

XI Std - Maths Unit - 10 வகையாக்கிதல்
 எ.கா. 10.1) $f(x) = 7x + 5$ என்ற வகையாக்கி $(x_0, f(x_0))$ என்ற
 புள்ளியில் தொகுதி கோட்டில் தொகுதி காண்க.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x) = 7x + 5$$

$$f(x_0) = 7x_0 + 5$$

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 7\Delta x$$

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 7 = 7$$

எ.கா. 10.2) $f(x) = -5x^2 + 7x$ என்ற வகையாக்கி $(5, f(5))$ என்ற
 புள்ளியில் தொகுதி கோட்டில் தொகுதி காண்க.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad f(x) = -5x^2 + 7x$$

$$f(5) = -125 + 35 = -90$$

$$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x)$$

$$= -5(25 + 10\Delta x + (\Delta x)^2) + 35 + 7\Delta x$$

$$= -125 - 50\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 35 + 7\Delta x$$

$$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$

$$f(5 + \Delta x) - f(5) = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$

$$= \Delta x (-43 - 5\Delta x)$$

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (-43 - 5\Delta x)}{\Delta x} = -43$$

புள்ளியின் வகையாக்கி $y = f(x)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

எ.கா. 3) புள்ளியின் வகையாக்கி $f(x) = \lfloor x \rfloor$ என்ற தொகுதி
 தொகுதி காண்க. (எ.கா. 10.1) தொகுதி காண்க.

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ என்ற தொகுதி தொகுதி காண்க.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \quad \text{எனவே} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow n} \lfloor x \rfloor$ கண்டுபிடிக்க முடியாது. $\therefore f'(x)$ எந்த ஒரு புள்ளியிலும்
 காண முடியாது.

10.1) தீர்மானத்தைப் பயன்படுத்தி டெர்வைவ் காண்க.
 உதாரணம் கொடுக்கவும்.

1) $f(x) = 6$ 2) $f(x) = -4x + 7$ 3) $f(x) = -x^2 + 2$

1) $f(x) = 6$
 $f(x_0) = 6$ $f(x_0 + \Delta x) = 6$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{\Delta x} = 0$$

2) $f(x) = -4x + 7$

$f(x_0) = -4x_0 + 7$

$f(x_0 + \Delta x) = -4(x_0 + \Delta x) + 7$

$= -4x_0 - 4\Delta x + 7$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -4\Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4$$

3) $f(x) = -x^2 + 2$

$f(x_0) = -x_0^2 + 2$

$f(x_0 + \Delta x) = -(x_0 + \Delta x)^2 + 2$

$= -(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 2$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 2 - (-x_0^2 + 2)$

$= -2x_0\Delta x - \Delta x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = -2x_0$$

2) தீர்மானத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 1$ ல் இடப்பட்ட டெர்வைவ் காண்க.
 உதாரணம் கொடுக்கவும். $x = 1$ ல் டெர்வைவ் காண்க.
 தனிமையாக 2 மீட்டர் காண்க.

1) $f(x) = |x-1|$ 2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

1) $f(x) = |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & x < 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$

$\therefore x = 1$ ல் டெர்வைவ் காண்க.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1) - 0}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) - 0}{x-1} = 1$$

2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $f(1) = 0$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} = \frac{0}{0} = \infty$$

$f'(1)$ இல்லை. $f(1^+)$ லும் $\sqrt{1-x^2}$ இல்லை.

$\therefore f(1^+)$ இல்லை. $\therefore x=1$ ன் வரலாறுத் தன்மை இல்லை.

3) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

$\therefore x=1$ ன் வரலாறுத் தன்மை இல்லை.

3) 10.1) ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி க்கு இரண்டு தனித்தனியான வரலாறுகள் உள்ளன.

1) $f(x) = \begin{cases} x|x| & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ $f(0) = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$\therefore f'(0^-) = f'(0^+)$, $\therefore x=0$ ன் வரலாறுத் தன்மை உள்ளது.

2) $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \leq 1 \\ -(x^2 - 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ (x^2 - 1) & x \geq 1 \end{cases}$ $f(1) = 0$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+)$
 $\therefore x=1$ ன் வரலாறுத் தன்மை இல்லை.

3) $f(x) = |x| + |x-1|$ $x=0, 1.$

$$f(x) = -(x-1) - x \quad x < 0$$

$$= 1 - 2x \quad x < 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} -x & x & x \\ \hline -(x-1) & 0 & -(x-1) & x-1 \end{array}$$

$$= -(x-1) + x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 1$$

$$= x - 1 + x \quad x > 1$$

$$= 2x - 1$$

$x=0$ ல் $f(0) = 1$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2x - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0 \quad \therefore f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

$\therefore x=0$ ல் வகைமை இல்லை.

$x=1$ ல் $f(1) = 1$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0.$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+) \quad \therefore x=1$ ல் வகைமை இல்லை.

4) $f(x) = \sin|x|$ $x=0$ ல்.

$$= \sin(-x) = -\sin x \quad x < 0$$

$$= \sin x \quad x \geq 0, \quad f(0) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - 0}{x} = -1.$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \therefore f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

$\therefore x=0$ ல் வகைமை இல்லை.

4) $\frac{4}{101}$ இயற்கணிதம் சமீப காலத்தில் சாத்தியமான 4 மீட்டர்ஸ் வகைமை இல்லாதது கிடைத்தது. 1) $f(x) = -x + 2$ $x \leq 2$ $x=2$ ல்.

$$2x + 4 \quad x \geq 2$$

2) $f(x) = 3x$ $x < 0$

$-4x$ $x \geq 0$ $x=0$ ல்.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2 \\ 2x-4 & x > 2 \end{cases} \quad x=2 \text{ ன் }.$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$\therefore f'(x) \neq f'(2^+) \quad \therefore x=2 \text{ ன் } f(x) \text{ க்கு } \text{புள்ளித் தொகுதி} \text{ இல்லை}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ -4x & x \geq 0 \end{cases} \quad x=0 \text{ ன் }.$$

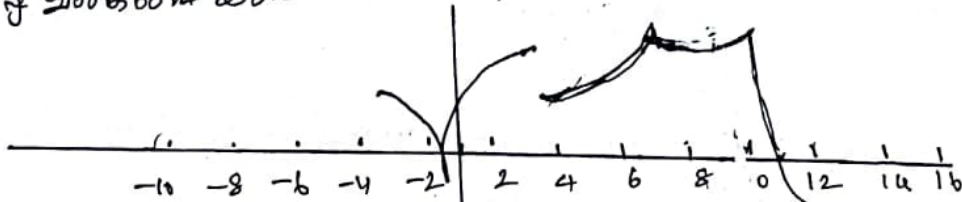
$$f(0) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x-0}{x} = -4$$

$$\therefore f'(0) \neq f'(0^+) \quad \therefore x=0 \text{ ன் } \text{புள்ளித் தொகுதி} \text{ இல்லை}$$

5) தரப்பட்டிருக்கிற f ன் வரைபடத்தில் f ன் மூலக்கூறுகள் x ன் மதிப்புகளில் f வரைபடம் இயல்பான மூலக்கூறுகள் இருக்கின்றன.



$x = -1$ $x = 8$ ன் தனித்தொகுதி. $x = 11$ ன் தனித்தொகுதி.

$x = 4$ ன் தனித்தொகுதி. $\therefore x = 4$ ன் வரைபடம் இயல்பான.

$x = 11$ ன் வரைபடம் இயல்பான. $\therefore x = 11$ ன் வரைபடம் இயல்பான.

$\therefore x = -1, 8, 4, 11$ ன் வரைபடம் இயல்பான.

6) $f(x) = |x+100| + x^2$ எனில் $f'(-100)$ கிடைக்க வாய்ப்பு என்ன?

$$f(x) = -(x+100) + x^2 \quad x < -100,$$

$$= x+100 + x^2 \quad x \geq -100.$$

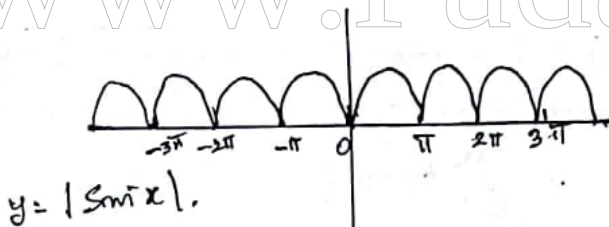
$$\begin{aligned}
 f'(-100^-) &= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{f(x) - f(-100)}{x + 100} & f(-100) &= 100^2 \\
 &= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{-x - 100 + x^2 - 100^2}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{-(x+100) + (x+100)(x-100)}{x+100} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{(x+100)(x-100-1)}{x+100} = -200. \\
 f'(-100^+) &= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{f(x) - f(-100)}{x + 100} = \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{x + 100 + x^2 - 100^2}{x + 100} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{(x+100) + (x+100)(x-100)}{x+100} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{(x+100)(1-x-100)}{x+100} \\
 &= -199.
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(-100^-) \neq f'(-100^+)$$

$\therefore$ ஒரு புள்ளியில் வகையெண்ணில் இடது பக்கத்திலிருந்து வலது பக்கத்திலிருந்து வகையெண்ணின் மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன.

7. (10.1) கீழ்க்கண்ட ஒருபுள்ளியில் வகையெண்ணின் மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன. அவை மட்டுமே ஒரு புள்ளியில் வகையெண்ணின் மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன.

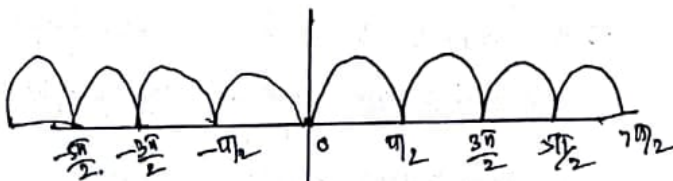
$$1) |\sin x| \quad 2) |\cos x|$$



$$y = |\sin x|$$

$x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ க்கான புள்ளிகளில் கீழ்க்கண்டவற்றை எதிர்பார்க்கவும்.

$x = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$ இல் வகையெண்ணின் மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன.



$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$ புள்ளிகளில் கீழ்க்கண்டவற்றை எதிர்பார்க்கவும்.

ஒரு புள்ளியில் வகையெண்ணின் மதிப்புகள் வேறுபடுகின்றன.

$$1) \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$4) \frac{d}{dx}[k f(x)] = k \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$1. \frac{d}{dx}(k) = 0 \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$3) \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{(\log_a x)x} = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

$$5) \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_a a$$

$$6) \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$7) \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$8) \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$9) \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$10) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$11) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$12) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$13) \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$14) \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$15) \frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$16) \frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17) \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$18) \frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = -\frac{\operatorname{cosech} x}{1+x^2}$$

$$19) x = f(\theta) \quad y = g(\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d\theta}{dx}$$

Required Trigonometric formulas.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + c$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \cdot c$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

$$\text{For } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ and } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ Put } x = \cos \theta$$

மேல்க்குறிப்பிட்ட வரையறுப்புகள்:

1) 3) 5) 7) 9) 11) 13) 15) 17) 19) 21) 23) 25) 27) 29) 31) 33) 35) 37) 39) 41) 43) 45) 47) 49) 51) 53) 55) 57) 59) 61) 63) 65) 67) 69) 71) 73) 75) 77) 79) 81) 83) 85) 87) 89) 91) 93) 95) 97) 99) 101) 103) 105) 107) 109) 111) 113) 115) 117) 119) 121) 123) 125) 127) 129) 131) 133) 135) 137) 139) 141) 143) 145) 147) 149) 151) 153) 155) 157) 159) 161) 163) 165) 167) 169) 171) 173) 175) 177) 179) 181) 183) 185) 187) 189) 191) 193) 195) 197) 199) 201) 203) 205) 207) 209) 211) 213) 215) 217) 219) 221) 223) 225) 227) 229) 231) 233) 235) 237) 239) 241) 243) 245) 247) 249) 251) 253) 255) 257) 259) 261) 263) 265) 267) 269) 271) 273) 275) 277) 279) 281) 283) 285) 287) 289) 291) 293) 295) 297) 299) 301) 303) 305) 307) 309) 311) 313) 315) 317) 319) 321) 323) 325) 327) 329) 331) 333) 335) 337) 339) 341) 343) 345) 347) 349) 351) 353) 355) 357) 359) 361) 363) 365) 367) 369) 371) 373) 375) 377) 379) 381) 383) 385) 387) 389) 391) 393) 395) 397) 399) 401) 403) 405) 407) 409) 411) 413) 415) 417) 419) 421) 423) 425) 427) 429) 431) 433) 435) 437) 439) 441) 443) 445) 447) 449) 451) 453) 455) 457) 459) 461) 463) 465) 467) 469) 471) 473) 475) 477) 479) 481) 483) 485) 487) 489) 491) 493) 495) 497) 499) 501) 503) 505) 507) 509) 511) 513) 515) 517) 519) 521) 523) 525) 527) 529) 531) 533) 535) 537) 539) 541) 543) 545) 547) 549) 551) 553) 555) 557) 559) 561) 563) 565) 567) 569) 571) 573) 575) 577) 579) 581) 583) 585) 587) 589) 591) 593) 595) 597) 599) 601) 603) 605) 607) 609) 611) 613) 615) 617) 619) 621) 623) 625) 627) 629) 631) 633) 635) 637) 639) 641) 643) 645) 647) 649) 651) 653) 655) 657) 659) 661) 663) 665) 667) 669) 671) 673) 675) 677) 679) 681) 683) 685) 687) 689) 691) 693) 695) 697) 699) 701) 703) 705) 707) 709) 711) 713) 715) 717) 719) 721) 723) 725) 727) 729) 731) 733) 735) 737) 739) 741) 743) 745) 747) 749) 751) 753) 755) 757) 759) 761) 763) 765) 767) 769) 771) 773) 775) 777) 779) 781) 783) 785) 787) 789) 791) 793) 795) 797) 799) 801) 803) 805) 807) 809) 811) 813) 815) 817) 819) 821) 823) 825) 827) 829) 831) 833) 835) 837) 839) 841) 843) 845) 847) 849) 851) 853) 855) 857) 859) 861) 863) 865) 867) 869) 871) 873) 875) 877) 879) 881) 883) 885) 887) 889) 891) 893) 895) 897) 899) 901) 903) 905) 907) 909) 911) 913) 915) 917) 919) 921) 923) 925) 927) 929) 931) 933) 935) 937) 939) 941) 943) 945) 947) 949) 951) 953) 955) 957) 959) 961) 963) 965) 967) 969) 971) 973) 975) 977) 979) 981) 983) 985) 987) 989) 991) 993) 995) 997) 999) 1001) 1003) 1005) 1007) 1009) 1011) 1013) 1015) 1017) 1019) 1021) 1023) 1025) 1027) 1029) 1031) 1033) 1035) 1037) 1039) 1041) 1043) 1045) 1047) 1049) 1051) 1053) 1055) 1057) 1059) 1061) 1063) 1065) 1067) 1069) 1071) 1073) 1075) 1077) 1079) 1081) 1083) 1085) 1087) 1089) 1091) 1093) 1095) 1097) 1099) 1101) 1103) 1105) 1107) 1109) 1111) 1113) 1115) 1117) 1119) 1121) 1123) 1125) 1127) 1129) 1131) 1133) 1135) 1137) 1139) 1141) 1143) 1145) 1147) 1149) 1151) 1153) 1155) 1157) 1159) 1161) 1163) 1165) 1167) 1169) 1171) 1173) 1175) 1177) 1179) 1181) 1183) 1185) 1187) 1189) 1191) 1193) 1195) 1197) 1199) 1201) 1203) 1205) 1207) 1209) 1211) 1213) 1215) 1217) 1219) 1221) 1223) 1225) 1227) 1229) 1231) 1233) 1235) 1237) 1239) 1241) 1243) 1245) 1247) 1249) 1251) 1253) 1255) 1257) 1259) 1261) 1263) 1265) 1267) 1269) 1271) 1273) 1275) 1277) 1279) 1281) 1283) 1285) 1287) 1289) 1291) 1293) 1295) 1297) 1299) 1301) 1303) 1305) 1307) 1309) 1311) 1313) 1315) 1317) 1319) 1321) 1323) 1325) 1327) 1329) 1331) 1333) 1335) 1337) 1339) 1341) 1343) 1345) 1347) 1349) 1351) 1353) 1355) 1357) 1359) 1361) 1363) 1365) 1367) 1369) 1371) 1373) 1375) 1377) 1379) 1381) 1383) 1385) 1387) 1389) 1391) 1393) 1395) 1397) 1399) 1401) 1403) 1405) 1407) 1409) 1411) 1413) 1415) 1417) 1419) 1421) 1423) 1425) 1427) 1429) 1431) 1433) 1435) 1437) 1439) 1441) 1443) 1445) 1447) 1449) 1451) 1453) 1455) 1457) 1459) 1461) 1463) 1465) 1467) 1469) 1471) 1473) 1475) 1477) 1479) 1481) 1483) 1485) 1487) 1489) 1491) 1493) 1495) 1497) 1499) 1501) 1503) 1505) 1507) 1509) 1511) 1513) 1515) 1517) 1519) 1521) 1523) 1525) 1527) 1529) 1531) 1533) 1535) 1537) 1539) 1541) 1543) 1545) 1547) 1549) 1551) 1553) 1555) 1557) 1559) 1561) 1563) 1565) 1567) 1569) 1571) 1573) 1575) 1577) 1579) 1581) 1583) 1585) 1587) 1589) 1591) 1593) 1595) 1597) 1599) 1601) 1603) 1605) 1607) 1609) 1611) 1613) 1615) 1617) 1619) 1621) 1623) 1625) 1627) 1629) 1631) 1633) 1635) 1637) 1639) 1641) 1643) 1645) 1647) 1649) 1651) 1653) 1655) 1657) 1659) 1661) 1663) 1665) 1667) 1669) 1671) 1673) 1675) 1677) 1679) 1681) 1683) 1685) 1687) 1689) 1691) 1693) 1695) 1697) 1699) 1701) 1703) 1705) 1707) 1709) 1711) 1713) 1715) 1717) 1719) 1721) 1723) 1725) 1727) 1729) 1731) 1733) 1735) 1737) 1739) 1741) 1743) 1745) 1747) 1749) 1751) 1753) 1755) 1757) 1759) 1761) 1763) 1765) 1767) 1769) 1771) 1773) 1775) 1777) 1779) 1781) 1783) 1785) 1787) 1789) 1791) 1793) 1795) 1797) 1799) 1801) 1803) 1805) 1807) 1809) 1811) 1813) 1815) 1817) 1819) 1821) 1823) 1825) 1827) 1829) 1831) 1833) 1835) 1837) 1839) 1841) 1843) 1845) 1847) 1849) 1851) 1853) 1855) 1857) 1859) 1861) 1863) 1865) 1867) 1869) 1871) 1873) 1875) 1877) 1879) 1881) 1883) 1885) 1887) 1889) 1891) 1893) 1895) 1897) 1899) 1901) 1903) 1905) 1907) 1909) 1911) 1913) 1915) 1917) 1919) 1921) 1923) 1925) 1927) 1929) 1931) 1933) 1935) 1937) 1939) 1941) 1943) 1945) 1947) 1949) 1951) 1953) 1955) 1957) 1959) 1961) 1963) 1965) 1967) 1969) 1971) 1973) 1975) 1977) 1979) 1981) 1983) 1985) 1987) 1989) 1991) 1993) 1995) 1997) 1999) 2001) 2003) 2005) 2007) 2009) 2011) 2013) 2015) 2017) 2019) 2021) 2023) 2025) 2027) 2029) 2031) 2033) 2035) 2037) 2039) 2041) 2043) 2045) 2047) 2049) 2051) 2053) 2055) 2057) 2059) 2061) 2063) 2065) 2067) 2069) 2071) 2073) 2075) 2077) 2079) 2081) 2083) 2085) 2087) 2089) 2091) 2093) 2095) 2097) 2099) 2101) 2103) 2105) 2107) 2109) 2111) 2113) 2115) 2117) 2119) 2121) 2123) 2125) 2127) 2129) 2131) 2133) 2135) 2137) 2139) 2141) 2143) 2145) 2147) 2149) 2151) 2153) 2155) 2157) 2159) 2161) 2163) 2165) 2167) 2169) 2171) 2173) 2175) 2177) 2179) 2181) 2183) 2185) 2187) 2189) 2191) 2193) 2195) 2197) 2199) 2201) 2203) 2205) 2207) 2209) 2211) 2213) 2215) 2217) 2219) 2221) 2223) 2225) 2227) 2229) 2231) 2233) 2235) 2237) 2239) 2241) 2243) 2245) 2247) 2249) 2251) 2253) 2255) 2257) 2259) 2261) 2263) 2265) 2267) 2269) 2271) 2273) 2275) 2277) 2279) 2281) 2283) 2285) 2287) 2289) 2291) 2293) 2295) 2297) 2299) 2301) 2303) 2305) 2307) 2309) 2311) 2313) 2315) 2317) 2319) 2321) 2323) 2325) 2327) 2329) 2331) 2333) 2335) 2337) 2339) 2341) 2343) 2345) 2347) 2349) 2351) 2353) 2355) 2357) 2359) 2361) 2363) 2365) 2367) 2369) 2371) 2373) 2375) 2377) 2379) 2381) 2383) 2385) 2387) 2389) 2391) 2393) 2395) 2397) 2399) 2401) 2403) 2405) 2407) 2409) 2411) 2413) 2415) 2417) 2419) 2421) 2423) 2425) 2427) 2429) 2431) 2433) 2435) 2437) 2439) 2441) 2443) 2445) 2447) 2449) 2451) 2453) 2455) 2457) 2459) 2461) 2463) 2465) 2467) 2469) 2471) 2473) 2475) 2477) 2479) 2481) 2483) 2485) 2487) 2489) 2491) 2493) 2495) 2497) 2499) 2501) 2503) 2505) 2507) 2509) 2511) 2513) 2515) 2517) 2519) 2521) 2523) 2525) 2527) 2529) 2531) 2533) 2535) 2537) 2539) 2541) 2543) 2545) 2547) 2549) 2551) 2553) 2555) 2557) 2559) 2561) 2563) 2565) 2567) 2569) 2571) 2573) 2575) 2577) 2579) 2581) 2583) 2585) 2587) 2589) 2591) 2593) 2595) 2597) 2599) 2601) 2603) 2605) 2607) 2609) 2611) 2613) 2615) 2617) 2619) 2621) 2623) 2625) 2627) 2629) 2631) 2633) 2635) 2637) 2639) 2641) 2643) 2645) 2647) 2649) 2651) 2653) 2655) 2657) 2659) 2661) 2663) 2665) 2667) 2669) 2671) 2673) 2675) 2677) 2679) 2681) 2683) 2685) 2687) 2689) 2691) 2693) 2695) 2697) 2699) 2701) 2703) 2705) 2707) 2709) 2711) 2713) 2715) 2717) 2719) 2721) 2723) 2725) 2727) 2729) 2731) 2733) 2735) 2737) 2739) 2741) 2743) 2745) 2747) 2749) 2751) 2753) 2755) 2757) 2759) 2761) 2763) 2765) 2767) 2769) 2771) 2773) 2775) 2777) 2779) 2781) 2783) 2785) 2787) 2789) 2791) 2793) 2795) 2797) 2799) 2801) 2803) 2805) 2807) 2809) 2811) 2813) 2815) 2817) 2819) 2821) 2823) 2825) 2827) 2829) 2831) 2833) 2835) 2837) 2839) 2841) 2843) 2845) 2847) 2849) 2851) 2853) 2855) 2857) 2859) 2861) 2863) 2865) 2867) 2869) 2871) 2873) 2875) 2877) 2879) 2881) 2883) 2885) 2887) 2889) 2891) 2893) 2895) 2897) 2899) 2901) 2903) 2905) 2907) 2909) 2911) 2913) 2915) 2917) 2919) 2921) 2923) 2925) 2927) 2929) 2931) 2933) 2935) 2937) 2939) 2941) 2943) 2945) 2947) 2949) 2951) 2953) 2955) 2957) 2959) 2961) 2963) 2965) 2967) 2969) 2971) 2973) 2975) 2977) 2979) 2981) 2983) 2985) 2987) 2989) 2991) 2993) 2995) 2997) 2999) 3001) 3003) 3005) 3007) 3009) 3011) 3013) 3015) 3017) 3019) 3021) 3023) 3025) 3027) 3029) 3031) 3033) 3035) 3037) 3039) 3041) 3043) 3045) 3047) 3049) 3051) 3053) 3055) 3057) 3059) 3061) 3063) 3065) 3067) 3069) 3071) 3073) 3075) 3077) 3079) 3081) 3083) 3085) 3087) 3089) 3091) 3093) 3095) 3097) 3099) 3101) 3103) 3105) 3107) 3109) 3111) 3113) 3115) 3117) 3119) 3121) 3123) 3125) 3127) 3129) 3131) 3133) 3135) 3137) 3139) 3141) 3143) 3145) 3147) 3149) 3151) 3153) 3155) 3157) 3159) 3161) 3163) 3165) 3167) 3169) 3171) 3173) 3175) 3177) 3179) 3181) 3183) 3185) 3187) 3189) 3191) 3193) 3195) 3197) 3199) 3201) 3203) 3205) 3207) 3209) 3211) 3213) 3215) 3217) 3219) 3221) 3223) 3225) 3227) 3229) 3231) 3233) 3235) 3237) 3239) 3241) 3243) 3245) 3247) 3249) 3251) 3253) 3255) 3257) 3259) 3261) 3263) 3265) 3267) 3269) 3271) 3273) 3275) 3277) 3279) 3281) 3283) 3285) 3287) 3289) 3291) 3293) 3295) 3297) 3299) 3301) 3303) 3305) 3307) 3309) 3311) 3313) 3315) 3317) 3319) 3321) 3323) 3325) 3327) 3329) 3331) 3333) 3335) 3337) 3339) 3341) 3343) 3345) 3347) 3349) 3351) 3353) 3355) 3357) 3359) 3361) 3363) 3365) 3367) 3369) 3371) 3373) 3375) 3377) 3379) 3381) 3383) 3385) 3387) 3389) 3391) 3393)

Ex 10.7: EXERCISE - 10.2.

$$1) y = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3.$$

$$2) y = e^x + \sin x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x.$$

$$3) y = 4 \csc x - \log x - 2e^x.$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \csc x \cot x - \frac{1}{x} - 2e^x$$

$$4) y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$5) y = x e^x \log x.$$

$$\frac{dy}{dx} = x e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \log x + x e^x \log x$$

$$= e^x (1 + \log x + x \log x)$$

$$6) y = \frac{\cos x}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= -\frac{x^2}{x^6} (x \sin x + 3 \cos x)$$

$$= -\frac{(x \sin x + 3 \cos x)}{x^4}.$$

$$7) y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x} \log x.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + \log x (-e^{-x})$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \log x \right)$$

$$8) f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & x < 4 \\ x-4 & x > 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

$$f'(3) = -1 \quad \because 3 < 4$$

$$f'(5) = 1 \quad \because 5 > 4.$$

$$\frac{1}{10.2) f(x) = x - 3 \sin x$$

$$f'(x) = 1 - 3 \cos x.$$

$$\frac{2}{10.2) y = \sin x + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x.$$

$$\frac{3}{10.2) f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = x \cos x + \sin x.$$

$$\frac{4}{10.2) y = \cos x - 2 \tan x.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - 2 \sec^2 x.$$

$$\frac{5}{10.2) g(t) = t^3 \cos t$$

$$g'(t) = -t^3 \sin t + \cos t \cdot 3t^2$$

$$= t^2 (3 \cos t - t \sin t)$$

$$\frac{6}{10.2) g(t) = 4 \sec t + \tan t$$

$$g'(t) = 4 \sec t \tan t + \sec^2 t$$

$$= \sec t (4 \tan t + \sec t)$$

$$\frac{7}{10.2) y = e^x \sin x.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos x + \sin x e^x$$

$$= e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\frac{8}{10.2) y = \frac{\tan x}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec^2 x - \tan x \cdot 1}{x^2}.$$

$$\frac{9}{10.2) y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \cos x) \cos x - \sin x (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\frac{10}{10.2} \quad y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x + \cos x) - x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x - x \cos x + x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+x) \sin x + (1-x) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\frac{11}{10.2} \quad y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x (\sec^2 x) - (\tan x - 1) \sec^2 x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{\sec^2 x (\sec x - \tan x + 1)}{\sec^2 x}$$

$$= \sec x - \tan x + 1$$

$$\frac{12}{10.2} \quad y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cos x - \sin x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(2 \cos x - 2 \sin x)}{x^3}$$

$$\frac{13}{10.2} \quad y = \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$x \frac{dy}{d\theta} = \tan \theta (\cos \theta - \sin \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \sec^2 \theta$$

$$= \tan \theta \cos \theta - \tan \theta \sin \theta + \sin \theta \sec^2 \theta + \cos \theta \sec^2 \theta$$

$$\frac{14}{10.2} \quad y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec} x (-\operatorname{cosec}^2 x) + \cot x (-\operatorname{cosec} x)$$

$$= -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cdot \cot^2 x$$

$$= -\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= -\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$\frac{15}{10.2} \quad y = x \sin x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \sin x (-\sin x) + x \cos x \cos x$$

$$+ \sin x \cos x$$

$$= -x \sin^2 x + x \cos^2 x + \sin x \cos x$$

$$= x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x$$

$$= x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\frac{16}{10.2} \quad y = e^{-x} \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \frac{1}{x} + \log x (-e^{-x})$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \log x \right)$$

$$\frac{17}{10.2} \quad y = (x^2 + 5) (\log(1+x)) e^{-3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 5) \log(1+x) (-3e^{-3x})$$

$$+ (x^2 + 5) e^{-3x} + \log(1+x) e^{-3x} \cdot 2x$$

$$= e^{-3x} \left[-3(x^2 + 5) \log x + \frac{x^2 + 5}{1+x} + \log(1+x) 2x \right]$$

$$\frac{19}{10.2} \quad y = \log_{10} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_e e$$

$$\frac{20}{10.2} \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f'(x) = 4x - 5$$

EXERCISE 10.8.

Example 10.8, find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \sqrt{x^2+1}$.

Ex 10.8. Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \sqrt{x^2+1}$.

$$y = \sqrt{x^2+1} \quad t = x^2+1$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$y = \sqrt{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x$$

Ex 10.9) If $y = \sin(x^2)$ find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \sin(x^2)$$

$$t = x^2$$

$$y = \sin t$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \cos t \cdot 2x$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

Ex 10.10 $y = (x^3-1)^{100}$ find $\frac{dy}{dx}$.

$$y = (x^3-1)^{100} \quad t = x^3-1$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$y = t^{100}$$

$$\frac{dy}{dt} = 100t^{99}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 100t^{99} \cdot 3x^2$$

$$= 100(x^3-1)^{99} \cdot 3x^2$$

$$= 300x^2(x^3-1)^{99}$$

Ex 10.11) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = (x^2+x+1)^{-1/3}$.

$$\text{Put } t = x^2+x+1$$

$$y = t^{-1/3}$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x+1$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}t^{-4/3} = -\frac{1}{3}t^{-4/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^{4/3}} \cdot (2x+1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^{4/3}} \cdot (2x+1)$$

10.12)

தொகுக்கப்பட்ட இலக்கம் மற்றும் அதன் வகைகளைக் காண்க

$$f(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

$$g'(t) = 9 \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$\text{Now } \frac{d}{dt} \left(\frac{t-2}{2t+1}\right) = \frac{(2t+1) \cdot 1 - (t-2) \cdot 2}{(2t+1)^2}$$

$$= \frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2} = \frac{5}{(2t+1)^2}$$

$$\therefore g'(t) = 9 \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{5}{(2t+1)^2}$$

10.13)

(2x+1)^5 (x^3-x+1)^4 ன் வகைப்பாடு

$$y = (2x+1)^5 (x^3-x+1)^4$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3-x+1)^3 (3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \\ &= 2(2x+1)^4 \left[(2x+1) 2(x^3-x+1)^3 (3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 10(2x+1) \right] \\ &= 2(2x+1)^4 (x^3-x+1)^3 \left[2(2x+1)(3x^2-1) + (x^3-x+1) 10(2x+1) \right] \\ &= 2(2x+1)^4 (x^3-x+1)^3 (17x^3+6x^2-9x-3) \end{aligned}$$

10.14) $y = e^{\sin x}$

$$t = \sin x$$

$$y = e^t$$

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \cos x$$

$$= e^{\sin x} \cdot \cos x$$

10.15)

$$y = 2^x$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \log a$$

$$\frac{dy}{dx} = 2^x \log 2$$

10.16)

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \text{ find } \frac{dy}{dx}$$

$$u = \frac{1+x}{1-x} \quad \frac{du}{dx} = \frac{(1-x) \cdot 1 - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{1-x^2}$$

$$\therefore y = \tan^{-1}(u)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{10.3} \quad y = (x^2 + 4x + 6)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 + 4x + 6)^4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 6)$$

$$= 5(x^2 + 4x + 6)^4 (2x + 4)$$

$$\frac{2}{10.3} \quad y = \tan 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 3 \sec^2 3x$$

$$\frac{3}{10.3} \quad y = \cos(\tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\tan x) \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= -\sin(\tan x) \sec^2 x$$

$$\frac{4}{10.3} \quad y = \sqrt[3]{1+x^3} = (1+x^3)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(1+x^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dx}(1+x^3)$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^3)^{-2/3} (3x^2)$$

$$= x^2 (1+x^3)^{-2/3}$$

$$\frac{5}{10.3} \quad y = e^{\sqrt{x}} \quad \frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

6
10.3

$$y = \sin(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(e^x) \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x \cos e^x$$

7
10.3

$$F(x) = y = (x^3 + 4x)^7$$

$$\frac{dy}{dx} = 7(x^3 + 4x)^6 \frac{d}{dx}(x^3 + 4x)$$

$$= 7(x^3 + 4x)^6 (3x^2 + 4)$$

8
10.3

$$h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{3/2}$$

$$h'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \cdot \frac{d}{dt} \left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)$$

9
10.3

$$f(t) = 3\sqrt[3]{1 + \tan t} = (1 + \tan t)^{1/3}$$

$$f'(t) = \frac{1}{3} (1 + \tan t)^{-2/3} \frac{d}{dt} (1 + \tan t)$$

$$= \frac{1}{3} (1 + \tan t)^{-2/3} \sec^2 t$$

10
10.3

$$y = \cos(a^3 + x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(a^3 + x^3) \frac{d}{dx}(a^3 + x^3)$$

$$= -\sin(a^3 + x^3) \cdot 3x^2$$

11
10.3

$$y = e^{-mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-mx} \frac{d}{dx}(-mx)$$

$$= -m e^{-mx}$$

12
10.3

$$y = 4 \sec 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \sec 5x \tan 5x \cdot \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= 20 \sec 5x \tan 5x$$

Q3
10.2 $(2x-5)^4 (8x^2-5)^{-3} = y$

$$\begin{aligned} y &= \frac{(2x-5)^4}{(8x^2-5)^3} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(8x^2-5)^3 \cdot 4(2x-5)^3 \cdot 2 - (2x-5)^4 \cdot 3(8x^2-5)^2 \cdot 16x}{(8x^2-5)^6} \\ &= \frac{(8x^2-5)^2 (2x-5)^3 [8(8x^2-5) - 48x(2x-5)]}{(8x^2-5)^6} \\ &= \frac{(2x-5)^3 [64x^2 - 40 - 96x^2 + 240x]}{(8x^2-5)^4} \\ &= \frac{-8(2x-5)^3 (4x^2 - 30x + 5)}{(8x^2-5)^4} \end{aligned}$$

14)
10.3 $y = (x^2+1)^3 (x^2+2)$

$$\begin{aligned} &= (x^2+1)^3 (x^2+2)^{1/3} \\ \frac{dy}{dx} &= (x^2+1)^3 \cdot \frac{1}{3} (x^2+2)^{-2/3} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+2) + (x^2+1)^3 \cdot 2x \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)^3 (x^2+2)^{-2/3} \cdot 2x + (x^2+1)^3 \cdot 2x \\ &= \frac{1}{3} \frac{x^2+1}{(x^2+2)^{2/3}} \cdot 2x + (x^2+1)^3 \cdot 2x \\ &= \frac{2x(x^2+1) + 3(x^2+2) \cdot 2x}{3(x^2+2)^{2/3}} \\ &= \frac{2x^3 + 2x + 6x^3 + 12x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{8x^3 + 14x}{3(x^2+2)^{2/3}} \end{aligned}$$

15)
10.3 $y = x e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx}(-x^2) + e^{-x^2} \cdot 1 \\ &= x e^{-x^2} (-2x) + e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} (1 - 2x^2) \end{aligned}$$

16)
10.3 $s(t) = 4 \sqrt{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = \frac{(t^3+1)^{1/2}}{(t^3-1)^{1/2}}$

$$s'(t) = \frac{(t^3-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} (t^3+1)^{-1/2} \cdot 3t^2 - (t^3+1)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} (t^3-1)^{-1/2} \cdot 3t^2}{(t^3-1)^2}$$

$$\frac{3t^2}{4(t^3-1)^{1/4}(t^3+1)^{3/4}} - \frac{3t^2}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{1/4}}$$

$$\frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}}$$

$$= \frac{3t^5 - 3t^2 - 3t^5 - 3t^2}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}} = \frac{-6t^2}{4(t^3-1)^{5/4}(t^3+1)^{3/4}}$$

$$\frac{17}{10.3) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{7-3x} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{7-3x}}(-3)}{(7-3x)}$$

$$= \frac{2(7-3x) + 3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}} = \frac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$$

$$\frac{18}{10.3) \quad y = \tan(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x) \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -\sin x \cdot \sec^2(\cos x)$$

$$\frac{19}{10.3) \quad y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = \tan x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \cos x + \sin x \sec^2 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + \sin x \cdot \sec^2 x$$

$$= \sin x (1 + \sec^2 x)$$

$$\frac{20}{10.3) \quad y = 5^{-1/x}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{-1/x} \log 5 \frac{d}{dx}(-1/x)$$

$$= \frac{5^{-1/x} \log 5}{x^2}$$

21) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{1+2\tan x}} \cdot \frac{d}{dx}(1+2\tan x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+2\tan x}} \cdot 2 \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}\end{aligned}$$

22) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3\sin^2 x \frac{d}{dx}(\sin x) + 3\cos^2 x \left(\frac{d}{dx}(\cos x)\right) \\ &= 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x \\ &= 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

23) $y = \sin^2(\cos kx)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\sin(\cos kx) \frac{d}{dx}(\sin(\cos kx)) \\ &= 2\sin(\cos kx) \cdot \cos(\cos kx) \frac{d}{dx}[\cos kx] \\ &= 2\sin(\cos kx) \cos(\cos kx) (-\sin kx) \cdot k \\ &= -k \sin(kx) \sin 2(\cos kx)\end{aligned}$$

24) $y = (1+\cos^2 x)^6$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 6(1+\cos^2 x)^5 \frac{d}{dx}(1+\cos^2 x) \\ &= 6(1+\cos^2 x)^5 (2\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)) \\ &= 6(1+\cos^2 x)^5 (-2\sin x \cos x) \\ &= -6(1+\cos^2 x)^5 \sin 2x\end{aligned}$$

25) $y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^x)e^{3x} \frac{d}{dx}(3x) - e^{3x}(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^{3x}(1+e^x) - e^x e^{3x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{3x}(3+3e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{3x}(3+2e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$$

27) $y = e^{x \cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \cos x} \cdot \frac{d}{dx} (x \cos x)$$

$$= e^{x \cos x} [-x \sin x + \cos x]$$

$$= e^{x \cos x} [\cos x - x \sin x]$$

26) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

29) $y = \sin(\tan(\sqrt{\sin x}))$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \frac{d}{dx} (\tan \sqrt{\sin x})$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2 \sqrt{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{\sin x}$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2 \sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{d}{dx} (\sin x)$$

$$= \cos(\tan \sqrt{\sin x}) \cdot \sec^2(\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

30) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-x}{\sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2}} \times \frac{(1+x^2)(-2x) - (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{2(-x-x^3-x-x^3)}{(1+x^2)} \\
 &= \frac{1}{2x} \cdot \frac{2(-2x-x^3)}{1+x^2} = \frac{-2-x^3}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

EXERCISE - 104

Ex 10.17: Find $\frac{dy}{dx}$ if $x^2 + y^2 = 1$, obtain $\frac{dy}{dx}$ at $(1,0)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\
 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\
 y \frac{dy}{dx} &= -x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}
 \end{aligned}$$

Ex 10.18 Find the slopes of the tangent to the graph $x^2 + y^2 = 4$ at the point corresponding to $x = 1$.

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 4 \\
 \text{when } x=1, \quad 1^2 + y^2 &= 4 \Rightarrow y^2 = 3, \quad y = \pm\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$\therefore$ The points are $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$.

$$\begin{aligned}
 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
 \therefore \text{slope at } (1, \sqrt{3}) &= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \text{slope at } (1, -\sqrt{3}) &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Ex 10.19. $\frac{dy}{dx}$ if $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2y^3 - y^5 &= 2x + 1 \\
 4x^3 + 2 \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \cdot 2x - 5y^4 \frac{dy}{dx} &= 2 \\
 \frac{dy}{dx} (3x^2y^2 - 5y^4) &= 2 - 4x^3 - 2xy^3 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}
 \end{aligned}$$

EX 10.20

$$\frac{dy}{dx} \quad \sin y = y \cos 2x.$$

$$\sin y = y \cos 2x.$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -y 2 \sin 2x + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$$2y \sin 2x = \frac{dy}{dx} (\cos 2x - \cos y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y \sin 2x}{\cos 2x - \cos y}.$$

மேல்க்கொடுக்கப்பட்டது

EX 10.21

$$y = \sqrt{x^2+4} \sin^2 x \cdot 2^x \text{ எனில்}$$

யின் வகைக்கொடுக்க.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a.$$

$$y = \sqrt{x^2+4} \sin^2 x \cdot 2^x$$

$$\log y = \log (x^2+4)^2 + \log (\sin^2 x) + \log (2^x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+4}) + \frac{1}{\sin^2 x} \frac{d}{dx}(\sin^2 x) + \frac{1}{2^x} \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \frac{d}{dx}(x^2+4) + \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{1}{2^x} \cdot 2^x \log 2$$

$$= \frac{1}{2(x^2+4)} \cdot 2x + \frac{1}{\sin^2 x} (2 \sin x \cos x) + \log 2.$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \log 2 \right)$$

EX 10.22.

$$\text{வகைக்கொடுக்க } y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

$$y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

$$\log y = \log [x^{3/4} \sqrt{x^2+1}] - \log (3x+2)^5$$

$$= \log x^{3/4} + \log \sqrt{x^2+1} - 5 \log (3x+2)$$

$$= \frac{3}{4} \log x + \frac{1}{2} \log (x^2+1) - 5 \log (3x+2)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x^2+1)} \frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{5}{3x+2} \frac{d}{dx}(3x+2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4x} + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{5}{3x+2} \times 3 \\
 &= \frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \\
 \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right] \\
 &= \frac{3/4 \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right]
 \end{aligned}$$

EX 10.23

$$y = x^{\sqrt{x}} \text{ மீதான } \log$$

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\log y = \log x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \log x.$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \right] \\
 &= x \left[\frac{2 + \log x}{2\sqrt{x}} \right].
 \end{aligned}$$

: மீதான லாக்

EX 10.24 If $y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ find y' .

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan \theta}{1-\tan \theta} \quad \text{put } x = \tan \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} x$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \right]$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \theta.$$

$$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x.$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}.$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}.$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta - 1. \end{cases}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Ex 10.25

$$f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x) \text{ எனில் } f'(x) \text{ காண்க}$$

$$f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x) \quad \text{put } x = \cos \theta.$$

$$4x^3 - 3x = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \quad \theta = \cos^{-1}(x)$$

$$= \cos 3\theta.$$

$$\cos^{-1}(4x^3 - 3x) = \cos^{-1}(\cos(3\theta))$$

$$= 3\theta$$

$$f(x) = 3\cos^{-1}x.$$

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ex 10.26) Find $\frac{dy}{dx}$ if $x = at^2$ $y = 2at$ $t \neq 0$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$$x = at^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2at$$

$$y = 2at$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at}$$

$$= \frac{1}{t}.$$

Ex 10.27

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t)$$

எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$$x = a(t - \sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$$

$$= a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a(\sin t)$$

$$= a \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$= \cot \frac{t}{2}.$$

$$\frac{1}{10.4) \quad y = x^{\cos x} \quad \frac{dy}{dx} \text{ காண்க}$$

$$y = x^{\cos x}$$

$$\log y = \log x^{\cos x} = \cos x \log x.$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} + \log x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\cos x}{x} - \log x \sin x \right]$$

$$= x^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{x} - \log x \sin x \right].$$

2/10.4) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = x^{\log x} + (\log x)^x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^{\log x}) + \frac{d}{dx} (\log x)^x.$$

let $u = x^{\log x}.$

$$\log u = \log x^{\log x} = \log x \cdot \log x$$

$$= (\log x)^2$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2 \log x}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = u \cdot \frac{2 \log x}{x} = \frac{2x^{\log x} \cdot \log x}{x}$$

let $v = (\log x)^x.$

$$\log v = \log [(\log x)^x]$$

$$= x \log (\log x)$$

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log (\log x)$$

$$= \frac{1}{\log x} + \log (\log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right]$$

$$= \log x^x \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{2x^{\log x} \cdot \log x}{x} + \log x^x \left[\frac{1}{\log x} + \log (\log x) \right].$$

3/10.4) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$\sqrt{xy} = e^{x-y}$
 $x^{1/2} y^{1/2} = e^{x-y}$

$x^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} + y^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{x} = e^{x-y} \left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$

$\left[\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + e^{x-y} \right] \frac{dy}{dx} = e^{x-y} - \frac{e^{x-y}}{2\sqrt{x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y} - \frac{e^{x-y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + e^{x-y}}$

(or) $\sqrt{xy} = e^{x-y}$
 $\log(xy)^{1/2} = \log e^{x-y}$

$\log x^{1/2} + \log y^{1/2} = \log e^{x-y}$

$\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y = (x-y) \log e$
 $= x-y$

$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2y} + 1 \right) = 1 - \frac{1}{2x}$

$= \frac{2x-1}{2x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2x-1}{2x}}{\frac{1+2y}{2y}} = \frac{2y(2x-1)}{2x(1+2y)}$

4/10.4) $x^y = y^x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$x^y = y^x$

$$\log x^y = \log y^x.$$

$$y \log x \neq x \log y.$$

$$y \cdot \frac{1}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y.$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\log x - \frac{x}{y} \right) = \log y - \frac{y}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x \log y - y}{y \log x - x} \right) \cdot \frac{y}{x}.$$

5
10.4)

$$y = (\cos x)^{\log x} \text{ சிவ்வி } \frac{dy}{dx} \text{ கிண்கி }.$$

$$y = (\cos x)^{\log x}.$$

$$\log y = \log (\cos x)^{\log x}$$

$$= \log x \cdot \log (\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx} (\log (\cos x)) + \log (\cos x) \frac{d}{dx} (\log x)$$

$$= \log x \cdot \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} (\cos x) + \frac{\log (\cos x)}{x}.$$

$$= \log x \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) + \frac{\log (\cos x)}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[-\log x \cdot \tan x + \frac{\log (\cos x)}{x} \right]$$

$$= (\cos x)^{\log x} \left[\frac{\log (\cos x)}{x} - \log x \tan x \right].$$

6
10.4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ சிவ்வி } \frac{dy}{dx} \text{ கிண்கி }.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{1}{a^2} \cdot 2x + \frac{1}{b^2} \cdot 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{b^2} 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x \cdot b^2}{a^2 \cdot 2y}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

$$\frac{7}{10.4}) \sqrt{x^2+y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(x^2+y^2)^{1/2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} (2x + 2y \frac{dy}{dx}) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} \right) = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{x \sqrt{x^2+y^2} + y}{x^2+y^2}}{\frac{y \sqrt{x^2+y^2} - x}{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x \sqrt{x^2+y^2} + y}{x - y \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{8}{10.4}) \tan(x+y) + \tan(x-y) = x \text{ find } \frac{dy}{dx}.$$

$$\tan(x+y) + \tan(x-y) = x.$$

$$\sec^2(x+y) \frac{d}{dx}(x+y) + \sec^2(x-y) \frac{d}{dx}(x-y) = 1.$$

$$\sec^2(x+y) \left[1 + \frac{dy}{dx} \right] + \sec^2(x-y) \left[1 - \frac{dy}{dx} \right] = 1.$$

$$\sec^2(x+y) + \sec^2(x+y) \frac{dy}{dx} + \sec^2(x-y) - \sec^2(x-y) \frac{dy}{dx} = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} [\sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)] = 1 - \sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y) - \sec^2(x-y)}$$

9) 10.4) If $\cos(xy) = x$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y \sin(xy))}{x \sin(xy)}$ $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடிக்க

$$\cos(xy) = x$$

$$-\sin(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 1$$

$$-\sin(xy) \left[x \frac{dy}{dx} + y \right] = 1$$

$$-\sin(xy) \cdot x \frac{dy}{dx} = 1 + y \sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y \sin(xy))}{x \sin(xy)}$$

10) 10.4) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடிக்க

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan \frac{x}{2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan \frac{x}{2}$$

11) 10.4) $y = \tan^{-1}\left(\frac{6x}{1-9x^2}\right)$

Let $3x = \tan \theta$
 $\tan(3x) = \tan \theta$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{2(3x)}{1-(3x)^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$

$$= 2\theta = 2 \tan^{-1}(3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+9x^2} \cdot 3 = \frac{6}{1+9x^2}$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta$$

12) $\cos\left[2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = y$ $\frac{dy}{dx}$ கண்டுபிடிக்க

$$y = \cos\left[2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$$

$$y = \cos\left[2 \tan^{-1}(\tan \theta)\right]$$

$$= \cos(2\theta)$$

$$= \cos(\cos^{-1}(x)) \Rightarrow y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Let $x = \cos \theta$ $\theta = \cos^{-1} x$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

13) $x = a \cos^3 t$ $y = a \sin^3 t$. மீதான $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t & y &= a \sin^3 t \\ \frac{dx}{dt} &= 3a \cos^2 t \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) & \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= -3a \cos^2 t \sin t & \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} \\ &= -\tan t. \end{aligned}$$

14) $x = a(\cos t + t \sin t)$ $y = a(\sin t - t \cos t)$ $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t) & y &= a(\sin t - t \cos t) \\ \frac{dx}{dt} &= a(-\sin t + t \cos t + \sin t) & \frac{dy}{dt} &= a(\cos t - (t \sin t + \cos t)) \\ &= at \cos t & &= -at \sin t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-at \sin t}{at \cos t} = -\tan t \end{aligned}$$

15) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{2t}{1+t^2}$ மீதான $\frac{dy}{dx}$ காண்க

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & y &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} & \frac{dy}{dt} &= \frac{(1+t^2)2 - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2} & &= \frac{2 + 2t^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-4t}{(1+t^2)^2} & &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \times \frac{(1+t^2)^2}{-4t} \\ &= -\frac{2(1-t^2)}{2t} \end{aligned}$$

16) $y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

Put $x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$$

17) $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

$$y = \sin^{-1}(\sin 3\theta)$$

$$= 3\theta$$

$$= 3 \sin^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \sin \theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

$$3x - 4x^3 = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

$$= \sin 3\theta$$

18) $y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)$$

$$y = \frac{\pi}{4} + x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$
 $\div$ by both Nr, Dr
 by $\cos x$

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

1. 2 வது வரிசை வகைக்கொடுக்க

Ex 10.3) Find y', y'', y''' of $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$ எனில் y', y'', y''' காண்க.

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$

$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''' = 6$$

Ex 10.32.

if $y = \frac{1}{x}$ find y'' and y''' .

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

Ex 10.33. Find $f''(x)$ if $f(x) = x \cos x$ find $f''(x)$ and $f'''(x)$.

$$f(x) = x \cos x$$

$$f'(x) = -x \sin x + \cos x$$

$$f''(x) = -[x \cos x + \sin x] - \sin x$$

$$= -[x \cos x + 2 \sin x]$$

Ex 10.34)

if $x^4 + y^4 = 16$ find y'' and y''' .

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$

$$y^3 y' = -x^3$$

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

$$y'' = -\left[\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 y'}{y^6} \right]$$

$$= -\left[\frac{3x^2 y^3 - 3x^3 y^2 \left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6} \right]$$

$$= -\left[\frac{3x^2 y^4 + 3x^6 y^2}{y^6} \right]$$

$$= -3x^2 \left[\frac{y^4 + x^4}{y^4} \right] = -\frac{3x^2(16)}{y^4} = -\frac{48x^2}{y^4}$$

Ex 10.35)

$$x = a \cos t \quad y = a \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{-a \sin t}$$

$$= -\frac{\cos^3 t}{a \sin^3 t}$$

Ex 10.35)

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{y} \right) = - \left[\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{y - x \left(-\frac{x}{y} \right)}{y^2} \right]$$

$$= - \left[\frac{y^2 + x^2}{y^3} \right] = -\frac{4}{y^3}$$

$$\frac{23}{10.4) \text{ If } y = \sin^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \sin^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-3/2} (-2x) \\
 &= + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2} (1-x^2)}
 \end{aligned}$$

24) 10.4) If $y = e^{\tan^{-1}x}$ s.t. $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$

$$\begin{aligned}
 y &= e^{\tan^{-1}x} \\
 y' &= e^{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
 (1+x^2)y' &= e^{\tan^{-1}x} = y \\
 (1+x^2)y'' + y' \cdot 2x &= y' \\
 (1+x^2)y'' + (2x-1)y' &= 0
 \end{aligned}$$

25) 10.4) $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ s.t. $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} y = \sin^{-1}x \\
 \sqrt{1-x^2} y' + y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

$$(1-x^2)y'' + y'(-2x) - (xy' + y) = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' - xy' - y = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

26) 10.4) If $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$ P.T at $\theta = \pi/2$ $y'' = \frac{1}{a}$

$$x = a(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/da}{dx/da} = \frac{a \sin a}{x(1+\cos a)}$$

$$= \frac{r \sin \theta/2 \cos \theta/2}{r \cos^2 \theta/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{da}(\tan \theta/2) \cdot \frac{da}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 \theta/2 \cdot \frac{1}{a \cos^2 \theta/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ at } \theta = \pi/2 = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{a \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{x}$$

27) If $\sin y = x \sin(a+y)$... $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

$$\sin y = x \sin(a+y)$$

$$\frac{\sin y}{\sin(a+y)} = x$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y) \cos y - \sin y \cos(a+y)}{(\sin(a+y))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin(a+y))^2}{(\sin(a+y) \cos y - \sin y \cos(a+y))} = \frac{(\sin(a+y))^2}{\sin y}$$

($\because \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A-B)$)

28) If $y = (\cos^2 x)^2$ P.T $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$

29) $y_2 = \log_2 x = 0$ or $\log_2 x = 0$ or $x = 1$

$$y = (\cos^2 x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x}{-2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = -2 \cos^2 x$$

$$-x \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2y}{dx^2} = +2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 2$$

when $x=0$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

Differentiation of a fn w.r. to another fn.

~~Diff~~ Differentiate the fn. f w.r. to fn. g both are in x . $\frac{df}{dg} = \frac{df/dx}{dg/dx}$.

Ex 10.28) Find the derivative of x^x w.r. to $x \log x$.

Let $u = x^x$ $x \log x$ is the inner function of x^x so we differentiate it.

$$\log u = \log x^x = x \log x$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u [1 + \log x] = x^x [1 + \log x]$$

Let $v = x \log x$

$$\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{x^x (1 + \log x)}{1 + \log x} = x^x$$

Ex 10.29) Find the derivative of $\tan^{-1}(1+x^2)$ w.r. to x^2+x+1 .

Let $u = \tan^{-1}(1+x^2)$ x^2+x+1 is the inner function of $\tan^{-1}(1+x^2)$ so we differentiate it.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(1+x^2)^2} \times 2x = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

Let $v = x^2+x+1$

$$\frac{dv}{dx} = 2x+1$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Ex 10.30) Differentiate $\sin(ax^2+bx+c)$ w.r. to $\cos(lx^2+mx+n)$

Let $u = \sin(ax^2+bx+c)$ $\cos(lx^2+mx+n)$ is the inner function of $\sin(ax^2+bx+c)$ so we differentiate it.

$$\frac{du}{dx} = \cos(ax^2+bx+c) (2ax+b)$$

Let $v = \cos(lx^2+mx+n)$

$$\frac{dv}{dx} = -\sin(lx^2+mx+n) (2lx+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{(2ax+b) \cos(ax^2+bx+c)}{-(2x+m) \sin(lx^2+mx+n)}$$

19) Find the derivative of $\sin x^2$ with r.t. x^2 .

10.4)

Let $u = \sin x^2$ x^2 on the way of $\sin x^2$ is variable, known,

$$\frac{du}{dx} = \cos x^2 \times 2x = 2x \cos x^2$$

Let $v = x^2$

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{2x \cos x^2}{2x} = \cos x^2$$

tan x is the way of $\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$ is known

20) Find the derivative of $\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$ w.r.t. $\tan^{-1}x$.

10.4)

$$\begin{aligned} \text{Let } u &= \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \\ &= \sin^{-1}(\sin 2\theta) \\ &= 2\theta \\ &= 2 \cdot \tan^{-1}x \end{aligned}$$

put $x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}x$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

Let $v = \tan^{-1}x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{1}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

21) If $u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ and $v = \tan^{-1}x$ find $\frac{du}{dv}$.

known

$$\text{Let } u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1}(\tan \theta_2) \\ &= \theta_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1}x \end{aligned}$$

$x = \tan \theta$

$$1+x^2 = 1+\tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

∴ $\theta_2 = \theta$

$$v = \tan^{-1} x \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{1}{2(1+x^2)} \times \frac{1+x^2}{1} = \frac{1}{2}$$

22) Find derivative $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ w.r.t $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$\text{let } u = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) \\ = \tan^{-1}(\tan x_2)$$

$$\frac{\cancel{x} \sin x_2 \cos x_2}{\cancel{x} \cos x_2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{let } v = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) \\ = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right)\right) \\ = \frac{\pi}{4} - x_2$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{1/2}{-1/2} = -1$$

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos^2 x_2 - \sin^2 x_2}{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2 + 2\sin x_2 \cos x_2} \\ = \frac{(\cos x_2 + \sin x_2)(\cos x_2 - \sin x_2)}{(\sin x_2 + \cos x_2)^2} \\ = \frac{\cos x_2 - \sin x_2}{\sin x_2 + \cos x_2}$$

∴ Both Nr and Dr by $\cos x_2$

$$= \frac{1 - \tan x_2}{1 + \tan x_2} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right)$$

$$v = \tan^{-1} x \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{1}{2(1+x^2)} \times \frac{1+x^2}{1} = \frac{1}{2}$$

22) Find derivative $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ w.r.t $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$\text{let } u = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \tan^{-1}(\tan x/2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$$

$$\text{let } v = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \tan^{-1}(\tan(\pi/4 - x/2))$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx} = \frac{x/4}{-1/4} = -1$$

$$\frac{2 \sin x/2 \cos x/2}{2 \cos^2 x/2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+\sin x} &= \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2 + 2 \sin x/2 \cos x/2} \\ &= \frac{(\cos x/2 + \sin x/2)(\cos x/2 - \sin x/2)}{(\sin x/2 + \cos x/2)^2} \\ &= \frac{\cos x/2 - \sin x/2}{\sin x/2 + \cos x/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\div \text{ Both Nr and Dr by } \cos x/2 \\ &= \frac{1 - \tan x/2}{1 + \tan x/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x/2\right) \end{aligned}$$

T.G. Venkatesan
9444209677