^2$

$= \left(\sqrt{4+9}\right)^2$

$= (\sqrt{13})^2$

$= 13$

$BC^2 = |(iz) - (z+iz)|^2$

$= |-2+3i - (1+5i)|^2$

$= |-2+3i-1-5i|^2$

$= |-3-2i|^2$

$= \left(\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}\right)^2$

$= \left(\sqrt{9+4}\right)^2$

$= 13$

$CA^2 = |3+2i - (-2+3i)|^2$

$= |3+2i+2-3i|^2$

$= |5-i|^2$

$= \left(\sqrt{(5)^2+(-1)^2}\right)^2$

$= \left(\sqrt{25+1}\right)^2$

$CA^2 = 26$

$AB^2 + BC^2 = CA^2$

மற்றும் $AB = BC$

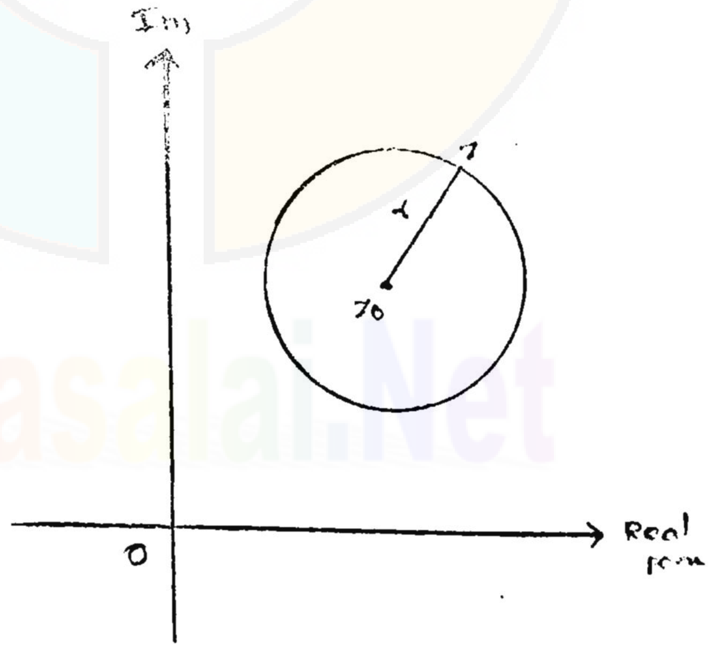
$m\angle B = 90^\circ$

முக்கோணம் ABC ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும்.

வரையறை: 2.5 (வட்டம்)

ஒரு தளத்தில் நிலையான புள்ளிக்கும் நகரும் புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் எப்பொழுதும் மாறிலியாக இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

நிலையான புள்ளி வட்டத்தின் மையம் மற்றும் மாறிலி தொலைவு வட்டத்தின் ஆரம் ஆகும்.



z ன் நியமப்பாதை $|z - z_0| = r$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

இங்கு z_0 என்பது நிலையான புள்ளி(மை) r என்பது மிகை மாறிலி.

இச்சமன்பாடு z_0விலிருந்து zக்கு r தூரமுள்ள எல்லா கலப்பு எண்களையும் கொண்டிருக்கும்.

குறிப்பு :

$|z-z_0| = r$ என்பது கலப்பெண் வடிவில் வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

(i) $|z-z_0| < r$ ஆனது வட்டத்தின் உள்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.

(ii) $|z-z_0| > r$ ஆனது வட்டத்தின் வெளிப்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.

எ.கா :

$|z| = r \quad [z = x+iy]$

$\sqrt{x^2+y^2} = r$

$x^2+y^2 = r^2$ என்பது ஆதியை மையமாகவும் r அலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

எ.கா : 2.19

$|3z-5+i| = 4$ என்ற சமன்பாடு வட்டத்தை குறிக்கிறது எனக் காட்டுக. மேலும் இதன் மையம் (ம) ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$|z-z_0| = r$$

$$|3z-5+i| = 4$$

$$\left|3z-(5+i)\frac{3}{3}\right| = 4$$

$$3\left|z-(5+i)\frac{1}{3}\right| = 4$$

$$3\left|z-\left(\frac{5+i}{3}\right)\right| = 4$$

$$3\left|z-\left(\frac{5}{3}+\frac{i}{3}\right)\right| = 4$$

$$\left|z-\left(\frac{5}{3}+\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$$

இது $|z-z_0| = r$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே, இது வட்டத்தை குறிக்கின்றது.

மையம் $z_0 = \frac{5}{3}+\frac{i}{3}$

ஆரம் $r = \frac{4}{3}$

எ.கா : 2.20

$|z+2-i| < 2$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் உள்பகுதியால் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கும் என காட்டுக. அவ்வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

$$|z-z_0| = r$$

$$|z+(2-i)| < 2$$

$$|z-(-2+i)| < 2$$

மையம் $z_0 = -2+i \Rightarrow (-2,1)$

ஆரம் $r = 2$

எ.கா : 2.21

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் z ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.

i) $|z| = |z-i|$

தீர்வு :

$$|z| = |z-i|$$

$z = x+iy$ என்க.

$$|x+iy| = |x+iy-i|$$

$$|x+iy| = |x+(y-1)i|$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y^2+1^2-2y)}$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+1-2y}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2+1-2y}\right)^2$

$x^2+y^2 = x^2+y^2+1-2y$

$x^2+y^2-x^2-y^2-1+2y = 0$

$2y-1 = 0$

---

ii) $|2z-3-i| = 3$

தீர்வு.

$z = x+iy$ என்க.

$|2z-3-i| = 3$

$|2(x+iy)-3-i| = 3$

$|2x+i2y-3-i| = 3$

$|(2x-3)+i(2y-1)| = 3$

$\sqrt{(2x-3)^2+(2y-1)^2} = 3$

$\sqrt{(2x)^2+3^2-2(2x)(3)+(2y)^2+1^2-2(2y)(1)} = 3$

$\sqrt{4x^2+9-12x+4y^2+1-4y} = 3$

$\left(\sqrt{4x^2+9-12x+4y^2+1-4y}\right)^2 = 3^2$

$4x^2+9-12x+4y^2+1-4y = 9$

$$4x^2+9-12x+4y^2+1-4y-9=0$$

$4x^2+4y^2-12x-4y+1=0$ என்பது கார்ட்டீசியன் வடிவில் zன் நியமப்பாதை ஆகும்.

பயிற்சி 2.6

1. $z=x+iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right|=1$ எனுமாறு அமைந்தால் zன் நியமப்பாதை மெய்அச்சு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$z=x+iy$$

$$\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right|=1$$

$$\frac{|z-4i|}{|z+4i|}=1$$

$$|z-4i|=|z+4i|$$

$$|x+iy-4i|=|x+iy+4i|$$

$$|x+i(y-4)|=|x+i(y+4)|$$

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y+4)^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$x^2+(y-4)^2=x^2+(y+4)^2$$

$$x^2+y^2-8y+16=x^2+y^2+8y+16$$

$$16y=0$$

$$y=0$$

z ன் நியமப்பாதை மெய் அச்சு

2. $z = x+iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $Im\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right)=0$ எனுமாறு அமைந்தால் z ன் நியமப்பாதை $2x^2+2y^2-x+2y=0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$z = x+iy$$

$$Im\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right)=0$$

$$Im\left(\frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1}\right)=0$$

$$Im\left[\frac{2x+i2y+1}{ix+i^2y+1}\right]=0$$

$$Im\left[\frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}\right]=0$$

$$Im\left[\frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}\times\frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix}\right]=0$$

$$Im\left[\frac{(2x+1)(1-y)-ix(2x+1)+i2y(1-y)+2xy}{(1-y)^2+x^2}\right]=0$$

$$\frac{-x(2x+1)+2y(1-y)}{(1-y)^2+x^2}=0$$

$$-2x^2-x+2y-2y^2=0$$

(−) ஆல் பெருக்க

$$2x^2+x-2y+2y^2=0$$

$$2x^2+2y^2+x-2y=0$$

(3) பின்வரும் சமன்பாடுகளால் $z=x+iy$ ன் நியமப்பாதையை கார்டீசியன் வடிவில் எழுதுக.

i) $[Re(iz)]^2 = 3$

தீர்வு :

$$z = x+iy$$

$$[Re[i(x+iy)]]^2 = 3$$

$$Re[ix+i^2y]^2 = 3$$

$$Re[ix-y]^2 = 3$$

$$(-y)^2 = 3$$

$$y^2 = 3$$

---

ii) $Im[(1-i)z+1] = 0$

தீர்வு:

$$z = x+iy$$

$$Im[(1-i)z+1] = 0$$

$$Im[(1-i)(x+iy)+1] = 0$$

$$Im[x+iy-ix-i^2y+1] = 0$$

$$Im[x-ix+iy+y+1] = 0$$

$$Im[(x+y+1)+i(y-x)] = 0$$

$$y-x = 0$$

- ஆல் பெருக்க

$$x-y = 0$$

iii) $|z+i| = |z-1|$

தீர்வு :

$$z = x+iy$$

$$|z+i| = |z-1|$$

$$|x+iy+i| = |x+iy-1|$$

$$|x+i(y+1)| = |(x-1)+iy|$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$x^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$x^2+y^2+2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

$$2y+1 = -2x+1$$

$$2x+2y = 0$$

$\div 2$

$$x+y = 0$$

iv) $\bar{z} = z^{-1}$

$$z = x+iy$$

$$\bar{z} = z^{-1}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$(\overline{x+iy}) = \frac{1}{x+iy}$$

$$(x-iy)(x+iy) = 1$$

$$x^2+y^2 = 1$$

4) மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

i) $|z-2-i|=3$

தீர்வு: $|z-z_0|=r$

$|z-2-i|=3$

$|z-(2+i)|=3$

மையம் $z_0 = 2+i \Rightarrow (2,1)$

ஆரம் $r=3$

ii) $|2z+2-4i|=2$

$|z-z_0|=r$

$|2z+2-4i|=2$

$2|z+1-2i|=2$

$|z-(-1+2i)|=\frac{2}{2}$

$|z-(-1+2i)|=1$

மையம் $z_0 = -1+2i \Rightarrow (-1,2)$

ஆரம் $r=1$

iii) $|3z-6+12i|=8$

தீர்வு:

$|z-z_0|=r$

$|3z-6+12i|=8$

$3|z-2+4i|=8$

$3|z-(2-4i)|=8$

$|z-(2-4i)|=\frac{8}{3}$

மையம் $z_0 = 2-4i \Rightarrow (2,-4)$

ஆரம் $r = \frac{8}{3}$

(6) $z = x+iy$ கார்ட்டீசியன் வடிவில் எழுதுக.

i) $|z-4| = 16$

தீர்வு:

$z = x+iy$

$|z-4| = 16$

$|x+iy-4| = 16$

$|x-4+iy| = 16$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 16$

$\sqrt{x^2+4^2-2x(4)+y^2} = 16$

$\sqrt{x^2+16-8x+y^2} = 16$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$x^2+16-8x+y^2 = 256$

$x^2+y^2-8x+16-256 = 0$

$x^2+y^2-8x-240 = 0$

ii) $|z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$

தீர்வு:

$|x+iy-4|^2 - |x+iy-1|^2 = 16$

$|(x-4)+iy|^2 - |(x-1)+iy|^2 = 16$

$\left(\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 = 16$

$$(x-4)^2+y^2 - (x-1)^2+y^2 = 16$$

$$[x^2+4^2-2x(4)+y^2]-[x^2+1^2-2x+y^2]=16$$

$$x^2+16-8x+y^2-[x^2+1-2x+y^2]=16$$

$$x^2+16-8x+y^2-x^2-1+2x-y^2-16=0$$

$$-6x-1=0$$

(−) ஆல் பெருக்க,

$$6x+1=0$$

Padasalai.Net

கலப்பு எண்களின் துருவ வடிவம் மற்றும் யூலரின் வடிவம்:

Polar and Euler form of a Complex Number:

1M கலப்பெண்களை கூட்டும்போதும் கழிக்கும் போதும் நாம் கலப்பெண்களின் செவ்வக ஆயத்தொலைவுகளை பயன்படுத்துவோம்.

கலப்பெண்களை பெருக்கும் போது அல்லது கலப்பெண்களின் அடுக்குகளை காணும் போது துருவ வடிவத்தை பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரு கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம் (Polar form of a Complex number)

துருவ ஆயத் தொலை வடிவம் என்பது ஆதியிலிருந்து $z = x+iy$ என்ற புள்ளிவரை உள்ள வெக்டரை அதன் எண்மதிப்பு மற்றும் திசையை கொண்டு வகைப்படுத்தும் மற்றொரு வடிவம்.

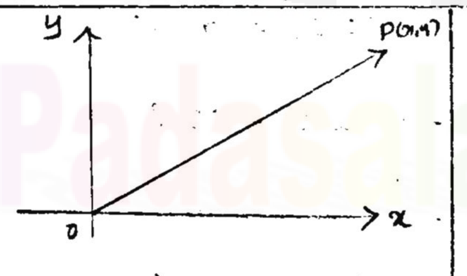
O – துருவ புள்ளி

O ல் இருந்து ஆரம்பிக்கும் கிடைமட்ட அரை கோடு துருவ அச்சு எனவும் அழைக்கின்றோம்

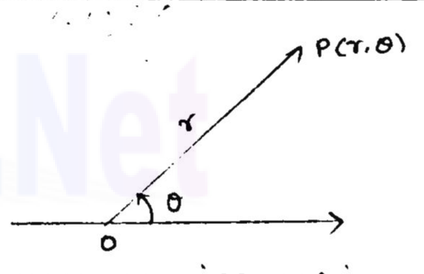
r – துருவ புள்ளியிலிருந்து P உள்ள தூரம்

θ – சாய்வு கோணம்

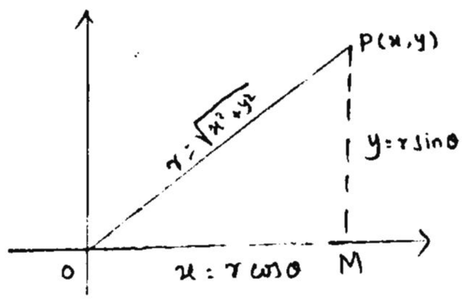
(r, θ) – ஆயத்தொலைவுகள்



செவ்வக ஆயத்தொலைவுகள்



துருவ ஆயத்தொலைவுகள்



துருவ ஆயத்தொலை மற்றும் செவ்வக ஆயத்தொலை முறைகளை ஒன்றின் மேல்

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = x+iy$

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

குறிப்பு:

துருவ வடிவானை வசதிக்காக நாம் $z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,cis\,\theta$ என எழுதலாம்.

r – z ன் எண்ணளவு (அ) மட்டு

θ – z ன் வீச்சு

θ – $arg(z)$ என குறிக்கிறோம்.

(i) $z=0$ எனில் வீச்சு θ வரையறுக்கப்படவில்லை எனவே துருவ அமைப்பு முறையில் $z \neq 0$ ஆகும்.

(ii) $z = x+iy$ ன் துருவ வடிவம் (r, θ)

$\bar{z} = x-iy$ ன் துருவ வடிவம் $(r, -\theta)$

(iii) $x = r\cos\theta \rightarrow ①$

$y = r\sin\theta \rightarrow ②$

$①^2 + ②^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$

$= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$

$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$x^2 + y^2 = r^2$

$\boxed{\sqrt{x^2+y^2} = r}$

$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$

$\boxed{\frac{y}{x} = \tan\theta}$

முதன்மை மதிப்பு (Principal value)

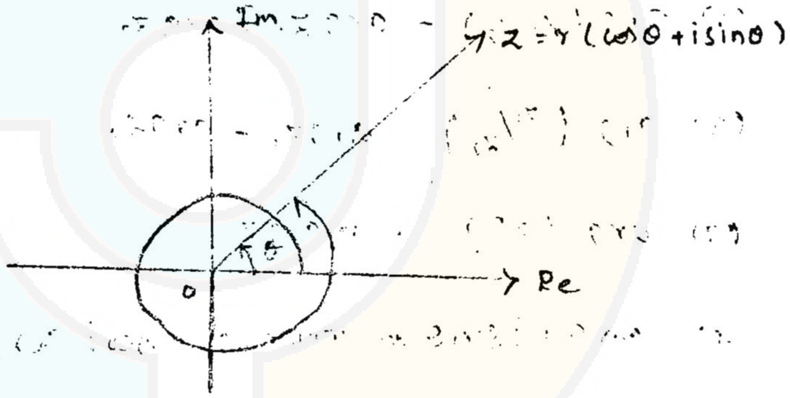
case (i)

z யை வெக்டராக கருதும்போது மெய் எண் θ என்பது z ஆனது மிகை மெய் அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தை ரேடியனில் குறிக்கும்.

கோணம் θ வுக்கு இருமதிப்புகளையும் சேர்த்து முடிவற்ற எண்ணிக்கையிலான மதிப்புகள் 2π ன் முழு எண் மடங்குகளாக கிடைக்கும்.

θ ன் ஒவ்வொரு மதிப்புகளையும் z ன் வீச்சுகள் என்கிறோம்.

arg z ன் முதன்மை வீச்சினை Arg z எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.



case (ii)

$-\pi < \theta \leq \pi$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு θ வுக்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் கிடைக்கும்.

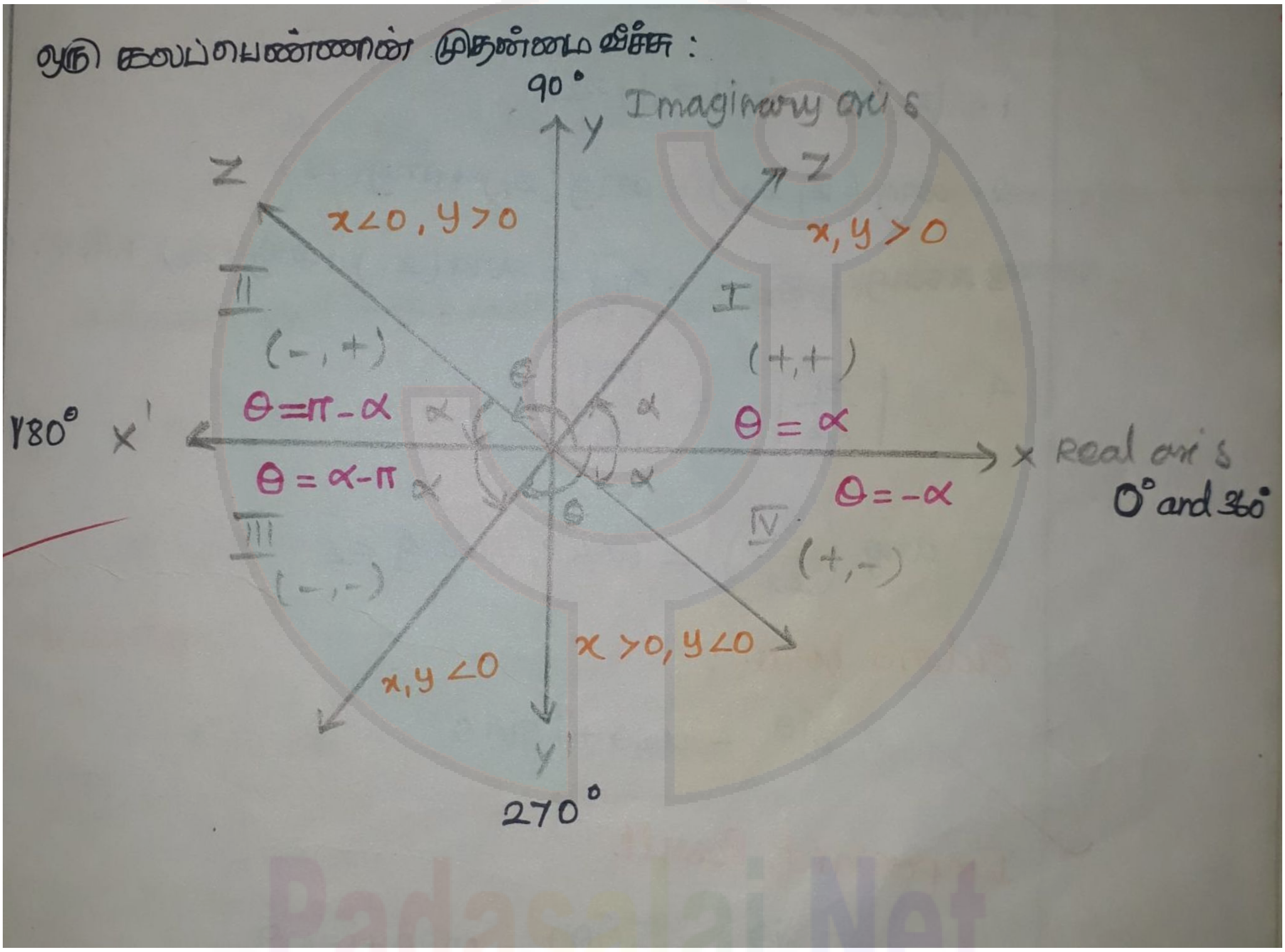
இதனை z ன் முதன்மை வீச்சு என்கிறோம்

இதனை Arg z என்பர்.

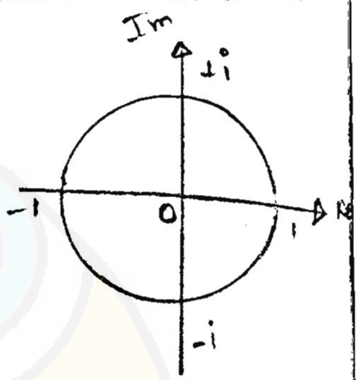
$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ அல்லது $-\pi < \theta \leq \pi$

1M | முதன்மை வீச்சு $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ (அ) $-\pi < \theta \leq \pi$ |

என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு ஒருமைத்தன்மையுடன் காணலாம்.


90°
y
Imaginary axis
z
z
x<0, y>0
x, y > 0
II
I
(−, +)
(+, +)
θ = π − α
θ = α
180° x'
x Real axis
0° and 360°
θ = α − π
θ = −α
III
IV
(−, −)
(+, −)
x > 0, y < 0
x, y < 0
y'
270°

z	1	i	−1	−i
Arg(z)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
arg z	$2n\pi$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$2n\pi+\pi$	$2n\pi-\frac{\pi}{2}$



formula :

1. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
3. $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
4. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Important Results :

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
3. $\arg[z_1 \ldots z_n] = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \ldots \arg(z_n)$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
5. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Euler's form :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Important Result

1. $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
3. $e^{i\theta} = \frac{1}{e^{-i\theta}}$