# Tiruvannamalai

## Unit 1 – அணிகள் மற்றும் அணிக் கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

12 th கணிதவியல்

www.sellavelmaths.ml

2019

### Application of Matrices and Determinants

1.1 Introduction
1.2 Inverse of a Non-Singular Square Matrix
1.3 Elementary Transformations of a Matrix
1.4 Applications of Matrices: Solving System of Linear Equations
1.5 Applications of Matrices: Consistency of system of linear equations by rank method

## Unit 1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

Formulas:

1. சேர்ப்பு அணி $adj\,A = [A_{ij}]^T$
2. $A(adj\,A) = (adj\,A)A = |A|I$
3. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\,A$
4. $A^{-1}$ exist $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
6. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
7. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
8. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
9) $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(adj\,A)^{-1} = adj\,(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A$
11. $|adj\,A| = |A|^{n-1}$
12. $adj(adj\,A) = |A|^{n-2} A$
13. $adj\,(\lambda A) = \lambda^{n-1}(adj\,A)$
14. $|adj\,(adj\,A)| = |A|^{(n-1)^2}$
15. $(adj\,A)^T = adj\,(A^T)$
16) $adj\,(AB) = (adj\,B)(adj\,A)$
17. $A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj\,A|}} adj\,A$
18. $A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj\,A|}} adj\,(adj\,A)$

19. செங்குத்து அணி : $AA^T = A^TA = I$

20. A - செங்குத்து அணி $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ & $A^{-1} = A^T$

21. அணியின் தரம் :

(i) $\rho(I_n) = n$

(ii) $\rho(O) = 0$

(iii) A ன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \min(m,n)$

(iv) n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு காணத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = n$.

22. நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி அமைப்பு

(i) Consider

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

இந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

---

(ii) Consider

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

இந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B.$$

23. கிராமர் விதி:

(i) Consider

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_1y = c_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ கிராமர் விதியை பயன்படுத்த இயலும்

கிராமர் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}.$$

(ii) Consider

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ கிராமர் விதியை பயன்படுத்தலாம்

கிராமர் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

24. காஸியன் நீக்கல் முறை:

நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பில் உள்ள கெழுக்களின் அணியானது சதுர அணி மற்றும் பூச்சியமற்ற கோவை அணியாக இல்லாத போதும் இம்முறையை பயன்படுத்தி தீர்வு காணலாம்

இது பிரதியிடல் முறையில் தீர்வதாகும்.

இம்முறையில், நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் வரையறுக்கப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றி பின்பு பின்னோக்கி பிரதியிடல் முறையில் தீர்வு காணலாம்.

25. அசமபடித்தான சமன்பாடுகளை தரமுறையால் தீர்த்தல்

Consider

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

இச்சமன்பாட்டுத்தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$(A,B)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

**Case i** when $\rho(A)=\rho(A,B)=3$ (தெரியாத எண்ணிய மாறிகள்)

(i) சமன்பாட்டு தொகுப்பானது

(i) ஒருங்கமைவு உடையது

(ii) சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு

**Case ii** when $\rho(A)\neq\rho(A,B)$

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது

(i) ஒருங்கமைவற்றது

(ii) தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை.

**Case iii** when $\rho(A)=\rho(A,B)=2$

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

(i) ஒருங்கமைவு உடையது

(ii) சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு எண்ணற்ற தீர்வு கொண்டது

இத்தீர்வுகள் ஒரு சாரா மாறி கொண்டதாக இருக்கும்

**Case iv** when $\rho(A)=\rho(A,B)=1$

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

(i) ஒருங்கமைவு உடையது

(ii) சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு

இத்தீர்வுகள் இரு சாரா மாறிகள் கொண்டதாக இருக்கும்.

26 சமபடித்தான சமன்பாடுகளை தரவரிசையால் தீர்த்தல்

Consider

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

இதன் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$(A, B) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Case i $|A| \neq 0$ எனில் வெளிப்படைத் தீர்வு பெற்றிருக்கும்

Case ii $|A| = 0$ எனில், வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருக்கும்

12 th mathematics.

## Unit 1: Applications of matrices and determinants
(அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்)

**Singular Matrix:** (பூச்சிய கோவை அணி) $|A| = 0$

A square matrix 'A' is called singular matrix if $|A| = 0$.

**non singular matrix:** (பூச்சியமற்ற கோவை அணி) $|A| \neq 0$.

A square matrix 'A' is called non singular if $|A| \neq 0$.

**Adjoint of a square matrix:** (ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி)

Let A be a square matrix of order 'n'. Then the adjoint of A is defined as the transpose of matrix of cofactors of A.

it is denoted by adj A

$$\boxed{\text{adj}\,A = [A_{ij}]^T}$$

---

**Theorem 1.1**

For every square matrix A of order n,

$$A(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)A = |A| I_n.$$

(ஒரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A க்கு $A(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)A = |A| I_n$.)

**proof:**

For simplicity, we prove the theorem for $n=3$ only

Cosider $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ and $\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$\therefore A\cdot(\text{adj}\,A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

$$A(\text{adj}\,A) = |A| I_3. \longrightarrow (1)$$

$$(\text{adj} A) A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj} A) A = |A| I_3 \rightarrow (2)$$

from (1) & (2)

$$A(\text{adj} A) = (\text{adj} A) A = |A| I_3$$

Note:

1. $\text{adj} A = [A_{ij}]^T$
2. $A(\text{adj} A) = (\text{adj} A) A = |A| I$.

Problems:

1. Find the adjoint of the following matrices. பின்வரும் அணிகளின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

soln Let $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

$A_{11} = +2$

$A_{12} = -6$

$A_{21} = -4$

$A_{22} = +(-3) = -3$

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = (A_{ij})^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

**Soln** Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (8-7) & -(6-3) & +(21-12) \\ -(6-7) & +(4-3) & -(14-9) \\ +(3-4) & -(2-3) & +(8-9) \end{bmatrix}$$

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = (A_{ij})^T$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

---

Ex. 6 If $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ verify $A(\text{adj} A) = (\text{adj} A) A = |A| I$ என்பதை சரிபார்க்க.

**Soln**

$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad |A| = 24-20 = 4$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A.(\text{adj} A) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & 32+32 \\ -15+15 & -20+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A(\text{adj} A) = |A| I \rightarrow (1) \quad \because |A| = 4$

$$(adj\,A)\,A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & -12+12 \\ 40-40 & -20+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(adj\,A)\,A = |A|\,I \longrightarrow (2) \qquad \because |A| = 4$$

From (1) & (2)

$$A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I.$$

---

Example 1.1

If $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ verify $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$ சரிபார்க்க

Soln

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8(21-16) + 6(-18+8) + 2(24-14)$$

$$= 8(5) + 6(-10) + 2(10)$$

$$= 40 - 60 + 20$$

$$|A| = 0$$

now

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | −4 | −6 | 7 |
| −4 | 3 | 2 | −4 |
| −6 | 2 | 8 | −6 |
| 7 | −4 | −6 | 7 |

$$adj\,A = \begin{bmatrix} 21-16 & -8+18 & 24-14 \\ -8+18 & 24-4 & -12+32 \\ 24-14 & -12+32 & 56-36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A\,(adj\,A) = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & 80-120+40 & 80-120+40 \\ -30+70+40 & -60+140-80 & -60+140-80 \\ 10-40+30 & 20-80+60 & 20-80+60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A)(\text{adj} A) = |A| I \longrightarrow (1)$$

$$(\text{adj} A)\, A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & -30+70-40 & 10+40+30 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj} A)\, A = |A| I_3 \longrightarrow (2)$$

From (1) & (2)

$$(\text{adj} A) A = A (\text{adj} A) = |A| I_3$$

---

**1.2.2 Def. of inverse matrix of a square matrix:**

**Def:** (நேர்மாறு அணி)

Let $A$ be a square matrix of order $n$.

If $\exists$ a matrix (square) $B$ of order $n$ such that

$$AB = BA = I_n$$

Then the matrix $B$ is called inverse of $A$.

---

A என்பது ஒரு n வரிசையுடைய அணி என்க

**Theorem: 1.2**

If a square matrix have an inverse, then it is unique.

ஒரு அணியின் நேர்மாறு ஒருமை தன்மை உடையது.

**Proof:** Let $A$ be a square matrix of order $n$ s.t an inverse of $A$ is exists.

We have to show that inverse of A is unique.

Suppose,

B & C are inverse of A

$\therefore AB = BA = I \qquad AC = CA = I$

$$C = CI$$
$$= C(AB)$$
$$= (CA)B$$
$$= IB$$
$$C = B$$

$\Rightarrow$ Inverse of A is unique.

---

Note:

1. The inverse of A is denoted by $A^{-1}$
2. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

---

**Theorem 1.3** A என்பது n வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. $A^{-1}$ காணப்படுவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை A ஆனது பூச்சியமற்ற அணியாகும்

Let A be a square matrix of order n. Then $A^{-1}$ exist if and only if A is non singular.

Soln

Let A be square matrix of order n & $A^{-1}$ exist

$\therefore AA^{-1} = A^{-1}A = I$

~~Let A is~~

We have to show that

A is non singular.

now

$$AA^{-1} = I$$
$$|AA^{-1}| = |I|$$
$$|A|\,|A^{-1}| = 1$$
$$\Rightarrow |A| \neq 0.$$

$\Rightarrow$ A is non singular.

Conversely

Let A is non singular matrix.

$\Rightarrow |A| \neq 0.$

We have to show that

$A^{-1}$ exist

now

$$A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A| I_n.$$

$\div |A|$

$$A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj}A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj}A\right)A = I.$$

$\Rightarrow$ $A^{-1}$ exist.

Hence the proof.

---

1.2.3 properties of inverse of matrices:
(நேர்மாறு அணியின் பண்புகள்)

Theorem: 1.4

If $A$ is non-singular, then (A என்பது பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணி)

(i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

proof:

Let $A$ be non singular. (பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணி)

$\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ & $A^{-1}$ exist

$\therefore$ $AA^{-1} = A^{-1}A = I \longrightarrow (1)$

proof (i)

$$AA^{-1} = I$$

$$|AA^{-1}| = |I|$$

$$|A|\,|A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

---

proof ii

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T$$

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$\Rightarrow BI = CI$

$\Rightarrow B = C$

Hence the proof.

---

**Theorem 1.7** (Reversal law of inverse) (நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதி)

If $A$ & $B$ are non singular matrices of same order, then the product $AB$ is also nonsingular & $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

A, B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் AB யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**Proof**

Since $A$ & $B$ are non singular of same order.

$\therefore |A| \neq 0, \ |B| \neq 0.$

now

$$|AB| = |A||B| \neq 0$$

$\Rightarrow AB$ is non singular. & $(AB)^{-1}$ உள்ளது

Also

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= A(I)A^{-1}$$
$$= AA^{-1}$$
$$= I \longrightarrow (1)$$

1. non-singular
பூச்சியமற்ற கோவை அணி

2. Singular
பூச்சிய கோவை அணி

3. inverse
நேர்மாறு.

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B$$
$$= B^{-1}(I)B$$
$$= B^{-1}B$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I \longrightarrow (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow B^{-1}A^{-1}$ is inverse of $AB$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

Hence the proof.

(iii) Since $\lambda$ is non zero number

from ①

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda A) = I$$

$$\Rightarrow (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

**Theorem 1.5 (Left cancellation law) (இடது நீக்கல் விதி)**

Let $A, B$ & $C$ be square matrices of order $n$.

If $A$ is non singular &

$AB = AC$ then $B = C$.

A, B, C என்பது n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ எனில் $B = C$

**Proof:**

Let $A$ is non singular (பூச்சியமற்ற கோவை அணி)

$\Rightarrow A^{-1}$ exist & $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

now

$$AB = AC$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$\Rightarrow IB = IC$$

$$\Rightarrow B = C$$

Hence the proof.

**Theorem 1.6 (Right cancellation law) (வலது நீக்கல் விதி)**

Let $A, B$ & $C$ be square matrix of order $n$.

If $A$ is non singular &

$BA = CA$ then $B = C$

A, B, C என்பது n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $BA = CA$ எனில் $B = C$

**Proof:**

Let $A$ is non singular

$\Rightarrow A^{-1}$ exist & $AA^{-1} = I$

now

$$BA = CA$$

$$\Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$$

$$\Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1})$$

Padasalai (அரையாண்டு தேர்வுக்கு உதவி)

Theorem 1.8 (law of double inverse).

If $A$ is non singular matrix, then $A^{-1}$ is also non singular & $(A^{-1})^{-1} = A$.

$A$ என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில் $A^{-1}$ யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proof:

Since $A$ is non singular

$\Rightarrow |A| \neq 0$. & $A^{-1}$ உள்ளது

$\Rightarrow AA^{-1} = I$

$\Rightarrow |A||A^{-1}| = |I|$

$\Rightarrow |A|\,|A^{-1}| = 1$.

$\Rightarrow |A^{-1}| \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ is non singular. (பூச்சியமற்ற கோவை அணி)

now.

$$AA^{-1} = I$$

$$(AA^{-1})^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} A^{-1} = I$$

$$((A^{-1})^{-1} A^{-1})A = IA$$

$$(A^{-1})^{-1}(A^{-1}A) = A \qquad \because AA^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Hence the proof.

---

Theorem 1.9 $A$ என்பது $n$ வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்.

If $A$ is non-singular squre matrix of order $n$, then

(i) $(\text{adj} A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1}) = \dfrac{1}{|A|} A$

(ii) $|\text{adj} A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-2} A$

(iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}(\text{adj} A)$, $\lambda$ is non zero scalar

(v) $|\text{adj}(\text{adj} A)| = |A|^{(n-1)^2}$

(vi) $(\text{adj} A)^T = \text{adj}(A^T)$

**Proof:**

Since $A$ is non singular (பூச்சியமற்ற கோவை அணி)

$\therefore |A| \neq 0$ and $A^{-1}$ exist, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(i)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj} A)$$

$$|A| A^{-1} = (\text{adj} A)$$

$$(\text{adj} A) = |A| A^{-1} \longrightarrow (1)$$

$$(\text{adj} A)^{-1} = (|A| A^{-1})^{-1}$$

$$= \frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}$$

$$(\text{adj} A)^{-1} = \frac{1}{|A|} A. \longrightarrow (2) \quad \because (A^{-1})^{-1} = A.$$

Replace $A$ by $A^{-1}$ in (1)

$$(\text{adj} A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$$

$$(\text{adj} A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A \longrightarrow (3)$$

(2), (3) $\Rightarrow$

$$(\text{adj} A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A$$

(ii) Proof for $|\text{adj} A| = |A|^{n-1}$

$$A(\text{adj} A) = |A| I$$

$$|A(\text{adj} A)| = ||A| I|$$

$$|A|\,|\text{adj} A| = |A|^n$$

$$|\text{adj} A| = |A|^{n-1}.$$

(iii) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2} A.$

proof

WKT

$A(\operatorname{adj} A) = |A| I$ $\qquad\qquad A(\operatorname{adj} A) = |A| I.$

Replace $A$ by $\operatorname{adj} A$

$$(\operatorname{adj} A)(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = |\operatorname{adj} A| I$$

$$(\operatorname{adj} A)(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = |A|^{n-1} I$$

$$(A(\operatorname{adj} A))(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = A|A|^{n-1} I$$

$$(|A| I)(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = A|A|^{n-1}$$

$$(|A|)\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A|A|^{n-1}$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2} A$$

---

(iv) $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \operatorname{adj} A$, $\lambda$ is non zero.
(λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி)

proof

$$\operatorname{adj} A = |A| A^{-1} \longrightarrow (1)$$

$$\operatorname{adj}(\lambda A) = |\lambda A| (\lambda A)^{-1}$$

$$\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n} |A| \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$= \lambda^{n-1} |A| A^{-1}$$

$$= \lambda^{n-1} (\operatorname{adj} A) \quad \text{by } (1).$$

Hence the proof.

---

(v) $|\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)| = |A|^{(n-1)^2}$

proof

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2} A$$

$$|\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)| = \left| |A|^{n-2} A \right|$$

$$= (|A|^{n-2})^{n} |A|$$

$$= |A|^{n^2-2n+1}$$

$$|\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)| = |A|^{(n-1)^2}$$

(vi) $(\operatorname{adj} A)^T = \operatorname{adj}(A^T)$

Proof:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A)$$

Replace $A$ by $A^T$

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|}(\operatorname{adj} A^T)$$

$$|A^T|(A^T)^{-1} = \operatorname{adj} A^T$$

$$|A|(A^{-1})^T = \operatorname{adj}(A^T)$$

$$(|A|(A^{-1}))^T = \operatorname{adj}(A^T)$$

$$(\operatorname{adj} A)^T = \operatorname{adj}(A^T)$$

Theorem 1.10:

If $A$ & $B$ are any two non-singular matrices of order $n$, then $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$

$A, B$ என்பன $n$ வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$

Proof

$$\operatorname{adj} A = |A|A^{-1}$$

$$\operatorname{adj} B = |B|B^{-1}$$

$$(\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A) = (|B|B^{-1})(|A|(A^{-1}))$$

$$= |B||A|(B^{-1}A^{-1})$$

$$= |BA|(AB)^{-1}$$

$$= |AB|(AB)^{-1}$$

$$= \operatorname{adj}(AB)$$

Hence the proof.

Note:

If $A$ is non-singular matrix of order 3, then $|\text{adj} A| = |A|^2$

$\Rightarrow |\text{adj} A|$ is +ve

① $\therefore A^{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}} \text{adj } A$

② $A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}} \text{adj}(\text{adj} A)$ (A is 3×3 non singular matrix)

---

Example 1.4

If $A$ is non-singular matrix of old order, prove that $|\text{adj } A|$ is +ve.

Soln

Let $A$ be a non singular matrix of order $2m+1$, $m = 0, 1, 2 \ldots$

$\because |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

$\therefore |\text{adj} A| = |A|^{(2m+1)-1}$

$= |A|^{2m}$

$\Rightarrow |\text{adj} A|$ is +ve

---

Example 1.2 Find the inverse of $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க.

Soln

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$|A| = ad - cb$

$\text{adj} A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \text{adj} A$

$= \dfrac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ex. 2(i) Find the inverse of $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க.

Soln

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad |A| = 6-4 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Example 1.3 Find the inverse of $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க.

Soln

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2(9-2) + 1(-15+3) + 3(-10+9)$$

$$= 2(7) + (-12) + 3(-1)$$

$$|A| = -1$$

$\neq 0 \quad A^{-1}$ உள்ளது

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 9 & 15 & -1 \\ -10 & -17 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Ex 2) (ii) Find inverse of $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க

**Soln** Let $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 5(25-1) - 1(5-1) + 1(1-5)$$
$$= 112$$
$$\neq 0$$

$\therefore$ $A^{-1}$ உள்ளது

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A \longrightarrow (1)$$

$$\operatorname{adj} A = (A_{ij})^T$$

$$= \begin{bmatrix} 25-1 & 1-5 & 1-5 \\ 1-5 & 25-1 & 1-5 \\ 1-5 & 1-5 & 25-1 \end{bmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 1 | 5 |
| 1 | 5 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 5 |

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

(1) $\Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{112} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

---

Ex 2 (iii) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு காண்க.

**Soln** Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2(8-7) - 3(6-3) + 1(21-12)$$
$$= 2(1) - 3(3) + 1(9)$$
$$= 2 - 9 + 9$$
$$|A| = 2$$

$\neq 0$, $A^{-1}$ உள்ளது

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{adj}\,A \longrightarrow (1)$$

$$\text{adj}\,A = (A_{ij})^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} (8-7) & -(6-3) & (21-12) \\ -(6-7) & (4-3) & -(14-9) \\ (3-4) & -(2-3) & (8-9) \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{T}$$

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

---

Ex 7 - If $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ verify $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதனை சரிபார்க்க

Soln

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = 15 - 14$

$= 1$

$\neq 0$ $A^{-1}$ உள்ளது

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$|B| = -2 + 15$

$= 13$

$\neq 0$ $B^{-1}$ உள்ளது

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\,\text{adj}\,B$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+10 & -9+4 \\ -7+25 & -21+10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = -77+90 = 13 \neq 0$$

$(AB)^{-1}$ உண்டு

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \operatorname{adj}(AB)$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 10-21 & -4+9 \\ -25+7 & 10-3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \quad \text{by } (1)$$

---

Example 1.9 If $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ verify $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதை சரிபார்க்க.

Soln

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0+3$$

$$= 3$$

$\neq 0$ $A^{-1}$ உண்டு

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2+0$$

$$= 2$$

$\neq 0$ $B^{-1}$ உண்டு

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \operatorname{adj} B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4-3 & -3+0 \\ 0+2 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$AB' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -2+0 & -3-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 0+6$$

$$= 6$$

$\neq 0$ $(AB)^{-1}$ உண்டு

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \operatorname{adj}(AB)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{by } (1)$$

---

Ex 5. If $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ P.T $A^{-1} = A^{T}$

Soln

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$|KA| = k^n|A|$

$$|A| = \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(-8(16-56) - 1(16-7) + 4\right) + 4(7-16)\Big]$$

$$= \frac{1}{729}\left[-576-9-144\right]$$

$$= \frac{1}{729}(-729)$$

$= -1 \neq 0$ $A^{-1}$ உண்டு

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A \longrightarrow (2)$$

$$\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{\lambda-1}\,\text{adj}\,A$$

$$\therefore \text{adj}\,A = \left(\frac{1}{9}\right)^{3-1} \begin{bmatrix} 16+56 & -32-4 & 7-16 \\ 7-16 & -32-4 & 16+56 \\ -3-4 & 1-64 & -32-4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

by (2) $\therefore A^{-1} = \left(\frac{1}{-1}\right) \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = A^T \quad \text{by (1)}.$$

H

---

Example 1.8 verify $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ with $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ Solution.

Soln

$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

$|A| = 14-9$ $\qquad$ $|A^T| = 14-9$

$= 5$ $\qquad$ $= 5$

$\neq 0$ $\qquad$ $\neq 0$

$A^{-1}$ exists $\qquad$ $(A^T)^{-1}$ exists

$(A^T)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ —

$(A^{-1})^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ by (1)

Ex 1 (iii) Find the adj A of $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Soln

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj} A = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1}\begin{bmatrix} 2+4 & -2+4 & 4-1 \\ 2+4 & 4-1 & -2-4 \\ 4-1 & 2+4 & 2+4 \end{bmatrix} \qquad \text{adj}(\lambda A) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} \text{adj} A$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Note: $A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}} \text{adj} A$

Ex 9. If $\text{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ find $A^{-1}$ $A^{-1}$ காண்க.

Soln

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|\text{adj} A| = 0 + 2(36-18) + 0$$

$$= 36.$$

$$\therefore A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}} \text{adj} A$$

$$= \pm \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Example 1.6 If $\text{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ find $A^{-1}$ $A^{-1}$ காண்க.

Soln

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|adj A| = -1(1-4) - 2(1-4) + 2(2-2)$$
$$= 3 + 6 + 0$$
$$= 9$$
$$\sqrt{|adj A|} = \pm 3$$
$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj A$$
$$= \pm \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note $A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj(adj A)$

Ex 10 : Find adj (adj A) If adj A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
கண்டு

soln

$$adj A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$adj(adj A) = \begin{bmatrix} 2-0 & 0-0 & 0-2 \\ 0-0 & 1+1 & 0-0 \\ 0+2 & 0-0 & 2-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$adj(adj A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Example 1.5 Find A If adj A $= \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

soln

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj(adj A) \longrightarrow (1)$$

$$|adj A| = 7(77-35) - 7(-7-77) - 7(-5-121)$$
$$= 1764 \qquad \sqrt{|adj A|} = 42$$

$$adj(adj A) = \begin{bmatrix} 77-35 & -35-49 & 49+77 \\ 77+7 & 49+77 & 7-49 \\ -5-121 & 77-35 & 77+7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 11 & 5 & 7 & 11 \\ 7 & 7 & -7 & 7 \\ -1 & 11 & 7 & -1 \\ 11 & 5 & 7 & 11 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 42 & -84 & 126 \\ 84 & 126 & -42 \\ -126 & 42 & 84 \end{bmatrix}$$

① ⇒
$$A = \pm \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 42 & -84 & 126 \\ 84 & 126 & -42 \\ -126 & 42 & 84 \end{bmatrix}$$

$$= \pm \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

---

Ex 8 Find $A$ if $\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Soln

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}\,A|}} \text{adj}(\text{adj}\,A) \longrightarrow ①$$

$$|\text{adj}\,A| = 2(24-0) + 4(6-14) + 2(0+24)$$
$$= 48 - 80 + 48$$
$$|\text{adj}\,A| = 16$$
$$\sqrt{|\text{adj}\,A|} = 4$$

$$\text{adj}(\text{adj}\,A) = \begin{bmatrix} 24-0 & 0+8 & 28-24 \\ 14+6 & 4+4 & -6+14 \\ 0+24 & 8+0 & 24-12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 12 & 0 & -4 & 12 \\ -7 & 2 & 2 & -7 \\ -3 & -2 & 2 & -3 \\ 12 & 0 & -4 & 12 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

① ⇒
$$A = \pm \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \pm \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

H.W

Ex 11. If $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ S.T $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

Soln

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1+\tan^2 x$$
$$= \sec^2 x$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{1}{\sec^2 x} \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\sin x \cos x \\ \sin x \cos x & \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\sin x \cos x \\ \sin x \cos x & -\sin x \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -\sin x \cos x - \sin x \cos x \\ \sin x \cos x + \sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

---

H.D

12) Find $A$ for which $A \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ A Find.

Soln

$$A \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1 & -6-5 \\ 2-1 & 3-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

13 Given $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ find $x$

S.T $A x B = C$

Soln

$$A x B = C$$

$$x = A^{-1} C B^{-1} \longrightarrow ①$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A \qquad B^{-1} = \frac{1}{|B|} \operatorname{adj} B$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore ① \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0+2 & 0+2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2-2 & 4+6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ex 14 If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ S.T $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$

Soln $|A| = 0 - 1(0-1) + 1(1-0)$

$$= 1+1$$

$$= 2$$

$\neq 0$ $A^{-1}$ exists.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A \longrightarrow (1)$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0-1 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & 0-1 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(1) \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$A^2 = A\,A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1+0 & 0+0+1 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 1+0+1 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^2-3I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^2-3I) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}(A^2-3I) = A^{-1}$ by (1)

4. If $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ S.T $A^2-3A-7I=0$ & find $A^{-1}$

Soln

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25-3 & 15-6 \\ -5+2 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} -15 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-7I = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A - 7I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A - 7I = O_2.$$

$$A - 3I - 7A^{-1} = 0$$

$$A - 3I = 7A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}[A - 3I]$$

$$= \frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

---

Example 1.10 If $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ find $x$ & $y$ s.t $A^2 + xA + yI_2 = O_2$ & find $A^{-1}$ $A^{-1}$ காண்க.

Soln

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+6 & 12+15 \\ 8+10 & 6+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix}$$

$$xA = \begin{bmatrix} 4x & 3x \\ 2x & 5x \end{bmatrix}$$

$$yI = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

$$A^2 + xA + yI_2 = \cancel{0} \; O_2$$

$$\begin{bmatrix} 22+4x+y & 27+3x \\ 18+2x & 31+5x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad 27+3x=0$

$3x=-27$

$x=\frac{-27}{3}=-9$

$\Rightarrow \quad 22-36+y=0$

$y=14.$

$\therefore \quad A^2-9A+14I=0_2$

$A-9I+14A^{-1}=0$

$14A^{-1}=-A+9I$

$14A^{-1}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-4&-3\\-2&-5\end{bmatrix}$

$14A^{-1}=\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}$

---

Ex~~ample~~ 1.3 If $F(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&1&\cos\alpha\end{bmatrix}$ S.T

$[F(\alpha)]^{-1}=F(-\alpha)$ (ஏனை Agmn)

**Soln** $F(-\alpha)=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha)&0&\sin(-\alpha)\\0&1&0\\-\sin(-\alpha)&0&\cos(-\alpha)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&-\sin\alpha\\0&1&0\\\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix} \longrightarrow (1)$

$\because \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$|F(\alpha)|=\cos\alpha(\cos\alpha)-0+\sin\alpha(\sin\alpha)$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

$=1$

$\neq 0$

inverse exist

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A \longrightarrow (2)$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 0 & 0-0 & 0-\sin\alpha \\ 0-0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0-0 \\ 0+\sin\alpha & 0-0 & \cos\alpha-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow$

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= F(-\alpha) \quad \text{by (1)}.$$

---

Example 1.7

If $A$ is symmetric then adj $A$ is also symmetric

A என்பது சமச்சீர் அணி எனில் adj A சமச்சீர் அணி என நிறுவுக.

**Proof**

Let $A$ is symmetric

$$\therefore A^T = A \quad \rightarrow (1)$$

We shall show that

adj $A$ is symmetric. i) symmetric சமச்சீர்

now

$$(\operatorname{adj} A)^T = \operatorname{adj}(A^T)$$

$$= \operatorname{adj} A$$

$\therefore$ adj $A$ is symmetric.

---

## 1.2.4. Application of matrices to Geometry

வடிவக் கணிதத்தில் அணிகளின் பயன்பாடு

**Orthogonal matrix:** (செங்குத்து அணி)

A square matrix $A$ is called orthogonal

if

$$A A^T = A^T A = I$$

---

**Note:** $A$ is orthogonal $\Longleftrightarrow$ $A$ is non singular & $A^{-1} = A^T$

Example 1.11 S.T $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ is orthogonal.

Soln

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $A^T \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$AA^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AA^T = I \longrightarrow (1)$

$A^TA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^TA = I \longrightarrow (1)$

(1), (2) $\Rightarrow$

A is orthogonal.

---

Example: 1.12 If $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ is orthogonal

find a, b, c & hence $A^T$

$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$

$A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & b & 2 \\ -3 & -2 & c \\ a & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow (1)$

$AA^T = I$

$\frac{1}{49}\begin{bmatrix} 36+9+a^2 & 6b+6+6a & 12-3c+3a \\ 6b+6+6a & b^2+4+36 & 2b-2c+18 \\ 12-3c+3a & 2b-2c+18 & 2b-2c+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a^2+45 & 6a+6b+6 & 3a-3c+12 \\ 6a+6b+6 & b^2+40 & 2b-2c+18 \\ 3a-3c+12 & 2b-2c+18 & c^2+13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ a^2+45=49$, $a^2=4$, $a=\pm 2$

$b^2+40=49$, $b^2=9$, $b=\pm 3$

$c^2+13=49$, $c^2=36$, $c=\pm 6$.

now

$6a+6b+6=0 \Rightarrow a+b=-1$

$3a-3c+12=0$, $a-c=-4$

$2b-2c+18=0$, $b-c=-9$

From above list

$a=2$

$b=-3$

$c=6$.

Also

$A^{-1}=A^T$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{by } (1)$$

Put the a, b, c in (1)

## 1.3 ஒரு அணியின் மீதான தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள்

### 1.3.1. தொடக்கநிலை நிரை மற்றும் நிரல் செயல்கள்:

ஒரு அணியின் தொடக்கநிலை நிரை (நிரல்) செயல்களாவன

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (நிரல்களை) பரிமாற்றம் செய்தல்

(ii) ஒரு அணியின் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலியால் பெருக்கி அதே நிரையில் திரும்ப மாற்றுதல்

(iii) ஒரு அணியில் உள்ள ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் ஒரு பூச்சியமற்ற நிரையின் (நிரலின்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளின் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி பெருக்கற் பலனைக் கூட்டுதல்

**வரையறை 1.4**

A, B என்ற இரு ஒரே வரிசையுடைய அணிகளில் ஏதாவது ஒரு அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் மற்ற அணியாக பெற முடியுமெனில், A யும் B யும் சமான அணிகள் என்றழைக்கப்படும்.

A ஆனது B க்கு சமான அணி என்பதனை $A \sim B$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

### 1.3.2 நிரை - ஏறுபடி வடிவம்:

E என்ற பூச்சியமற்ற அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவில் இருக்க வேண்டுமெனில்

(i) E ன் பூச்சிய நிரைகள் அனைத்தும் E ன் பூச்சியமற்ற நிரைகளுக்கு கீழ் இருக்க வேண்டும்.

(ii) E ன் ஏதேனும் $i$ ஆவது நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது $j$ ஆவது நிரலில் அமைந்தால் $i$ ஆவது நிரைக்கு கீழே $j$ ஆவது நிரலில் உள்ள முதல் பூச்சிய உறுப்புகளுக்கு கீழே உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்

(iii) $i$ ஆவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது $(i+1)$ ஆவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்புக்கு இடப்புறத்தில் அமைய வேண்டும்.

(iii) The first non-zero entry in the $i^{th}$ row of $E$ lies to the left of the first non-zero entry in the $(i+1)^{th}$ row of $E$

**Problems:**

1. Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை நிரை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

**Soln**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

echelon form ← நிரை ஏறுபடி வடிவம்.

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 - 2R_3$$

This is a row echelon form of matrix $A$.

**Ex 1.14**

Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ to row echelon form. என்ற அணியை நிரை ஏறுபடி வடிவில் மாற்றுக.

**Soln**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 20 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 4R_1 + R_4$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 48 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 3R_3 - 2R_2$$

it is a row echelon form of $A$.

## 1.3.3 Rank of a Matrix:

**Def:** The rank of a matrix A is defined as the order of a highest non-vanishing minor of the matrix A.

it is denoted by $\rho(A)$

**Note:**

1. The rank of a zero matrix is defined to be 0.
2. If a matrix contains atleast one non zero element then $\rho(A) \geq 1$
3. $\rho(I_n) = n$.
4. $\rho(A) = \min(m,n)$
5. A square matrix A of order n is invertible $\Leftrightarrow \rho(A) = n$.
6. If all the entries below the leading diagonal are zero, use minor method for find the rank.

**problems:**

1. Find the rank of the following matrix by minor method
மனர் முறை அணிக்கு தரம் காண்க.

Ex 1 (i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

**soln**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho(A) \leq \min(2,2) = 2$$

$$|A| = 4-4$$
$$= 0$$

$\therefore \rho(A) \neq 0$.

Since A contains at least one non zero element

$\therefore \rho(A) = 1$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$\rho(A) \leq \min(3,2) = 2$

2x2 minor:

$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 7-12$

$= 5$

$\neq 0.$

$\therefore \rho(A) = 2$

---

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\rho(A) \leq \min(3,3) = 3$

$|A| = 1(-4+6) + 2(-2+30) + 3(2-20)$

$= 2+56-54$

$= 4$

$|A| \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 3.$

---

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\rho(A) \leq \min(2,4) = 2$

2x2 minor

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\neq 0$

$\therefore \rho(A) = 2$

---

(v) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\rho(A) \leq \min(3,4) = 3$

3x3 minor

3x3 minor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \because R_1 = 2R_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 8(3-2)$$

$$= 8$$

$$\neq 0$$

$\therefore \rho(A) = 3$

---

Example 1.15 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$\rho(A) \leq \min(3,3) = 3$$

$$|A| = 0 \quad \because C_1 + C_2 = C_3$$

2x2 minor

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2$$

$$\neq 0$$

$\therefore \rho(A) = 2$

---

Exam: 1.15 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rho(A) \leq \min(3,4) = 3$$

3x3 minor:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \because C_1 = C_2 + C_3$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \because C_2 = \frac{C_3}{-2}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \because C_2 = \frac{C_3}{-2}$$

$\therefore \rho(A) < 3$

__2x2 minor:__

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4+9 \neq 0$$

$\therefore \rho(A) = 2$

Ex

2. Find the Rank of following matrices by row reduction method

பின்வரும் அணிகளின் நிரை சுருக்கத்தை பயன்படுத்தி அணியின் தரம் காண்க.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 5R_1 - R_3 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 2R_2 - R_3$

it has two non zero rows.

$\therefore \rho(A) = 2$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 3R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to R_1 - R_4 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to 7R_3 - 4R_2 \\ R_4 \to 4R_4 - 3R_3 \end{matrix}$

~~it has~~

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4 \to R_3 + 2R_4$

It has 3 non zero rows

$\therefore \rho(A)$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to 3R_3 - 8R_1$

$\sim \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R_3 \to 2R_2 + R_3$

it is in Row - echolan form

& it has two non zero rows.

$\therefore \rho(A) = 2.$

---

Example 1.6

Find the rank of the following matrices which are in row - echelon form.

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

it has three non zero rows & it is in row echelon form.

$\therefore \rho(A) = 3$

---

(ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

it is in row echelon form & it has two non zero rows.

$\therefore \rho(A) = 2$

---

(iii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

it is in row echelon form & it has n

**Example 1.17** Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ by reducing it to a row-echelon form.

அணிகளின் தரவு அமைந்த படிவத்தில் அணியை தரம் காண்க.

**Soln**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 2R_2 - R_3$$

it is row echelon form

& it has two non zero rows.

$\therefore \rho(A) = 2$

---

**Ex 1.18:** Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ by reducing it to a row-echelon form.

அணியின் தரவு அமைந்த படிவத்தில் அணி தரம் காண்க.

**Soln**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & 13 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 3R_1 + 2R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 45 & 30 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 4R_2 + R_3$$

It is in echelon form

& it has 3 non zero rows.

$\therefore \rho(A) = 3.$

**தொடக்க நிலை அணி:**

ஓர் அலகு அணியின் மீது ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியை தொடக்க நிலை அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது.

**தேற்றம் 1.13:**

ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலை செயலிகளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியையும் ஓர் அலகு அணியாக உருமாற்றம் செய்யலாம்.

**காஸ் - ஜோர்டன் முறை:**

$A$ என்பது பூச்சியமற்ற கோவையுடைய மற்றும் $n$ வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. $B$ என்பது $A$ ன் நேர்மாறு என்க.

எனவே $AB = BA = I_n$ ன் பண்புப்படி

$$A = I_n A = A I_n .$$

**Elementary matrix:** (தொடக்க நிலை அணி)

An elementary matrix is defined as a matrix obtained from an identity matrix by applying only one elementary transformation.

**Theorem: 1.13**

Every non singular matrix can be transformed to an identity matrix, by a sequence of elementary row operations.

**1.3.4 Gauss – Jordan method:** (காஸ் ஜோர்டன் முறை)

Transforming a non singular matrix A to the form $I_n$ by applying elementary row operations is called Gauss Jordan method.

**Problems:**

Ex 3 Find the inverse of each of the following by Gauss – Jordan method.

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to \tfrac{1}{2} R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 - 5R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_2 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \quad R_2 \to 2R_2$$

$$= [I_2 \mid A^{-1}]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Example 1.20 $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ காஸ் ஜோர்டன் முறையில் $A^{-1}$ காண்க.

soln

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \to (-1) R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{1}{5} R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6/5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 + 6R_2$$

$$= [I_2 \mid A^{-1}]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1 \\ 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

Ex 1.2 (iii)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ காஸ் ஜோர்டன் நீக்கல் முறையில் $A^{-1}$ காண்க.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 6R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - 4R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to R_2 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 + R_2$$

$$= [I_3 \mid A^{-1}]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex 3 (iii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ காஸ் ஜோர்டான் நீக்கல் முறையில் $A^{-1}$ காண்க.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 + 2R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad R_3 \to (-1) R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 3R_3 \\ R_2 \to R_2 + 3R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - 2R_2$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Example 1.21**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ find $A^{-1}$ by Gauss Jordan method.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to \frac{1}{2} R_1$$

Padasalai

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to 2R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

## 1.4 Application of matrices: solving system of linear equations.

அணிகளின் பயன்பாடுகள்: நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வு.

**System of linear equ. in matrix form.**

நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி அமைப்பு

(i) Consider

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Then matrix form of above linear equ. is

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad \text{where } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

---

(ii) Consider

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

The matrix form of above linear eqn is

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

where

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

## 1.4.3 Matrix inverse method நேர்மாறு அணி காண் முறை.

consider

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

matrix form of above system is

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1).$$

from this we get soln,

## problem:

Ex 1.3 1) Solve the following system of linear equations by matrix inversion method. நேர்மாறு அணி காண் முறையில் தீர்க்க.

(i) $2x - y = 8$, $3x + 2y = -2$

Soln

matrix form of given system is சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4+3 = 7 \neq 0 \quad \therefore A^{-1}$ உள்ளது

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

From (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 16-2 \\ -24-4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 14 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$x = 2,\ y = -4.$

---

(ii) $2x+5y = -2,\ x+2y = -3$ நேர்மாறு முறையில் தீர்க்க

Soln

matrix form of given system is சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4-5$

$= -1 \neq 0 \quad A^{-1}$ உள்ளது

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-15 \\ -2+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = -11\ \&\ y = 4.$

Padasalai

from given data

$x + 3y = 19800$

$x + 9y = 23400$

matrix form of above system is

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$|A| = 9 - 3 = 6 \neq 0 \quad \therefore A^{-1}$ exist

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

From (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 178200 - 70200 \\ -19800 + 23400 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 108000 \\ 3600 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18000 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Starting salary $x = 18000$

Annual increment $y = 600$.

4) 4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள். எனில் அவ்வேலையை ஒரு ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும் என்பதனை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் காண்க.

Padasalai

4) 4 men and 4 women can finish a piece of work jointly in 3 days while 2 men & 5 women can be finish the same work jointly in 4 day. Find the time taken by one man alone and that of one women alone to finish the same work by using matrix inversion method.

Soln

Let the no. of days taken by man and women be $x$ and $y$ res.

Work finished by a man in one day $= 1/x$

work finished by a women in one day $= 1/y$

from the given data

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3} \; ; \quad \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}$$

let $\frac{1}{x}=a$ , $\frac{1}{y}=b$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\; 4a+4b=\frac{1}{3} \Rightarrow 12a+12b=1 \\ 2a+5b=\frac{1}{4} \Rightarrow 8a+20b=1 \end{array}\right\} \longrightarrow (1)$$

matrix form of (1) is

$$\begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (2)$$

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$|A| = 240-96 = 144 \neq 0$ $A^{-1}$ exist

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}A$$

$$= \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 20-12 \\ -8+12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

$a = 1/18 \qquad b = 1/36$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{18} \qquad \frac{1}{y} = 1/36$

$x = 18 \qquad y = 36.$

$\therefore$ A man can be finish the work 18 days

& women finish the work in 36 days.

Example 1.22 Solve $5x+2y=3$, $3x+2y=5$ by matrix inversion method.

Soln

Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A| = 10-6 = 4 \neq 0$ $A^{-1}$ exist

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$(1) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = -1$ & $y = 4$.

---

3. A man is appointed in a job with a monthly salary of certain in amount and a fixed amount of annual increment. If his salary was Rs. 19800 per month at the end of the first month after 3 years of service and Rs. 23400 per month at the end of the first month after 9 years of service, find his starting salary and his annual increment (use inverse method.

Soln

Let starting salary $-x$

& annual increment is $y$.

Example 1.22

(11) 1. Solve $2x+3y-z=9$, $x+y+z=9$, $3x-y-z=-1$ by inversion method. நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க

**Soln**

Matrix form of given equ. is. கெழுக்களான அணி அமைப்பு.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow ①$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1+1) - 3(-1-3) - 1(-1-3)$$

$$= 0+12+4$$

$$= 16 \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ உள்ளது}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1+1 & 1+3 & 3+1 \\ 3+1 & -2+3 & -1-2 \\ -1-3 & 9+2 & 2-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

① ⇒

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0+36-4 \\ 36+9+3 \\ -36+99+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \therefore$$

Soln is $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

Solve by inverse method

(iii) $x+y+z-2=0,\ 6x-4y+5z-31=0,\ 5x+2y+2z$ சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை $=13$ தீர்க்க.

Soln matrix form of given equ.s is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8-10) - 1(12-25) + 1(12+20)$$

$$= -18 + 13 + 32$$

$$= 27 \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ exist}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A.$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -8-10 & 2-2 & 5+4 \\ 25-12 & 2-5 & 6-5 \\ 12+20 & 5-2 & -4+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -4 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 1 & 6 \\ -4 & 2 & 1 & -4 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

From (1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -36+0+117 \\ 26-93+13 \\ 64+93-130 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 81 \\ -54 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Soln is

$x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

Example 1.23 Solve $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$, $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$ by inversion method. (நேர்மாறு அணிமுறை தீர்க்க)

Soln: matrix form of given equ. is

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6)$$

$$= 10 + 15 + 15$$

$$|A| = 40 \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ exist}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$\begin{array}{cccc} -2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A+1 & -3+6 & 3+6 \\ 3+2 & -4-9 & 3-2 \\ -1+6 & 9+2 & -4-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

From (1)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 25 - 12 + 27 \\ 25 + 52 + 3 \\ 25 - 44 - 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ soln is

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$

Ex 2 If $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ find AB & BA and hence solve the system of equ. $x+y+2z=1$, $3x+2y+z=7$, $2x+y+3z=2$.

Soln

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+3+6 & -5+2+3 & -10+1+9 \\ 7+3-10 & 7+2-5 & 14+1-15 \\ 1-3+2 & 1-2+1 & 2-1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = 4I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+7+2 & 1+1-2 & 3-5+2 \\ -15+14+1 & 3+2-1 & 9-10+1 \\ -10+7+3 & 2+1-3 & 6-5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = 4I_3$$

$$\therefore AB = BA = 4I_3$$

$$B\left(\tfrac{1}{4}A\right) = \left(\tfrac{1}{4}A\right)B = I_3$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{1}{4}\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-5+7+6\\ 7+7-10\\ 1-7+2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}8\\ 4\\ -4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ soln is

$x = 2, y = 1, z = -1$

---

Example 1.24

If $A = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ -7 & 1 & 3\\ 5 & -3 & -1\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ find AB, BA

and hence solve the system of eqn.

$x - y + z = 4, \quad x - 2y - 2z = 9, \quad 2x + y + 3z = 1$

Soln

$$AB = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ -7 & 1 & 3\\ 5 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12\\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7+2+9\\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

$AB = 8I_3$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+7+5 & 4-1-3 & 4-3-1 \\ -4+14-10 & 4-2+6 & 4-6+2 \\ -8-7+15 & 8+1-9 & 8+3-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$BA = 8I_3$

$\therefore AB = BA = 8I_3$

$(\frac{1}{8}A)B = B(\frac{1}{8}A) = I_3$

$\therefore B^{-1} = \frac{1}{8}A$

matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

soln is

$\therefore x = 3, y = -2$

$z = -1$

5. A, B, C என்ற பொருட்களின் விலை ஒர் அலகிற்கு முறையே x, y, z ஆகும். P என்பவர் B ல் 4 அலகுகள் வாங்கி A ல் அலகையும் C ல் 5 அலகையும் விற்கிறார். Q என்பவர் C ல் அலகு, A ல் 3 அலகு, B ல் ஒரு அலகு வாங்கி விற்கிறார்.

R என்பவர் A ல் 1 அலகும், B ல் 3 அலகும், C ல் ஒரு அலகும் வாங்கி விற்கிறார். இவ்வணிகத்தில் P, Q மற்றும் R முறையே ரூ 15000, ரூ 1000, ரூ 4000 வருமானம் ஈட்டுகின்றனர் எனில் A, B, C பொருட்களின் ஓரலகு விலை எவ்வளவு என்பதனை காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையால் தீர்க்க)

Ex 5 The prices of three commodities A, B & C are Rs x, y & z. person P purchases 4 units of B and sells 2 units of A and 5 units of C. Person Q purchase 2 unit of C and sells 3 unit of A and one unit of B. ~~In the process P, Q and R~~ person R purchases one unit of A and sells 3 unit of B and one unit of C. In the process P, Q and R earn Rs 15000, Rs 1000 and Rs. 4000 respectively. Find the prices per unit of A, B & C.

Soln Let the price of one unit of A, B & C are x, y & z rs.

$\therefore$ from the given data

$$2x-4y+5z=1500$$
$$3x+y-2z=1000$$
$$-x+3y+z=4000$$

Matrix form of given data

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \longrightarrow (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1+6)-(-4)(3-2)+5(9+1)$$

$$= 14+4+50$$

$$= 68 \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ exist}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} 1+6 & 15+4 & 8-5 \\ 2-3 & 2+5 & 15+4 \\ 9+1 & 4-6 & 2+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ From (1)

$$X = \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15000 \\ 1000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1000}{68}\begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1000}{68}\begin{bmatrix} 105+19+12 \\ -15+7+76 \\ 150+2+56 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1000}{68}\begin{bmatrix} 136 \\ 68 \\ 204 \end{bmatrix}$$

$$= 1000\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

The price of one unit of A, B & C are 2000, 1000, 3000.

## 1.4.3 Cramer's Rule. ( கிராமரின் விதி )

This rule can be applied only when the co-efficient matrix is a square matrix and non singular $|A| \neq 0$ எனில் கிராமர் விதி பயன்படுத்தலாம்.

(i) consider

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 y + b_2 y = c_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ carmer's rule is applicable.

& carmmer's rule is

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

---

Problems:

Ex 1.4 (i) Solve $5x - 2y + 16 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ by cramer's rule. (கிராமர் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க)

Soln

$$5x - 2y = -16$$
$$x + 3y = 7$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & -16 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 15 + 2$ $\qquad = -48 + 14$ $\qquad = 35 + 16$

$= 17$ $\qquad = -34$ $\qquad = 51.$

$\neq 0$

$\therefore$ Cramer rule is applicable

$\therefore$ by cramer's rule

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-34}{17} = -2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3$$

$\therefore$ soln is $x = -2$, $y = 3$

Ex 1.4 (i)(ii) solve $\frac{3}{x}+2y=12$ , $\frac{2}{x}+3y=13$ by Cramer's rule.

Soln

Let $\frac{1}{x}=a$, $y=b$

$\therefore$ $a+2b=12$

$2a+3b=13$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 9-4$

$= 05$

$\Delta_a = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}$

$= 36-26$

$= 10$

$\Delta_b = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}$

$= 39-24$

$= 15$

$\therefore$ $a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$ $\Rightarrow x = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$ $\Rightarrow y = b = 3$

$\therefore$ soln is

$x = \frac{1}{2}$ , $y = 3$.

---

2. In a competitive examination, one mark is awarded for every correct answer while ¼ mark is deducted for every wrong answer. A student answered 100 questions and got 80 marks. How many questions did he answer correctly (use cramer rule)

Soln

Let the no. of questions answered correctly be $x$ and $y$ be the number of question answered wrong

From the given data

$x+y=100 \longrightarrow (1)$

$x-\frac{1}{4}y = 80$

$4x-y = 320 \longrightarrow (2)$

$\therefore$

ஒரு போட்டித் தேர்வில்
ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும்
ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது.
ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும்
¼ மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது.
ஒரு மாணவன் 100 கேள்விகளுக்கு
பதிலளித்து 80 மதிப்பெண் பெறுகிறான் எனில்
அவன் எத்தனை கேள்விகளுக்கு சரியாக
பதிலளித்திருப்பான்? (கிராமர் விதியை
பயன்படுத்துக)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta x = \begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 4 & 320 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 4 & 320 \end{vmatrix}$

$= -1-4 \qquad = -320-100 \qquad = 320-400$

$= -5 \qquad = -420 \qquad = -80.$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-420}{-5} = 84$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-80}{-5} = 16.$

The no. of question answered correctly $= 84$

" " " wrong $= 16.$

---

3. A chemist has one solution which is 50% acid and another solution which is 25% acid. How much each should be mixed to make 10 litres of a 40% acid solution? (use cramer rule)

(வேதியாளர் ஒருவர் 50% அமிலத்தன்மை கொண்ட ஒரு கரைசலும் 25% அமிலத்தன்மை கொண்ட மற்றொரு கரைசலும் உள்ளது. அவர் 10 லி கரைசலில் 40% அமிலத்தன்மை உள்ளவாறு ஒரு கரைசலை உருவாக்க இருவகை கரைசல்களில் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்? (கிராமர் விதிப்படி தீர்க்க)

Soln

Let $x$ and $y$ be the amount of solution containing 50% & 25% acid res.

$\therefore$ From the given data

$x+y = 10$

$(50\%)x + (25\%)y = (40\%)10$

$\frac{50}{100}x + \frac{25}{100}y = \frac{40}{100} \times 10$

$50x + 25y = 400$

$2x + y = 16$

$\therefore x+y = 10$

$2x+y = 16$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 16 \end{vmatrix}$

$= 1-2 \qquad = 10-16 \qquad = 16-20$

$= -1 \qquad = -6 \qquad = -4$

4) ஒரு மீன் தொட்டியை பம்பு A மற்றும் பம்பு B ஆகியவை ஒன்றாகச் சேர்ந்து 10 நிமிடங்களில் நீரை நிரப்பும். பம்பு B ஆனது நீரை உள்ளே அல்லது வெளியே அதே வேகத்தில் அனுப்ப இயலும். எதிர்பாராத விதமாக பம்பு B ஆனது நீரை வெளியே அனுப்பினால் தொட்டி நிரம்ப 30 நிமிடங்கள் ஆகும் எனில் ஒவ்வொரு பம்பும் தொட்டியை தனித்தனியாக நிரப்ப எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக் கொள்ளும்

(கிரேமர் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க.)

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4.$

$\therefore$ 6 litres of solution containing 50% acid and 4 litres of solution containing 25% acid must be mixed to make 40% acid solution.

---

4) A fish tank can be filled in 10 minutes using both pumps A and B simultaneously. However, pump B can pump water in or out at the same rate. If pump B is inadvertently run in reverse, then the tank will be filled in 30 minutes. How long would it take each pump to fill the tank by itself? (use Cramer's rule)

Soln

Let $x$ & $y$ be the time taken by pumps A & B resp.

$\therefore$ Amount of water filled by pump A in one minute $= 1/x$

" " " " B " $= 1/y$

Take $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$.

$\therefore$ From given data

$a + b = \frac{1}{10} \Rightarrow 10a + 10b = 1$

$a - b = \frac{1}{30} \Rightarrow 30a + 30b = 1$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 30 & -30 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta a = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -30 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 30 & 1 \end{vmatrix}$

$= -300 - 300 \quad = -30 - 10 \quad = 10 - 30$

$= -600 \quad = -40 \quad = -20.$

$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-40}{-60} = \frac{1}{15}$ $\quad \therefore x = 1/a = 15$

$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-20}{-600} = \frac{1}{30}$ $\quad y = 1/b = 30.$

Soln Time taken by pump A is 15 min
B is 30 min

Example 1.25

Solve by $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$, $x_2 + 2x_3 = 7$ (கிராமர் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க)

Soln

$$x_1 - x_2 + 0x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$$
$$0x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-4) - (-1)(4-0) + 0$$
$$= 2+4$$
$$\boxed{\Delta = 6}$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(6-4) + 1(34-28) + 0$$
$$= 6+6+0$$
$$\boxed{\Delta x_1 = 12}$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1(34-28) - 3(4-0) + 0$$
$$= 6-12$$
$$\boxed{\Delta x_2 = -6}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1(21-17) + 1(14-0) + 3(2-0)$$
$$= 4+14+6$$
$$\boxed{\Delta x_3 = 24}$$

by Cramer rule

$$\therefore x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{24}{6} = 3.$$

$\therefore$ soln is $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$

(ii) Solve by Cramer rule கிராமர் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க

$3x+3y-z=11, \quad 2x-y+2z=9, \quad 4x+3y+2z=25$

Soln

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(-2-6)-3(4-8)-1(6+4)$$

$$= 3(-8)-3(-4)-1(10)$$

$$= -24+12-10$$

$$\boxed{\Delta = -22}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \\ 25 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11(-2-6)-3(18-50)-1(27+25)$$

$$= 11(-8)-3(-32)-1(52)$$

$$= -88+96-52$$

$$\boxed{\Delta x = -44}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 25 & 2 \end{vmatrix} = 3(18-50)-11(4-8)-1(50-36)$$

$$= 3(-32)-11(-4)-1(14)$$

$$= -96+44-14$$

$$\boxed{\Delta y = -66}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 2 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 25 \end{vmatrix} = 3(-25-27)-3(50-36)+11(6+4)$$

$$= -156-42+110$$

$$\boxed{\Delta z = -88}$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-88}{-22} = 4$$

$\therefore$ soln is $x=2, y=3, z=4$.

Ex 1(iv) Solve by cramer rule கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0, \quad \frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0$$

Soln

let $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$, $\frac{1}{z} = c$

∴ given equ. is becomes

$$3a - 4b - 2c = 1, \quad a + 2b + c = 2, \quad 2a - 5b - 4c = -1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 3(-8+5) + 4(-4-2) - 2(-5-4)$$

$$= 3(-3) + 4(-6) - 2(-9)$$

$$= -9 - 24 + 18$$

$$\boxed{\Delta = -15}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 1(-8+5) + 4(-8+1) - 2(-10+2)$$

$$= 1(-3) + 4(-7) - 2(-8)$$

$$= -3 - 16 + 16$$

$$\boxed{\Delta a = -3}$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-8+1) - 1(-4-2) - 2(-1+4)$$

$$= 3(-7) - 1(-6) - 2(3)$$

$$= -21 + 6 + 10$$

$$\boxed{\Delta b = -5}$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 3(-2+10) + 4(-1-1) + 1(-5-4)$$

$$= 3(8) + 4(-2) + 1(-9)$$

$$= 24 - 20 - 9$$

$$\boxed{\Delta c = -5}$$

by cramer rule

∴ $a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$ ∴ ⇒ $x = 1/a = 5$

$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$ ⇒ $y = 1/b = 3$

$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = 1/3$ ⇒ $z = 1/c = 3$

∴ soln is $x = 5$, $y = 3$, $z = 3$

5) ஒரு குடும்பத்திலுள்ள மூன்று நபர்கள் இரவு உணவு சாப்பிட ஓர் உணவகத்திற்கு சென்றனர். இரு தோசைகள், 3 இட்லிகள், 2 வடைகளின் விலை ரூ 150,
2 தோசை, 4 இட்லி, 4 வடை விலை ரூ 200
5 தோசை, 4 இட்லி, 2 வடை விலை ரூ 250
அக்குடும்பத்தினரிடம் ரூ 350 இருந்தது அவர்கள்
3 தோசை, 6 இட்லி, 6 வடை சாப்பிட்டனர். அவர்கள் சாப்பிட்டதற்காக தொகையை அவர்களிடமிருந்த பணத்தை கொண்டு செலுத்த முடியுமா?
(கிராமர் விதியை கொண்டு தீர்க்க)

5) A family of 3 people went out for dinner in a restaurant. The cost of two dosai, three idlies and two vadais is Rs 150. The cost of two dosai, two idlies and four vadais is Rs 200. The cost of five dosai, four idlies and two vadis is Rs 250. The family has Rs 350 in hand and they ate 3 dosai and six idlies and six vadis. Will they be able to manage to pay the bill within the amount they had? Use Cramer rule.

Soln

Let $x, y, z$ be the cost of 1 dosai, 1 idly, 1 vadai res.

$\therefore$ From the given data

$$2x+3y+2z=150$$
$$2x+2y+4z=200 \Rightarrow x+y+2z=100$$
$$5x+4y+2z=250.$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-8)-3(2-10)+2(4-5)$$
$$= 2(-6)-3(-8)+2(-3)$$
$$= -12+24-2$$
$$\boxed{\Delta = 10}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 150 & 3 & 2 \\ 100 & 1 & 2 \\ 250 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 150(2-8)-3(200-500)+2(400-250)$$
$$= 150(-6)-3(-300)+2(150)$$
$$= -900+900+300$$
$$\boxed{\Delta x = 300}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 150 & 2 \\ 1 & 100 & 2 \\ 5 & 250 & 2 \end{vmatrix} = 2(200-500)-150(2-10)+2(250-500)$$
$$= -600+1200-500$$
$$\boxed{\Delta y = 100}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 150 \\ 1 & 1 & 100 \\ 5 & 4 & 250 \end{vmatrix} = 2(250-400)-3(250-500)+150(4-5)$$
$$= 2(-150)-3(-250)+150(-1)$$
$$= -300+750-150 = 30$$

$$\boxed{\Delta_z = 300}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{300}{10} = 30$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{100}{10} = 10$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{300}{\Delta} = 30.$$

Total bill = 3 dosai + 6 idlies + 6 vadai

= 3(30) + 6(10) + 6(30)

= 90 + 60 + 180

= 330

∴ Total bill is Rs 330 < Rs 350

Hence they can manage to pay the bill.

---

Example 1.26 In a T20 match, chennai super kings needed just 6 runs to win with 1 ball left to go in the last over. The last ball was bowled and the batsman at the crease hit it high up. The ball travelled along the path in a vertical plane and the equation of the path is $y = ax^2 + bx + c$ with respect to xy - coordinate system in the vertical plane and ball travelled through the points (10,8), (20,16) (40,22) can you conclude that, chennai super kings won the match? Justify your answer

(all the distances are measured in meters and the meeting point of the plane of the path with the farthest boundary line is (70,0)

soln

$$y = ax^2 + bx + c$$

$(10,8) \Rightarrow$ $100a + 10b + c = 8$

$(20,16) \Rightarrow$ $400a + 20b + c = 16$

$(40,22) \Rightarrow$ $1600a + 40b + c = 22$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 100\times 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1000\left(1(2-4) - 1(4-16) + 1(16-32)\right)$$

$$= 1000(-2+12-16)$$

$$= 1000(-6)$$

$$\boxed{\Delta = -6000}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 6 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 10 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 20\left(4(2-4) - 1(8-11) + 1(32-22)\right)$$

$$= 20(-8+3+10)$$

$$= 20(5)$$

$$\boxed{\Delta a = 100}$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 100\times 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 200\left(1(8-11) - 4(4-16) + 1(44-128)\right)$$

$$= 200(-3+48-84)$$

$$= 200(-39)$$

$$\boxed{\Delta_b = -7800}$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 100\times 10\times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 2000\left(1(22-32) - 1(44-128) + 4(16-32)\right)$$

$$= 2000(-10+84-64)$$

$$= 2000(10)$$

$$\boxed{\Delta c = 20000}$$

by Cramer rule

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{100}{-6000} = \frac{-1}{60}$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-7800}{-6000} = \frac{13}{10}$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{20000}{-6000} = \frac{-10}{3}$$

The equ. of path is

$$y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}$$

Sub $x = 70$ we get

$$y = -\frac{1}{60}(70)^2 + \frac{13}{10}(70) - \frac{10}{3}$$

$$= -\frac{4900}{60} + \frac{910}{10} - \frac{10}{3}$$

$$= -\frac{490}{6} + \frac{91}{1} - \frac{10}{3}$$

$$= \frac{-490 + 546 - 20}{6}$$

$$= \frac{36}{6}$$

$$\boxed{y = 6}$$

The ball went 6 m hight over the boundary line and it is impossible for a filder to catch the ball.

Hence the ball went for '6 and chennai super kings won the match.

1.4.3

## Gaussian Elimination method (காஸியன் நீக்கல் முறை)

A method to solve simultaneous linear equations of the form

$$AX = B$$

**Two Steps**

1. Forward elimination
2. Back substitution

**Forward elimination:**

A forward elimination is to transform the co-eff matrix into upper triangular matrix

---

**problems:**

1. Solve by Gaussian ellimination method.

$2x - 2y + 3z = 2, \quad x + 2y - z = 3, \quad 3x - y + 2z = 1$

காஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க

**soln**

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$(A\ B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 6R_3 - 7R_2$$

$\therefore$ System becomes.

$$x+2y-z=3 \longrightarrow (1)$$
$$-6y+5z=-4 \longrightarrow (2)$$
$$-5z=-20 \longrightarrow (3)$$

$$z=\frac{-20}{-5}=4$$

(2) $\Rightarrow$ $-6y+20=-4$

$-6y=-24$

$y=\frac{-24}{-6}$

$\boxed{y=4}$

(1) $\Rightarrow$ $x+8-4=3$

$x+4=3$

$\boxed{x=-1}$

Soln is

$x=-1,\ y=z=4.$

---

(ii) $2x+4y+6z=22,\ 3x+8y+5z=27,\ -x+y+2z=2$ காஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க.

Soln

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&2&3&11\\3&8&5&27\\-1&1&2&2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&11\\0&2&-4&-6\\0&3&5&13\end{bmatrix}\quad \begin{array}{l}R_2\to R_2-3R_1\\R_3\to R_3+R_1\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&11\\0&2&-4&-6\\0&0&22&44\end{bmatrix}\quad R_3\to 2R_3-3R_3$$

$\therefore$ System of equ. becomes.

$$x+2y+3z=11 \longrightarrow (1)$$
$$2y-4z=-6 \longrightarrow (2)$$
$$22z=44 \longrightarrow (3)$$

$$z=\frac{44}{22}=2$$

(2) $\Rightarrow$

$2(y)-4(2)=-6$

$2y-8=-6$

$2y=-6+8$

$2y=2$

$\boxed{y=1}$

(1) $\Rightarrow$

$x+2(1)+3(2)=11$

$x+2+6=11$

$x=11-8$

$x=3$

Soln is $x=3,\ y=1,\ z=2.$

(iii) $4x+3y+6z=25$, $x+5y+7z=13$, $2x+9y+z=1$ காஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க

Soln

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \rightarrow 4R_1 - R_2 \\ R_3 \rightarrow 2R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow 17R_2 - R_3$$

System becomes

$$x+5y+7z=13 \rightarrow (1)$$

$$y+13z=25 \rightarrow (2)$$

$$199z=398 \rightarrow (3)$$

$$z = \frac{398}{199} = 2$$

(2) ⇒

$$y+13(2)=25$$

$$y+26=25$$

$$y=25-26$$

$$\boxed{y=-1}$$

(1) ⇒

$$x+5(-1)+7(2)=13$$

$$x-5+14=13$$

$$x+9=13$$

$$x=13-9$$

$$x=4.$$

∴ Soln is $x=4, y=-1, z=2$

2. If $ax^2+bx+c$ is divided by $x+3, x-5, x-1$ the remainders are 21, 61, & 9 res. find a, b, c (Use Gaussian ellimination method) $ax^2+bx+c$ ஐ $x+3$, $x-5$, $x-1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதிகள் 21, 61, 9 எனில் a, b, c ஐ காண்க (காஸியன் நீக்கல் முறையை கொண்டு.)

Soln $p(x) = ax^2+bx+c$

$p(-3) = 21$

$a(-3)^2+b(-3)+c = 21$

$\boxed{9a-3b+c=21} \longrightarrow (1)$

$p(5) = 61$

$25a+5b+c=61 \longrightarrow (2)$

$p(1) = 9$

$\boxed{a+b+c=9} \longrightarrow (3).$

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 & 21 \\ 25 & 5 & 1 & 61 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 9 & -3 & 1 & 21 \\ 25 & 5 & 1 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 12 & 8 & 60 \\ 0 & 20 & 24 & 164 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 9R_1 - R_2 \\ R_3 \to 25R_1 - R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & 6 & 41 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to \frac{R_2}{4} \\ R_3 \to \frac{R_3}{4} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & 6 & 41 \\ 0 & 0 & -8 & -48 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 5R_3 - 3R_2$$

∴ System becomes

$a+b+c=9 \longrightarrow (4)$

$5b+6c=41 \longrightarrow (5)$

$-8c=-48 \longrightarrow (6)$

$c = \frac{-48}{-8} = 6$

(5) becomes

$5b+36=41$

$5b=41-36$

$5b=5$

$b=1$

(4) ⟹ $a+b+c=9$

$a+1+6=9$

$a=9-7$

$a=2$

∴ soln $(a, b, c) = (2, 1, 6)$

4) A boy is walking along the path $y = ax^2+bx+c$ through the points $(-6,8)$ $(-2,-12)$ $(3,8)$. He wants to meet his friend at $P(7,60)$ will be meet his friend (use elimination method)

ஒரு சிறுவன் $y = ax^2+bx+c$ என்ற பாதையில் $(-6,8)(-2,-12)(3,8)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாக செல்கின்றான். $P(7,60)$ என்ற புள்ளியில் அவனுடைய நண்பனை சந்திக்க விரும்புகிறான். அவன் அவனுடைய நண்பனை சந்திப்பானா? (காஸ் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துக)

Soln

$$y = ax^2+bx+c$$

$(-6,8) \Rightarrow 8$

$$36a+6b+c=8 \longrightarrow ①$$

At $(-2,-12)$

$$4a \neq 2b+c=-12 \longrightarrow ②$$

At $(3,8)$

$$9a+3b+c=8 \longrightarrow ③$$

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & -12 \\ 9 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -12 & 8 & -116 \\ 0 & 18 & 3 & 24 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 9R_2 - R_1 \\ R_3 \to 4R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -58 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to \frac{R_2}{2} \\ R_3 \to \frac{R_3}{3} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -58 \\ 0 & 0 & 5 & -50 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2+R_3$$

equ. becomes.

$$36a-6b+c=8 \longrightarrow ④$$

$$-6b+4c=-58 \longrightarrow ⑤$$

$$5c=-50 \longrightarrow ⑥$$

$$c = -\frac{50}{5} = -10$$

② ⇒ $-6b-40=-58$

$$-6b = 40-58$$

$$-6b=-18$$

$$b = \frac{-18}{-6}$$

$$\boxed{b=3}$$

① ⇒ $36a-18-10=8$

$$36a = 8+18+10$$

$$36a = 36$$

$$\boxed{a=1}$$

$$(a,b,c) = (1,3,-10)$$

$\therefore \quad y = ax^2 + bx + 10$

$y = x^2 + 3x - 10$

put $x = 7$

$y = 49 + 21 - 10$

$= 60.$

$\therefore$ The pt $(7, 60)$ satisfies the equ. $x^2 + 3x - 10$ hence the boy will meet friend at $P(7, 60)$

---

Example 1.28

The upward speed $v(t)$ a rocket at time at time $t$ is approximated by $v(t) = at^2 + bt + c$ $0 \le t \le 100$ where $a, b, c$ are constant. It has been found that the speed at times $t = 3, t = 6, t = 9$ seconds are res. 64, 133, 208 miles per second respectively, Find the speed at time $t = 5$ seconds. (use Gaussian elimination method)

ஒரு ராக்கெட்டின் மேல் நோக்கிய வேகம் t நேரத்தின் தோராயமாக $v(t) = at^2 + bt + c$ என்றவாறு உள்ளது. இங்கு $0 \le t \le 100$ மற்றும் $a, b, c$ என்பன மாறிலிகள். ராக்கெட்டின் வேகம் $t = 3$, $t = 6$ மற்றும் $t = 9$ வினாடிகளில் முறையே 64, 133 மற்றும் 208 மைல்கள் / வினாடி எனில் $t = 15$ வினாடியில் அதன் வேகத்தை காண்க (காஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்து)

Soln

Since $v(3) = 64$, $v(6) = 133$, $v(9) = 208$

$9a + 3b + c = 64$

$36a + 6b + c = 133$

$81a + 9b + c = 208$

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 36 & 6 & 1 & 133 \\ 81 & 9 & 1 & 208 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & -6 & -3 & -123 \\ 0 & -18 & -8 & -368 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 9R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 18 & 8 & 368 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2/-3 \\ \cancel{R_3 \to R_3/-2} \\ R_3 \to R_3/(-1) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 9R_2 - R_3$$

① ② Padasalai

equ. becomes.

$$9a+3b+c=64 \longrightarrow ①$$
$$2b+c=41 \longrightarrow ②$$
$$c=1 \longrightarrow ③$$

② ⇒

$$2b+1=41$$
$$2b=40$$
$$\boxed{b=20}$$

① ⇒

$$9a+3(20)+1=64$$
$$9a+61=64$$
$$9a=3$$
$$\boxed{a=1/3}$$

$$\therefore v(t)=\frac{1}{3}t^2+20t+1$$

Hence

$$v(15)=\frac{1}{3}(225)+20(15)+1$$
$$=75+300+1$$
$$=376$$

---

3. An amount of Rs 65,000 is invested in three bonds at the rates of 6%, 8% & 10% per annum res.. The total annual income is Rs 5,000 The income from the third bond is Rs 800 more than that from the second bond. Determine the price of each bond. (use Gaussian elimination)

Soln

Let the price of the first bond = x

" " 2nd " = y

" " 3rd " = z

∴ From given data

$$x+y+z=65000$$
$$(6\%\text{ of }x)+(8\%\text{ of }y)+(10\%\text{ of }z)=5000$$
$$\frac{6x+8y+10z}{100}=5000$$
$$3x+4y+5z=250000$$

$(10\%$ of $z - 80\%$ of $y) = 800$

$$\frac{10z - 8y}{100} = 800$$

$$-4y + 5z = 40000$$

$\therefore$ Augumented Matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 3 & 4 & 5 & 250000 \\ 0 & -4 & 5 & 40000 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 0 & 1 & 2 & 55000 \\ 0 & -4 & 5 & 4000 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 3R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 1 & 1 & 2 & 55000 \\ 0 & 0 & 13 & 260000 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 + 4R_2$$

$\therefore$ System becoms

$$x + y + z = 65000 \longrightarrow (1)$$

$$y + 2z = 55000 \longrightarrow (2)$$

$$13z = 260000 \longrightarrow (3)$$

$$z = \frac{260000}{13} = 20000$$

$(2) \Rightarrow$

$y + 2(20000) = 55000$

$y = 55000 - 40000$

$= 15000$

$(1) \Rightarrow$ $x + 15000 + 20000 = 65000$

$x = 30000$

$\therefore$ The price of the first bond $= 30,000$

" " 2nd " $= 15000$

" " 3rd bond $= 20,000$

## 1.5 Application of matrices (அணிகளின் பயன்பாடு)

### consistency of system of linear equations by Rank method. நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை தரம் மூலம் காணல்.

**Rouche' capelli theorem:** (ரூசே – கேப்பெல்லி தேற்றம்)

A system of linear equations, written in the matrix form as $AX = B$.

Is consistent $\Leftrightarrow \rho(A, B) = \rho(A)$.

---

### 1.5.1 non-homogeneous linear equations: அசமபடித்தான நேரிய சமன்பாடுகள்

consider

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

matrix form of above system of linear equ. is

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented matrix $(A, B) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$

**case i** When $\rho(A) = \rho(A, B) = 3$ (no. of unknowns)

Then the system is consistent – சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது

& it has unique soln. ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

**case ii** When $\rho(A) \neq \rho(A, B)$

Then the system is inconsistent (i) சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது

& it has no soln. (ii) தீர்வு இல்லை.

**case ii** When $\rho(A) = \rho(A, B) = 2$

Then the system is consistent – சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது

& it has many soln. எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு

& these soln. form one $k$ parameter family

Take $z = k$

**case iv** $\rho(A) = \rho(A, B) = 1$

Then the system is consistent & it has many solutions & these solutions form two parameter family

[illegible] எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு.

Take $z = t$
$y = s$

---

**Problems:**

Ex 1.6

1. Test for consistency & if possible, solve the following system of equ. by rank method.

**soln** $x - y + 2z = 2, \quad 2x + y + 4z = 7, \quad 4x - y + z = 4$

[illegible] தீர்வு காண்க.

**Soln** Matrix form of given linear equ. is

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented matrix

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 4R_1 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 - R_3$$

the last equivalent matrix in echelon form

$\therefore \rho(A) = \rho(A, B)$

$\therefore$ Given system is consistent ஒருங்கமைவு உடையது

& it has unique soln. ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு.

& the system becomes.

$$x - y + 2z = 2 \longrightarrow (1)$$
$$-3y = -3 \longrightarrow (2)$$
$$-7z = -7 \longrightarrow (3)$$

$(3) \Rightarrow z = 1$

$(2) \Rightarrow y = 1$

$\therefore (1) \Rightarrow \quad x - 1 + 2 = 2$

$$x + 1 = 2$$
$$\boxed{x = 1}$$

$\therefore$ soln is $x = 1, y = 1, z = 1$.

---

2. Test for consistency of the following system of linear equations and if possible solve
$x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $x - 2y + 3z = 3$, $x - y + z + 1 = 0$
[illegible]

Soln

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented Matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 3R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to R_1 - R_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{R_2}{4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to 7R_2 - R_3 \\ R_4 \to 3R_2 - R_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4 \to 2R_3 + R_4$$

$\therefore \rho(A) = \rho(A, B) = 3$ (no. of unknown)

$\therefore$ given system is consistent & it has unique soln.
சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

$\therefore$ system becomes

$$x + 2y - z = 3 \to (1)$$
$$y - z = 0 \to (2)$$
$$-2z = -8 \to (3)$$

(3) $\Rightarrow$

$$2z = 8 \Rightarrow z = 4$$

(2) $\Rightarrow$ $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

(1) $\Rightarrow$

$$x + 8 - 4 = 3$$
$$x + 4 = 3$$
$$x = -1$$

Soln is $x = -1,\ y = 4,\ z = 4$.

---

Ex 1. (ii) Test the consistency by Rank method.

$4x - 2y + 6z = 8,\quad x + y - 3z = -1,\quad 15x - 3y + 9z = 21$

தரம் முறையால் தீர்க்க

soln

Matrix form of the system is (சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$\therefore$

Augmented matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 5 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \to R_3/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & -18 & -12 \\ 0 & 6 & -18 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 4R_1 - R_2 \\ R_3 \to 5R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 - R_3$$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 2 <$ no. of unknown.

$\therefore$ given system is consistent & it has many solution

சமன்பாடு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மேலும் எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு.

Take $z = k$

& system becomes

$$x + y - 3z = -1 \longrightarrow (1)$$

$$6y - 18z = -12 \longrightarrow (2)$$

$$\Rightarrow y - 3z = -2$$

$$y - 3k = -2$$

$$\boxed{y = 3k - 2}$$

$(1) \Rightarrow$

$$x + (3k-2) - 3k = -1$$

$$x - 2 = -1$$

$$x = -1 + 2$$

$$x = 1$$

$\therefore$ solution are, $x = 1$, $y = 3k - 2$, $z = k$

Ex 1 (ii) Test the consistency of $3x+y+z=2$, $x-3y+2z=1$, $7x-y+4z=5$ by rank method. (தரவரிசையில் தீர்க்க)

Soln Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented Matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & 1 \\ 0 & -20 & 10 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 3R_1 - R_2 \\ R_3 \to 7R_1 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 2R_2 - R_3$$

$\therefore \rho(A) = \rho(A,B) = 2$

$\therefore$ Given system of equ. is consistance & it has many soln.

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மேலும் எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு.

Take $\boxed{z = k}$

System becomes

$$x - 3y + 2z = 1 \longrightarrow (1)$$

$$-10y + 5z = 1 \longrightarrow (2)$$

$$-10y + 5k = 01$$

$$-10y = 1 - 5k$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{10}(1-5k) = \frac{5k-1}{10}}$$

(1) $\Rightarrow$ $x - \frac{3(5k-1)}{10} + 2k = 1$

$$x = \frac{3(5k-1)}{10} - 2k + 1$$

$$= \frac{1}{10}(7-5k)$$

$\therefore$ Soln are $x = 1/10(7-5k)$, $\frac{5k-1}{10}$, $k$)

Ex 1. 1(iii) Test the consistancy of $2x+2y+z=5$, $x-y+z=1$, $3x+y+2z=4$ by Rank method. தரமுறையால் தீர்க்க.

Soln

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

$\rho(A, B) \neq \rho(A)$

Given system is inconsistent & it has no solution.

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது மேலும் தீர்வு கிடையாது.

**Example: 1.32**

Test the consistancy of the following system of equations & if possible solve

$x-y+z=-9$, $2x-y+z=4$, $3x-y+z=6$, $4x-y+2z=7$

தரமுறையால் தீர்க்க.

Soln

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Augumented matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -22 \\ 0 & -4 & 2 & -33 \\ 0 & -5 & 3 & -43 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \\ R_4 \to 4R_1 - R_4 \end{matrix}$$

$-27$
$-6$

$-36$
$-7$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to R_2 - R_3 \\ R_4 \to R_3 - R_4 \end{matrix}$$

$66$
$11$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -55 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to 3R_2 + R_3 \\ R_4 \to R_3 - R_4 \end{matrix}$$

$\therefore \rho(A) \neq \rho(A,B)$

$\therefore$ Given system is inconsistant

& it has no solution.

Example 1.32 Test the consistency of the following system of equations & if possible solve

$2x - y + z = 2$, $6x - 3y + 3z = 6$, $4x - 2y + 2z = 4$

தீர்வையும் தீர்க்க.

Soln

Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented Matrix

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 3R_1 - R_2 \\ R_3 \to 2R_1 - R_2 \end{matrix}$$

$\therefore \rho(A) = \rho(A, B) = 1$

$\therefore$ Given system of equation is ~~in~~consistant

& it has inf/solution.

சமன்பாடு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவானது மேலும் எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு.

Take $z = t$

$y = s$

System is becomes

$$2x - y + z = 2 \longrightarrow (1)$$

now $z = t$, $y = s$

$$2x - t + s = 2$$

$$2x = 2 - s + t$$

$$x = \frac{1}{2}(2 - s + t)$$

$\therefore$ Solution is

$$x = \frac{1}{2}(2 - s + t), \; y = s, \; z = t$$

Ex 1.31 Test for consistency of the following system of equation and if possible solve

$x-y+z=-9$, $2x-2y+2z=-18$, $3x-3y+3z=-27$

Soln

Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augmented matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 2 & -18 \\ 3 & -3 & 3 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 1$

Given system is consistent. & it has many soln.

Take $z = s$
$y = t$

∴ Also system becomes.

$x - y + z = -9$

$x - s + t = -9$

$x = s - t - 9$

∴ Soln is

$x = s - t - 9$, $y = t$, $z = s$

9. Investigate the value of $\lambda$ and $\mu$ the system of linear equations $2x+3y+5z=9$, $7x+3y-5z=8$, $2x+3y+\lambda z=\mu$ have (i) no soln தீர்வு இல்லை (ii) unique soln. ஒரே தீர்வு (iii) infinitely many soln. எண்ணற்ற தீர்வு.

Soln

Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

Augumented Matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -15 & -25 & -47 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \mu-9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_2 - 7R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 16-63 \\ \hline 47 \end{array}$$

Case i  When $\lambda \neq 5$ & $\mu \neq 9$

$\therefore \rho(A) = \rho(A,B) = 3$

$\therefore$ Given system is consistant and it has unique solution

ஒருங்கமைவு உடையது ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

Case ii  When $\lambda = 5$ & $\mu \neq 9$

$\therefore \rho(A) = 2$, $\rho(A,B) = 3$

$\rho(A) \neq \rho(A,B)$

$\therefore$ system is inconsistent & it has no soln

ஒருங்கமைவற்றது ~~உடையது~~ அற்றது தீர்வு இல்லை.

Case iii  When $\lambda = 5$ & $\mu = 9$

$\therefore \rho(A) = \rho(A,B) = 2$

system is consistant & it has infinitely many soln

ஒருங்கமைவு உடையது எண்ணற்ற தீர்வு உண்டு

Investigate for what value of $\lambda$ & $\mu$ the system of linear equations $x+2y+z=7$, $x+y+\lambda z=\mu$, $x+3y-5z=5$ have (i) no. soln (ii) unique soln (iii) infinitely many soln

Soln Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$AX = B$

Augmented matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & \mu-7 \end{bmatrix} \quad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu-9 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 + R_3$$

Case i When $\lambda \neq 7$, $\mu \neq 9$.

$\therefore$ Given System is consistant

& it has unique soln $\because \rho(A) = \rho(A,B) = 3$

Case ii When $\lambda = 7$ & $\mu \neq 9$

$\rho(A) = 2$, $\rho(A,B) = 3$

$\rho(A) \neq \rho(A,B)$

$\therefore$ System is inconsistant & it has no soln

Case iii When $\lambda = 7$, $\mu = 9$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 2$

$\therefore$ System is consistant

It has infinitely many soln.

2. Find the value of k for which the equ. $kx-2y+z=1$, $x-2ky+z=-2$, $x-2y+kz=1$ have (i) no soln (ii) unique soln (iii) many soln

Soln

Matrix form of given system is

$$\begin{bmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & 1 \\ 1 & -2 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Augmented matrix is

$$(A,B) = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftrightarrow R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 2k-2 & k-1 & 3 \\ 0 & -2k+2 & k^2-1 & k-1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_1-R_2 \\ R_3 \rightarrow kR_1-R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 2k-2 & k-1 & 3 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 & k+2 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_2+R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 2k-2 & k-1 & 3 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & k+2 \end{bmatrix}$$

$k^2+k-2$

$(k-1)(k+2)$

Case i  When $k=1$ & $k \neq -2$

$\rho(A)=1$, $\rho(A,B)=3$

system is inconsistent

It has no soln

Case ii  When $k=-2$

$\rho(A)=\rho(A,B)=2$

system is consistent

it has many soln

Case iii  when $k \neq 1$, $k \neq -2$

system is consistent

it has unique soln.

Example 1.33

Find the condition on $a, b$ & $c$ following system of equ. has one parameter family of solution: $x+y+z=a$, $x+2y+3z=b$, $3x+5y+7z=c$

Soln Matrix form of the system is $AX=B$

$$(A,B)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 3 & 5 & 7 & c \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & -2 & -4 & 3a-c \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-c+2b-2a \end{bmatrix} \quad R_3 \to 2R_2 + R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a+2b-c \end{bmatrix}$$

if $a+2b-c=0$

Then $\rho(A)=\rho(A,B)=2$

given system of equ. has one parameter family of solution.

$\therefore$ $a+2b-c=0$ is required condition.

## 1.5.2 Homogeneous system of linear equations

சமப்படித்தான நேரிய சமன்பாடுகள்

Consider the equ.

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Augumented matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Case i** When $\rho(A) = \rho(A,B) = 3$

The system is consistent சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையது

& it has unique solution (trivial soln) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு (வெளிப்படையானது)

**Case ii** When $\rho(A) = \rho(A,B) = 2$ or $1$

Then the system is consistent ஒருங்கமைவுடையது

& it has many soln (non trivial soln) வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள்

---

**Note** Homogenous equation is always consistent

---

1. Solve $x+2y+3z=0$, $3x+4y+4z=0$, $7x+10y+12z=0$

Soln

Augmented Matrix is

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\3&4&4&0\\7&10&12&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&4&9&0\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}R_2\to 3R_1-R_2\\R_3\to 7R_1-R_3\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad R_3\to 2R_2-R_3$$

$\therefore \rho(A)=\rho(A,B)=3$

Given system is consistent

& it has trivial soln (unique)

(ie) $x=y=z=0$.

② Solve $x+3y-2z=0$, $2x-y+4z=0$, $x-11y+14z=0$

Soln

Augmented matrix is

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\2&-1&4&0\\1&-11&14&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&14&-16&0\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}R_2\to 2R_1-R_2\\R_3\to R_1-R_3\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad R_3\to 2R_2-R_3$$

$\rho(A)=\rho(A,B)=2$

System is consistent it has nontrivial (many) soln.

Take $z = k$

equ. becomes

$$x + 3y - 2z = 0 \rightarrow (1)$$

$$7y - 8z = 0 \rightarrow (2)$$

$$7y = 8z$$

$$7y = 8k$$

$$\boxed{y = 8/7 k}$$

(1) $\Rightarrow$

$$x + \frac{8}{7} \times 3k - 2k = 0$$

$$x = \frac{-10k}{7}$$

Soln is

$$x = \frac{-10k}{7},\ y = \frac{8k}{7},\ z = k$$

---

3) Solve $2x + 3y - z = 0$, $x - y - 2z = 0$, $3x + y + 3z = 0$

Soln

Augmented matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \rightarrow 2R_1 - R_2 \\ R_3 \rightarrow 3R_1 - R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -33 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow 4R_2 - 5R_3$$

$\therefore\ \rho(A, B) = \rho(A) = 3$

System is consistent. & it has trivial soln (unique)

Soln is $\therefore\ x = y = z = 0$.

Example 1.37 Solve $x+y-2z=0$, $2x-3y+z=0$, $3x-7y+10z=0$, $6x-9y+10z=0$

Soln

Augmented matrix is :

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 10 & 0 \\ 6 & -9 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -16 & 0 \\ 0 & 15 & -22 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3 \\ R_4 \to 6R_1 - R_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 \to 2R_2 - R_3 \\ R_4 \to 3R_2 - R_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 7R_3 - 6R_4.$$

$\therefore \rho(A) = \rho(A,B) = 3$

$\therefore$ System is consistent.

It has trivial soln.

$\therefore x = y = z = 0.$

1. 1(i) Solve $3x+2y+7z=0$, $4x-3y-2z=0$, $5x+9y+23z=0$

Soln Augmented matrix is

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & 23 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -17 & -34 & 0 \\ 0 & 17 & 34 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 3R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to 3R_3 - 5R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -17 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 + R_3$$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 0.$

soln system is consistent it has non trivial soln.

take $z = k$

System becomes

$3x + 2y + 7z = 0 \longrightarrow (1)$

$-17y - 34z = 0 \longrightarrow (2)$

$-17y = 34z$

$\boxed{y = -2k}$

$(1) \Rightarrow$

$3x - 4k + 7k = 0$

$3x + 3k = 0$

$3x = -3k$

$\boxed{x = -k}$

Soln is $x = -t, y = -2k, z = t$ $t \in R$.

---

2. Determinant the values of $\lambda$ for which the following system of equations

$x + y + 3z = 0, \quad 4x + 3y + \lambda z = 0, \quad 2x + y + 2z = 0$

has (i) unique soln (ii) non trivial soln.

soln

Matrix form of the system is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$AX = B$

Augmented Matrix is

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 12-\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 4R_1 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

Case i  When $\lambda \neq 8$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 3$

System is consistent

it has trivial soln. (unique)

Case ii  When $\lambda = 8$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 2$

System is consistent

it has non trivial soln

Ex 1.38  Determine the values of $\lambda$ for which the following system of equations

$(3\lambda-8)x + 3y + 3z = 0$, $3x + (3\lambda-8)y + 3z = 0$,

$3x + 3y + (3\lambda-8)z = 0$

Soln

Since the system of equ. has no trivial soln.

$\therefore$ Determinant of co.eff. matrix is zero.

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-2 & 3\lambda-2 & 3\lambda-2 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$$

$$(3\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$3\lambda-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3\lambda-11 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda-11 \end{vmatrix} = \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$(3\lambda-2)(3\lambda-11)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = 2/3,\ \lambda = 11/3$

Example 1.40 If the system of equations $px+by+cz=0$, $ax+qy+cz=0$, $ax+by+rz=0$ has non trivial soln & $p\neq a$, $q\neq b$, $r\neq c$ P.T

$$\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=2$$

soln

Since the system of equ. has non trivial soln.

$$\therefore \begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} p & b & c \\ a-p & q-b & 0 \\ a-p & 0 & r-c \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{matrix} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ -(p-a) & q-b & 0 \\ -(p-a) & 0 & r-c \end{vmatrix}=0$$

$$(p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{q}{q-b} & \frac{r}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{q}{q-b} & \frac{r}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\cancel{\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}}=0$$

$$\frac{p}{p-a}+\frac{q(q-b)}{q-b}+\frac{r(r-c)}{r-c}=0$$

$$\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}-2=0$$

$$\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=2$$

H.P.