7.அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்.

1.காரணித்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$ என நிறுவுக.

$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix}$ என்க.

$x=1$ எனில் $|A| = \begin{vmatrix}2&3&5\\2&3&5\\2&3&5\end{vmatrix}=0$

மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம், எனவே $(x-1)^2$ காரணியாகும்.

$x=-9$ எனில் $|A|=0$, எனவே $(x+9)$ காரணியாகும்.

$\therefore (x-1)^2(x+9)$ என்பது $|A|$ −ன் காரணியாகும்.

காரணிகளின் படி $=3$

$|A|$ −ன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் படி $=3$

$\because m=3-3=0$, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி k ஆகும்.

$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix} = k(x-1)^2(x+9) \to (1)$

x^3 −ன் உறுப்புகளை இருபுறமும் சமன்படுத்த, $k=1$ ஆகும்.

$(1) \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$

செய்து பார்:1) $\begin{vmatrix}x&a&a\\a&x&a\\a&a&x\end{vmatrix}=(x-a)^2(x+2a)$ என நிறுவுக.

2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

2. $\begin{vmatrix}1&x^2&x^3\\1&y^2&y^3\\1&z^2&z^3\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$ **என நிறுவுக.**

$|A|=\begin{vmatrix}1&x^2&x^3\\1&y^2&y^3\\1&z^2&z^3\end{vmatrix}$ என்க.

$x=y$ எனில் $|A|=0 \Rightarrow (x-y)$ ஒரு காரணி.

$y=z$ எனில் $|A|=0 \Rightarrow (y-z)$ ஒரு காரணி.

$z=x$ எனில் $|A|=0 \Rightarrow (z-x)$ ஒரு காரணி.

$\therefore$ $(x-y)(y-z)(z-x)$ என்பது $|A|$ −ன் காரணியாகும்.

காரணிகளின் படி $=3$

$|A|$ −ன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் படி $=5$

$\because m=5-3=2$, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$ ஆகும்.

$\begin{vmatrix}1&x^2&x^3\\1&y^2&y^3\\1&z^2&z^3\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)] \to (1)$

சமன் (1) −ல் $x=0,y=1,z=2$ எனப்பிரதியிட,

$5k+2l=2\to(2)$

சமன் (1) −ல் $x=0,y=-1,z=1$ எனப்பிரதியிட,

$2k-l=-1\to(2)$

சமன் $(2),(3)$ − ஐத் தீர்க்க, $\boxed{k=0\,;l=1}$

$\therefore \begin{vmatrix}1&x^2&x^3\\1&y^2&y^3\\1&z^2&z^3\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

3. $|A| = \begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix} = 2pqr(p+q+r)^3$ **என நிறுவுக.**

$|A| = \begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix}$

$p=0$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow p$ ஒரு காரணி.

$q=0$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow q$ ஒரு காரணி

$r=0$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow r$ ஒரு காரணி

$p+q+r=0$ எனில் $|A|=0$. மேலும் மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம், எனவே $(p+q+r)^2$ ஒரு காரணியாகும்.

$\therefore pqr(p+q+r)^2$ என்பது $|A|$ −ன் காரணியாகும்.

காரணிகளின் படி $=5$

$|A|$ −ன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் படி $=6$

$\because m=6-5=1$, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி $k(p+q+r)$ ஆகும்.

$\begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix} = kpqr(p+q+r)^3 \to (1)$

$p=1,q=1,r=1$ எனப்பிரதியிட, $k=2$

$\therefore (1) \Longrightarrow \begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix}$

$=2pqr(p+q+r)^3$

4. $\begin{vmatrix}b+c & a-c & a-b\\ b-c & c+a & b-a\\ c-b & c-a & a+b\end{vmatrix} = 8abc$ **என நிறுவுக.**

$|A| = \begin{vmatrix}b+c & a-c & a-b\\ b-c & c+a & b-a\\ c-b & c-a & a+b\end{vmatrix}$ என்க.

$a=0$ எனில் $|A|=0$. எனவே a காரணியாகும்.

$b=0$ எனில் $|A|=0$. எனவே b காரணியாகும்.

$c=0$ எனில் $|A|=0$. எனவே c காரணியாகும்.

$\therefore abc$ என்பது $|A|$ −ன் காரணியாகும்.

காரணிகளின் படி $=3$

$|A|$ −ன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் படி $=3$

$\because m=3-3=0$, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி k ஆகும்.

$\begin{vmatrix}b+c & a-c & a-b\\ b-c & c+a & b-a\\ c-b & c-a & a+b\end{vmatrix} = kabc \to (1)$

$a=0,b=1,c=2$ என பிரதியிட$\Longrightarrow k=8$

$(1) \Longrightarrow \begin{vmatrix}b+c & a-c & a-b\\ b-c & c+a & b-a\\ c-b & c-a & a+b\end{vmatrix} = 8abc$

5. $\begin{vmatrix}b+c & a & a^2\\ c+a & b & b^2\\ a+b & c & c^2\end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ என நிறுவுக.

$|A| = \begin{vmatrix}b+c & a & a^2\\ c+a & b & b^2\\ a+b & c & c^2\end{vmatrix}$ என்க.

$a=b$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow (a-b)$ ஒரு காரணி.

$b=c$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow (b-c)$ ஒரு காரணி.

$c=a$ எனில் $|A|=0 \Longrightarrow (c-a)$ ஒரு காரணி.

$\therefore$ $(a-b)(b-c)(c-a)$ என்பது $|A|$ −ன் காரணியாகும்.

காரணிகளின் படி $=3$

$|A|$ −ன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் படி $=4$

$\because m=4-3=1$, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி $k(a+b+c)$ ஆகும்.

$\begin{vmatrix}b+c & a & a^2\\ c+a & b & b^2\\ a+b & c & c^2\end{vmatrix} = k(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \to (1)$

$a=0,b=1,c=2$ என பிரதியிட$\Longrightarrow k=1$

$(1) \Rightarrow \begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

6.தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix}$ என்க.

$= \begin{vmatrix} 12+x & 12+x & 12+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$= (12+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix}$

$= (12+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4+x & -2x & -2x \\ 4+x & 0 & -2x \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_2 \end{matrix}$

R_1 வழியே விரிவுபடுத்த,

$= (12+x)4x^2$

$|A| = 0 \Rightarrow (12+x)4x^2 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 = 0$ அல்லது $\Rightarrow (12+x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ (இருமுறை) $, x = -12$

7.$\begin{vmatrix} \mathbf{2bc-a^2} & \mathbf{c^2} & \mathbf{b^2} \\ \mathbf{c^2} & \mathbf{2ca-b^2} & \mathbf{a^2} \\ \mathbf{b^2} & \mathbf{a^2} & \mathbf{2ab-c^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{a} \\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}^2$ **என நிறுவுக.**

$RHS = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

நிரை – நிரல் பெருக்கல்படி,

$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = LHS$

8. $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$ என நிறுவுக.

$LHS = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$

நிரை – நிரல் பெருக்கல்படி,

$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix} = RHS$

9. $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்க.$a_i, b_i, c_i, i = 1,2,3$ என்பவற்றின் இணைக்காரணிகள் A_i, B_i, C_i எனில் $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$ என நிறுவுக.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

நிரை – நிரை பெருக்கல்படி,

$= \begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 \\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 \\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$

$|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$

10.$(-2,-3),(3,2),(-1,-8)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

முக்கோணத்தின் பரப்பு= $\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right|$

$= |-15| = 15$ ச.அ

செய்து பார்: $(0,0),(1,2),(4,3)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

11. $(-3,0),(3,0),(0,k)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 9 சதுர அலகுகள் எனில் k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

முக்கோணத்தின் பரப்பு= 9 ச.அ

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| = 9$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}\right| = 9 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}(-k)(-3-3)\right| = 9$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}(6k)\right| = 9 \Rightarrow |3k| = 9 \Rightarrow \boxed{k = \pm 3}$

செய்து பார்: $(k,2),(2,4),(3,2)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 9 சதுர அலகுகள் எனில் k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

12.$(a,b+c),(b,c+a),(c,a+b)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

முக்கோணத்தின் பரப்பு= $\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix}\right| C_1 \to C_1 + C_2$

$= \left|\frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix}\right| = 0 \quad (\because C_1 = C_2)$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன ஆகும்.

13.$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$ ஆகியவற்றின் அணிக்கோவைகளை விரிவுபடுத்தாமல் $|B| = 2|A|$ என நிறுவுக.

$$|B|=\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} R_1\to R_1+R_2+R_3$$

$$=2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \end{matrix}$$

$$=2(-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} R_1\to R_1+R_2+R_3=2|A|$$

14. $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix}=0$ என நிறுவுக.

$$\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix}$$

R_1,R_2,R_3 −ஐ முறையே a,b,c −ஆல் பெருக்க,

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab+bc & abc & ab^2c^2 \\ bc+ab & abc & bc^2a^2 \\ ca+bc & abc & ca^2b^2 \end{vmatrix}$$

C_2,C_3 −இல் இருந்து abc −ஐ வெளியே எடுக்க,

$$=\frac{abc\times abc}{abc}\begin{vmatrix} ab+bc & 1 & bc \\ bc+ab & 1 & ca \\ ca+bc & 1 & ab \end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} ab+bc+ca & 1 & bc \\ ab+bc+ca & 1 & ca \\ ab+bc+ca & 1 & ab \end{vmatrix} C_1\to C_1+C_3$$

C_1 − இல் இருந்து $(ab+bc+ca)$ −ஐ வெளியே எடுக்க,

$$=abc(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & 1 & bc \\ 1 & 1 & ca \\ 1 & 1 & ab \end{vmatrix}=0\ (\because C_1=C_2)$$

15. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ac+c^2} \\ \boldsymbol{a^2+ab} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b^2+bc} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix}=\boldsymbol{4a^2b^2c^2}$ **என நிறுவுக.**

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(a^2+ab) & 2(b^2+bc) & 2(c^2+ca) \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} R_1\to R_1+R_2+R_3$$

$$=2\begin{vmatrix} a^2+ab & b^2+bc & c^2+ca \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a^2+ab & b^2+bc & c^2+ca \\ 0 & -bc & -c^2 \\ -a^2 & 0 & -ca \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \end{matrix}$$

C_1 வழியே விரிவுபடுத்த,

$$=2[(a^2+ab)(abc^2)-a^2(-b^2c^2-bc^3+bc^3+abc^2)]$$
$$=2[a^3bc^2+a^2b^2c^2+a^2b^2c^2-a^3bc^2]=2[2a^2b^2c^2]$$
$$=4a^2b^2c^2$$

16. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{1+a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1+b} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1+c} \end{vmatrix}=\boldsymbol{abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ **என நிறுவுக.**

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

R_1,R_2,R_3 −ஐ முறையே a,b,c −ஆல் வகுக்க,

$$=abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix} R_1\to R_1+R_2+R_3$$

R_1 − இல் இருந்து $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ −ஐ வெளியே எடுக்க,

$$=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2\to C_2-C_1 \\ C_3\to C_3-C_1 \end{matrix}$$

$$=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1)(1)(1)=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

17. $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix}=0$ எனில் a,b,c என்பன $G.P$ −ல் அமையும் அல்லது α என்பது $ax^2+2bx+c=0$ −ன் ஒரு மூலமாகும் என நிறுவுக.

C_3 வழியே விரிவுபடுத்த,

$$(a\alpha+b)[b^2\alpha+bc-ac\alpha-bc]-(b\alpha+c)[ab\alpha+ac-ab\alpha-b^2]=0$$
$$\Rightarrow (a\alpha+b)[b^2\alpha-ac\alpha]-(b\alpha+c)[ac-b^2]=0$$
$$\Rightarrow \alpha(a\alpha+b)(b^2-ac)+(b\alpha+c)(b^2-ac)=0$$
$$\Rightarrow (b^2-ac)[a\alpha^2+b\alpha+b\alpha+c]=0$$
$$\Rightarrow (b^2-ac)[a\alpha^2+2b\alpha+c]=0$$
$$\Rightarrow b^2-ac=0\ (or)\ a\alpha^2+2b\alpha+c=0$$

$\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow a,b,c$ ஒரு $G.P$ மற்றும் α என்பது $ax^2+2bx+c=0$ −ன் ஒரு மூலம்.

18. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a^2+x^2} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b^2+x^2} & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c^2+x^2} \end{vmatrix}$ **என்ற அணிக்கோவை $\boldsymbol{x^4}$ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.**

R_1,R_2,R_3 −ஐ முறையே a,b,c −ஆல் பெருக்க,

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+x^2) & a^2b & a^2c \\ ab^2 & b(b^2+x^2) & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & c(c^2+x^2) \end{vmatrix}$$

C_1,C_2,C_3 −இல் இருந்து a,b,c −ஐ வெளியே எடுக்க,

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} (a^2+x^2) & a^2 & a^2 \\ b^2 & (b^2+x^2) & b^2 \\ c^2 & c^2 & (c^2+x^2) \end{vmatrix}$$

$R_1\to R_1+R_2+R_3\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x^2+a^2+b^2+c^2 & x^2+a^2+b^2+c^2 & x^2+a^2+b^2+c^2 \\ b^2 & (b^2+x^2) & b^2 \\ c^2 & c^2 & (c^2+x^2) \end{vmatrix}$$

R_1 −இல் இருந்து $x^2+a^2+b^2+c^2$ −ஐ வெளியே எடுக்க,

$$=(x^2+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & (b^2+x^2) & b^2 \\ c^2 & c^2 & (c^2+x^2) \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & x^2 & 0 \\ c^2 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2\to C_2-C_1 \\ C_3\to C_3-C_1 \end{matrix}$$

$$=(x^2+a^2+b^2+c^2)1.x^2.x^2=(x^2+a^2+b^2+c^2)x^4$$

$\therefore \begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவை x^4ஆல் வகுபடும்.

19. $\boldsymbol{a,b,c}$ என்பவை மிகை மற்றும் அவை ஒரு $\boldsymbol{G.P}$ −ன்

p,q,r ஆவது உறுப்புகள் எனில் $\begin{vmatrix}\log a & p & 1\\ \log b & q & 1\\ \log c & r & 1\end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

.a,b,c என்பவை ஒரு $G.P$ −ன் p,q,r ஆவது உறுப்புகள்.

$t_n = ar^{n-1}$

$t_p = a \Rightarrow a = AR^{p-1} \Rightarrow \log a = \log A + (p-1)\log R$

$t_q = b \Rightarrow b = AR^{q-1} \Rightarrow \log b = \log A + (q-1)\log R$

$t_r = c \Rightarrow c = AR^{r-1} \Rightarrow \log c = \log A + (r-1)\log R$

$$\begin{vmatrix}\log a & p & 1\\ \log b & q & 1\\ \log c & r & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\log A + (p-1)\log R & p & 1\\ \log A + (q-1)\log R & q & 1\\ \log A + (r-1)\log R & r & 1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\log A & p & 1\\ \log A & q & 1\\ \log A & r & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(p-1)\log R & p & 1\\ (q-1)\log R & q & 1\\ (r-1)\log R & r & 1\end{vmatrix}$$

$$= \log A\begin{vmatrix}1 & p & 1\\ 1 & q & 1\\ 1 & r & 1\end{vmatrix} + \log R\begin{vmatrix}p-1 & p & 1\\ q-1 & q & 1\\ r-1 & r & 1\end{vmatrix}$$

$$= 0 + \log R\begin{vmatrix}p-1 & p-1 & 1\\ q-1 & q-1 & 1\\ r-1 & r-1 & 1\end{vmatrix} C_2 \to C_2 - C_3$$

$$\therefore \begin{vmatrix}\log a & p & 1\\ \log b & q & 1\\ \log c & r & 1\end{vmatrix} = 0$$

20.$A = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \alpha\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ எனில் $\sum_{k=1}^{n} det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ என நிறுவுக.

$|A| = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \alpha\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$; $|A|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$; $|A|^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$; ...

$\sum_{k=1}^{n} det(A^k) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots \ldots \ldots$

$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots \ldots \ldots$ ஒரு $G.P.$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{4} < 1$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

21.$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -5 & 6\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}$ எனில் A என்ற அணியின் அனைத்து சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைகாரணிகளைக் காண்க. இவற்றைப் பயன்படுத்தி $|A|$ காண்க. மேலும் எந்த ஒரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்தினாலும் $|A|$ −ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை எனச்சரிபார்க்க.

சிற்றணிக்கோவைகள்:

$M_{11} = \begin{vmatrix}-5 & 6\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -40; M_{12} = \begin{vmatrix}4 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix} = 26;$

$M_{13} = \begin{vmatrix}4 & -5\\ -3 & 5\end{vmatrix} = 5 \quad M_{21} = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix} = 16;$

$M_{22} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix} = -4; M_{23} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix} = 14$

$M_{31} = \begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & 6\end{vmatrix} = 8; M_{32} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 14;$

$M_{33} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix} = -17$

இணைகாரணிகள்:

$A_{11} = \begin{vmatrix}-5 & 6\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -40; A_{12} = -\begin{vmatrix}4 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix} = -26;$

$A_{13} = \begin{vmatrix}4 & -5\\ -3 & 5\end{vmatrix} = 5 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -16;$

$A_{22} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix} = -4; A_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix} = -14$

$A_{31} = \begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & 6\end{vmatrix} = 8; A_{32} = -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix} = -14;$

$A_{33} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix} = -17$

R_1 வழியே விரிவுபடுத்த,

$|A| = 1(-40) - 3(26) - 2(5) = -128$

C_1 வழியே விரிவுபடுத்த,

$|A| = 1(-40) - 4(16) - 3(8) = -128$

$\therefore$ எந்த ஒரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்தினாலும் $|A|$ −ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

22.$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ மற்றும் $A^3 - 6A^2 + 7A + kI = 0$ எனில் k −ஐக் காண்க.

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 5\\ 8 & 0 & 13\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix}5 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 5\\ 8 & 0 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & 0 & 34\\ 12 & 8 & 23\\ 34 & 0 & 55\end{bmatrix}$$

$A^3 - 6A^2 + 7A + kI = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}21 & 0 & 34\\ 12 & 8 & 23\\ 34 & 0 & 55\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}5 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 5\\ 8 & 0 & 13\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix} + kI = 0$$

$$\begin{bmatrix}21 & 0 & 34\\ 12 & 8 & 23\\ 34 & 0 & 55\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-30 & 0 & -48\\ -12 & -24 & -30\\ -48 & 0 & -78\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & 0 & 14\\ 0 & 14 & 7\\ 14 & 0 & 21\end{bmatrix} + kI = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix} + kI = 0 \Rightarrow -2I + kI = 0 \Rightarrow kI = 2I$$

$\Rightarrow k = 2$

23.$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ எனில் $A(B+C) = AB + AC$ எனும் பண்பினைச் சரிபார்.

$$B + C = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 13\\ 36 & 17\end{bmatrix} \to (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -4\\ 19 & 11\end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 17\\ 17 & 6\end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix}-6 & -4\\ 19 & 11\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 17\\ 17 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 13\\ 36 & 17\end{bmatrix} \to (2)$$

$(1),(2)$ இல் இருந்து $A(B+C) = AB + AC$.

24.$A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணியைக் காண்க.

$A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ என்க.

$A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a+4b & 2a+5b & 3a+6b\\ c+4d & 2c+5d & 3c+6d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a + 4b = -7 \to (1);\ 2a + 5b = -8 \to (2)$

$c + 4d = 2 \to (3);\ 2c + 5d = 4 \to (4)$

சமன் $(1),(2)$ −ஐத் தீர்க்க$\Rightarrow a = 1, b = -2$

சமன் $(3),(4)$ −ஐத் தீர்க்க$\Rightarrow c = 2, d = 0$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

செய்து பார்:

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ எனுமாறுள்ள A என்ற அணியைக் காண்க.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix}$ மற்றும் $AA^T = 9I$ எனில் x, y −ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} = P$

$\therefore P = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$Q = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 9 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$

$\therefore Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

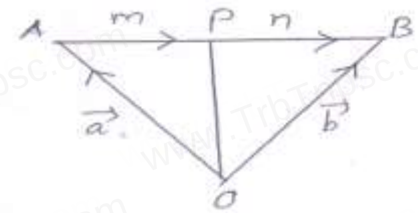
$A = P + Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

8.வெக்டர் இயற்கணிதம்

1.பிரிவு சூத்திரத்தை (உட்புறமாக பிரித்தல்) எழுதி நிறுவுக.

O-வை ஆதியாகவும் A மற்றும் B -யை ஏதேனும் இரு புள்ளிகளாகவும் கொள்க. மேலும் P என்ற புள்ளியானது AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $m:n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B −ன் நிலை வெக்டர்களாயின் P −ன் நிலை வெக்டர்

$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}$



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ என்க.

AB என்ற கோட்டுத்துண்டை P ஆனது $m:n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிப்பதால்

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|$

$\Rightarrow n.\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ ($\because \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}$ ஒரே திசை வெக்டர்கள்)

$\Rightarrow n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

$\Rightarrow n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$

$\Rightarrow n\vec{r} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{r}$

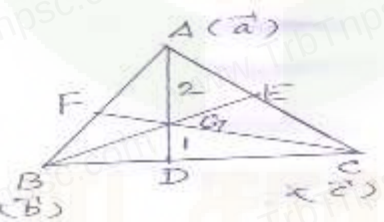
$\Rightarrow n\vec{r} + m\vec{r} = n\vec{a} + m\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{r}(n + m) = n\vec{a} + m\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{r} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}$

2.ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.



ΔABC −ல் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA −ன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E மற்றும் F என்க.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ என்க.

மேலும் $\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \overrightarrow{OE} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}, \overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

AD, BE மற்றும் CF ஆகியவற்றை முறையே G_1, G_2 மற்றும் G_3 ஆகியவை உட்புறமாக $2:1$என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதால்

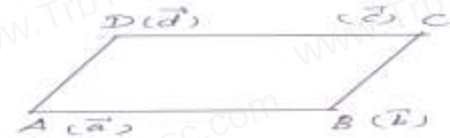
$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}, \overrightarrow{OG_2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}, \overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OG_3}$

$\Rightarrow G$ பொதுப்புள்ளி.

$\therefore$ ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

3.ஒரு நாற்கரம் இணைகரமாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை அதன் மூலைவிட்டங்கள் இருசமக்கூறிடும் என்பதாகும் என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.



$ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்க.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$ என்க.

$Case(i)$:

நாற்கரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் என்க.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

$\Rightarrow \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ (இருபுறமும் 2 ஆல் வகுக்க)

$\Rightarrow AC$ −ன் மையப்புள்ளி $=$ BD −ன் மையப்புள்ளி

$\therefore$ மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும்.

$Case(ii)$:

நாற்கரம் $ABCD$ −ன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிட்டால்

$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

$\Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

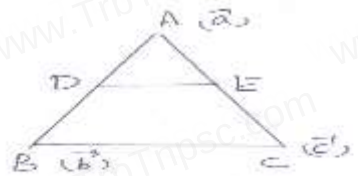
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow AB, DC$ இணை.

மேலும் $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

$\Rightarrow \vec{a} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow AD, BC$ இணை.

$\therefore$ $ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

4.ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு அதன் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை எனவும், அதன் நீளத்தில் பாதி எனவும் வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.



ABC ஒரு முக்கோணம், பக்கங்கள் AB, AC −ன் நடுப்புள்ளிகள் D, E என்க. O என்பது ஆதிப்புள்ளி.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$

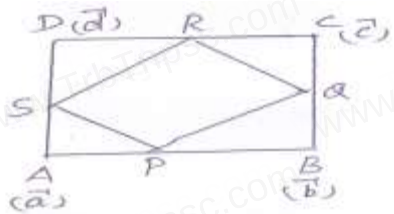
$\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2} = \frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$

$\Longrightarrow DE \parallel BC$

$|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| \Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC$

5.ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.



$ABCD$ ஒரு நாற்கரம். O என்பது ஆதிப்புள்ளி. P, Q, R, S என்பன பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA −ன் நடுப்புள்ளிகள்.

$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \overrightarrow{OR} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}, \overrightarrow{OS} = \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} \rightarrow (1)$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} \rightarrow (2)$

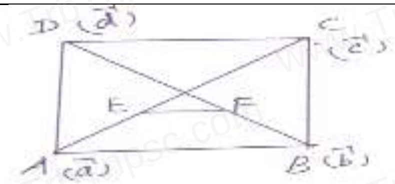
$(1), (2)$ இல் இருந்து, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow PQ \parallel SR$

இதுபோலவே $QR \parallel PS$ என நிறுவலாம்.

$\therefore$ $PQRS$ ஒரு இணைகரம்.

6. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD −ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் F ஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$ என நிறுவுக.

$ABCD$ ஒரு நாற்கரம். O என்பது ஆதிப்புள்ளி.



$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OD} = \vec{d}$

AC, BD −ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் F.

$\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}, \overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{c},\ 2\overrightarrow{OF} = \vec{b} + \vec{d}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

$= 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} = 2\vec{b} - 2\vec{a} + 2\vec{d} - 2\vec{c}$

$= 2(\vec{b} + \vec{d}) - 2(\vec{a} + \vec{c}) = 2(2\overrightarrow{OF}) - 2(2\overrightarrow{OE})$

$= 4\overrightarrow{OF} - 4\overrightarrow{OE} = 4(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE})$

$= 4\overrightarrow{EF}$

7. $2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}, 4\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}, 10\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}, \overrightarrow{OC} = 10\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}) - (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$

$= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

$AB^2 = 2^2 + (-3)^2 + 6^2 = 49$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (10\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k})$

$= 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$BC^2 = 6^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = 49$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) - (10\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k})$

$= -8\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$

$CA^2 = (-8)^2 + 5^2 + (-3)^2 = 98$

$\because AB^2 + BC^2 = CA^2$, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

8. $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{a} + \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = \vec{b}$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

$\vec{a}.\vec{c} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).(\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) = 2 + 3 - 5 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

9. $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}, -2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் அந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}, \overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

$= 2\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}) - (3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$

$= -5\vec{i} + 7\vec{j} - 12\vec{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-12)^2} = \sqrt{218}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k})$

$= 3\vec{i} - \vec{j} + 10\vec{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (10)^2} = \sqrt{110}$

முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $= AB + BC + CA$

$= \sqrt{44} + \sqrt{218} + \sqrt{110}$

10. $A(1,1,1), B(1,2,3)$ மற்றும் $C(2,-1,1)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

$= \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

$= -\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$\because |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{5}$, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

11. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ எனில், $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டரைக் காண்க.

$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$

$=3(3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k})-2(-2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k})+4(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$

$=9\vec{i}-3\vec{j}-12\vec{k}+4\vec{i}-8\vec{j}+6\vec{k}+4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$

$=17\vec{i}-3\vec{j}-10\vec{k}$

$|3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}|=\sqrt{17^2+(-3)^2+(-10)^2}=\sqrt{398}$

அலகு வெக்டர்= $\frac{3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}}{|3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}|}=\frac{17\vec{i}-3\vec{j}-10\vec{k}}{\sqrt{398}}$

12.புள்ளிகள் $(1,0,0),(0,1,0)$ மற்றும் $(0,0,1)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k},\overrightarrow{OB}=0\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k},\overrightarrow{OC}=0\vec{i}+0\vec{j}+\vec{k}$

ΔABC –ல் பக்கங்கள் BC,CA மற்றும் AB –ன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D,E மற்றும் F என்க.

$A(1,0,0),B(0,1,0)$ மற்றும் $C(0,0,1)$

நடுப்புள்ளி= $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$\overrightarrow{OD}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right);\ \overrightarrow{OF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\left(0\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}\right)-\left(\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\right)$

$=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-1)^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

நடுக்கோடு AD –ன் திசைக்கொசைன்= $\left\{\frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right\}$

$=\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+0\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}\right)-\left(0\vec{i}+\vec{j}+0\vec{k}\right)$

$=\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$

$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

நடுக்கோடு BE –ன் திசைக்கொசைன்= $\left\{\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right\}$

$=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+0\vec{k}\right)-\left(0\vec{i}+0\vec{j}+\vec{k}\right)$

$=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\vec{k}$

$|\overrightarrow{CF}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

நடுக்கோடு CF –ன் திசைக்கொசைன்= $\left\{\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{1/2}{\frac{\sqrt{6}}{2}},\frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right\}$

$=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right\}$

13. $5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k},7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k},3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக்காட்டுக.

$\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k},\vec{b}=7\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k},\vec{c}=3\vec{i}+20\vec{j}+5\vec{k}$

ஒரு தள வெக்டர்கள் கட்டுப்பாடு: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\begin{vmatrix}5&6&7\\7&-8&9\\3&20&5\end{vmatrix}$

$=5(-40-180)-6(35-27)+7(140+24)$

$=-1100-48+1148=-1148+1148=0$

∴ கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் ஆகும்.

14. $4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k},-\vec{j}-\vec{k},3\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}$ மற்றும் $-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$ ஆகியவற்றை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு தள அமைவன எனக்காட்டுக.

$\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k},\overrightarrow{OB}=-\vec{j}-\vec{k},\overrightarrow{OC}=3\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k},\overrightarrow{OD}=-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(-\vec{j}-\vec{k}\right)-\left(4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right)$

$=-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left(3\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}\right)-\left(4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right)$

$=-\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\left(-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}\right)-\left(4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\right)$

$=-8\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

ஒரு தள வெக்டர்கள் கட்டுப்பாடு: $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]=0$

$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}-4&-6&-2\\-1&4&3\\-8&-1&3\end{vmatrix}$

$=-4(12+3)-(-6)(-3+24)-2(1+32)$

$=-60+126-66=-126+126=0$

∴ கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் ஆகும்.

15.$\vec{a},\vec{b}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் θ என்பது இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில் $(i)\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$ $(ii)\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ $(iii)\tan\frac{\theta}{2}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$ எனக்காட்டுக.

$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$

$(i)|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=(1)^2+(1)^2-2(1)(1)\cos\theta=2-2\cos\theta$

$=2(1-\cos\theta)=2\left(2\sin^2\theta/_2\right)$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\sin^2\theta/_2\Rightarrow\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}|^2=\sin^2\theta/_2$

$\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$

$(ii)|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=(1)^2+(1)^2+2(1)(1)\cos\theta=2+2\cos\theta$

$=2(1+\cos\theta)=2\left(2\cos^2\theta/_2\right)$

$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=4\cos^2\theta/_2\Rightarrow\frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2=\cos^2\theta/_2$

$\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$

$(iii)\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|}{\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$

16. $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$ மற்றும் $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ என அமைந்தால் $4\vec{a}.\vec{b}+3\vec{b}.\vec{c}+3\vec{c}.\vec{a}$ –ஐக் காண்க.

$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})^2=(-\vec{c})^2$

$\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}=\vec{c}^2\Rightarrow2^2+3^2+2\vec{a}.\vec{b}=4^2$

$\Rightarrow4+9+2\vec{a}.\vec{b}=16\Rightarrow2\vec{a}.\vec{b}=3\Rightarrow\boxed{\vec{a}.\vec{b}=3/_2}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\Rightarrow(\vec{b}+\vec{c})^2=(-\vec{a})^2$

$\Rightarrow\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}^2\Rightarrow3^2+4^2+2\vec{b}.\vec{c}=2^2$

$\Rightarrow9+16+2\vec{b}.\vec{c}=4\Rightarrow2\vec{b}.\vec{c}=-21\Rightarrow\boxed{\vec{b}.\vec{c}=-21/_2}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{c})^2=(-\vec{b})^2$

$\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}^2\Rightarrow2^2+4^2+2\vec{a}.\vec{c}=3^2$

$\Rightarrow4+16+2\vec{a}.\vec{c}=9\Rightarrow2\vec{a}.\vec{c}=-11\Rightarrow\boxed{\vec{a}.\vec{c}=-11/_2}$

$4\vec{a}.\vec{b}+3\vec{b}.\vec{c}+3\vec{c}.\vec{a}=4(3/_2)+3(-21/_2)+3(-11/_2)$

$=\frac{12}{2}-\frac{63}{2}-\frac{33}{2}=\frac{12-96}{2}=-\frac{84}{2}=-42$

17. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$ மற்றும் ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்தால் $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ – ஐக் காண்க.

$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$

ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் செங்குத்து எனவே,

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=0 \to (1)$

$\vec{b}.(\vec{a}+\vec{c})=0 \Rightarrow \vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{c}=0 \to (2)$

$\vec{c}.(\vec{a}+\vec{b})=0 \Rightarrow \vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}=0 \to (3)$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})=0$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})$

$= 3^2+4^2+5^2+2(0)=50$

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$

18. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ ஆகியவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$\vec{a}.\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}).(4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})=8-2+6=12$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{24}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{12}{\sqrt{14}.\sqrt{24}}=\frac{12}{\sqrt{2\times7}.\sqrt{2\times12}}=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\sqrt{3/7}$

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&3\\4&-2&2\end{vmatrix}$

$=\vec{i}(2+6)-\vec{j}(4-12)+\vec{k}(-4-4)=8\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{8^2+8^2+(-8)^2}=8\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}.\sqrt{24}}=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2\times7}.\sqrt{2\times12}}=\frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{7}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

19. $A(3,-1,2), B(1,-1,-3)$ மற்றும் $C(4,-3,1)$ ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

$\overline{OA}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}, \overline{OB}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}, \overline{OC}=4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})-(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$

$=-2\vec{i}+0\vec{j}-5\vec{k}$

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=(4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})-(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$

$=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&0&-5\\1&-2&-1\end{vmatrix}$

$=\vec{i}(0-10)-\vec{j}(2+5)+\vec{k}(4-0)=-10\vec{i}-7\vec{j}+4\vec{k}$

$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{(-10)^2+(-7)^2+4^2}$

$=\sqrt{100+49+16}=\sqrt{165}$

ΔABC –ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{\sqrt{165}}{2}$ ச.அ.

20.முக்கோணம் ABC –ன் உச்சிப்புள்ளிகள் A,B,C –ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ எனில் முக்கோணம் ABC –ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$ என நிரூபித்து. இதிலிருந்து A,B,C ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

$\overline{OA}=\vec{a},\ \overline{OB}=\vec{b},\ \overline{OC}=\vec{c}$

ΔABC –ன் பரப்பு$=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$

$=\frac{1}{2}|(\overline{OB}-\overline{OA})\times(\overline{OC}-\overline{OA})|$

$=\frac{1}{2}|(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})|$

$=\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}|$

$=\frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$

A,B,C ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைய நிபந்தனை

ΔABC –ன் பரப்பு$=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]=0$

$\Rightarrow [\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]=0$

21.எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $|\vec{a}\times\vec{i}|^2+|\vec{a}\times\vec{j}|^2+|\vec{a}\times\vec{k}|^2=2|\vec{a}|^2$ என நிரூபிக்க.

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ என்க.

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\1&0&0\end{vmatrix}=a_3\vec{j}-a_2\vec{k}$

$|\vec{a}\times\vec{i}|^2=a_2^2+a_3^2 \to (1)$

இதுபோலவே,

$|\vec{a}\times\vec{j}|^2=a_1^2+a_3^2 \to (2)$

$|\vec{a}\times\vec{k}|^2=a_1^2+a_2^2 \to (3)$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow$

$|\vec{a}\times\vec{i}|^2+|\vec{a}\times\vec{j}|^2+|\vec{a}\times\vec{k}|^2=2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=2|\vec{a}|^2$

22. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற அலகு வெக்டர்களுக்கு $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=0$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கும் $\vec{c}$ –க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனில் $\vec{a}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ என நிரூபிக்க.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\,;\ \vec{a}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\parallel(\vec{b}\times\vec{c})$

$\Rightarrow \vec{a}=\pm\lambda(\vec{b}\times\vec{c}) \to (1)$

$\Rightarrow |\vec{a}|=\pm\lambda|\vec{b}||\vec{c}|\sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 1=\pm\lambda(1)(1)\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$(1) \Rightarrow \vec{a}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$

10.வகை நுண்கணிதம்
வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

1.$y=e^{tan^{-1}x}$ எனில் $(1+x^2)y''+(2x-1)y'=0$ எனக்காட்டுக.

$y=e^{tan^{-1}x}$

வகையிட,

$\Rightarrow y'=e^{tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y'=e^{tan^{-1}x}$

$\Rightarrow (1+x^2)y'=y$

மீண்டும் வகையிட, $\Rightarrow (1+x^2)y''+y'.2x=y'$

$\Rightarrow (1+x^2)y''+2xy'-y'=0$

$\Rightarrow (1+x^2)y''+(2x-1)y'=0$

2.$y=\frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ எனில் $(1-x^2)y_2-3xy_1-y=0$ எனக்காட்டுக.

$y=\frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1-x^2}=sin^{-1}x$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,$\Rightarrow y^2(1-x^2)=(sin^{-1}x)^2$

வகையிட, $\Rightarrow 2yy'(1-x^2)+y^2(-2x)=2sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow 2yy'-2x^2yy'-2xy^2=2y$

$\div 2y \Rightarrow y'-x^2y'-xy=1$

மீண்டும் வகையிட, $\Rightarrow y''-(x^2y''+2xy')-(xy'+y)=0$

$\Rightarrow y''-x^2y''-2xy'-xy'-y=0$

$\Rightarrow (1-x^2)y''-3xy'-y=0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$

3.$x = a(\theta+\sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ எனில் $\theta = \frac{\pi}{2}$ எனும்போது $y'' = \frac{1}{a}$ என நிரூபிக்க.

$x = a(\theta+\sin\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta) = 2a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$y = a(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta = 2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \frac{d}{d\theta}\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\frac{d\theta}{dx} = sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right).\frac{1}{2}.\frac{1}{2a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{4a}sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$y'' = \frac{1}{4a}sec^4\left(\frac{\pi/2}{2}\right) = \frac{1}{4a}sec^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4a}\left(\sqrt{2}\right)^4 = \frac{1}{4a}.4 = \frac{1}{a}$

4.$\sin y = x\sin(a+y)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிரூபிக்க.

இங்கு $a \neq n\pi$

$\sin y = x\sin(a+y)$

$\Rightarrow x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

$y -$ ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$ $(\because sinAcosB - cosAsinB = \sin(A-B))$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

5.$y = (cos^{-1}x)^2$ எனில் $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ என நிரூபிக்க. மேலும் $x = 0$ –ன் போது y_2 மதிப்பைக் காண்க.

$y = (cos^{-1}x)^2 \Rightarrow y' = 2cos^{-1}x.\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}.y' = -2cos^{-1}x$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,$\Rightarrow (1-x^2)(y')^2 = 4(cos^{-1}x)^2$

$\Rightarrow (1-x^2)(y')^2 = 4y$

மீண்டும் வகையிட, $\Rightarrow (1-x^2)2y'y'' + (y')^2(-2x) = 4y'$

$\div 2y' \Rightarrow (1-x^2)y'' - xy' - 2 = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

$x = 0 \Rightarrow (1-(0)^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (0)\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

6.வகையிடுக: $y = \cos\left(2tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

$x = \cos\theta$ என்க.

$y = \cos\left(2tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \Rightarrow y = \cos\left(2tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$

$\Rightarrow y = \cos\left(2tan^{-1}\sqrt{\frac{2sin^2(\theta/2)}{2cos^2(\theta/2)}}\right)$

$\Rightarrow y = \cos\left(2tan^{-1}\left(\frac{sin(\theta/2)}{cos(\theta/2)}\right)\right)$

$\Rightarrow y = \cos\left(2tan^{-1}tan(\theta/2)\right)$

$\Rightarrow y = \cos(2\times\theta/2) \Rightarrow y = \cos\theta \Rightarrow y = x$

வகையிட,$\frac{dy}{dx} = 1$

7.$tan^{-1}x$ –ஐ பொறுத்து $sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ –ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

$f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ என்க$\Rightarrow \theta = tan^{-1}x$

$f(x) = sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+tan^2\theta}\right) = sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$f(x) = 2\theta = 2tan^{-1}x \Rightarrow f'(x) = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

$g(x) = tan^{-1}x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = 2$

8.$tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ –ஐ பொறுத்து $tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ – ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

$u = tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$u = tan^{-1}\left(\frac{cos^2(x/2) - sin^2(x/2)}{sin^2(x/2) + cos^2(x/2) + 2\sin(x/2)\cos(x/2)}\right)$

$u = tan^{-1}\left(\frac{[\cos(x/2)+\sin(x/2)][\cos(x/2)-\sin(x/2)]}{[\cos(x/2)+\sin(x/2)]^2}\right)$

$u = tan^{-1}\left(\frac{[\cos(x/2)-\sin(x/2)]}{[\cos(x/2)+\sin(x/2)]}\right)$

$\div\cos(x/2) \Rightarrow u = tan^{-1}\left(\frac{1-\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right) = tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

வகையிட,$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}$

$v = tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) \Rightarrow v = tan^{-1}\left(\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2cos^2(x/2)}\right)$

$\Rightarrow v = tan^{-1}(\tan(x/2)) \Rightarrow v = x/2$

வகையிட,$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

9.$u = tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, v = tan^{-1}x$ எனில் $\frac{du}{dv}$ காண்க.

$x = \tan\theta$ என்க$\Rightarrow \theta = tan^{-1}x$

$u = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{sec^2\theta}-1}{\tan\theta}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{2sin^2(\theta/2)}{2sin(\theta/2)cos(\theta/2)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{sin(\theta/2)}{cos(\theta/2)}\right)$

$= tan^{-1}tan(\theta/2)$

$\therefore u = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}tan^{-1}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$

$v = tan^{-1}x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{2}$

10.வகையிடுக:$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,$\Rightarrow y^2 = x + \sqrt{x+\sqrt{x}}$

$u = x + \sqrt{x}$ என்க.

வகையிட,$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y^2 = x + \sqrt{x+\sqrt{x}} \Rightarrow y^2 = x + \sqrt{u}$

வகையிட,$2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

11.தொகை நுண்கணிதம்

1.ஒரு தொடர் வண்டி மதுரை சந்திப்பிலிருந்து கோயம்புத்தூர் நோக்கி பிற்பகல் 3 மணிக்கு $v(t) = 20t + 50$ கிமீ/மணி என்னும் திசை வேகத்தில் புறப்படுகிறது. இங்கு t ஆனது மணிகளில் கணக்கிடப்படுகிறது எனில் மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி எவ்வளவு தூரம் பயணித்திருக்கும்?

$v(t) = 20t + 50 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 20t + 50$

$\Rightarrow ds = (20t + 50)dt$

இருபுறமும் தொகையிட$\Rightarrow \int ds = \int(20t + 50)dt$

$\Rightarrow s = \frac{20t^2}{2} + 50t + c \Rightarrow \boxed{s = 10t^2 + 50t + c} \to (1)$

t	s
0	0
5	?

$t = 0, s = 0: (1) \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$\therefore (1) \Rightarrow s = 10t^2 + 50t \to (2)$

$t = 2, s = ?: (2) \Rightarrow s = 10(2)^2 + 50(2) \Rightarrow \boxed{s = 140}$

$\therefore$ மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி 140 கி.மீ தூரம் பயணித்திருக்கும்.

2.ஒரு நபரின் உயரம் h செ.மீ மற்றும் எடை w கி.கி. அவரின் எடையின் மாறும் வீதம் உயரத்தைப் பொறுத்துத் தோராயமாக $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5}h^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், எடையை உயரத்தின் சார்பாகக் காண்க. மேலும் ஒரு நபரின் உயரம் 150 செ.மீ ஆக இருக்கும் போது எடையைக் காண்க.

$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5}h^2 \Rightarrow dw = (4.364 \times 10^{-5}h^2)dh$

இருபுறமும் தொகையிட$\Rightarrow \int dw = \int(4.364 \times 10^{-5}h^2)dh$

$\Rightarrow w = 4.364 \times 10^{-5}.\frac{h^3}{3} + c \to (1)$

h	w
0	0
150	?

$h = 0, w = 0: (1) \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$\therefore (1) \Rightarrow w = 4.364 \times 10^{-5}.\frac{h^3}{3} \to (2)$

$h = 150, w = 0: (2) \Rightarrow w = 4.364 \times 10^{-5}.\frac{(150)^3}{3}$

$\Rightarrow \boxed{w = 49}$

$\therefore$ ஒரு நபரின் உயரம் 150 செ.மீ ஆக இருக்கும் போது எடை 49 கி.கி ஆகும்.

3.ஒரு மரத்தின் வளர்ச்சி t ஆண்டுகளில் $\frac{18}{\sqrt{t}}$ செ.மீ/ஆண்டு எனும் வீதத்தில் வளர்கிறது. $t = 0$ என இருக்கும்போது உயரம் 5 செ.மீ இருக்கும் என எடுத்துக்கொண்டால்
(அ)நான்கு ஆண்டிற்கு பிறகு மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.
(ஆ)எத்தனை ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 149 செ.மீ வளர்ந்து இருக்கும்.

$\frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 18t^{-1/2}$

$\Rightarrow dh = \left(18t^{-1/2}\right)dt$

இருபுறமும் தொகையிட$\Rightarrow \int dh = \int\left(18t^{-1/2}\right)dt$

$\Rightarrow h = 18 \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \Rightarrow h = 18 \times \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$

$\Rightarrow h = 36t^{1/2} + c \to (1)$

t	h
0	5
4	?
?	149

(அ) $t = 0, h = 5: (1) \Rightarrow 5 = 36(0)^{1/2} + c \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$\therefore (1) \Rightarrow h = 36t^{1/2} + 5 \to (2)$

$t = 4, h = ?: (2) \Rightarrow h = 36(4)^{1/2} + 5 = 36(2) + 5 = 72 + 5$

$\therefore \boxed{h = 77}$

$\therefore$ நான்கு ஆண்டிற்கு பிறகு மரத்தின் உயரம் 77 செ.மீ ஆக இருக்கும்.

(ஆ) $t = ?, h = 149: (1) \Rightarrow 149 = 36(t)^{1/2} + 5$

$\Rightarrow 36(t)^{1/2} = 149 - 5 \Rightarrow 36(t)^{1/2} = 144$

$\Rightarrow (t)^{1/2} = \frac{144}{36} \Rightarrow (t)^{1/2} = 4$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $\boxed{t = 16}$

$\therefore$ 16 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 149 செ.மீ ஆக இருக்கும்.

4.மாணவன் ஒருவர் தன் மோட்டார் சைக்கிளில் 24 மீ/வினாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தனக்கு முன்பாக 40 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் தடுப்பின் மீது மோதலைத் தவிர்க்க வாகனத்தை நிறுத்த வேண்டியுள்ளது. உடனடியாகத் தன்னுடைய வாகனத்தை 8 மீ/வினாடி^{2} எதிர் முடுக்கத்தில் வேகத்தைக் குறைக்கிறார் எனில் வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதுவதற்கு முன் நிற்குமா?

எதிர் முடுக்கம் $a = -8$ மீ/வினாடி^{2}

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -8 \Rightarrow dv = -8dt$

இருபுறமும் தொகையிட$\Rightarrow \int dv = \int -8dt$

$\Rightarrow v = -8t + c \to (1)$

பிரேக்கை பயன்படுத்தும்போது $t = 0, v = 24$

$(1) \Rightarrow 24 = -8(0) + c \Rightarrow \boxed{c = 24}$

$\therefore (1) \Rightarrow \boxed{v = -8t + 24} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -8t + 24$

$\Rightarrow ds = (-8t + 24)dt$

இருபுறமும் தொகையிட,$\int ds = \int(-8t + 24)dt$

$\Rightarrow s = -8.\frac{t^2}{2} + 24t + k = -4t^2 + 24t + k$

$\Rightarrow s = -4t^2 + 24t + k \to (2)$

$s = 0, t = 0: (2) \Rightarrow \boxed{k = 0}$

$\therefore (2) \Rightarrow \boxed{s = -4t^2 + 24t}$

மோட்டார் சைக்கிள் ஓய்வு நிலைக்கு வரும் போது $v = 0$

$v = -8t + 24 \Rightarrow 0 = -8t + 24 \Rightarrow 8t = 24 \Rightarrow \boxed{t = 3}$

$t = 3$ எனில் $s = -4(3)^2 + 24(3) = -36 + 72 \Rightarrow \boxed{s = 36}$

$\because s = 36 < 40,$ வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதாது.

5.ஒரு பந்து 39.2 மீ/வினாடி ஆரம்ப திசைவேகத்தில் தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது.இங்கு முடுக்கத்தை ஈர்ப்பு விசையைப் பொறுத்து மட்டும் கருதும்போது
(அ)எவ்வளவு நேரம் கழித்துப் பந்து தரையை வந்து மோதும்.
(ஆ)எந்த வேகத்தில் பந்தானது தரையை மோதும்
(இ)பந்தானது எவ்வளவு தூரம் மேல் நோக்கிச் செல்லும் என்பதனைக் காண்க.

ஆரம்ப திசைவேகம் $u = 39.2$ மீ/வினாடி , $g = 9.8$

$s = ut - \frac{1}{2}gt^2 = 39.2t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 39.2t - 4.9t^2$

$\therefore \boxed{s = 39.2t - 4.9t^2}$

t −ஐப் பொறுத்து வகையிட, $v = \frac{ds}{dt} = 39.2(1) - 4.9(2t)$

∴ $\boxed{v = 39.2 - 9.8t}$

(அ)பந்து தரையை அடையும் போது $s = 0$

$\Longrightarrow 39.2t - 4.9t^2 = 0 \Longrightarrow 4.9t(8-t) = 0$

$\Longrightarrow 8 - t = 0\ (or) 4.9t = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 8}; t = 0$(தீர்வு இல்லை)

∴பந்து தரையை அடைய 8 வினாடி ஆகும்.

(ஆ)பந்து தரையை மோதும் போது வேகம்= $v(8)$

$= 39.2 - 9.8(8) = 39.2 - 78.4 = -39.2$ மீ/வினாடி

(இ)பந்தானது அதிகபட்ச உயரத்தை அடையும் போது $v = 0$

$\Longrightarrow 39.2 - 9.8t = 0 \Longrightarrow 9.8t = 39.2 \Longrightarrow t = \frac{39.2}{9.8} = 4$

மேல்நோக்கிச் செல்லும் அதிகபட்ச உயரம்= $s(4)$

$= 39.2(4) - 4.9(4)^2 = 156.8 - 78.4 = 78.4$மீ.

6.ஒருவருக்கு ஏற்பட்ட காயம் ஆனது $-\frac{3}{(t+2)^2}$ செ.மீ^{2}/நாள் என்ற வீதத்தில் ஞாயிற்றுக்கிழமை முதல் குணமடையத் தொடங்குகிறது. திங்கட்கிழமை அன்று காயப்பகுதியின் பரப்பு 2 செ.மீ^{2} எனில் (இங்கு t என்பது நாட்களைக் குறிக்கிறது)
(அ)ஞாயிற்றுக்கிழமையன்று காயப்பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவாக இருந்திருக்கும்?
(ஆ)இதே வீதத்தில் தொடர்ந்து குணமாகிக் கொண்டிருக்கும் போது வியாழக்கிழமையன்று எதிர்பார்க்கும் காயப் பகுதியின் பரப்பு எவ்வளவு?

காயப் பகுதியின் பரப்பு x என்க.

$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{(t+2)^2}$

$\Longrightarrow dx = -3(t+2)^{-2}dt$

இருபுறமும் தொகையிட$\Longrightarrow \int dx = \int -3(t+2)^{-2}dt$

$\Longrightarrow x = -3\frac{(t+2)^{-2+1}}{-2+1} + c \Longrightarrow x = -3\frac{(t+2)^{-1}}{-1} + c$

$\Longrightarrow x = \frac{3}{t+2} + c \rightarrow (1)$

கிழமை	t	x
ஞாயிறு	0	?
திங்கள்	1	2
வியாழன்	4	?

$t = 1, x = 2 : (1) \Longrightarrow 2 = \frac{3}{1+2} + c \Longrightarrow 2 = \frac{3}{3} + c$

$\Longrightarrow 1 + c = 2 \Longrightarrow c = 2 - 1 \Longrightarrow \boxed{c = 1}$

∴ $(1) \Longrightarrow x = \frac{3}{t+2} + 1 \rightarrow (2)$

(அ) $t = 0, x = ? : (2) \Longrightarrow x = \frac{3}{0+2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = 1.5 + 1$

$\boxed{x = 2.5}$

∴ ஞாயிற்றுக்கிழமையன்று காயப்பகுதியின் பரப்பளவு 2.5 செ.மீ^{2} ஆகும்.

(ஆ) $t = 4, x = ? : (2) \Longrightarrow x = \frac{3}{4+2} + 1 = \frac{3}{6} + 1 = 0.5 + 1$

$\boxed{x = 1.5}$

∴ வியாழக்கிழமையன்று காயப்பகுதியின் பரப்பளவு 1.5 செ.மீ^{2} ஆகும்.

7.மதிப்பிடுக: $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$

$\boxed{\int \frac{f'x}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c\ ;\ \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c}$

$I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ என்க.$\rightarrow (1)$

$3x + 5 = A\frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 7) + B$

$\Longrightarrow 3x + 5 = A(2x + 4) + B \rightarrow (2)$

$\Longrightarrow 3x + 5 = 2Ax + 4A + B$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த,

$\Longrightarrow 2A = 3\ ; 4A + B = 5$

$\Longrightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}\ ; 4\left(\frac{3}{2}\right) + B = 5 \Longrightarrow 6 + B = 5 \Longrightarrow B = 5 - 6$

$\boxed{B = -1}$

∴ $(2) \Longrightarrow 3x + 5 = \frac{3}{2}(2x + 4) - 1$

$(1) \Longrightarrow \mathrm{I} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4) - 1}{x^2+4x+7}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$

$= \frac{3}{2}\log|x^2 + 4x + 7| + c - \int \frac{1}{x^2+4x+7+4-4}dx$

$= \frac{3}{2}\log|x^2 + 4x + 7| - \int \frac{1}{(x^2+4x+4)+3}dx + c$

$= \frac{3}{2}\log|x^2 + 4x + 7| - \int \frac{1}{(x+2)^2+\sqrt{3}^2}dx + c$

$= \frac{3}{2}\log|x^2 + 4x + 7| - \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + c$

8.மதிப்பிடுக: $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$

$\boxed{\int \frac{f'x}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c; \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c}$

$I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ என்க.$\rightarrow (1)$

$x + 1 = A\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 1) + B$

$\Longrightarrow x + 1 = A(2x - 3) + B \rightarrow (2)$

$\Longrightarrow x + 1 = 2Ax - 3A + B$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த,

$\Longrightarrow 2A = 1\ ; -3A + B = 1$

$\Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}\ ; -3\left(\frac{1}{2}\right) + B = 1 \Longrightarrow B = 1 + \frac{3}{2} \Longrightarrow \boxed{B = \frac{5}{2}}$

∴ $(2) \Longrightarrow x + 1 = \frac{1}{2}(2x - 3) + \frac{5}{2}$

$(1) \Longrightarrow I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2 - 3x + 1| + c + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}dx$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2 - 3x + 1| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}dx + c$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2 - 3x + 1| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}dx + c$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2 - 3x + 1| + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$

$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2 - 3x + 1| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$

9.மதிப்பிடுக: $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$$\boxed{\begin{array}{c}\int \frac{f'x}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c; \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c\end{array}}$$

$I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ என்க.$\rightarrow (1)$

$2x + 3 = A\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) + B$

$\Longrightarrow 2x + 3 = A(2x + 1) + B \rightarrow (2)$

$\Longrightarrow 2x + 3 = 2Ax + A + B$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த,

$\Longrightarrow 2A = 2\ ; A + B = 3 \Longrightarrow \boxed{A = 1}; 1 + B = 3 \Longrightarrow \boxed{B = 2}$

$(2) \Longrightarrow 2x + 3 = (2x + 1) + 2$

$(1) \Longrightarrow I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$\Longrightarrow I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$\Longrightarrow I = 2\sqrt{x^2+x+1} + c + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}dx$

$\Longrightarrow I = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx + c$

$\Longrightarrow I = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx + c$

$\Rightarrow I = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right| + c$

10.மதிப்பிடுக: $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

$\int \frac{f'x}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c;$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$I = \int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$ என்க.$\rightarrow (1)$

$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$

$\Rightarrow 5x-7 = A(3-2x)+B \rightarrow (2)$

$\Rightarrow 5x-7 = 3A-2Ax+B$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த,

$\Rightarrow -2A = 5 \ ; 3A+B = -7$

$\Rightarrow \boxed{A = -\frac{5}{2}} \ ; 3\left(-\frac{5}{2}\right)+B = -7 \Rightarrow B = -7+\frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$

$(2) \Rightarrow 5x-7 = -\frac{5}{2}(3-2x)+\frac{1}{2}$

$(1) \Rightarrow I = \int \frac{-\frac{5}{2}(3-2x)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

$\Rightarrow I = -\frac{5}{2}\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

$\Rightarrow I = -\frac{5}{2}.2\sqrt{3x-x^2-2}+c+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}}dx$

$\Rightarrow I = -5\sqrt{3x-x^2-2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx+c$

$\Rightarrow I == -5\sqrt{3x-x^2-2}+\frac{1}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right)+c$

$\Rightarrow I == -5\sqrt{3x-x^2-2}+\frac{1}{2}.sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right)+c$

செய்துபார்:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-12}dx$ 2) $\int \frac{5x-2}{2+2x+x^2}dx$ 3) $\int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3}dx$

4) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$ 5) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx$ 6) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

1.கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்

1. இரு கணங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை m மற்றும் k ஆகும். முதல் கணத்திலுள்ள உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையை விட 112 அதிகமெனில், m மற்றும் k மதிப்புகளைக் காண்க.

$n(A) = m ; n(B) = k$

$n[P(A)] - n[P(B)] = 112$

$\Rightarrow 2^{n(A)} - 2^{n(B)} = 112$

$\Rightarrow 2^m - 2^k = 112$

$\Rightarrow 2^k(2^{m-k}-1) = 112$

$\Rightarrow 2^k(2^{m-k}-1) = 16\times 7$

$\Rightarrow 2^k(2^{m-k}-1) = 2^4\times 7$

$\Rightarrow 2^k = 2^4 \ ; (2^{m-k}-1) = 7$

$\Rightarrow k = 4 \ ; \ 2^{m-k} = 8 \Rightarrow 2^{m-k} = 2^3$

$\Rightarrow m-k = 3 \Rightarrow m-4 = 3 \Rightarrow m = 7$

2. Z என்ற கணத்தில் "m-n ஆனது 12-ன் மடங்காக இருந்தால் தொடர்பு mRn" என வரையறுக்கப்பட்டால் R என்பது சமானத் தொடர்பு என நிரூபிக்க.

i)தற்சுட்டு:

$m-m = 0 \Rightarrow 0\times 12 = 0$,0-வும் 12-ன் மடங்காகும்.

$(m,m)\in R$. ∴ R ஆனது தற்சுட்டாகும்.

ii)சமச்சீர்:

$(m,n)\in R$ என்க.$k\in z \Rightarrow m-n = 12k$

$\Rightarrow n-m = 12(-k) \Rightarrow (n,m)\in R$

∴ R ஆனது சமச்சீராகும்.

iii)கடப்பு:

$(m,n)\in R,(n,p)\in R$ என்க.$k,l\in z \Rightarrow m-n = 12k ; n-p = 12l$

$\Rightarrow m-p = 12(k+l) \Rightarrow (m,p)\in R$

∴ R ஆனது கடப்பு ஆகும்.

∴ R ஆனது சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

3. Z-ல் "m-n ஆனது 7 ஆல் வகுபடுமெனில் mRn" எனத் தொடர்பு R வரையறுக்கப்பட்டால் R என்பது சமானத் தொடர்பு என நிரூபிக்க.

i)தற்சுட்டு:

$m-m = 0 \Rightarrow 0\div 7 = 0$,0-வும் 7-ஆல் வகுபடும்.$(m,m)\in R$

∴ R ஆனது தற்சுட்டாகும்.

ii)சமச்சீர்:

$(m,n)\in R$ என்க.$k\in z \Rightarrow m-n = {k}/{7}$

$\Rightarrow n-m = {(-k)}/{7} \Rightarrow (n,m)\in R$ ∴ R ஆனது சமச்சீராகும்.

iii)கடப்பு:

$(m,n)\in R,(n,p)\in R$ என்க.$k,l\in z \Rightarrow m-n = {k}/{7}$;

$n-p = {l}/{7}$

$\Rightarrow m-p = {(k+l)}/{7} \Rightarrow (m,p)\in R$

∴ R ஆனது கடப்பு ஆகும்.

∴ R ஆனது சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

4.$S = \{1,2,3\}$ மற்றும் $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(3,1)\}$ என்க. தொடர்பு ρ-ஐ (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என உருவாக்க ρ -உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய அல்லது நீக்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

i)தற்சுட்டு:

$(1,1),(2,2)\in\rho$, எனவே$(3,3)$-ஐ சேர்த்தால் தற்சுட்டாகும்.

ii)சமச்சீர்:

$(1,2)\in\rho$, எனவே$(2,1)$-ஐ சேர்த்தால் சமச்சீராகும். $(1,2)$-ஐ நீக்கினால் சமச்சீராகும்.

iii)கடப்பு:

$(3,1),(1,3)\in\rho$, எனவே$(3,3)$-ஐ சேர்த்தால் கடப்பாகும்.

$(3,1),(1,2)\in p$, எனவே$(3,2)$-ஐ சேர்த்தால் கடப்பாகும். $(3,1)$-ஐ நீக்கினால் கடப்பாகும்.

iv)சமானத் தொடர்பு:

ρ -ஐ சமானத் தொடர்பாக உருவாக்க $(3,3),(2,1),(3,2)$ ஆகிய உறுப்புகள் சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

5. $X = \{a,b,c,d\}$ மற்றும் $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ என்க. தொடர்பு R-ஐ (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என உருவாக்க R-உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

i)தற்சுட்டு: $(a,a),(b,b)\in R$, எனவே$(c,c),(d,d)$-ஐ சேர்த்தால் தற்சுட்டாகும்.

ii)சமச்சீர்:

$(a,c)\in R$, எனவே(c,a)-ஐ சேர்த்தால் சமச்சீராகும்.

iii)கடப்பு: எதுவும் சேர்க்க வேண்டியதில்லை.

iv)சமானத் தொடர்பு:

R -ஐ சமானத் தொடர்பாக உருவாக்க $(c,c),(d,d),(c,a)$ ஆகிய உறுப்புகள் சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

6. $A = \{a,b,c\}$ மற்றும் $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ என்க. தொடர்பு R-ஐ (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என உருவாக்க R-உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

i)தற்சுட்டு:

$(a,a),(b,b)\in R$, எனவே(c,c)-ஐ சேர்த்தால் தற்சுட்டாகும்.

ii)சமச்சீர்:

$(a,c) \in R$, எனவே(c,a)-ஐ சேர்த்தால் சமச்சீராகும்.
iii)கடப்பு: எதுவும் சேர்க்க வேண்டியதில்லை.
iv)சமானத் தொடர்பு:
R -ஐ சமானத் தொடர்பாக உருவாக்க $(c,c),(c,a)$ ஆகிய உறுப்புகள் சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

7.அனைத்து இயல் எண்களின் கணத்தில் தொடர்பு R என்பது " x+2y=1" எனில் xRy என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு ஆகியவற்றை பற்றி ஆராய்க.
R என்பது " x+2y=1" எனில் xRy, $x,y \in N \Rightarrow R$ என்பது ஒரு வெற்றுக்கணம்.
i)தற்சுட்டு: R என்பது ஒரு வெற்றுக்கணம், ∴ R ஆனது தற்சுட்டு அல்ல.
ii)சமச்சீர்: R என்பது ஒரு வெற்றுக்கணம், R ஆனது சமச்சீர் ஆகும்.
iii)கடப்பு:R என்பது ஒரு வெற்றுக்கணம், R ஆனது கடப்பு ஆகும்.
(குறிப்பு : வெற்றுத் தொடர்பினைச் சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பாகக் கருதலாம்)

8.இயல் எண்களின் கணத்தில் R என்பது "$a+b \le 6$ ஆக இருந்தால் aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது. R-ல் உள்ள உறுப்புகளை எழுதுக. அது (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பா என்பதை சரிபார்க்க.
$a+b \le 6$
$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$
i)தற்சுட்டு:
$(4,4),(5,5) \notin R$ ∴ R ஆனது தற்சுட்டு அல்ல.
ii)சமச்சீர்:
$\forall\ (a,b) \in R = (b,a) \in R$ ∴ R ஆனது சமச்சீர்.
iii)கடப்பு:$(5,1),(1,5) \in R \Rightarrow (5,5) \notin R$ தெளிவாக R ஆனது கடப்பு அல்ல.
iv)சமானத் தொடர்பு: R ஆனது சமானத் தொடர்பு அல்ல.

9.இயல் எண்களின் கணத்தில் R என்பது "2a+3b=30 எனில் aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது. R-ல் உள்ள உறுப்புகளை எழுதுக. அது (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பா என்பதை சரிபார்க்க.
$2a+3b = 30 \Rightarrow a = \frac{30-3b}{2}$

a	3	6	9	12
b	8	6	4	2

$R = \{(3,8),(6,6),(9,4),(12,2)\}$
i)தற்சுட்டு:
$(6,6) \in R$-ஐ தவிர மற்ற உறுப்புகள் $(a,a) \notin R$. ∴ R ஆனது தற்சுட்டு அல்ல.
ii)சமச்சீர்:
$(9,4) \in R \Rightarrow (4,9) \notin R$ ∴ R ஆனது சமச்சீர் அல்ல.
iii)கடப்பு: தெளிவாக $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$ R ஆனது கடப்பு அல்ல.
iv)சமானத் தொடர்பு: R ஆனது சமானத் தொடர்பு அல்ல.

10. $\frac{1}{2\cos x-1}$ **என்ற சார்பின் வீச்சகத்தைக் காண்க.**
$-1 \le \cos x \le 1$
$\Rightarrow -2 \le 2\cos x - 1 \le 2$
$\Rightarrow -2-1 \le 2\cos x - 1 \le 2-1$
$\Rightarrow -3 \le 2\cos x - 1 \le 1$
$\Rightarrow -\frac{1}{3} \ge \frac{1}{2\cos x-1} \ge \frac{1}{1}$
$\Rightarrow \frac{1}{2\cos x-1} \le -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2\cos x-1} \ge \frac{1}{1}$
f −ன் வீச்சகம் $= \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1,\infty)$

11. $f(x) = \frac{1}{1-3\cos x}$ −ன் வீச்சகம் காண்க.
$-1 \le \cos x \le 1$
$\Rightarrow -3 \le -3\cos x \le 3$
$\Rightarrow 1-3 \le 1-3\cos x \le 1+3$
$\Rightarrow -2 \le 1-3\cos x \le 4$
$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ge \frac{1}{1-3\cos x} \ge \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \frac{1}{1-3\cos x} \le -\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{1-3\cos x} \ge \frac{1}{4}$
f −ன் வீச்சகம் $= \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4},\infty\right)$

12.மெய்மதிப்பு சார்பு f ஆனது $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதன் சாத்தியமான மீப்பெரு சார்பகத்தைக் காண்க.

x-ன் மதிப்பு	$f(x)$	சார்பகம்
$x < -3$, $x > 3$	$9-x^2 < 0$ $\sqrt{9-x^2}$ காண இயலாது	$[-3,3]$
$x \ge -1$, $x \le 1$	$x^2-1 \le 0$ $\sqrt{x^2-1}$ காண இயலாது	$[-1,1]$-க்கு வெளியில் அமையும் $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
$x = 0$	வரையறுக்க இயலாது	−

மீப்பெரு சார்பகம்
$= [-3,3] \cap [(-\infty,-1] \cup [1,\infty)] = [-3,-1) \cup (1,3]$

13. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு சார்பகத்தைக் காண்க.

x-ன் மதிப்பு	$f(x)$	சார்பகம்
$x < -2$, $x > 2$	$4-x^2 < 0$ $\sqrt{4-x^2}$ காண இயலாது	$[-2,2]$
$x \ge -3$, $x \le 3$	$x^2-9 \le 0$ 9 காண இயலாது	$[-3,3]$-க்கு வெளியில் அமையும் $(-\infty,-3]$ $\cup [3,\infty)$
$x = 0$	வரையறுக்க இயலாது	−

மீப்பெரு சார்பகம்
$= [-2,2] \cap [(-\infty,-3] \cup [3,\infty)] = \emptyset$

14. $f: R \to R$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x-3$ என வரையறுக்கப்படின் f ஒரு இருபுறச்சார்பு என நிரூபித்து, அதன் நேர்மாறினைக் காண்க.
f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்க கட்டுப்பாடு $gof = I_x, fog = I_y$
$f(x) = 2x-3 \Rightarrow y = 2x-3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow g(y) = \frac{y+3}{2}$
$(gof)(x) = g[2x-3] = \frac{2x-3+3}{2} = x$
$(fog)(x) = f\left[\frac{y+3}{2}\right] = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$
$\because gof = I_x, fog = I_y$
f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்கும்.
$f'(y) = \frac{y+3}{2}\ ;\ f'(x) = \frac{x+3}{2}$

15. $f: R \to R$ என்ற சார்பு $f(x) = 3x-5$ என வரையறுக்கப்படின் f ஒரு இருபுறச்சார்பு என நிரூபித்து, அதன் நேர்மாறினைக் காண்க.
f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்க கட்டுப்பாடு $gof = I_x, fog = I_y$
$f(x) = 3x-5 \Rightarrow y = 3x-5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{3} \Rightarrow g(y) = \frac{y+5}{3}$

$(\text{gof})(x) = g[3x-5] = \frac{3x-5+5}{3} = x$

$(\text{fog})(x) = f\left[\frac{y+5}{3}\right] = 3\left(\frac{y+5}{3}\right) - 5 = y$

$\because gof = I_x \,, fog = I_y$

f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்கும்.

$f'(y) = \frac{y+5}{3}$; $f'(x) = \frac{x+5}{3}$

16. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x+4\,; -\infty < x \le -3 \\ x+4\,; -3 < x < -2 \\ x^2 - x\,; -2 \le x < 1 \\ x - x^2\,; 1 \le x < 7 \\ 0\,; elsewhere \end{cases}}$ **என வரையறுக்கப்படின்**

$\boldsymbol{-4, 1, -2, 7, 0}$ **ஆகியவற்றில்** $\boldsymbol{f}$**-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.**

$f(-4) = -(-4) + 4 = 8$

$f(1) = 1 - 1^2 = 0$ $\quad f(-2) = (-2)^2 - (-2) = 6$

$f(7) = 0$ $\quad f(0) = (0)^2 - (0) = 0$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 5\,; x \in (-\infty, 0) \\ x^2 + 3x - 2\,; x \in (3, \infty) \\ x^2\,; x \in (0,2) \\ x^2 - 3\,; elsewhere \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படின் $-3, 5, 2, -1, 0$ ஆகியவற்றில் f-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$f(-3) = (-3)^2 - 3 - 5 = 1$ $\quad f(5) = 5^2 + 3(5) - 2 = 38$

$f(2) = 2^2 - 3 = 1$ $\quad f(-1) = (-1)^2 - 1 - 5 = -5$

$f(0) = 0^2 - 3 = -3$

18. $f(x) = |x| + x$ மற்றும் $g(x) = |x| - x$ என $f, g: R \to R$ வரையறுக்கப்படின் gof மற்றும் fog காண்க.

$|x| = \begin{cases} -x, x \le 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} -x + x = 0, x \le 0 \\ x + x = 2x, x > 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} -x - x = -2x, x \le 0 \\ x - x = 0, x > 0 \end{cases}$

$x \le 0 \Rightarrow (fog)(x) = f[-2x] = 0$

$x > 0 \Rightarrow (fog)(x) = f[0] = 0$

$x \le 0 \Rightarrow (gof)(x) = f[0] = 0$

$x > 0 \Rightarrow (gof)(x) = g[2x] = 0$

$\forall$ x, $(\text{fog})(x) = 0$, $(\text{gof})(x) = 0$

19. $\boldsymbol{f, g: R \to R}$ **ஆகிய இரு சார்புகள்** $\boldsymbol{f(x) = 2x - |x|}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{g(x) = 2x + |x|}$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்** $\boldsymbol{fog}$**-ஐ காண்க.**

$|x| = \begin{cases} -x, x \le 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2x - (-x) = 3x, x \le 0 \\ 2x - x = x, x > 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 2x + (-x) = x, x \le 0 \\ 2x + x = 3x, x > 0 \end{cases}$

$x \le 0 \Rightarrow (fog)(x) = f[x] = 3x$

$x > 0 \Rightarrow (fog)(x) = f[3x] = 3x$

$\forall$ x, $(\text{fog})(x) = 3x$

20.ஒரு விற்பனை பிரதிநிதியின் ஆண்டு வருமானத்தைக் குறிக்கும் சார்பு $A(x) = 30{,}000 + 0.04x$. இங்கு x என்பது அவர் விற்கும் பொருளின் விலைமதிப்பை ரூபாயாக குறிக்கின்றது. விற்பனைத் துறையில் உள்ள அவர் மகனின் வருமானம் $S(x) = 25{,}000 + 0.05x$ எனும் சார்பாகக் குறிக்கப்படுகிறது எனில், $(A+S)(x)$ காண்க. மேலும், ரூ.15000000 மதிப்புள்ள பொருட்களை அவர்களிருவரும் தனித்தனியே விற்றால் குடும்ப மொத்த வருமானத்தினைக் கணக்கிடுக.

$A(x) = 30{,}000 + 0.04x$ $\quad S(x) = 25{,}000 + 0.05x$

மொத்த வருமானம் $(A+S)(x) = 55{,}000 + 0.09x$

$x = 1{,}50{,}00{,}000$ எனில் $(A+S)(x) = 55{,}000 + 0.09(15000000) = 14{,}05{,}000$

21.பாரன்ஹீட்டிலிருந்து செல்சியஸ் வெப்பநிலைக்கு மாற்றும் சார்பு $y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$ எனில், y-ன் நேர்மாறு சார்பினைக் காண்க. நேர்மாறு சார்பும் ஒரு சார்பு எனவும் காண்க.

f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்க கட்டுப்பாடு $gof = I_x \,, fog = I_y$

$y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5x-160}{9}$

$\Rightarrow x = \frac{9y+160}{5} \Rightarrow g(y) = \frac{9y+160}{5}$

$(\text{gof})(x) = g\left[\frac{5x-160}{9}\right] = \frac{9\left(\frac{5x-160}{9}\right)+160}{5} = x$

$(\text{fog})(y) = f\left[\frac{9y+160}{5}\right] = \frac{5\left(\frac{9y+160}{5}\right)-160}{9} = y$

$\because gof = I_x \,, fog = I_y$

f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் இருக்கும்.

$f'(y) = \frac{9y+160}{5}$; $f'(x) = \frac{9x+160}{5}$

22.ஒரு சாதாரண சங்கேதமொழியில் ஓர் உருவினை மாற்றியமைக்க எண்ணால் எழுதப் பயன்படுத்தப்படும் சார்பு $f(x) = 3x - 4$. இச்சார்பின் நேர்மாறினையும், அந்நேர்மாறு ஒரு சார்பு என்பதையும் காண்க. அவை $y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டில் சமச்சீர் உடையது என்பதை வரைந்து காண்க.

$f(x) = 3x - 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{3}$

$\Rightarrow g(y) = \frac{y+4}{3}$

$(\text{gof})(x) = g[3x - 4\ ] = \frac{3x-4+4}{3} = x$

$(\text{fog})(y) = f\left[\frac{y+4}{3}\right] = 3\left(\frac{y+4}{3}\right) - 4 = y$

$\because gof = I_x \,, fog = I_y$

f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்பாகவும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகவும் உள்ளது.

$f^{-1}(y) = \frac{y+4}{3}$; $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

$y = 3x - 4$

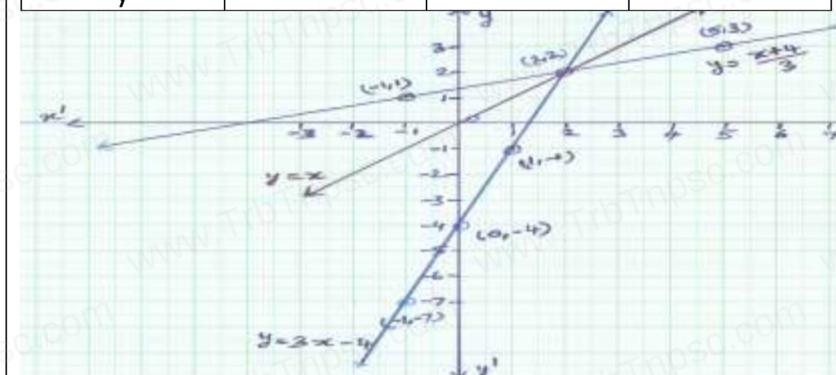
X	-1	0	1
y	-7	-4	-1

$y = \frac{x+4}{3}$

X	-1	2	5
y	1	2	3

$y = x$

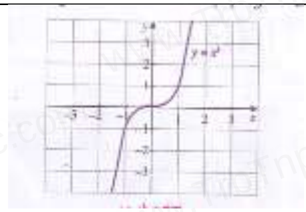
X	-1	0	1
y	-1	0	1



23.கொடுக்கப்பட்டுள்ள $y = x^3$ என்ற வளைவரையின் படத்தினைப் பயன்படுத்தி அச்சு மாறாமல் ஒரே தளத்தில் கீழ்க்காணும் சார்புகளை வரைக.

i) $y = -x^3$ ii) $y = x^3 + 1$ iii) $y = x^3 - 1$

iv) $y = (x+1)^3$

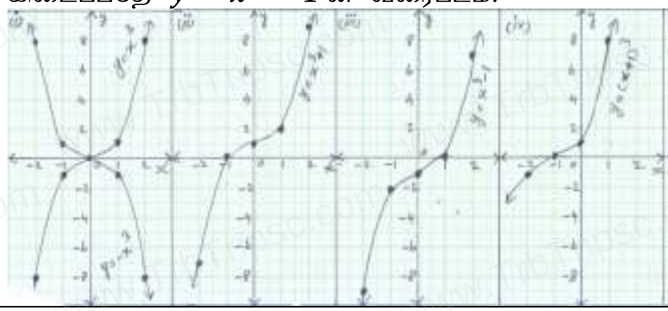


i) $y = x^3$ என்ற வரைபடம் y அச்சை பொறுத்து பிரதிபலிப்பதே $y = -x^3$ ஆகும்.

ii) $y = x^3$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = x^3 + 1$-ன் வரைபடம்.

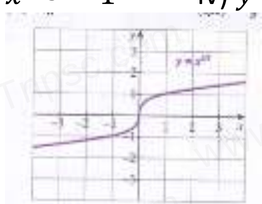
iii) $y = x^3$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = x^3 - 1$-ன் வரைபடம்.

iv) $y = x^3$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு கிடைமட்டமாக இடப்பக்கமாக நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = x^3 - 1$-ன் வரைபடம்.



24.கொடுக்கப்பட்டுள்ள $y = x^{1/3}$ என்ற வளைவரையின் படத்தினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் சார்புகளை ஒரே தளத்தில் வரைக.

i) $y = -x^{1/3}$ ii) $y = x^{1/3} + 1$ iii) $y = x^{1/3} - 1$ iv) $y = (x+1)^{1/3}$

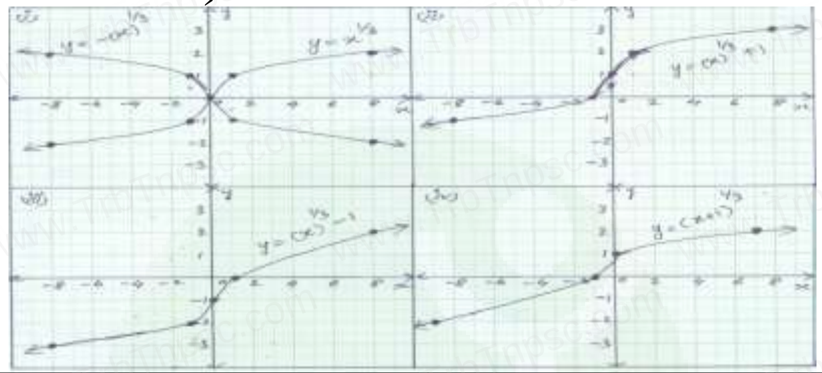


i) $y = x^{1/3}$ என்ற வளைவரையின் x அச்சினைப் பொறுத்த பிரதிபலிப்பே $y = -x^{1/3}$-ன் வரைபடம் ஆகும்.

ii) $y = x^{1/3}$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = x^{1/3} + 1$-ன் வரைபடம்.

iii) $y = x^{1/3}$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = x^{1/3} - 1$-ன் வரைபடம்.

iv) $y = x^{1/3}$ என்ற வரைபடத்தை 1 அலகு கிடைமட்டமாக இடப்பக்கமாக நகர்த்துவதால் கிடைப்பதே $y = (x+1)^{1/3}$ -ன் வரைபடம்.



25.ஒரே தளத்தில் $f(x) = x^3$ மற்றும் $g(x) = \sqrt[3]{x}$ சார்புகளை வரைபடமாக்குக. fog-ஐ கணித்து அதே தளத்தில் வரைபடமாக்குக. முடிவுகளை ஆய்வு செய்க.

$f(x) = x^3$

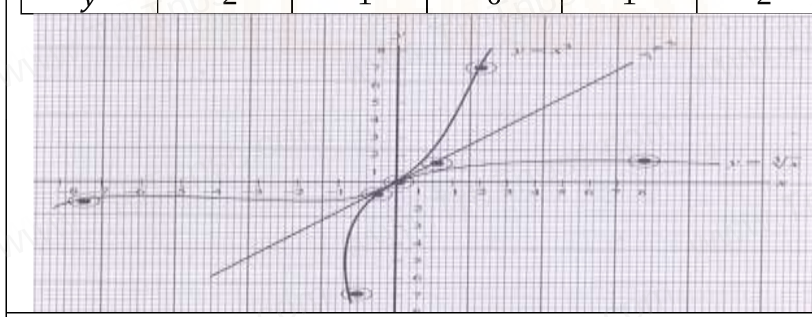
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8

$g(x) = \sqrt[3]{x} == x^{1/3}$

x	-8	-1	0	1	8
$y = x^{1/3}$	-2	-1	0	1	2

$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left(x^{1/3}\right) = x$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2



26. $y = \sin x$ என்ற சார்பினை வரைந்து அதன்மூலம் i) $y = \sin(-x)$ ii) $y = -\sin(-x)$ iii) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ iv) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ஆகியவற்றை வரைக.

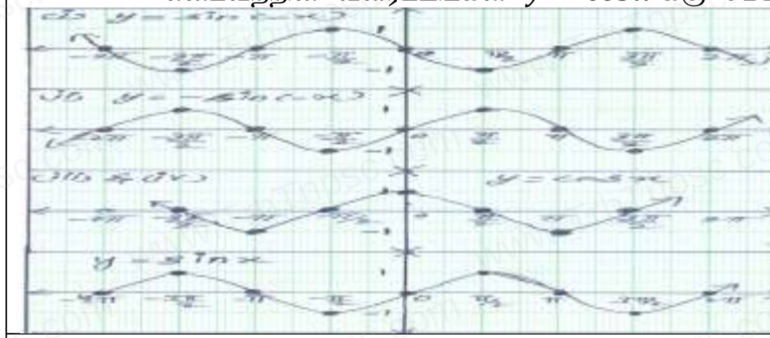
$y = \sin x$

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

i) $y = \sin x$ என்ற வரைபடத்தின் x அச்சினைப் பொறுத்த பிரதிபலிப்பே $y = \sin(-x)$-ன் வரைபடம் ஆகும்.

ii) $y = -\sin(-x)$ என்பது $y = \sin x$-க்கு சமம்.

iii) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ மற்றும் $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ என்பவற்றின் வரைபடங்கள் $y = \cos x$-க்கு சமம்.



27. $y = x$ என்ற கோட்டின் மூலம் i) $y = -x$ ii) $y = 2x$ iii) $y = x + 1$ iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$ v) $2x + y + 3 = 0$ ஆகியவற்றை தோராயமாக வரைக.

$y = x$

x	-1	0	1
$y = x$	1	0	-1

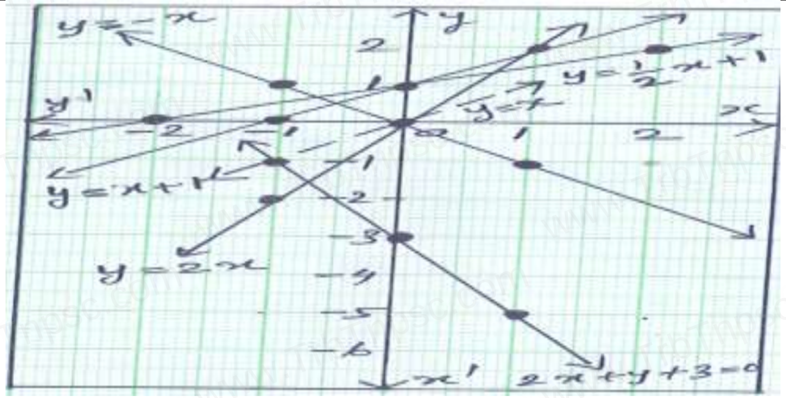
$y = x$ என்ற கோட்டின் x அச்சினைப் பொறுத்த பிரதிபலிப்பே $y = -x$ -ன் வரைபடம் ஆகும்.

$y = x$ என்பது 2ஆல் பெருக்கப்படுவதால் $y = 2x$ என்ற நேர்க்கோடனாது y அச்சை நெருங்கும்.

$y = x$ என்பது 1 ஆல் கூட்டப்படுவதால் 1 அலகு மேல்நோக்கி நகர்வதால் $y = x + 1$-ன் வரைபடம் கிடைக்கும்.

$y = x$ என்பது $\frac{1}{2} < 1$ ஆல் பெருக்கப்படுவதால் x அச்சை நெருங்கும், மேலும் 1 கூட்டப்படுவதால் 1 அலகு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி நகரும்.

$y = x$ என்பது $-2 < 1$ ஆல் பெருக்கப்படுவதால் x அச்சை நெருங்கும், மேலும் -3 கூட்டப்படுவதால் 3 அலகு நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி நகரும்.



28. $y=\sin x$ என்ற வளைவரை மூலம் $y=\sin|x|$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

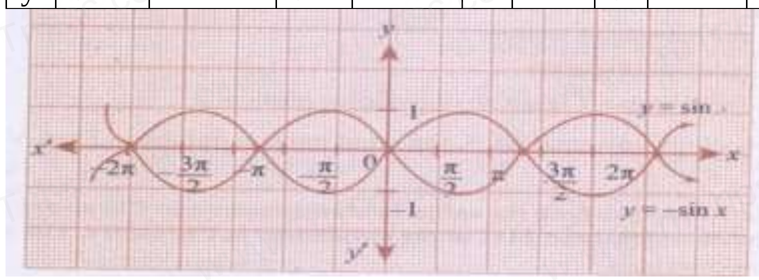
[இங்கு $\sin(-x)=-\sin x$]

$y=\sin|x| \Rightarrow y=\sin x\,;x\geq 0$

x	-2π	$-{3\pi}/{2}$	$-\pi$	$-{\pi}/{2}$	0	${\pi}/{2}$	π	${3\pi}/{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

$y=\sin|x| \Rightarrow y=-\sin x\,;x\leq 0$

x	-2π	$-{3\pi}/{2}$	$-\pi$	$-{\pi}/{2}$	0	${\pi}/{2}$	π	${3\pi}/{2}$	2π
y	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0



$y=\sin|x| \Rightarrow y=\sin x\,;x\geq 0$ என்பது $y=sinx$ என்பதன் வரைபடத்திற்கு சமம்.

$y=\sin|x| \Rightarrow y=-\sin x\,;x<0$ என்பது $y=sinx$-ன் x அச்சின் பிரதிபலிப்பு ஆகும்.

29. $y=x^2$ என்ற வளைவரையிலிருந்து $y=3(x-1)^2+5$ என்ற வளைவரையை காணும் படிநிலைகளை எழுதுக.

$i)$ $y=x^2$-ன் வரைபடம் வரைக.

$ii)$ $y=(x-1)^2$என்பதால் 1 அலகு வலப்பக்கம் நகரும்.

$iii)$ $y=(x-1)^2$ என்பது 3அல் பெருக்கப்படுவதால், வளைவரையானது y அச்சை நோக்கி நெருக்கும்.

$iv)$ $y=3(x-1)^2$ உடன் 5 கூட்டப்படுவதால், வளைவரையானது 5 அலகுகள் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி நகரும்.

30. $y=|x|$ என்ற வளைவரையின் மூலம் $i) y=|x-1|+1$ $ii)$ $y=|x+1|-1$ $iii) y=|x+2|+3$ ஆகியவற்றை வரைக.

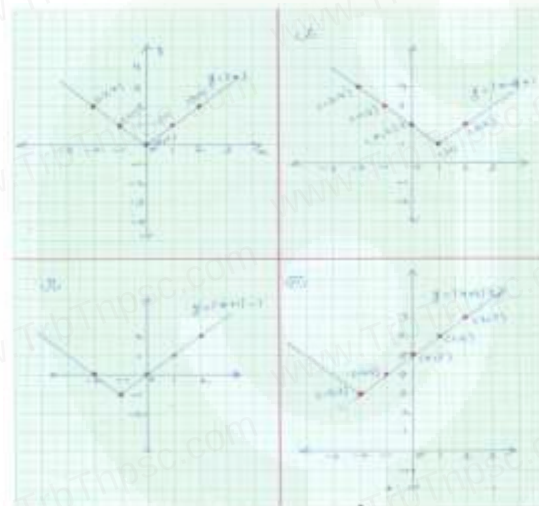
$y=|x|$

x	-2	-1	0	1	2
$y=\|x\|$	2	1	0	1	2

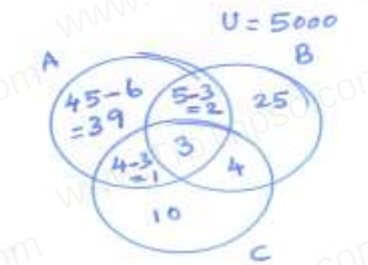
$i) y=|x-1|+1$ எனும் வளைவரையானது வலப்பக்கமாக 1 அலகு மற்றும் மேல்நோக்கியும் 1 அலகு நகரும்.

$ii)$ $y=|x+1|-1$ எனும் வளைவரையானது இடப்பக்கமாக 1 அலகு மற்றும் கீழ்நோக்கியும் 1 அலகு நகரும்.

$iii) y=|x+2|+3$ எனும் வளைவரையானது இடப்பக்கமாக 2 அலகு மற்றும் மேல்நோக்கி 3 அலகும் நகரும்.



31.மக்கள்தொகை 5000 உள்ள ஒரு நகரத்தில் நடத்தப்பட்ட ஒரு கணக்கெடுப்பில், மொழி A தெரிந்தவர்கள் 45%, மொழி B தெரிந்தவர்கள் 25%, மொழி C தெரிந்தவர்கள் 10%, A மற்றும் B மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 5%, B மற்றும் C மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 4%, A மற்றும் C மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 4% ஆகும்.இதில் மூன்று மொழிகளும் தெரிந்தவர்கள் 3% எனில், மொழி A மட்டும் தெரிந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?



மொழி A மட்டும் தெரிந்தவர்கள் %=39

மொழி A மட்டும் தெரிந்தவர்கள் எண்ணிக்கை $=\frac{39}{100}\times 5000$
$=1950$

2. அடிப்படை இயற்கணிதம்

1. $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக்காட்டுக.

$\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண் எனக்கொள்க.

$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{m}{n}, m,n$ ஆகியவை 1-ஐ விட வேறு பெரிய பொதுக்காரணி இல்லாத இயலெண்கள்

$\Rightarrow \sqrt{3}n=m,$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $m^2=3n^2$, m ஒரு மூன்றின் மடங்கான எண்.

$m=3k$ என்க.

$(3k)^2=3n^2 \Rightarrow 9k^2=3n^2 \Rightarrow n^2=3k^2, n$ ஒரு மூன்றின் மடங்கான எண்.

m மற்றும் n-ன் பொதுக்காரணி 3-ஆக மாறுகிறது.

இது முரண்பாடு.

$\therefore$ $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

2.ஒரு உற்பத்தியாளர் 12 விழுக்காடு அமிலம் கொண்ட 600 லிட்டர் கரைசல் வைத்திருக்கிறார். இதனுடன் எத்தனை லிட்டர்கள் 30 விழுக்காடு அமிலத்தை கலந்தால் 15 விழுக்காட்டிற்கும் 18 விழுக்காட்டிற்கும் இடைப்பட்ட அடர்த்தி கொண்ட அமிலம் கிடைக்கும்?

x லிட்டர் என்பது தேவைப்படும் 30% அமிலம் என்க.

மொத்த கரைசலின் அளவு= $600+x$

15% -ம் 18% -ம் இடைப்பட்ட அடர்த்தி கொண்ட அமிலத்தின் அளவு

$=[x$-ல் $30\%+600$-ல்$12\%]>(600+x)$-ல் 15% ;

$[x$-ல் $30\%+600$-ல்$12\%]<(600+x)$-ல் 18%

x-ல் $30\%+600$-ல்$12\%]>(600+x)$-ல்15% $\Rightarrow (x\times\frac{30}{100})+(600\times$	xல் $30\%+600$ல்$12\%]<(600+x)$ல் 18% $\Rightarrow (x\times\frac{30}{100})+(600\times$

$\frac{12}{100}) > (600+x)\frac{15}{100}$ $\Rightarrow \frac{30x}{100}+\frac{7200}{100} > \frac{9000+15x}{100}$ $\div 100 \Rightarrow 30x+7200 >$ $9000+15x$ $\Rightarrow 30x-15x > 9000-$ 7200 $\Rightarrow 15x > 1800$ $\div 15 \Rightarrow x > 120$	$\frac{12}{100}) < (600+x)\frac{18}{100}$ $\Rightarrow \frac{30x}{100}+\frac{7200}{100} < \frac{10800+18x}{100}$ $\div 100 \Rightarrow 30x+7200 <$ $10800+18x$ $\Rightarrow 30x-18x < 10800-$ 7200 $\Rightarrow 12x < 3600$ $\div 12 \Rightarrow x < 300$

$$\Rightarrow x \in (120,300)$$

15 விழுக்காட்டிற்கும் 18 விழுக்காட்டிற்கும் இடைப்பட்ட அடர்த்தி கொண்ட அமிலத்தின் அளவு $=120$லிட்டர்$< x <$ 300லிட்டர்.

3.$f(x)=x^3-3px+2q$ ஆனது $g(x)=x^2+2ax+a^2$ ஆல் வகுபடும் எனில் $ap+q=0$ என நிறுவுக.

$f(x)\div g(x) \Rightarrow f(x)=(x+b)g(x), b\in R$

$\therefore\ x^3-3px+2q=(x+b)(x^2+2ax+a^2)$

$\Rightarrow x^3-3px+2q=x^3+(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x+a^2b$

இருபுறமும் x^2, x-ன் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை ஒப்பிட,

$\Rightarrow 2a+b=0$ $\Rightarrow b=-2a$	$\Rightarrow a^2+2ab=$ $-3p$ $\Rightarrow a^2+$ $2a(-2a)=-3p$ $\Rightarrow a^2-4a^2=$ $-3p$ $\Rightarrow -3a^2=-3p$ $\div(-3)\Rightarrow p=a^2$	$\Rightarrow 2q=a^2b$ $\Rightarrow 2q=a^2(-2a)$ $\Rightarrow 2q=-2a^3$ $\div 2 \Rightarrow q=-a^3$ $\Rightarrow q=-a(a^2)$ $\Rightarrow q=-a(p)$ $\Rightarrow ap+q=0$

4.அறுதியில்லாக் கெழுக்கள் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி $1+2+3+\cdots(n-1)+n, n\in N$-ன் கூடுதல் காண்க.

$S(n)=a+bn+cn^2;\ a,b,c\in R$ என்க.

$S(n)=1+2+3+\cdots+(n-1)+n \rightarrow (1)$

$S(n+1)=1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1) \rightarrow (2)$

$(2)-(1) \Rightarrow S(n+1)-S(n)=n+1$

$\Rightarrow a+b(n+1)+c(n+1)^2-[a+bn+cn^2]=n+1$

$\Rightarrow a+bn+b+cn^2+2cn+c-a-bn-cn^2=n+1$

$\Rightarrow 2cn+(b+c)=n+1$

இருபுறமும் n-ன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை ஒப்பிட,

$\Rightarrow 2c=1 \Rightarrow$ $c=\frac{1}{2}$	$\Rightarrow b+c=1$ $\Rightarrow b+\frac{1}{2}=1$ $\Rightarrow b=\frac{1}{2}$	$S(n)=a+bn+$ cn^2 $s(1)\Rightarrow a+b+$ $c=1$ $\Rightarrow a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\Rightarrow a=0$

$$S(n)=a+bn+cn^2 \Rightarrow S(n)=0+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n+n^2}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}, n\in N$$

5.தீர்க்க: $\frac{x+1}{x+3}<3$

$\frac{x+1}{x+3}<3$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x+3}-3<0 \Rightarrow \frac{x+1-3(x+3)}{x+3}<0 \Rightarrow \frac{x+1-3x-9}{x+3}<0$

$\Rightarrow \frac{-2x-8}{x+3}<0$

$\div(-2)\Rightarrow \frac{x+4}{x+3}>0$

$\frac{x+4}{x+3}>0$ –ன் பூஜ்ஜியங்கள் $-4,-3$ ஆகும்.

இடைவெளிகள்: $(-\infty,-4),(-4,-3),(-3,\infty)$

x	$x+4$	$x+3$	$\frac{x+4}{x+3}$
$x=-4$	0	$-$	0
$(-\infty,-4)$	$-$	$-$	$+$
$(-4,-3)$	$+$	$-$	$-$
$(-3,\infty)$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $=(-\infty,-4)\cup(-3,\infty)$

6. $\frac{x^3(x-1)}{(x-2)}>0$ எனில் x-ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.

$\frac{x^3(x-1)}{(x-2)}>0$-ன் பூஜ்ஜியங்கள் 0,1,2 ஆகும்.

இடைவெளிகள்: $(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,\infty)$

x	x^3	$x-1$	$x-2$	$\frac{x^3(x-1)}{(x-2)}$
$x=0$	0	$-$	$-$	0
$x=1$	$+$	0	$-$	0
$(-\infty,0)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(0,1)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(1,2)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2,\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $=(0,1)\cup(2,\infty)$

7. $\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)}<0$ என்ற அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் x-ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.

$\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)}<0$ -ன் பூஜ்ஜியங்கள் $\frac{3}{2},2,4$ ஆகும்.

இடைவெளிகள்: $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},2\right),(2,4),(4,\infty)$

x	$2x-3$	$(x-2)$	$(x-4)$	$\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)}$
$x=\frac{3}{2}$	0	$-$	$-$	0
$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\left(\frac{3}{2},2\right)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(2,4)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(4,\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup(2,4)$

8.தீர்வு காண்க: $\frac{x^2-4}{x^2-2x-15}\le 0$

$\frac{x^2-4}{x^2-2x-15}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{(x-5)(x+3)}\le 0$

$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-5)(x+3)}\le 0$ –ன் பூஜ்ஜியங்கள் $-3,-2,2,5$ ஆகும்.

இடைவெளிகள்: $(-\infty,-3),(-3,-2),(-2,2),(2,5),(5,\infty)$

x	$(x+2)$	$(x-2)$	$(x-5)$	$(x+3)$	$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-5)(x+3)}$
$x=2$	$+$	0	$-$	$+$	0
$x=-2$	0	$-$	$-$	$+$	0
$(-\infty,-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(-3,-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$(-2,2)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(2,5)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(5,\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $=(-3,-2]\cup[2,5)$

9.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x+1}{x^2(x-1)}$

$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}\rightarrow(1)$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{Ax^2+Bx(x-1)+C(x-1)}{x^2(x-1)}$

$\Rightarrow x+1=Ax^2+Bx(x-1)+C(x-1)$

$x=1$ எனில் $1+1=A(1)^2+B(1)(0)+C(0)\Rightarrow A=2$

$x=0$ எனில் $0+1=A(0)^2+B(0)(0-1)+C(0-1)$
$\Longrightarrow 1=-C \Longrightarrow C=-1$
$x=-1$ எனில்
$-1+1=A(-1)^2+B(-1)(-1-1)+C(-1-1)$
$\Longrightarrow 0=A+2B-2c \Longrightarrow 2+2B-2(-1)=0$
$\Longrightarrow 2B+4=0 \Longrightarrow B=-2$
$(1) \Longrightarrow \frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$

10.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}$

$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \to (1)$
$\Longrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$
$\Longrightarrow 2x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$
$x=1$ எனில் $2(1)=A(1^2+1)+[B(1)+c](1-1)$
$\Longrightarrow 2=2A \Longrightarrow A=1$
$x=1$ எனில் $2(0)=A(0+1)+[B(0)+c](0-1)$
$\Longrightarrow 0=A-C \Longrightarrow 0=1-C \Longrightarrow C=1$
$x=-1$ எனில்
$2(-1)=A[(-1)^2+1]+[B(-1)+c](-1-1)$
$\Longrightarrow -2=2A+[-B+C](-2) \quad \Longrightarrow -2=2A+2B-2C$
$\Longrightarrow -2=2(1)+2B-2(1) \Longrightarrow -2=2+2B-2$
$\Longrightarrow 2B=-2 \Longrightarrow B=-1$
$(1) \Longrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{(-1)x+1}{x^2+1}$
$\Longrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1-x}{x^2+1}$

11.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$

$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \to (1)$
$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+2)}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$
$x=A(x+2)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+2)$
$x=1$ எனில் $1=A(3)(2)+B(0)(2)+(cx+D)(0)(3)$
$$\Longrightarrow 6A=1 \Longrightarrow A=\frac{1}{6}$$
$x=-2$ எனில்
$-2=A(0)(5)+B(-3)(5)+[C(-2)+D](-3)(0)$
$\Longrightarrow -2=-15B \Longrightarrow B=\frac{2}{15}$
$x=0$ எனில்
$0=A(2)(1)+B(-1)(1)+[C(0)+D)(-1)(2)$
$\Longrightarrow 2A-B-2D=0 \Longrightarrow \frac{2}{6}-\frac{2}{15}-2D=0 \Longrightarrow \frac{3}{15}=2D$
$\Longrightarrow D=\frac{3}{30} \Longrightarrow D=\frac{1}{10}$
$x=-1$ எனில்
$-1=A(1)(2)+B(-2)(2)+[C(-1)+D](-2)(1)$
$\Longrightarrow 2A-2B+2C-2D=-1$
$\Longrightarrow 2\left(\frac{1}{6}\right)-4\left(\frac{2}{15}\right)+2C-2\left(\frac{1}{10}\right)=-1 \Longrightarrow 2C=-\frac{3}{5}$
$\Longrightarrow C=-\frac{3}{10}$
$\therefore (1) \Longrightarrow \frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}}{x^2+1}$
$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}=\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-3x+1}{10(x^2+1)}$

12.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x}{(x-1)^3}$

$\frac{x}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3} \to (1)$
$\frac{x}{(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$
$x=A(x-1)^2+B(x-1)+C$
$x=1$ எனில் $1=C$
$x=0$ எனில் $0=A-B+C \Longrightarrow A-B=-1 \to (2)$
$x=-1$ எனில் $-1=4A-2B+C \Longrightarrow 2A-B=-1 \to (3)$
சமன் (2),(3) -ஐத் தீர்க்க கிடைப்பது, $A=0$ மற்றும் $B=1$
$\therefore (1) \Longrightarrow \frac{x}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$

13.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$

(தொகுதியின் படி=பகுதியின் படி)
$x^2-5x+6)\ x^2+x+1\ \ (1$
x^2-5x+6
$6x-5$
$\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}=1+\frac{6x-5}{x^2-5x+6} \to (1)$
$\frac{6x-5}{x^2-5x+6}=\frac{6x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \to (2)$
$\frac{6x-5}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$
$6x-5=A(x-3)+B(x-2)$
$x=3$ எனில் $18-5=0+B(1) \Longrightarrow B=13$
$x=2$ எனில் $12-5=A(-1)+0 \Longrightarrow A=-7$
$(2) \Longrightarrow \frac{6x-5}{x^2-5x+6}=-\frac{7}{x-2}+\frac{13}{x-3}$
$(1) \Longrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}=1-\frac{7}{x-2}+\frac{13}{x-3}$

14.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}$

$\because$ தொகுதியின் படி $>$ பகுதியின் படி
$x^2+5x+6)x^3+0x^2+2x+1\ \ (x-5$
x^3+5x^2+6x
$-5x^2-4x+1$
$-5x^2-25x-30$
$21x+31$
$\frac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}=(x-5)+\frac{21x+31}{x^2+5x+6} \to (1)$
$\frac{21x+31}{x^2+5x+6}=\frac{21x+31}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} \to (2)$
$\frac{21x+31}{x^2+5x+6}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$
$21x+31=A(x+3)+B(x+2)$
$x=-3$ எனில் $-63+31=0+B(-1) \Longrightarrow B=32$
$x=-2$ எனில் $-42+31=A(1)+0 \Longrightarrow A=-11$
$(2) \Longrightarrow \frac{21x+31}{x^2+5x+6}=-\frac{11}{x+2}+\frac{32}{x+3}$
$(1) \Longrightarrow \frac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}=(x-5)+-\frac{11}{x+2}+\frac{32}{x+3}$

15.பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}$

$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+1(x+1)=(x+1)(x^2+1)$
$\frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{6x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \to (1)$
$\frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A(x^2+1)+[Bx+C](x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$
$6x^2-x+1=A(x^2+1)+[Bx+C](x+1)$
$x=-1$ எனில் $6+1+1=A(2)+0 \Longrightarrow 2A=8 \Longrightarrow A=4$
$x=0$ எனில் $1=A+C \Longrightarrow 4+C=1 \Longrightarrow C=-3$
இருபுறமும் x^2 −ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த, $6=A+B \Longrightarrow$ $6=4+B \Longrightarrow B=2$
$(1) \Longrightarrow \frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{4}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

16. $x+y \geq 3, 2x-y \leq 5$ மற்றும் $-x+2y \leq 3$ ஆகிய அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு வரைபடப் பகுதியாகத் தீர்வு காண்க.
$x+y=3, 2x-y=5$ மற்றும் $-x+2y=3$ ஆகிய மூன்று கோடுகளையும் வரைக.

$x+y=3$

x	0	1
y	3	2

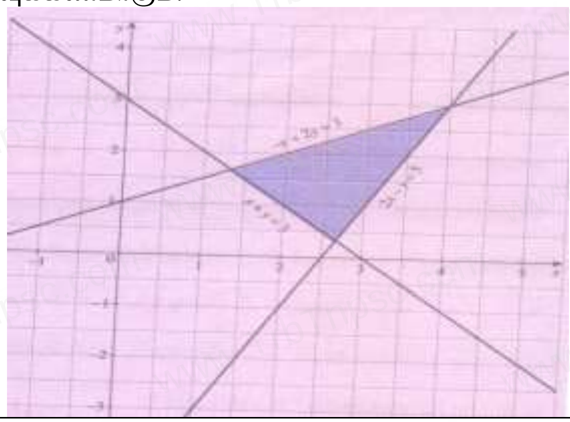
$2x-y=5$

x	0	1
y	-5	-3

$-x+2y=3$

x	1	3
y	2	3

$(0,0)$ -வை $x + y \geq 3$-இல் பிரதியிட $0 \geq 3$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மையல்ல.
எனவே $(0,0)$ அடங்காத பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $x + 2y > 3$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$(0,0)$ -வை $2x - y \leq 5$ -இல் பிரதியிட $0 \leq 5$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மை.
எனவே $(0,0)$ அடங்கும் பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $2x - y \leq 5$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$(0,0)$ -வை $-x + 2y \leq 3$ -இல் பிரதியிட $0 \leq 3$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மை.
எனவே $(0,0)$ அடங்கும் பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $-x + 2y \leq 3$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
இப்பொழுது மூன்று பகுதிகளுக்கும் பொதுவான பகுதியே கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடி அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வுக்கணமாகும்.



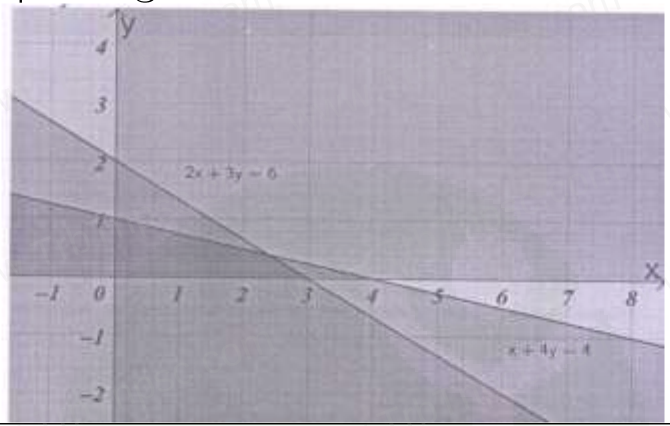
17. $2x + 3y \leq 6, x + 4y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ ஆகிய அசமன்பாடுகள் குறிக்கும் பகுதியைக் காண்க.
$2x + 3y = 6, x + 4y = 4$ ஆகிய இரண்டு நேர்க்கோடுகளையும் வரைக.
$2x + 3y = 6$

x	0	3
y	2	0

$x + 4y = 4$

x	0	4
y	1	0

$(0,0)$ -வை $2x + 3y \leq 6$-இல் பிரதியிட $0 \leq 6$ எனக் கிடைக்கிறது. இது உண்மை. எனவே $(0,0)$ அடங்கும் பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $2x + 3y \leq 6$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$(0,0)$ -வை $x + 4y \leq 4$-இல் பிரதியிட $0 \leq 4$ எனக் கிடைக்கிறது. இது உண்மை. எனவே $(0,0)$ அடங்கும் பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $x + 4y \leq 4$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$x \geq 0, y \geq 0$ என்பன முதல்கால் பகுதி முழுவதையும் குறிக்கும்.
இப்பொழுது நான்கு பகுதிகளுக்கும் பொதுவான பகுதியே கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடி அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வுக்கணமாகும்.



18. $\mathbf{2x + y \geq 8, x + 2y \geq 8, x + y \leq 6}$ **ஆகிய அசமன்பாடுகள் குறிக்கும் பகுதியைக் காண்க.**
$\mathbf{2x + y = 8, x + 2y = 8, x + y = 6}$ **ஆகிய நேர்க்கோடுகளை வரைக.**
$2x + y = 8$

x	0	4
y	8	0

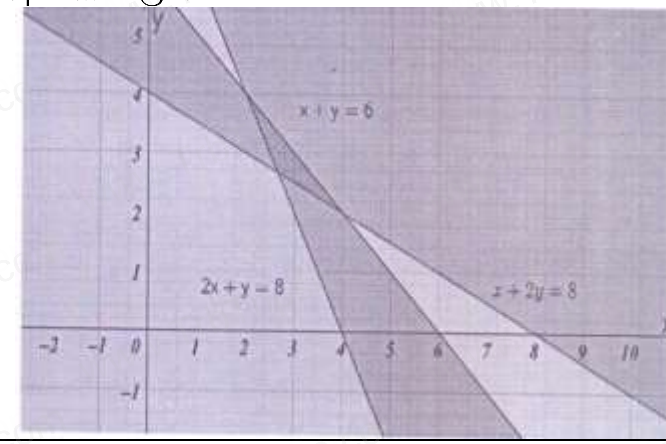
$x + 2y = 8$

x	0	8
y	4	0

$x + y = 6$

x	0	6
y	6	0

$(0,0)$ -வை $2x + y \geq 8$-இல் பிரதியிட $0 \geq 8$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மையல்ல. எனவே $(0,0)$ அடங்காத பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $2x + y \geq 8$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$(0,0)$ -வை $x + 2y \geq 8$ -இல் பிரதியிட $0 \geq 8$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மையல்ல.
எனவே $(0,0)$ அடங்காத பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $x + 2y \geq 8$-ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
$(0,0)$ -வை $x + y \leq 6$ -இல் பிரதியிட $0 \leq 6$ எனக் கிடைக்கிறது.இது உண்மை.
எனவே $(0,0)$ அடங்கும் பகுதியை நிழலிடுக, இதுவே $x + y \leq 6$ -ன் தீர்வுப்பகுதியாகும்.
இப்பொழுது மூன்று பகுதிகளுக்கும் பொதுவான பகுதியே கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடி அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வுக்கணமாகும்.



19. $\mathbf{7 - 4\sqrt{3}}$ **–ன் வர்க்கமூலம் காண்க.**

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 - 4\sqrt{3}}$
$= \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 - 2(2)\sqrt{3}}$
$= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$
$= 2 - \sqrt{3} \quad [\because \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} > 0]$

20.சுருக்குக: $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

$\frac{1}{3-\sqrt{8}} = \frac{1}{3-\sqrt{8}} \times \frac{3+\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} = \frac{3+\sqrt{8}}{9-8} = 3 + \sqrt{8}$
$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{8-7} = \sqrt{8} + \sqrt{7}$
$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$
$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$
$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5} + 2$
$\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$
$= 3 + \sqrt{8} - (\sqrt{8} + \sqrt{7}) + \sqrt{7} + \sqrt{6} - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) + \sqrt{5} + 2$
$= 3 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2 = 5$

21. $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ எனில், $\frac{x^2+1}{x^2-2}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

$x^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$

$\frac{x^2+1}{x^2-2} = \frac{5+2\sqrt{6}+1}{5+2\sqrt{6}-2} = \frac{6+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{6}} \times \frac{3-2\sqrt{6}}{3-2\sqrt{6}}$

$= \frac{18-12\sqrt{6}+6\sqrt{6}-24}{9-24} = \frac{-6-6\sqrt{6}}{-15} = \frac{-3(2+2\sqrt{6})}{-15}$

$= \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

22. $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$ என நிறுவுக.

$\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243}$

$= \log 75 - \log 16 - 2[\log 5 - \log 9] + \log 32 - \log 243$

$= \log(3\times 25) - \log 16 - 2\log 5 + 2\log 9 + \log(2\times 16) - \log(81\times 3)$

$= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 5^2 + \log 9^2 + \log 2 + \log 16 - \log 81 - \log 3$

$= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 25 + \log 81 + \log 2 + \log 16 - \log 81 - \log 3$

$= \log 2$

23. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ எனில், x –ன் மதிப்பைக் காண்க.

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16} = \frac{7}{2}$ (அடிமான மாற்று விதி)

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{1}{\log_x 2^4} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{1}{4\log_x 2} = \frac{7}{2}$ (அடுக்கு விதி)

$\log_x 2 = a \rightarrow (1)$ என்க. $\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{4+2+1}{4a} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{7}{4a} = \frac{7}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = 2$

$(1) \Rightarrow \log_x 2 = a \Rightarrow \log_x 2 = 2 \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4$

24. $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$ எனில், x –ன் தீர்வுக் காண்க.

$\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11 \Rightarrow \frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 2} = 11$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2^3} + \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{1}{\log_x 2} = 11$

$\Rightarrow \frac{1}{3\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 2} = 11$

$\log_x 2 = a \rightarrow (1)$ என்க.$\Rightarrow \frac{1}{3a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} = 11$

$\Rightarrow \frac{2+3+6}{6a} = 11 \Rightarrow \frac{11}{6a} = 11 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

$(1) \Rightarrow \log_x 2 = a \Rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x^{1/6} = 2 \Rightarrow x = 2^6$

$\Rightarrow x = 64$

25. $\log 2 + 16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} = 1$ என நிறுவுக.

$\log 2 + 16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80}$

$= \log 2 + 16\log 16 - 16\log 15 + 12\log 25 - 12\log 24 + 7\log 81 - 7\log 80$

$= \log 2 + 16\log 2^4 - 16\log(3\times 5) + 12\log 5^2 - 12\log(2^3\times 3) + 7\log 3^4 - 7\log(2^4\times 5)$

$= \log 2 + (16\times 4)\log 2 - 16\log 3 - 16\log 5 + (12\times 2)\log 5 - (12\times 3)\log 2 - 12\log 3 + (7\times 4)\log 3 - (7\times 4)\log 2 - 7\log 5$

$= \log 2 + 64\log 2 - 16\log 3 - 16\log 5 + 24\log 5 - 36\log 2 - 12\log 3 + 28\log 3 - 28\log 2 - 7\log 5$

$= 65\log 2 - 64\log 2 + 28\log 3 - 28\log 3 + 24\log 5 - 23\log 5$

$= \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$

26. $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ எனில், $xyz = 1$ எனக் காண்க.

$\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$ என்க.

$\Rightarrow \frac{\log x}{y-z} = k \,;\, \frac{\log y}{z-x} = k \,;\, \frac{\log z}{x-y} = k$

$\Rightarrow \log x = k(y-z) \Rightarrow \log x = ky - kz$

$\Rightarrow \log y = k(z-x) \Rightarrow \log y = kz - kx$

$\Rightarrow \log z = k(x-y) \Rightarrow \log z = kx - ky$

இருபுறமும் அனைத்தையும் கூட்டுக,

$\log x + \log y + \log z = ky - kz + kz - kx + kx - ky \Rightarrow \log xyz = 0$

$\Rightarrow \log xyz = \log 1 \Rightarrow xyz = 1$

27. $\log_2 x - 3\log_{1/2} x = 6$ –ன் தீர்வு காண்க.

$\log_2 x - 3\log_{1/2} x = 6$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} - \frac{3}{\log_x \frac{1}{2}} = 6$ (அடிமான மாற்று விதி)

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} - \frac{3}{\log_x \frac{1}{2}} = 6$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} - \frac{3}{\log_x 1 - \log_x 2} = 6$ (வகுத்தல் விதி)

$\Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} - \frac{3}{0-\log_x 2} = 6 \Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{3}{\log_x 2} = 6$

$\log_x 2 = a \rightarrow (1)$ என்க.

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{a} = 6 \Rightarrow \frac{4}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{4}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$(1) \Rightarrow \log_x 2 = a \Rightarrow \log_x 2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x^{2/3} = 2$

$\Rightarrow x = 2^{3/2} = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$

4.சேர்ப்பியல் மற்றும் கணிதத் தொகுத்தறிதல்

1. A என்ற இடத்திலிருந்து B என்ற இடத்திற்கு செல்ல B_1, B_2 என்ற இரண்டு பேருந்து வழித்தடங்களும், T_1, T_2 என்ற இரண்டு இரயில் வழித்தடங்களும், மேலும் A_1 என்ற வான் வழித்தடமும் உள்ளது. B என்ற இடத்திலிருந்து C என்ற இடத்திற்கு செல்ல B'_1 என்ற ஒரு பேருந்து வழித்தடமும், T'_1, T'_2 என்ற இரண்டு இரயில் வழித்தடங்களும், மேலும் A'_1 என்ற வான் வழித்தடமும் உள்ளது. A என்ற இடத்திலிருந்து C என்ற இடத்திற்கு B என்ற இடம் வழியே ஒரே வழித்தடத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை வழிகளில் செல்லலாம்?

$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$
B_1, B_2	B'_1
T_1, T_2	T'_1, T'_2
A_1	A'_1

∴மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை= $(2\times 2) + (2\times 1) + (2\times 1) + (2\times 1) + (1\times 1) + (1\times 2)$

$= 4+2+2+2+1+2 = 13$

2. 1 –க்கும் 1000 –க்கு இடையே உள்ள (இரண்டையும் உள்ளடக்கிய) எண்களில் 2ஆலும் 5ஆலும் வகுபடாத எண்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

1 –க்கும் 1000 –க்கு இடையே உள்ள மொத்த எண்கள் = 1000

2ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 500$

5ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 200$

2மற்றும் 5ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $n(A\cap B) = 100$ $[\because 1000 \div 10(2\times 5)]$

2 (அ) 5ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cup B) = 500 + 200 - 100 = 600$

2ஆலும் 5ஆலும் வகுபடாத எண்களின் எண்ணிக்கையை= $1000 - 600 = 400$

3. $LOTUS$ எனும் வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி

$(i) L$ இல் ஆரம்பித்து அல்லது S இல் முடிக்கும் வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்கள் உள்ளன.

$(ii) L$ இல் துவங்கவோ மற்றும் S இல் முடிக்கவோ கூடாத எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

$(i) L$ இல் ஆரம்பிக்கும் எழுத்து சரங்கள்:

இடம்	$1(L)$	2	3	4	5
வழிகளின் எண்ணிக்கை	1	4	3	2	1

வழிகளின் எண்ணிக்கை$n(A) = 1.4.3.2.1 = 24$

S இல் முடியும் எழுத்து சரங்கள்:

இடம்	1	2	3	4	$5(S)$
வழிகளின் எண்ணிக்கை	4	3	2	1	1

வழிகளின் எண்ணிக்கை$n(B) = 4.3.2.1.1 = 24$

L இல் ஆரம்பித்து அல்லது S இல் முடியும் எழுத்து சரங்கள்:

இடம்	$1(L)$	2	3	4	$5(S)$
வழிகளின் எண்ணிக்கை	1	3	2	1	1

வழிகளின் எண்ணிக்கை$n(A \cap B) = 1.3.2.1.1 = 6$

சேர்த்தல்-நீக்கல் கொள்கையின்படி,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = 24 + 24 - 6 = 42$$

(ii)இடம் 5, எழுத்து 5

இடம்	1	2	3	4	5
வழிகளின் எண்ணிக்கை	5	4	3	2	1

வழிகளின் எண்ணிக்கை$= 5.4.3.2.1 = 120$

L இல் துவங்கவோ மற்றும் S இல் முடிக்கவோ கூடாத எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை$= 120 - 42 = 78$

4.நான்கு வெவ்வேறான இலக்கங்களைக் கொண்ட 4 −இலக்க எண்களை 1,2,3,4 மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கும்போது, கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.

(i) இவ்வாறான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

(ii) இவற்றில் எத்தனை எண்கள் இரட்டைப்படை?

(iii) இவற்றில் எத்தனை எண்கள் சரியாக 4 ஆல் வகுபடும்?

(i) எண்கள் 5 (1,2,3,4 மற்றும் 5) ; இலக்கங்கள் 4

5 எண்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 4இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை$= 5P_4 = 5.4.3.2 = 120$

(ii)இரட்டைப்படை எண்கள் எனில் கடைசி இலக்கம் 2 (அ) 4 ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\underbrace{(\ )\ (\ )\ (\ )}_{4P_3}\underbrace{(2/4)}_{2P_1}$$

இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4P_3 \times 2P_1 = (4.3.2)(2) = 48$

(iii)4 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்க வேண்டுமெனில் கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள்

4 ஆல் வகுபட வேண்டும். 1,2,3,4 மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி கிடைக்கும் 4 ஆல் வகுபடும் எண்ணகள் $= 12,24,32,52$ (4 வழிகள்)

$$\underbrace{(\ )\ (\ )}_{3P_2}\underbrace{(12/24/32/52)}_{4P_1}$$

4 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $= 3P_2 \times 4P_1$
$= (3.2)(4) = 6.4 = 24$

5. "EQUATION" என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி

(i)உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

(ii)உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

(i)மொத்த எழுத்துகள் 8 (E, Q, U, A, T, I, O, N);

உயிரெழுத்துகள் 5 (E, U, A, I, O)

n வெவ்வேறான பொருட்களில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான m பொருட்கள் எப்பொழுதும் ஒன்றாக வரும் வகையில் உள்ள வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (n - m + 1)!$

இங்கு $n = 8, m = 5,$

உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை$= 5! \times (8 - 5 + 1)! = 5! \times 4! = (5.4.3.2.1)(4.3.2.1) = 120 \times 24 = 2880$

(ii)மொத்த எழுத்துகள் 8 (E, Q, U, A, T, I, O, N)

உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் மற்றும் வராத வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை$= 8P_8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$

உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை=

உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் மற்றும் வராத வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை − உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை$= 40320 - 2880 = 37440$

6.15 மாணவர்கள் எழுதும் ஒரு தேர்வில், 7 மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வையும் மீதமுள்ள 8 மாணவர்கள் வெவ்வேறு பாடங்களுக்கான தேர்வையும் எழுதுகின்றனர். கணிதத் தேர்வு எழுதும் உந்த இரு மாணவர்களும் ஒரே வரிசையில் அடுத்தடுத்து இல்லாத வகையில் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம்?

GAP METHOD: $m = 8, n = 15; k = n - m = 15 - 8 = 7,$

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (m + 1)P_k = 8! \times (8 + 1)P_7 = 8! \times 9P_7$

$= 8! \times \frac{9!}{2!} = \frac{8! \times 9!}{2!}$ $\quad [\because\ nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}]$

7.ஒரு வண்டியில் 8 இருக்கைகள் உள்ளன. முன்வரிசையில் 2 இருக்கைகளும் அதற்கு பின்புறம் இரண்டு வரிசைகளில் ஒவ்வொன்றிலும் 3 இருக்கைகள் உள்ளன. ஆந்த வண்டியானது ஏழு நபர்கள் $F, M, S_1, S_2, S_3, D_1, D_2$ உள்ள ஒரு குடும்பத்திற்கு சொந்தமானது.பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு அக்குடும்பத்தை அந்த வண்டியில் எத்தனை வழிகளில் அமர வைக்கலாம்?

(i) எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லாமல்

(ii) F அல்லது M வண்டியை ஓட்ட வேண்டும்

$(iii)$$F$ வண்டியை ஓட்டும்போது D_1, D_2 சன்னலோர இருக்கையில் அமர்ந்திருக்க வேண்டும்.

1 ▯ D
2 3 4 ; $D \to Driver\ seat$
5 6 7

குடும்ப உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை= 7; இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை= 8

(i)எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லை:

7 பேரில் ஒருவர் ஓட்டுநர் இருக்கையில் அமருவதற்கான வழிகள்$= 7P_1 = 7$

மீதமுள்ள 7 இருக்கைகளில் 6 பேர் அமருவதற்கான வழிகள் $= 7P_6 = 7.6.5.4.3.2 = 5040$

மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை$= 7 \times 5040 = 35280$

$(ii)$$F$ அல்லது M வண்டியை ஓட்ட வேண்டும்:

F (அ) M இருரில் ஒருவர் ஓட்டுநர் இருக்கையில் அமருவதற்கான வழிகள்$= 2P_1 = 2$

மீதமுள்ள 7 இருக்கைகளில் 6 பேர் அமருவதற்கான வழிகள் $= 7P_6 = 7.6.5.4.3.2 = 5040$

மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை$= 2 \times 5040 = 10080$

$(iii)$$F$ வண்டியை ஓட்டும்போது D_1, D_2 சன்னலோர இருக்கையில் அமர்ந்திருக்க வேண்டும்:

சன்னலோர இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை$= 5$

D_1, D_2 சன்னலோர இருக்கையில் அமருவதற்கான வழிகள்$= 5P_2 = 5.4 = 20$

F வண்டியை ஓட்டுவதால், மீதமுள்ள 5 இருக்கைகளில் 4 பேர் அமருவதற்கான வழிகள் $= 5P_4 = 5.4.3.2 = 120$

மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை$= 20 \times 120 = 2400$

8.8 பெண்கள் மற்றும் 6 ஆண்கள் ஓர் வரிசையில் நிற்கிறார்கள்.

(i)எவரும் எந்த இடத்திலும் நிற்கலாம் என்ற வகையில் எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

(ii)6 ஆண்களும் அடுத்தடுத்து வருமாறு எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

(iii)எந்த இரு ஆண்களும் ஒன்றாக நிற்காமல் எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

(i) 8 பெண்கள் மற்றும் 6 ஆண்கள் $= 14$ நபர்கள்

8 பெண்கள் மற்றும் 6 ஆண்கள் ஓர் வரிசையில் எந்த இடத்திலும் நிற்கலாம் என்பதற்கான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= 14P_{14} = 14!$

(ii) STRING METHOD: $m = 6, n = 8 + 6 = 14$

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (n - m + 1)! =$ $6! \times (14 - 6 + 1) \quad = 6! \times 9!$

(iii) GAP METHOD: $m = 8, n = 14, K = n - m = 6$

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (m + 1)P_k$ $= 8! \times 9P_6$

9.INTERMEDIATE என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

(i) உயிர் எழுத்துகள் மற்றும் மெய் எழுத்துகள் அடுத்தடுத்து வருமாறு

(ii) எல்லா உயிரெழுத்துகளும் ஒன்றாக வருமாறு

(iii) உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில்

(iv) எந்த இரு உயிரெழுத்துகளும் ஒன்றாக வராத வகையில்

மொத்த எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை$= 12$

உயிரெழுத்துகளின் எண்ணிக்கை$= 6\ (I, E, E, I, A, E)$; இரண்டு I, மூன்று E உள்ளது.

மெய் எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை$= 6\ (N, T, R, M, D, T)$; இரண்டு T உள்ளது.

(i)ஒரு உயிரெழுத்து மற்றும் ஒரு மெய் எழுத்து அடுத்தடுத்து வருமாறு:

உயிரெழுத்துகளின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$=$ $\frac{6!}{2!\times3!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{(2.1)(3.2.1)} = 60$

மெய் எழுத்துகளின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= \frac{6!}{2!} =$ $\frac{6.5.4.3.2.1}{(2.1)} = 360$

மொத்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 2!\,(60 \times 360) = 43200$

($\because$ முதலில் உயிரெழுத்து பின்னர் மெய் எழுத்து (அ) முதலில் மெய் எழுத்து பின்னர் உயிரெழுத்து என 2 வழிகள் உள்ளதனால் $2!$ வரும்)

(ii) STRING METHOD: உயிரெழுத்துகளின் எண்ணிக்கை$m = 6; n = 12$

மொத்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (n - m + 1)! = 6! \times 7!$

இரண்டு I, மூன்று E மற்றும் இரண்டு T உள்ளதால், தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= \frac{6!\times7!}{2!\times3!\times2!} =$ $\frac{720\times5040}{2\times6\times2} = 151200$

(iii) 12 எழுத்துகளையும் கொண்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= \frac{12!}{2!\times3!\times2!}$ $= 19958400$ ($\because$இரண்டு I, மூன்று E மற்றும் இரண்டு T உள்ளதால்)

தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை=12 எழுத்துகளையும் கொண்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை − எல்லா உயிரெழுத்துகளும் ஒன்றாக வருமாறு உள்ள வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$= 19958400 - 151200 = 19807200$

(iv) GAP METHOD: $m = 6, n = 12, K = n - m = 6$

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= m! \times (m + 1)P_k = 6! \times 7P_6$

இரண்டு I, மூன்று E மற்றும் இரண்டு T உள்ளதால், தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை$= \frac{6!\times7P_6}{2!\times3!\times2!} =$ $\frac{720\times5040}{2\times6\times2} = 151200$

10.$1, 1, 2, 3, 3$ மற்றும் 4 என்ற இலக்கங்கள் தனித்தனியாக அட்டையில் எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒரு 6 −இலக்க எண்ணை அமைக்க இந்த ஆறு அட்டைகளையும் வரிசைப்படுத்தும்போது

(i) எத்தனை வெவ்வேறான 6 −இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?

(ii) இவற்றில் எத்தனை 6 −இலக்க எண்கள் இரட்டைப்படை?

(iii) இவற்றில் எத்தனை 6 −இலக்க எண்கள் 4ஆல் வகுபடும்?

1-ன் எண்ணிக்கை$= 2$; 3-ன் எண்ணிக்கை$= 2$

(i)1,1,2,3,3 மற்றும் 4 என்ற எண்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 6 −இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை$=$ $\frac{6!}{2!\times2!} = \frac{720}{2} = 180$

(ii)இரட்டைப்படை எனில் 1ஆம் இடத்தில் 2 (அ) 4 வரும்.

$\underbrace{(\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )}_{5!}\ \underbrace{(2/4)}_{1!}$

வழிகளின் எண்ணிக்கை$= \frac{5!\times1}{2!\times2!} = 30$ ($\because$1-ன் எண்ணிக்கை$=$ 2; 3-ன் எண்ணிக்கை$= 2$)

இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை$= 2 \times 30 = 60$

(iii) 4ஆல் வகுபடும் எனில் கடைசி 2 இலக்கங்கள் 12,24,32 ஆக இருக்க வேண்டும்.

கடைசி 2 இலக்கங்கள் 12 எனில் வழிகளின் எண்ணிக்கை$=$ $\frac{4!}{2!} = 12$ ($\because$3-ன் எண்ணிக்கை$= 2$)

கடைசி 2 இலக்கங்கள் 24 எனில் வழிகளின் எண்ணிக்கை$=$ $\frac{4!}{2!\times2!} = 6$ ($\because$1-ன் எண்ணிக்கை$= 2$; 3-ன் எண்ணிக்கை$= 2$)

கடைசி 2 இலக்கங்கள் 32 எனில் வழிகளின் எண்ணிக்கை$=$ $\frac{4!}{2!} = 12$ ($\because$1-ன் எண்ணிக்கை$= 2$)

4ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை$= 12 + 6 + 12 = 30$

11. GARDEN என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்திக் கிடைக்கும் எழுத்துச் சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது, கீழ்க்காணும் வார்த்தைகளின் தரத்தைக் காண்க.

(i)$GARDEN$ $(ii)DANGER$

(i)

4	1	6	2	3	5
G	A	R	D	E	N
5!	4!	3!	2!	1!	0!
3	0	3	0	0	0

GARDEN என்ற வார்த்தையின் தரம்$= (3 \times 5!) + (3 \times 3!) + 1$
$= (3 \times 120) + (3 \times 6) + 1 = 360 + 18 + 1 = 379$

(ii)

2	1	5	4	3	6
D	A	N	G	E	R
5!	4!	3!	2!	1!	0!
1	0	2	1	0	0

$DANGER$ என்ற வார்த்தையின் தரம்
$= (1 \times 5!) + (2 \times 3!) + (1 \times 2!) + 1$
$= 120 + 12 + 2 + 1 = 135$

12. THING என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்தி எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை பெறலாம். மேலும், இதனை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது 85ஆவது எழுத்துச் சரம் என்னவாக இருக்கும்?

4	3	1	2	5
N	I	G	H	T
4!	3!	2!	1!	0!
3	2	0	0	0

$NIGHT$ −ன் தரம்$= (3 \times 4!) + (2 \times 3!) + 1$
$= (3 \times 24) + (2 \times 6) + 1 = 72 + 12 + 1 = 85$

13. $TABLE$ என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்து கிடைக்கும் எல்லா எழுத்துச் சரங்களையும் ஆங்கில அகராதியில் உள்ளபடி வரிசையாக அமைத்தால், கீழ்க்கண்ட வார்த்தைகளின் தரம் காண்க.

$(i) TABLE$ $(ii) BLEAT$

(i)

5	1	2	4	3
T	A	B	L	E
4!	3!	2!	1!	0!
4	0	0	1	0

$TABLE$ என்ற வார்த்தையின் தரம்

$= (4 \times 4!) + 1(1!) + 1 = (4 \times 24) + 1 + 1$

$= 96 + 1 + 1 = 98$

(ii)

2	4	3	1	5
B	L	E	A	T
4!	3!	2!	1!	0!
1	2	1	0	0

$BLEAT$ என்ற வார்த்தையின் தரம்

$= (1 \times 4!) + (2 \times 3!) + (1 \times 2!) + 1$

$= 24 + 12 + 2 + 1 = 39$

14. $1, 2, 4, 6, 8$ என்ற இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் எல்லா 4 −இலக்க எண்களின் கூடுதலைக் காண்க.

இங்கு $n = 5, r = 4$

n பூச்சியமற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு உருவாகும் எல்லா r −இலக்க எண்களின் கூடுதல்= $\{n-1P_{r-1} \times$(இலக்கங்களின் கூடுதல்)$\times$ 1.1.1 ….1(r முறை)$\}$

தேவையான கூடுதல்

$= (5-1)P_{(4-1)}[1+2+4+6+8](1111)$

$= 4P_3 \times 21 \times 1111 = (4.3.2) \times 21 \times 1111$

$= 24 \times 21 \times 1111 = 559944$

15. 1,2,3,4 மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் திரும்ப வராத வகையில் உருவாகும் எல்லா 4 −இலக்க எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இங்கு $n = 5, r = 4$

n பூச்சியமற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு உருவாகும் எல்லா r −இலக்க எண்களின் கூடுதல்= $\{n-1P_{r-1} \times$(இலக்கங்களின் கூடுதல்)$\times$ 1.1.1 ….1(r முறை)$\}$

தேவையான கூடுதல்

$= (5-1)P_{(4-1)}[1+2+3+4+5](1111)$

$= 4P_3 \times 21 \times 1111 = (4.3.2) \times 15 \times 1111$

$= 24 \times 15 \times 1111 = 399960$

16. $0, 2, 5, 7, 8$ என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் திரும்ப வராத வகையில் உருவாகும் எல்லா 4 −இலக்க எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இங்கு $n = 5, r = 4$

கொடுக்கப்பட்ட n இலக்கங்களில் 0 ஒரு இலக்கம் எனில், இவற்றைக் கொண்டு உருவாகும் r −இலக்க எண்களின் கூடுதல்= $\{n-1P_{r-1} \times$(இலக்கங்களின் கூடுதல்)$\times$ 1.1.1 ….1(r முறை)$\} - \{n-2P_{r-2} \times$(இலக்கங்களின் கூடுதல்)$\times$ 1.1.1 ….1($r-1$)முறை)$\}$

$= (5-1)P_{(4-1)}[0+2+5+7+8](1111) - (5-2)P_{(4-2)}[0+2+5+7+8](1111)$

$= 4P_3 \times 22 \times 1111 - 3P_2 \times 22 \times 111$

$= (4.3.2)(22)(1111) - (3.2)(22)(111)$

$= 586608 - 14652 = 571956$

17. $(n+2)C_7 : (n-1)P_4 = 13:24$ எனில், n −ன் மதிப்பைக் காண்க.

$nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$; $nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$(n+2)C_7 : (n-1)P_4 = 13:24 \Rightarrow \frac{(n+2)C_7}{(n-1)P_4} = \frac{13}{24}$

$\Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-5)! \times 7!} \times \frac{(n-5)!}{(n-1)!} = \frac{13}{24}$

$\Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{7.6.5.4.3.2.1} \times \frac{1}{(n-1)!} = \frac{13}{24}$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)n = \frac{13}{24} \times 7.6.5.4.3.2.1$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)n = 15.14.13 \Rightarrow n = 13$

18.ஒரு வினாத்தாளில் உள்ள 8 வினாக்களில் 4 வினாக்கள் பகுதி அ-விலும் 4 வினாக்கள் பகுதி ஆ-விலும் உள்ளன. தேர்வு எழுதுபவர் 5 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும். கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளை நிறைவுசெய்யும் வகையில் எத்தனை வழிகளில் இதனைச் செய்யலாம்.

(i)இரு பகுதிகளிலிருந்தும் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாமல் எத்தனை வினாக்களை வேண்டுமானாலும் தேர்வு செய்யலாம்.

(ii)குறைந்தபட்சம் இரண்டு வினாக்களையாவது பகுதி அ-வில் இருந்து எழுத வேண்டும்.

(i)மொத்தம் உள்ள 8 வினாக்களிலிருந்து 5 வினாக்களை தேர்வு செய்யும் வழிகள்= $8C_3 = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$

(ii)

பகுதி அ	பகுதி ஆ	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
2	3	$4C_2 \times 4C_3 = \frac{4.3}{1.2} \times \frac{4.3.2}{1.2.3} = 6 \times 4 = 24$
3	2	$4C_3 \times 4C_2 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \times \frac{4.3}{1.2} = 4 \times 6 = 24$
4	1	$4C_4 \times 4C_1 = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \times \frac{4}{1} = 1 \times 4 = 4$
மொத்தம்		52

19. PROPOSITION எனும் வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி 5 எழுத்துகளில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

மொத்த எழுத்துகள்= 11; P −ன் எண்ணிக்கை= 2; I −ன் எண்ணிக்கை= 2

O −ன் எண்ணிக்கை= 3; வெவ்வேறான எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை= 4 (R, S, T, N)

எழுத்துகளின் வாய்ப்புகள்	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
P, R, O, S, I, T, N இல் இருந்து 5 வெவ்வேறான எழுத்துகள்	$7P_5 = 7.6.5.4.3 = 2520$
3 ஒரே எழுத்து கொண்ட OOO −இல் 1 தொகுப்பு, PP, II −இல் இருந்து 1 சோடி	$1C_1 \times 2C_1 \times \frac{5!}{3!.2!} = 1 \times 2 \times \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 20$
3 ஒரே எழுத்து கொண்ட OOO −இல் 1 தொகுப்பு, 2 வெவ்வேறான எழுத்துகள் (R, S, T, N, P, I)	$1C_1 \times 6C_2 \times \frac{5!}{3!} = 1 \times \frac{6.5}{1.2} \times \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = 300$
PP, II, OO −இல் இருந்து 2 சோடி, $R, S, T, N, (P/I/O)$ − இல் 1 எழுத்து	$3C_2 \times 5C_1 \times \frac{5!}{2!.2!} = \frac{3.2}{1.2} \times 5 \times \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2} = 450$
PP, II, OO −இல் இருந்து 1 சோடி, $R, S, T, N, (P/I/O), (P/I/O)$ − இல் 3 எழுத்து	$3C_1 \times 6C_3 \times \frac{5!}{2!} = 3 \times \frac{6.5.4}{1.2.3} \times \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 3600$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை	6890

20.5 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 20 மாணவர்களில் இருந்து 2 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 3 மாணவர்களைக் கொண்டு ஒரு குழு அமைக்கப்படுகின்றது.எத்தனை வழிகளில் இதனைச் செய்யலாம்? மேலும் இவற்றில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு எத்தனை குழுக்களைக் காணலாம்?

(i)அக்குழுவில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆசிரியர் உள்ளவாறு.

(ii)அக்குழுவில் ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவர் வராதவாறு.

5 ஆசிரியர்களில் 2 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 20 மாணவர்களில் 3

மாணவர்களை தேர்வு செய்யும் வழிகள்= $5C_2 \times 20C_3$
$= \frac{5.4}{1.2} \times \frac{20.19.18}{1.2.3} = 11400$
(i) 1 குறிப்பிட்ட ஆசிரியர் போக மீதியுள்ள ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை= 4
4 ஆசிரியர்களில் 1 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 20 மாணவர்களில் 3 மாணவர்களை தேர்வு செய்யும் வழிகள்= $4C_1 \times 20C_3$
$= 4 \times \frac{20.19.18}{1.2.3} = 4560$
(ii)குழுவில் இடம்பெறாத மாணவரின் எண்ணிக்கை= 1
5 ஆசிரியர்களில் 2 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 19 மாணவர்களில் 3 மாணவர்களை தேர்வு செய்யும் வழிகள்= $5C_2 \times 19C_3$
$= \frac{5.4}{1.2} \times \frac{19.18.17}{1.2.3} = 9690$

21.52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 5 சீட்டுகளைத் தேர்வு செய்யும் ஒவ்வொரு சேர்விலும் எப்பொழுதும் மூன்று ஏஸ்கள் உள்ளவாறு எத்தனை சேர்வுகள் இருக்கும் எனக் காண்க.

சீட்டு	எண்ணிக்கை	தேர்வு செய்ய வேண்டிய எண்ணிக்கை	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
ஏஸ்	4	3	$4C_3 = \frac{4.3}{1.2} = 4$
மற்றவை	48	2	$48C_2 = \frac{48.47}{1.2} = 1128$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை			$4 \times 1128 = 4512$

22.7 இந்தியர்கள் மற்றும் 5 அமெரிக்கர்களில் இருந்து இந்தியர்கள் அதிக அளவில் இருக்கும்படியான 5 நபர்களைக் கொண்ட எத்தனை விதமான குழுக்களை அமைக்கலாம்?

இந்தியர்கள்(7)	அமெரிக்கர்கள்(5)	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
5	0	$7C_5 \times 5C_0 = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} \times 1 = 21$
4	1	$7C_4 \times 5C_1 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \times 5 = 175$
3	2	$7C_3 \times 5C_2 = \frac{7.6.5}{1.2.3} \times \frac{5.4}{1.2} = 350$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை		546

23.8 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களில் இருந்து 7 பேர் கொண்ட குழு அமைக்கப்படுகின்றுது.கீழ்க்காணும் நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்யும் வகையில் எத்தனை குழுக்களை அமைக்கலாம்.
(i) சரியாக 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.
(ii) குறைந்தபட்சம் 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.
(iii) அதிகபட்சம் 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.

(i)

பெண்(4)	ஆண்(8)	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
3	4	$4C_3 \times 8C_4 = 4 \times \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 4 \times 70 = 280$

(ii)

பெண்(4)	ஆண்(8)	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
3	4	$4C_3 \times 8C_4 = 4 \times \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 4 \times 70 = 280$
4	3	$4C_4 \times 8C_3 = 1 \times \frac{8.7.6}{1.2.3} = 1 \times 56 = 56$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை		336

(iii)

பெண்(4)	ஆண்(8)	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
0	7	$4C_0 \times 8C_7 = 1 \times \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7} = 8$
1	6	$4C_1 \times 8C_6 = 4 \times \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} = 4 \times 28 = 112$
2	5	$4C_2 \times 8C_5 = \frac{4.3}{1.2} \times \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 6 \times 56 = 336$
3	4	$4C_3 \times 8C_4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \times \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 4 \times 70 = 280$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை		736

24.ஒரு ஆணுக்கு 4 பெண்கள் மற்றும் 3 ஆண்கள் என 7 உறவினர்கள் உள்ளனர். அவரது மனைவிக்கு 3 பெண்கள் மற்றும் 4 ஆண்கள் என 7 உறவினர்கள் உள்ளனர்.ஒரு இரவு விருந்திற்கு 3 பெண்கள் மற்றும் 3 ஆண்கள் அழைக்கப்படும் போது, ஆணின் உறவினர்கள் 3 பேர் மற்றும் அவரது மனைவியின் உறவினர்கள் 3 பேர் என்றவாறு விருந்தில் கலந்துகொள்ள எத்தனை வழிகளில் அழைக்கலாம்?

கணவரின் உறவுகள்		மனைவியின் உறவுகள்		சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
ஆண் (3)	பெண் (4)	ஆண் (4)	பெண் (3)	
3			3	$3C_3.3C_3 = 1.1 = 1$
2	1	1	2	$3C_2.4C_1.4C_1.3C_2 = 3.4.4.3 = 144$
1	2	2	1	$3C_1.4C_2.4C_2.3C_1 = 3.6.6.3 = 324$
	3	3		$4C_3.4C_3 = 4.4 = 16$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை				485

25.ஒரு பெட்டியில் இரண்டு வெள்ளைப் பந்துகள், மூன்று கருப்புப் பந்துகள் மற்றும் நான்கு சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. பெட்டியில் இருந்து மூன்று பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, அவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒரு கருப்பு பந்து இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

கருப்பு(3)	வெள்ளை(2)+சிவப்பு(4)=6	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
1	2	$3C_1.6C_2 = 3 \times \frac{6.5}{1.2} = 3.15 = 45$
2	1	$3C_2.6C_1 = 3.6 = 18$
3	0	$3C_3.6C_0 = 1.1 = 1$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை		64

26.EXAMINATION என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைக் கொண்டு எத்தனை 4 எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?
மொத்த எழுத்துகள்= 11; A −ன் எண்ணிக்கை= 2; I −ன் எண்ணிக்கை= 2 N −ன் எண்ணிக்கை= 2; வெவ்வேறான எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை= 5

எழுத்துகளின் வாய்ப்புகள்	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
E, X, A, M, I, N, T, O இல் இருந்து 4 வெவ்வேறான எழுத்துகள்	$8P_4 = 8.7.6.5 = 1680$
AA, II, NN −இல் இருந்து 2 சோடி	$3C_2 \times \frac{4!}{2!.2!} = \frac{3.2}{1.2} \times \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 18$
AA, II, NN −இல் இருந்து 1 சோடி, E, X, M, T, O, (A/I/N), (A/I/N) −இல் இருந்து 2 எழுத்துகள்	$3C_1 \times 7C_2 \times \frac{4!}{2!} = 3 \times \frac{7.6}{1.2} \times \frac{4.3.2.1}{2.1} = 756$
மொத்த சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை	2454

27.15 புள்ளிகளில் 7 புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிலும் மற்றும் மீதமுள்ள 8 புள்ளிகள் மற்றொரு இணைக்கோட்டிலும்

அமைந்துள்ளது எனில் இந்த 15 புள்ளிகளைக் கொண்ட எத்தனை முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்?

முக்கோணம் உருவாக்க 3 புள்ளிகள் தேவை.

15 புள்ளிகளிலிருந்து 3 புள்ளிகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை= $15C_3 = \frac{15.14.13}{1.2.3} = 455$

7 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளதால் $7C_3$ முக்கோணங்கள் வரைய இயலாது.

8 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளதால் $8C_3$ முக்கோணங்கள் வரைய இயலாது.

தேவையான முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை

$= 15C_3 - [7C_3 + 8C_3]$

$= \frac{15.14.13}{1.2.3} - \left[\frac{7.6.5}{1.2.3} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\right]$

$= 455 - [35 + 56] = 455 - 91 = 364$

28.ஒரு தளத்தில் 11 புள்ளிகள் உள்ளன. இவற்றில் 4 புள்ளிகளைத் தவிர மற்ற எந்த 3 புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையவில்லை எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

(i) இப்புள்ளிகளில் ஒரு சோடி புள்ளிகளினால் அமையும் கோடுகள் எத்தனை?

(ii) இந்த புள்ளிகளை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டு எத்தனை முக்கோணங்களை அமைக்கலாம்?

(i)ஒரு கோடு வரைய 2 புள்ளிகள் தேவை.

11 புள்ளிகளைக் கொண்டு வரையப்படும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை= $11C_2 = \frac{11.10}{1.2} = 55$

ஒரே கோட்டில் உள்ள 4 புள்ளிகளைக் கொண்டு உருவாகும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை= $4C_2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$

ஒரே கோட்டில் உள்ள 4 புள்ளிகளைக் கொண்டு 1 கோடு வரையலாம்.

தேவையான கோடுகளின் எண்ணிக்கை= $55 - 6 + 1 = 50$

(ii) முக்கோணம் உருவாக்க 3 புள்ளிகள் தேவை.

11 புள்ளிகளிலிருந்து 3 புள்ளிகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை= $11C_3 = \frac{11.10.9}{1.2.3} = 165$

4 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளதால் $4C_3 = 4$ முக்கோணங்கள் வரைய இயலாது.

தேவையான முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை= $165 - 4 = 161$

கணிதத்தொகுத்தறிதல் படிநிலைகள்

(i)P(1) என்பது உண்மை.

(ii)P(k) என்பது உண்மை எனக்கொள்க.

(iii)P(k+1) என்பது உண்மை.

(iv)கணிதத்தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி, எல்லா முழு எண்கள் $n \geq 1$ −க்கும் கூற்று உண்மையாகும்.

5.ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்

1.$(x + a)^n$ −ன் விரிவாக்கத்தில் இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது உறுப்புகள் முறையே 240, 720 மற்றும் 1080 எனில் x, a மற்றும் n −ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$T_{r+1} = nC_r a^{n-r} b^r$$

$T_2 = 240 \Rightarrow T_{1+1} = 240 \Rightarrow nC_1 x^{n-1} a^1 = 240$

$\Rightarrow n x^{n-1} a^1 = 240 \rightarrow (1)$

$T_3 = 720 \Rightarrow T_{2+1} = 240 \Rightarrow nC_2 x^{n-2} a^2 = 720$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2 = 720 \rightarrow (2)$

$T_4 = 1080 \Rightarrow T_{3+1} = 1080 \Rightarrow nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}a^3}{1.2.3} = 1080 \rightarrow (3)$

$(2) \div (1) \Rightarrow \frac{\frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2}{nC_1 x^{n-1} a^1} = 3 \Rightarrow \frac{(n-1)}{2} . \frac{a}{x} = 3$

$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{6}{n-1} \rightarrow (4)$

$(3) \div (2) \Rightarrow \frac{\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}a^3}{1.2.3}}{\frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{(n-2)x^{n-3}a^3}{3}}{x^{n-2}a^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \rightarrow (5)$

(4) மற்றும் (5) இல் இருந்து, $\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$

$\Rightarrow 12(n-2) = 9(n-1) \Rightarrow 12n - 24 = 9n - 9$

$\Rightarrow 12n - 9n = -9 + 24 \Rightarrow 3n = 15 \Rightarrow \boxed{n = 5}$

$n = 5$ என சமன் (1) மற்றும் (4) இல் பிரதியிடுக,

$(1) \Rightarrow 5x^4 a = 240 \rightarrow (6)$

$(4) \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow (7)$

$(6) \div (7) \Rightarrow \frac{5x^4 a}{\frac{a}{x}} = \frac{240}{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5x^5 = 160 \Rightarrow x^5 = 32$

$\Rightarrow x^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$n = 5$ மற்றும் $x = 2$ என சமன் (4) இல் பிரதியிடுக,

$\frac{a}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{a = 3}$

2. $(x^2 + \sqrt{1-x^2})^5 + (x^2 - \sqrt{1-x^2})^5$ விரிவுபடுத்துக.

$(x^2 + \sqrt{1-x^2})^5$ −க்கு பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் 6வது வரிசை $\boxed{1a^5 \quad 5a^4b \quad 10a^3b^2 \quad 10a^2b^5 \quad 5ab^4 \quad 1b^5}$

$(x^2 - \sqrt{1-x^2})^5$ −க்கு பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் 6வது வரிசை $\boxed{1a^5 \quad -5a^4b \quad 10a^3b^2 \quad -10a^2b^5 \quad 5ab^4 \quad -1b^5}$

$\left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2 - \sqrt{1-x^2}\right)^5 =$

$\boxed{2a^5 \quad 20a^3b^2 \quad 10ab^4}$

$= 2(x^2)^5 + 20\left[(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] + 10\left[(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4\right]$

$= 2x^{10} + 20x^6(1-x^2) + 10x^2(1-x^2)^2$

$= 2[x^{10} + 10x^6(1-x^2) + 5x^2(1-x^2)^2]$

$= 2[x^{10} + 10x^6 - 10x^8 + 5x^2(1 - 2x^2 + x^4)]$

$= 2[x^{10} + 10x^6 - 10x^8 + 5x^2 - 10x^4 + 5x^6]$

$= 2[x^{10} - 10x^8 + 15x^6 - 10x^4 + 5x^2]$

3.எல்லா மிகை முழு எண் n −க்கும் $6^n - 5n$ ஐ 25 ஆல் வகுக்க மீதி 1 என்பதை ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் நிறுவுக.

$\boxed{(1+x)^n = nC_0 + nC_1 x + nC_2 x^2 + \cdots . + nC_n x^n, n \in N}$

$6^n = (1+5)^n$

$= nC_0 + nC_1 5 + nC_2 5^2 + nC_3 5^3 + \cdots . + nC_n 5^n$

$= 1 + 5n + 5^2(nC_2 + 5nC_3 + \cdots + nC_n 5^{n-2})$

$6^n - 5n = 1 + 5n + 25(nC_2 + 5nC_3 + \cdots + nC_n 5^{n-2}) - 5n$

$= 1 + 25(nC_2 + 5nC_3 + \cdots + nC_n 5^{n-2})$

∴ எல்லா மிகை முழு எண் n −க்கும் $6^n - 5n$ ஐ 25 ஆல் வகுக்க மீதி 1 ஆகும்.

4. 7^{400} −ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்களைக் காண்க.

$7^{400} = 7^{2\times200} = (7^2)^{200} = (49)^{200} = (50-1)^{200}$

$\boxed{(a+b)^n = nC_0 a^n b^0 + nC_1 a^{n-1} b^1 + nC_3 a^{n-2} b^2 + \cdots . + nC_n}$

இங்கு $a = 50, b = -1, n = 200$

$(50-1)^{200}$

$= 50^{200} + 200C_1(50)^{299}(-1)$

$+ 200C_2(50)^{298}(-1)^2 + .. + 200C_{299}(50)^1(-1)^{299}$

$+ 200C_{200}(50)^0(-1)^{300}$

$= 50^{200} - 200(50)^{299} + \cdots - 200(50) + 1$

கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் 01 ஆகும்.

5. $(x^2 - \frac{1}{x^3})^6$ −ன் விரிவில் x^6 மற்றும் x^2 −ன் கெழுக்களைக் காண்க.

$$\boxed{T_{r+1} = nC_r a^{n-r} b^r}$$

$a = x^2, b = -\frac{1}{x^3}, n = 6$

$T_{r+1} = 6C_r (x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r = 6C_r (x)^{12-2r} \frac{(-1)^r}{(x)^{3r}}$

$= 6C_r(x)^{12-2r}(-1)^r(x)^{-3r}$
$= 6C_r(-1)^r(x)^{12-2r-3r} = 6C_r(-1)^r(x)^{12-5r}$
கணக்கின்படி, $(x)^{12-5r} = x^6 \Longrightarrow 12-5r = 6 \Longrightarrow 5r = 6 \Longrightarrow$
$r = \frac{6}{5}$ (இயலாது)
$\therefore x^6$ − ன் கெழு இல்லை.
கணக்கின்படி, $(x)^{12-5r} = x^2 \Longrightarrow 12-5r = 2 \Longrightarrow 5r = 10$
$\Longrightarrow r = 2$
x^2 −ன் கெழு= $6C_r(-1)^r == 6C_2(-1)^2 = \frac{6.5}{1.2}(1) = 15$

6. $(1+x^3)^{50}(x^2+\frac{1}{x})^5$ −ன் விரிவில் x^4 −ன் கெழுவைக் காண்க.

$(1+x^3)^{50}(x^2+\frac{1}{x})^5 = (1+x^3)^{50}(\frac{x^3+1}{x})^5 = (1+x^3)^{50}(1+x^3)^5x^{-5} = (1+x^3)^{55}x^{-5}$
$(1+x^3)^{55}$ −இல் $a = 1, b = x^3, n = 55$
$\boxed{T_{r+1} = nC_ra^{n-r}b^r} = 55C_r(1)^{55-r}(x^3)^r = 55C_r(1)^{55-r}x^{3r}$
$(1+x^3)^{55}x^{-5} = 55C_r(1)^{55-r}x^{3r}x^{-5} = [55C_r(1)^{55-r}]x^{3r-5}$
$x^{3r-5} = x^4 \Longrightarrow 3r-5 = 4 \Longrightarrow 3r = 9 \Longrightarrow \boxed{r = 3}$
x^4 −ன் கெழு= $55C_r(1)^{55-r} = 55C_3(1)^{55-3} = \frac{55.54.53}{1.2.3} \times 1 = 26235$

7. $(2x^3 - \frac{1}{3x^2})^5$ −ன் விரிவில் மாறிலி உறுப்பைக் காண்க.
$$\boxed{T_{r+1} = nC_ra^{n-r}b^r}$$
$a = 2x^3, b = -\frac{1}{3x^2}, n = 5$
$T_{r+1} = 5C_r(2x^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^r = 5C_r(2)^{5-r}(x)^{15-3r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{-2r}$
$= 5C_r(2)^{5-r}(-\frac{1}{3})^r(x)^{15-3r-2r} = 5C_r(2)^{5-r}(-\frac{1}{3})^r(x)^{15-5r}$
கணக்கின்படி, $(x)^{15-5r} = x^0 \Longrightarrow 15-5r = 0 \Longrightarrow 5r = 15$
$\Longrightarrow \boxed{r = 3}$
மாறிலி உறுப்பு= $5C_r(2)^{5-r}(-\frac{1}{3})^r == 5C_3(2)^{5-3}(-\frac{1}{3})^3 = \frac{5.4.3}{1.2.3} \times 4 \times \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{40}{27}$

8. 3^{600} −ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்களைக் காண்க.
$3^{600} = 3^{2\times300} = (3^2)^{300} = (9)^{300} = (10-1)^{300}$
$$\boxed{(a+b)^n = nC_0a^nb^0 + nC_1a^{n-1}b^1 + nC_3a^{n-2}b^2 + \cdots + nC_na^0b^n}$$
இங்கு $a = 10, b = -1, n = 300$
$(10-1)^{300}$
$= 10^{300} + 300C_1(10)^{299}(-1) + 300C_2(10)^{298}(-1)^2 + .. + 300C_{299}(10)^1(-1)^{299} + 300C_{300}(10)^0(-1)^{300}$
$= 10^{300} - 300(10)^{299} + \cdots - 300(10) + 1$
கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் 01 ஆகும்.

9. எல்லா மிகை முழு எண் n −க்கும் $9^{n+1} - 8n - 9$ என்பது 64 ஆல் வகுபடும் என ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் நிறுவுக.
$$\boxed{(1+x)^n = nC_0 + nC_1x + nC_2x^2 + \cdots . + nC_nx^n}$$
$9^{n+1} = (1+8)^{n+1} = (n+1)C_0 + (n+1)C_18 + (n+1)C_18^2 + (n+1)C_28^3 + .. + 8^{n+1}$
$= 1 + (n+1)8 + 8^2[(n+1)C_1 + (n+1)C_28 + .. + 8^{n+1-2}]$
$= 1 + 8n + 8 + 64[(n+1)C_1 + (n+1)C_28 + .. + 8^{n-1}]$
$= 9 + 8n + 64[(n+1)C_1 + (n+1)C_28 + .. + 8^{n-1}]$
$9^{n+1} - 8n - 9 = 9 + 8n + 64[(n+1)C_1 + (n+1)C_28 + .. + 8^{n-1}] - 8n - 9 \quad = 64[(n+1)C_1 + (n+1)C_28 + .. + 8^{n-1}]$
$\therefore$ எல்லா மிகை முழு எண் n −க்கும் $9^{n+1} - 8n - 9$ என்பது 64 ஆல் வகுபடும்.

10. a மற்றும் b என்பவை வெவ்வேறு முழுக்கள் எண்கள் எனில், n என்ற மிகை முழு எண்ணிற்கு $a^n - b^n$ −ன் ஒரு காரணி $a-b$ என நிறுவுக.(குறிப்பு $a^n = (a-b+b)^n$ என எடுத்து நிறுவுக)
$a^n = [(a-b)+b]^n$
$= nC_0(a-b)^n + nC_1(a-b)^{n-1}b + nC_2(a-b)^{n-2}b^2 + \cdots + nC_{n-1}(a-b)b^{n-1} + nC_nb^n$
$= nC_0(a-b)^n + nC_1(a-b)^{n-1}b + nC_2(a-b)^{n-2}b^2 + \cdots + nC_{n-1}(a-b)b^{n-1} + b^n$
$a^n - b^n = nC_0(a-b)^n + nC_1(a-b)^{n-1}b + nC_2(a-b)^{n-2}b^2 + \cdots + nC_{n-1}(a-b)b^{n-1} + b^n - b^n$
$a^n - b^n = nC_0(a-b)^n + nC_1(a-b)^{n-1}b + nC_2(a-b)^{n-2}b^2 + \cdots + nC_{n-1}(a-b)b^{n-1}$
$= (a-b)[nC_0(a-b)^{n-1} + nC_1(a-b)^{n-2}b + nC_2(a-b)^{n-3}b^2 + \cdots + nC_{n-1}b^{n-1}]$
இது $(a-b)$ஆல் வகுபடும்.
$\therefore a^n - b^n$ −ன் ஒரு காரணி $(a-b)$ ஆகும்.

11. $(a+x)^n$ −ன் விரிவில் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் விகிதம் $1:7:42$ எனில், n −ன் மதிப்பைக் காண்க.
தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் கெழுக்கள் nC_{n-r}, nC_r, nC_{n+r} என்க.
$nC_{r-1} : nC_r : nC_{r+1} = 1:7:42$ (தரவு)
$nC_{r-1} : nC_r = 1:7 \Longrightarrow \frac{nC_{r-1}}{nC_r} = \frac{1}{7} \Longrightarrow \frac{n!/(n-r+1)!(r-1)!}{n!/(n-r)!r!} = \frac{1}{7} \Longrightarrow$
$\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} \times \frac{(n-r)!r!}{n!} = \frac{1}{7}$
$\Longrightarrow \frac{1}{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!} \times \frac{(n-r)!r.(r-1)!}{1} = \frac{1}{7}$
$\Longrightarrow \frac{r}{n-r+1} = \frac{1}{7} \Longrightarrow 7r = n-r+1 \Longrightarrow n-8r+1 = 0 \to (1)$
$nC_r : nC_{r+1} = 7:42 \Longrightarrow \frac{nC_r}{nC_{r+1}} = \frac{7}{42} \Longrightarrow \frac{n!/(n-r)!r!}{n!/(n-r-1)!(r+1)!} = \frac{1}{6}$
$\Longrightarrow \frac{n!}{(n-r)(n-r-1)!r!} \times \frac{(n-r-1)!(r+1)r!}{n!} = \frac{1}{6}$
$\Longrightarrow \frac{r+1}{n-r} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 6r+6 = n-r \Longrightarrow n-7r-6 = 0 \to (2)$
$(1)-(2) \Longrightarrow -r+7 = 0 \Longrightarrow \boxed{r = 7}$
$(1) \Longrightarrow n-8(7)+1 = 0 \Longrightarrow n-56+1 = 0 \Longrightarrow n-55 = 0$
$\Longrightarrow \boxed{n = 55}$

12. $(1+x)^n$ −ன் விரிவில் 5 ஆவது, 6 ஆவது மற்றும் 7 ஆவது உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனில், n −ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
$$\boxed{T_{r+1} = nC_ra^{n-r}b^r}$$
5 ஆவது உறுப்பின் கெழு= nC_4
6 ஆவது உறுப்பின் கெழு= nC_5
7 ஆவது உறுப்பின் கெழு= nC_6
nC_4, nC_5, nC_6 ஒரு கூட்டுத்தொடர்
$[\because a, b, c$ ஒரு $A.P \Longrightarrow 2b = a+c$]
$\Longrightarrow 2 \times nC_5 = nC_4 + nC_6 \Longrightarrow 2 = \frac{nC_4}{nC_5} + \frac{nC_6}{nC_5}$
$\Longrightarrow 2 = \frac{5}{n-5+1} + \frac{n-6+1}{6} \qquad [\frac{nC_k}{nC_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}]$
$\Longrightarrow 2 = \frac{5}{n-4} + \frac{n-5}{6} \Longrightarrow 2 = \frac{30+(n-5)(n-4)}{6(n-4)}$
$\Longrightarrow 12(n-4) = 30 + n^2 - 9n + 20$
$\Longrightarrow 12n - 48 = n^2 - 9n + 50 \Longrightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$
$\Longrightarrow (n-7)(n-14) = 0 \Longrightarrow n = 7, 14$

13. $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{2n!}{(n!)^2}$ என நிறுவுக.
$(1+x)^n = nC_0 + nC_1x + nC_2x^2 + \cdots . + nC_nx^n \to (1)$
$(x+1)^n = x^n + nC_1x + nC_1x^2 + \cdots + nC_nx^n \to (2)$
$(1) \times (2) \Longrightarrow$
$(1+x)^{2n} = (nC_0 + nC_1x + nC_2x^2 + \cdots . + nC_nx^n)(x^n +$

$nC_1x + nC_1x^2 + \cdots + nC_nx^n)$
இருபுறமும் x^n –ன் கெழுவை சமன்படுத்த,
$nC_0 + (nC_1)^2 + (nC_2)^2 + \cdots + (nC_n)^2 = 2nC_n$
$[\because nC_0 = 1 = 1^2 = (nC_0)^2]$
$\Rightarrow (nC_0)^2 + (nC_1)^2 + (nC_2)^2 + \cdots + (nC_n)^2 = \frac{2n!}{(2n-n)!n!} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$
$\Rightarrow C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{2n!}{(n!)^2}$

14.ஒரு இசைத் தொடர்முறையின் ஐந்தாவது மற்றும் ஒன்பதாவது உறுப்புகள் முறையே $\frac{1}{19}$ மற்றும் $\frac{1}{35}$ எனில், அந்த தொடர்முறையின் பன்னிரண்டாவது உறுப்பினைக் காண்க.

$\boxed{T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}}$
$T_5 = \frac{1}{19} \Rightarrow \frac{1}{a+4d} = \frac{1}{19} \Rightarrow a + 4d = 19 \rightarrow (1)$
$T_9 = \frac{1}{35} \Rightarrow \frac{1}{a+8d} = \frac{1}{35} \Rightarrow a + 8d = 35 \rightarrow (2)$
$(2) - (1) \Rightarrow 4d = 16 \Rightarrow \boxed{d = 4}$
$(1) \Rightarrow a + 4(4) = 19 \Rightarrow a + 16 = 19 \Rightarrow \boxed{a = 3}$
$T_{12} = \frac{1}{a+11d} = \frac{1}{3+11(4)} = \frac{1}{47} \Rightarrow \boxed{T_{12} = \frac{1}{47}}$

15. $4, A_1, A_2, \ldots A_7, 7$ என்ற தொடர்முறை கூட்டுத் தொடர்முறையாக இருக்குமாறு $A_1, A_2, \ldots A_7$ என்ற ஏழு எண்களைக் காண்க. மேலும் $12, G_1, G_2, G_3, G_4, \frac{3}{8}$ என்ற தொடர்முறை பெருக்குத் தொடர்முறையாக இருக்குமாறு G_1, G_2, G_3, G_4 என்ற நான்கு எண்களைக் காண்க.

$4, A_1, A_2, \ldots A_7, 7$ என்ற AP –இல் $a = 4, T_9 = 7$
$\Rightarrow a + 8d = 7 \Rightarrow 4 + 8d = 7 \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{8}}$
$A_1, A_2, \ldots A_7 = (a + d), (a + 2d), (a + 3d), (a + 4d), (a + 5d), (a + 6d), (a + 7d)$
$= \left(4 + \frac{3}{8}\right), \left(4 + 2.\frac{3}{8}\right), \left(4 + 3.\frac{3}{8}\right), \left(4 + 4.\frac{3}{8}\right), \left(4 + 5.\frac{3}{8}\right), \left(4 + 6.\frac{3}{8}\right), \left(4 + 7.\frac{3}{8}\right)$
$= \frac{35}{8}, \frac{38}{8}, \frac{41}{8}, \frac{44}{8}, \frac{47}{8}, \frac{50}{8}, \frac{53}{8} = \boxed{4\frac{3}{8}, 4\frac{6}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{4}{8}, 5\frac{7}{8}, 6\frac{2}{8}, 6\frac{5}{8}}$
$12, G_1, G_2, G_3, G_4, \frac{3}{8}$ என்ற GP –இல் $a = 12, T_6 = \frac{3}{8}$
$\Rightarrow ar^5 = \frac{3}{8} \Rightarrow 12r^5 = \frac{3}{8} \Rightarrow r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
$\Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$
$G_1, G_2, G_3, G_4 = ar, ar^2, ar^3, ar^4$
$= 12\left(\frac{1}{2}\right), 12(\frac{1}{2})^2, 12(\frac{1}{2})^3, 12(\frac{1}{2})^4 = 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4} = \boxed{6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}}$

16.ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையின் 4 ஆவது, 5 ஆவது, 6 ஆவது உறுப்புகளின் பெருக்கல் 4096 மற்றும் 5 ஆவது, 6 ஆவது, 7 ஆவது உறுப்புகளின் பெருக்கல் 32768 எனில் அந்த பெருக்குத் தொடர்முறையின் முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$
4 ஆவது, 5 ஆவது, 6 ஆவது உறுப்புகள் முறையே ar^3, ar^4, ar^5 ஆகும்.
அவற்றின் பெருக்கல்பலன்= 4096
$\Rightarrow ar^3 \times ar^4 \times ar^5 = 4096 \Rightarrow a^3r^{12} = 4096 \rightarrow (1)$
5 ஆவது, 6 ஆவது, 7 ஆவது உறுப்புகள் முறையே ar^4, ar^5, ar^6 ஆகும்.
அவற்றின் பெருக்கல்பலன்= 32768
$\Rightarrow ar^4 \times ar^5 \times ar^6 = 32768$
$\Rightarrow a^3r^{15} = 32768 \rightarrow (2)$
$(2 \div (1) \Rightarrow \frac{ar^{15}}{ar^{12}} = \frac{32768}{4096} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow \boxed{r = 2}$
$r = 2$ என சமன் (1)இல் பிரதியிடுக, $a^3(2)^{12} = 4096$
$\Rightarrow 4096a^3 = 4096 \Rightarrow \boxed{a = 1}$
$\because r > 1, S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \Rightarrow S_8 = \frac{1(2^8-1)}{2-1} = 256 - 1; \boxed{S_8 = 255}$

17.ஏறுவரிசையில் பெருக்குத்தொடர் முறையில் உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கல் 5832. இரண்டாவது எண்ணுடன் 6 ஐயும் மூன்றாவது எண்ணுடன் 9 ஐயும் கூட்டக் கிடைக்கும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாக இருக்கும் எனில் பெருக்குத்தொடர் முறையின் அந்த மூன்று எண்களைக் காண்க.

தேவையான மூன்று எண்கள் $\frac{a}{r}, a, ar$ என்க.
பெருக்கல்= $5832 \Rightarrow \frac{a}{r} \times a \times ar = 5832 \Rightarrow a^3 = 18^3$
$\Rightarrow \boxed{a = 18}$
$\frac{a}{r}, a + 6, ar + 9$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் முறை.
$\Rightarrow 2(a + 6) = \frac{a}{r} + ar \quad [\because 2b = a + c]$
$\Rightarrow 2(18 + 6) = \frac{18}{r} + 18r + 9 \Rightarrow 48 = \frac{18+18r^2+9r}{r}$
$\Rightarrow 48r = 18 + 18r^2 + 9r$
$\Rightarrow 18r^2 - 39r + 18 = 0 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$
$\Rightarrow (2r - 3)(3r - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}}$
∴ அந்த மூன்று எண்கள்= $\frac{a}{r}, a, ar$
$case(i) a = 18, r = \frac{2}{3} \Rightarrow 27, 18, 12$
$case(ii) a = 18, r = \frac{3}{2} \Rightarrow 12, 18, 27$

18.இரு எண்களின் கூட்டுச் சராசரியானது, பெருக்குச் சராசரியை விட 10 அதிகமாகவும், இசைச் சராசரியை விட 16 அதிகமாகவும் இருக்குமானால் அந்த இரு எண்களைக் காண்க.

$AM = GM + 10 \rightarrow (1); AM = HM + 16 \rightarrow (2)$
(1), (2) இல் இருந்து, $GM + 10 = HM + 16$
$\Rightarrow \boxed{GM = HM + 6} \rightarrow (3)$
$GM^2 = AM \times HM \Rightarrow (HM + 6)^2 = (HM + 16)HM$
$\Rightarrow HM^2 + 12HM + 36 = HM^2 + 16HM$
$\Rightarrow 16HM - 12HM = 36 \Rightarrow 4HM = 36$
$\Rightarrow \boxed{HM = 9}$
$(3) \Rightarrow GM = 9 + 6 = 15 \Rightarrow \sqrt{ab} = 15 \Rightarrow ab = 225 \rightarrow (4)$
$(1) \Rightarrow AM = 15 + 10 = 25 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 25 \Rightarrow a + b = 50$
$\Rightarrow b = 50 - a \rightarrow (5)$
(4), (5) இல் இருந்து, $a(50 - a) = 225 \Rightarrow 50a - a^2 = 225$
$\Rightarrow a^2 - 50a + 225 = 0 \Rightarrow (a - 45)(a - 5) = 0$
$\Rightarrow \boxed{a = 45, 5}$
$a = 45, 5$ என சமன் (5)இல் பிரதியிடுக, $\Rightarrow \boxed{b = 5, 45}$
∴ அந்த இரு எண்கள் 45,5 ஆகும்.

19. a, b, c என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையாக இருந்து $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$ எனவும் இருக்குமானால் x, y, z என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகும் என நிறுவுக.

a, b, c என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறை
$\Rightarrow b^2 = ac \rightarrow (1)$
$a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z} = k$ என்க.$\Rightarrow a = k^x, b = k^y, c = k^z$
$(1) \Rightarrow (k^y)^2 = k^x \times k^y \Rightarrow (k)^{2y} = (k)^{x+z} \Rightarrow 2y = x + z$
$\therefore x, y, z$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகும்.

20.ஒரு பெருக்குத் தொடரின் k ஆவது உறுப்பு t_k எனில், k –ன் எல்லா மிகை முழு எண்ணுக்கும் t_{n-k}, t_n, t_{n+k} என்பனவும் ஒரு பெருக்குத் தொடர் என நிறுவுக.

$t_n = ar^{n-1}; \quad t_{n-k} = ar^{n-k-1}; \quad t_{n+k} = ar^{n+k-1}$
$\frac{t_n}{t_{n-k}} = \frac{ar^{n-1}}{ar^{n-k-1}} = r^k \quad ; \quad \frac{t_{n+k}}{t_n} = \frac{ar^{n+k-1}}{ar^{n-1}} = r^k$

$\because \frac{t_n}{t_{n-k}} = \frac{t_{n+k}}{t_n} = r^k \Longrightarrow t_{n-k}, t_n, t_{n+k}$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் ஆகும்.

21. $(q-r)x^2 + (r-q)x + p - q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானவை எனில் p, q, r என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகும் என நிறுவுக.

$(q-r)x^2 + (r-q)x + p - q = 0$

$\Longrightarrow (q-r)x^2 + [r-p+q-q]x + (p-q) = 0$

$\Longrightarrow (q-r)x^2 - [-r+p-q+q]x + (p-q) = 0$

$\Longrightarrow (q-r)x^2 - [(q-r)+(p-q)]x + (p-q) = 0$

$\Longrightarrow (q-r)x^2 - (q-r)x - (p-q)x + (p-q) = 0$

$\Longrightarrow (q-r)x[x-1] - (p-q)[x-1] = 0$

$\Longrightarrow (x-1)[x(q-r) - (p-q)] = 0$

$\Longrightarrow \boxed{x = 1\,; x = \frac{p-q}{q-r}}$

$\frac{p-q}{q-r} = 1$ (∵மூலங்கள் சமம்)

$\Longrightarrow p - q = q - r \Longrightarrow 2q = p + r$

$\therefore p, q, r$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகும்.

22.ஒரு பெருக்குத்தொடரின் p, q மற்றும் r ஆவது உறுப்புகள் முறையே a, b மற்றும் c எனில் $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$ என நிறுவுக.

$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$

$t_p = a \Longrightarrow AR^{p-1} = a$

இருபுறமும் log எடுக்க,$\Longrightarrow \log a = \log(AR^{p-1})$

$\Longrightarrow \log a = \log A + \log R^{p-1}$

$\Longrightarrow \log a = \log A + (p-1)\log R$

$\Longrightarrow (q-r)\log a = (q-r)\log A + (q-r)(p-1)\log R \to (1)$

$t_q = b \Longrightarrow AR^{q-1} = b$

இருபுறமும் log எடுக்க,$\Longrightarrow \log b = \log(AR^{q-1}) \Longrightarrow \log b = \log A + \log R^{q-1}$

$\Longrightarrow \log b = \log A + (q-1)\log R$

$\Longrightarrow (r-p)\log b = (r-p)\log A + (r-p)(q-1)\log R \to (2)$

$t_r = c \Longrightarrow AR^{r-1} = c$

இருபுறமும் log எடுக்க,$\Longrightarrow \log c = \log(AR^{r-1}) \Longrightarrow \log c = \log A + \log R^{r-1}$

$\Longrightarrow \log c = \log A + (r-1)\log R$

$\Longrightarrow (p-q)\log a = (p-q)\log A + (p-q)(p-1)\log R \to (3)$

$(1) + (2) + (3) \Longrightarrow$

$(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$

23. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots$என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$t_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \times \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}$

$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}^2 - \sqrt{k+1}^2} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$

$t_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots . + t_n$

$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \sqrt{n+1} - 1$

24.ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் 10 உறுப்புகளின் கூடுதல் 52 மற்றும் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் 77 எனில் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]}$

$S_{10} = 52 \Longrightarrow \frac{10}{2}[2a + (10-1)d] = 52$

$\Longrightarrow 5[2a + 9d] = 52 \Longrightarrow 10a + 45d = 52 \to (1)$

$S_{15} = 77 \Longrightarrow \frac{15}{2}[2a + (15-1)d] = 77$

$\Longrightarrow 15[2a + 14d] = 77 \times 2$

$\Longrightarrow 30a + 210d = 154 \to (2)$

$(1) \times 3 - (2) \Longrightarrow -75d = 2 \Longrightarrow \boxed{d = -\frac{2}{75}}$

$(1) \Longrightarrow 10a + 45\left(-\frac{2}{75}\right) = 52 \Longrightarrow 10a = 52 + \frac{90}{75}$

$\Longrightarrow 10a = \frac{798}{15} \Longrightarrow a = \frac{798}{15 \times 10} \;\Longrightarrow \boxed{a = \frac{133}{25}}$

$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\left(\frac{133}{25}\right) + (20-1)\left(-\frac{2}{75}\right)\right]$

$= 10\left[\frac{266}{25} + 19\left(-\frac{2}{75}\right)\right] = 10\left[\frac{266}{25}\left(-\frac{38}{75}\right)\right]$

$= 10\left[\frac{798-38}{75}\right] = 10 \times \frac{760}{75} = \frac{304}{3} \quad \boxed{S_{20} = \frac{304}{3}}$

25. $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \cdots$.என்ற தொடரின் முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$t_k = \frac{1^3+2^3+3^3+..+k^3}{1+3+5+\cdots(2k-1)} = \frac{\sum k^3}{k^2} = \frac{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}{k^2} = \frac{k^2(k+1)^2}{4 \times k^2} = \frac{(k+1)^2}{4}$

$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{17} = \frac{2^2}{4} + \frac{3^2}{4} + \frac{4^2}{4} + .. + \frac{18^2}{4} = \frac{1}{4}[2^2 + 3^2 + 4^2 + .. + 18^2]$

$= \frac{1}{4}[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + .. + 18^2 - 1^2] = \frac{1}{4}\left[\frac{18 \times 19 \times 37}{6} - 1\right]$

$\because \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{4}[2109 - 1] = \frac{1}{4} \times 2108 = 527$

26. $8 + 88 + 888 + 8888 + \cdots$. என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$8 + 88 + 888 + 8888 + \cdots$.

$= 8[1 + 11 + 111 + \cdots n] = \frac{8}{9}[9 + 99 + 999 + \cdots n]$

$= \frac{8}{9}[10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \cdots n]$

$= \frac{8}{9}[(10 + 100 + 1000 + .. n) - (1 + 1 + 1 + \cdots n)]$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{a(r^n - 1)}{r-1} - n\right]; a = 10, r = 10$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10-1} - n\right] = \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$

$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$

27. $1 + (1+4) + (1+4+4^2) + \cdots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$t_k = 1 + 4 + 4^2 + \cdots . + 4^{k-1}$, இங்கு $a = 1, r = 4$

$t_k = \frac{1(4^k - 1)}{4-1} = \frac{4^k - 1}{3} \quad \left[\because \frac{a(r^n-1)}{r-1}\right]$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k - 1}{3} = \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} 4^k - (1 + 1 + 1 + \cdots n)\right]$

$= \frac{1}{3}[(4 + 4^2 + 4^3 + \cdots n) - n]$

$= \frac{1}{3}[(4 + 4^2 + 4^3 + \cdots n) - n] = \frac{1}{3}\left[\frac{a(r^n - 1)}{r-1} - n\right]$, இங்கு $a = 4, r = 4$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{4(4^n - 1)}{4-1} - n\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{4(4^n - 1)}{3} - n\right] = \frac{4}{9}(4^n - 1) - \frac{n}{3}$

28. $\sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{243} + \cdots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $435\sqrt{3}$ எனில், n –ன் மதிப்பு காண்க.

$\sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{243} + \cdots = \sqrt{3} + \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{81 \times 3} + \cdots$

$= \sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + ..$

இங்கு $a = \sqrt{3}, d = 4\sqrt{3}$

$S_n = 435\sqrt{3} \Longrightarrow \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 435\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \frac{n}{2}[2\sqrt{3} + (n-1)4\sqrt{3}] = 435\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \frac{n}{2} \times 2\sqrt{3}[1 + (n-1)2] = 435\sqrt{3}$

$\Longrightarrow n[1 + 2n - 2] = 435 \Longrightarrow n(2n-1) = 435$

$\Longrightarrow 2n^2 - n - 435 = 0 \Longrightarrow (n-15)(2n+29) = 0$

$\Rightarrow \boxed{n=15}$ (அ) $n=-\frac{29}{2}$ (தீர்வு அல்ல)

29.ஒருவர் ரூ.3250 என்ற தொகையை முதல் மாதம் ரூ.20-ம் அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ.15 அதிகப்படுத்தியும் செலுத்தி வருகின்றார் எனில் அவர் அந்தத் தொகையை முழுமையாக திருப்பிச் செலுத்த எத்தனை மாதங்கள் ஆகும்?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $a=20, d=15, S_n = 3250, n=?$

$S_n = 3250 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 3250$

$\Rightarrow \frac{n}{2}[2(20)+(n-1)15] = 3250$

$\Rightarrow \frac{n}{2}[40+15n-15] = 3250 \Rightarrow \frac{n}{2}[15n+25] = 3250$

$\Rightarrow 15n^2+25n = 6500$

$\Rightarrow 15n^2+25n-6500 = 0; \div 5$

$\Rightarrow 3n^2+5n-1300 = 0 \Rightarrow (n-20)(3n+65) = 0$

$\Rightarrow \boxed{n=15}$ (அ) $n=-\frac{65}{3}$ (தீர்வு அல்ல)

30.ஒரு பந்தயத்தில் 20 பந்துகள் ஒவ்வொன்றும் 4மீ இடைவெளியில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் வைக்கப்படுகின்றன. முதல் பந்திற்கும் தொடக்கப்புள்ளிக்கும் உள்ள இடைவெளி 24மீ. ஒரு போட்டியாளர் ஒரு நேரத்தில் ஒரு பந்து வீதம் எல்லா பந்துகளையும் தொடக்கப்புள்ளிக்கு கொண்டுவந்து சேர்க்க எவ்வளவு தூரம் ஓட வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $a=24, d=4$

$$\boxed{t_n = a+(n-1)d}$$

$\Rightarrow t_{20} = a+19d = 24+19(4) = 24+76 = 100$

24, 28, 32, …. ,100 ஒரு கூட்டத்தொடர்

மொத்தம் ஓட வேண்டிய தூரம்

$= 2(24)+2(28)+2(32)+\cdots+2(100)$

$= 2[24+28+32+\cdots+100]$

$a=24, d=4, l=100, n=20$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

$= 2\times\frac{20}{2}[2(24)+(20-1)4] = 20[48+76] = 20\times 124$

$= 2480$மீ.

31.நுண்ணுயிர் வளர்ச்சியில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திற்கும் நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கையானது அதன் முந்தைய மணி நேரத்தில் உள்ளது போல் இரு மடங்காகிறது. ஆரம்பத்தில் 30 நுண்ணுயிர்கள் இருக்குமானால் 2 ஆவது, 4 ஆவது மற்றும் n ஆவது மணிநேர முடிவில் எத்தனை நுண்ணுயிர்கள் இருக்கும்.

ஆரம்பத்தில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை= 30

1 மணி நேர முடிவில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை$= 2\times 30$

2 மணி நேர முடிவில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை$= 2\times 2\times 30 = 2^2\times 30$

3 மணி நேர முடிவில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை$= 2\times 2\times 2\times 30 = 2^3\times 30$

4 மணி நேர முடிவில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை$= 2^4\times 30$

n ஆவது மணிநேர முடிவில் உள்ள நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கை$= 2^n\times 30$

32.ஒரு வங்கியில் செலுத்தப்பட்ட ரூ.500 ஆனது, 10% தொடர் வட்டி வீதத்தில், 10 ஆண்டுகளில் எவ்வளவாக மாறும்.

$P=500, r=10, n=10$

மொத்தத் தொகை $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^{10}$

$= 500(\frac{11}{10})^{10}$

33.ஒரு நகரத்தில் வைரஸ் நோயினால் ஏற்பட்ட சுகாதார கேட்டினால் மக்களின் இயல்பு வாழ்க்கை பாதிக்கப்பட்டிருந்தது. ஒவ்வொரு நாளும் அந்த நோய் தாக்கும் வைரஸ் கிருமிகள் ஒரு பெருக்குத்தொடர் முறையில் பரவி வருகிறது. இந்த தொற்று கிருமிகள் ஒவ்வொரு நாளும் அதன் முந்தைய நாளைப் போல் இருமடங்காக பெருகுகிறது. முதல் நாளில் அதன் எண்ணிக்கை 5 எனில், அந்த கிருமிகளின் எண்ணிக்கை எந்த நாளில் 1,50,000 −க்கு அதிகமாக இருக்கும் எனக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $a=5, r=2, S_n > 150000$ எனில் $n=?$

$S_n > 150000 \Rightarrow \frac{a(r^n-1)}{r-1} > 150000 \Rightarrow \frac{5(2^n-1)}{2-1} > 150000$

$\Rightarrow 5(2^n-1) > 150000 \Rightarrow 2^n-1 > 30000$

$\Rightarrow 2^n > 30001 \Rightarrow 2^{14} < 30001 < 2^{15}$

$\Rightarrow \boxed{n=15}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ −ன் மதிப்பு காண்க.

$a_n = \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+3)}$

$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+..+\left(\frac{1}{(n+2)}-\frac{1}{(n+3)}\right)$

$S_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$

$n\to\infty$ எனில் $\frac{1}{n+3}\to 0$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3}$

35. $\frac{1}{(3+2x)^2}$ ஐ x −ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவாக்கம் சரியாக இருப்பதற்கான x −ன் நிபந்தனையைக் காண்க.

$$\boxed{(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots}$$

$\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{[3(1+\frac{2x}{3})]^2} = \frac{1}{9}\left(1+\frac{2x}{3}\right)]^{-2}$

$= \frac{1}{9}[1-2\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{2(2+1)}{2!}\left(\frac{2x}{3}\right)^2-\frac{2(2+1)(2+2)}{3!}\left(\frac{2x}{3}\right)^3+\cdots]$

$= \frac{1}{9}\left[1-\frac{4}{3}x+\frac{2.3}{2}.\frac{4x^2}{9}-\frac{2.3.4}{1.2.3}.\frac{8x^3}{27}+\cdots\right]$

$= \frac{1}{9}\left[1-\frac{4}{3}x+\frac{4x^2}{3}-\frac{32x^3}{27}+\cdots\right]$

$= \frac{1}{9}-\frac{4}{27}x+\frac{4}{27}x^2-\frac{32}{243}x^3+\cdots, |x|<\frac{3}{2}$ $\quad [\because \left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |2x| < 3 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2}]$

36. x ஒரு பெரிய எண் எனில், $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ − ன் மதிப்பு தோராயமாக $\frac{1}{x^2}$ என நிறுவுக.

$$\boxed{(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots}$$

$\sqrt[3]{x^3+7} = (x^3+7)^{1/3} = \left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{1/3}$

$= x(1+\frac{7}{x^3})^{1/3}, \left|\frac{7}{x^3}\right| < 1$

$= x\left[1+\frac{1}{3}.\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\cdots\right]$

$= x\left[1+\frac{7}{3x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}.\frac{49}{x^6}+\cdots\right] = x\left[1+\frac{7}{3x^3}-\frac{49}{9x^6}+..\right]$

$= x+\frac{7}{3x^2}-\frac{49}{9x^5}+\cdots$

$\sqrt[3]{x^3+4} = (x^3+4)^{1/3} = \left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{1/3}$

$= x(1+\frac{4}{x^3})^{1/3}, \left|\frac{4}{x^3}\right| < 1$

$= x\left[1+\frac{1}{3}.\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\cdots\right]$

$= x\left[1+\frac{4}{3x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}.\frac{16}{x^6}+\cdots\right] = x\left[1+\frac{4}{3x^3}-\frac{16}{9x^6}+..\right]$

$= x+\frac{4}{3x^2}-\frac{16}{9x^5}+\cdots$

x ஒரு பெரிய எண் எனில்,$\frac{1}{x}$ மிகச் சிறிய எண்ணாக இருக்கும். எனவே $\frac{1}{x}$ −ன் உயர் அடுக்குகளை நீக்கலாம்.

$$\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}=x+\frac{7}{3x^2}-\left[x+\frac{4}{3x^2}\right]$$
$$=x+\frac{7}{3x^2}-x-\frac{4}{3x^2}=\frac{3}{3x^2}=\frac{1}{x^2}$$

37. x **ஒரு பெரிய எண் எனில்,** $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}$ **−ன் மதிப்பு தோராயமாக** $\frac{1}{x^2}$ **என நிறுவுக.**

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sqrt[3]{x^3+6}=(x^3+6)^{1/3}=\left[x^3\left(1+\frac{6}{x^3}\right)\right]^{1/3}$$
$$=x\left(1+\frac{6}{x^3}\right)^{1/3},\ \left|\frac{6}{x^3}\right|<1$$
$$=x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{6}{x^3}\right)^2+\cdots\right]$$
$$=x\left[1+\frac{2}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\cdot\frac{36}{x^6}+\cdots\right]=x\left[1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^6}+..\right]$$
$$=x+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^5}+\cdots$$
$$\sqrt[3]{x^3+3}=(x^3+3)^{1/3}=\left[x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)\right]^{1/3}$$
$$=x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{1/3},\ \left|\frac{3}{x^3}\right|<1$$
$$=x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{x^3}\right)^2+\cdots\right]$$
$$=x\left[1+\frac{1}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\cdot\frac{9}{x^6}+\cdots\right]=x\left[1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^6}+..\right]$$
$$=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}+\cdots$$

x ஒரு பெரிய எண் எனில், $\frac{1}{x}$ மிகச் சிறிய எண்ணாக இருக்கும். எனவே $\frac{1}{x}$ −ன் உயர் அடுக்குகளை நீக்கலாம்.

$$\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}=x+\frac{2}{x^2}-\left[x+\frac{1}{x^2}\right]=x+\frac{2}{x^2}-x-\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2}$$

38. x மிகச் சிறியது எனில், $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ என்பது தோராயமாக $1-x+\frac{x^2}{2}$ என நிறுவுக.

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}=(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$$
$$=\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2-\cdots\right]\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!}x^2-\cdots\right]$$
$$=\left[1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\cdots\right]\left[1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots\right]$$
$$=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^3}{16}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots$$
$$=1+\left(-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{3x^2}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{8}\right)\quad (\because x \text{ மிகச் சிறியது})$$
$$=1-x+\frac{x^2}{2}$$

39.பின்வரும் மடக்கைத் தொடரில் முதல் 4 உறுப்புகளைக் காண்க. $(i)\ \log\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ $(ii)\ \log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

(i) $$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]$$

$$\log\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)=2\left[3x+\frac{(3x)^3}{3}+\frac{(3x)^5}{5}+\frac{(3x)^7}{7}+\cdots\right]$$
$$=2\left[3x+9x^3+\frac{243x^5}{5}+\frac{2187x^7}{7}+\cdots\right],|x|<\frac{1}{3}$$

(ii) $$\log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)=\log\left(\frac{1}{{}^{1+2x}/_{1-2x}}\right)$$
$$=\log 1-\log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=0-\log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=-\log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]$$

$$-\log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=-2\left[2x+\frac{(2x)^3}{3}+\frac{(2x)^5}{5}+\frac{(2x)^7}{7}+\cdots\right]$$
$$=-2\left[2x+\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}+\frac{128x^7}{7}+..\right],|x|<\frac{1}{2}$$

40. p **மற்றும்** q **ஐ ஒப்பிடும்போது** $p-q$ **சிறியது எனில்,** $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ **என நிறுவுக. இதன் மூலம்** $\sqrt[8]{\frac{15}{16}}$ **−ன் மதிப்பினைக் காண்க.**

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}=\frac{n[(p+q)+\frac{1}{n}(p-q)]}{n[(p+q)-\frac{1}{n}(p-q)]}=\frac{(p+q)\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)\right]}{(p+q)\left[1-\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)\right]}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)}{1-\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)}=\frac{\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)^{1/n}}{\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)^{1/n}}\qquad (\because 1+nx+..=(1+x)^n)$$
$$=\frac{(p+q+p-q)^{1/n}}{(p+q)^{1/n}}\times\frac{(p+q)^{1/n}}{(p+q-p+q)^{1/n}}=\frac{(2p)^{1/n}}{(2q)^{1/n}}$$
$$=\frac{2^{1/n}p^{1/n}}{2^{1/n}q^{1/n}}=\frac{p^{1/n}}{q^{1/n}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{1/n}=\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$$
$$\sqrt[8]{\frac{15}{16}}=\frac{8(15+16)+(15-16)}{8(15+16)-(15-16)}=\frac{8(31)-1}{8(31)+1}=\frac{248-1}{248+1}=\frac{247}{249}=0.99196$$

41. $\frac{3-4x+x^2}{e^{2x}}$ −ன் விரிவில் x^4 −ன் கெழுவைக் காண்க.

$$\frac{3-4x+x^2}{e^{2x}}=(3-4x+x^2)e^{-2x}$$
$$=(3-4x+x^2)\left(1+\frac{-2x}{1!}+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+\frac{(-2x)^4}{4!}+\cdots\right)$$
$$=(3-4x+x^2)\left(1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}\ldots\right)$$
$$x^4 \text{ −ன் கெழு}=3\left(\frac{2}{3}\right)-4\left(-\frac{4}{3}\right)+1(2)$$
$$=2+\frac{16}{3}+2=4+\frac{16}{3}=\frac{12+16}{3}=\frac{28}{3}$$

42.மதிப்புக் காண்க: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$$
$$=1\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^5}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^7}\right)+\cdots$$
$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]+\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7\ \ldots\right]$$
$$=3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]+\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7\ \ldots\right]$$
$$=3\times\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\quad\left(\because \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[3\log\frac{4/3}{2/3}+\log\frac{10/9}{8/9}\right]=\frac{1}{2}\left[3\log 2+\log\frac{5}{4}=\log 2^3+\log\frac{5}{4}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(8\times\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_e 10$$