சாதனை சிகரம் தொட

வெற்றிக்கு வழி

10ம் வகுப்பு

கணக்கு

June Month Study material

அன்புசால் மாணவர்கள் மற்றும் ஆசிரியர்களுக்கு

பலரின் வேண்டுகோளை ஏற்றோம் 2019 – 2020 ஆம் கல்வியாண்டிற்குரிய 10ஆம் வகுப்பிற்கான கணக்கு பாடநூலில் இடம்பெற்றுள்ள ஜீன் மாத அலகுகளுக்குரிய புத்தக வினாக்களுக்கான விடைகளை மட்டும் தங்கள் கனிவான பார்வைக்காக இணையத்தில் இன்று வெளியிட்டுள்ளோம். விரைவில் பத்தாம் வகுப்பு கணிதக் கையேடு வெளிவரும்.

சிறந்த அன்புடன்
வெற்றிக்கு வழி குடும்பம்

1. உறவுகளும் சார்புகளும்

நினைவில் கொள்ள...(பயிற்சி 1.1)

கார்டீசியன் பெருக்கல்: A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், இவற்றின் வரிசைச் சோடிகளின் கணமானது $(a,b)\ a\in A, b\in B$ என இருக்கும். இதை A மற்றும் B யின் கார்டீசியன் பெருக்கல் என்கிறோம். எனவே $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$

- ✓ $A\times B$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், அதன் முதல் உறுப்பு A யின் உறுப்பாகவும், இரண்டாவது உறுப்பு B யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- ✓ $B\times A$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், முதல் உறுப்பு B யின் உறுப்பாகவும் இரண்டாவது உறுப்பு A யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- ✓ பொதுவாக $(a,b)\neq(b,a)$ குறிப்பாக $a=b$ எனில் $(a,b)=(b,a)$.
- ✓ கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறுக்கு பெருக்கல் (Cross product) எனவும் குறிப்பிடலாம்
- ✓ பொதுவாக $A\times B\neq B\times A$, ஆனால் $n(A\times B)=n(B\times A)$
- ✓ $A\times B=\emptyset$ எனில் if $A=\emptyset$ அல்லது $B=\emptyset$
- ✓ $n(A)=p$ மற்றும் $n(B)=q$ எனில் $n(A\times B)=pq$
- ✓ கார்டீசியன் தளத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணத்தை (x,y) என்ற வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக அறியலாம். இதில் x,y ஆகியவை மெய்யெண்கள். $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்ற கணத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் நாம் கார்டீசியன் தளம் என அழைக்கிறோம்.
- ✓ கார்டீசியன் பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுகளின் மீதான பங்கீட்டு பண்புகள்:
  (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
  (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
- ✓ $A\times B$ என்பது இரு பரிமாணத்தில் சதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது. $A\times B\times C$ என்பது முப்பரிமாணத்தில் கனசதுரத்தின் புள்ளிகளை குறிக்கிறது.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றிற்கு $A\times B, A\times A$ மற்றும் $B\times A$ ஐக் காண்க.

(i) $A=\{2,-2,3\}$ மற்றும் $B=\{1,-4\}$

$A\times B=\{2,-2,3\}\times\{1,-4\}$
$=\{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A\times A=\{2,-2,3\}\times\{2,-2,3\}$
$=\{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B\times A=\{1,-4\}\times\{2,-2,3\}$
$=\{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A=B=\{p,q\}$

$A\times B=\{p,q\}\times\{p,q\}$
$=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

$A\times A=\{p,q\}\times\{p,q\}$
$=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

$B\times A=\{p,q\}\times\{p,q\}$
$=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $\boldsymbol{A=\{m,n\};B=\emptyset}$

$A\times B=\{\ \ \}$

$A\times A=\{m,n\}\times\{m,n\}$

$=\{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$

$B\times A=\{\ \ \}$

2. $\boldsymbol{A=\{1,2,3\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B=\{x|x}$ **என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்}** **எனில்,** $\boldsymbol{A\times B}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B\times A}$ **ஆகியவற்றைக் காண்க.**

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{x|x$ என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்$\}=\{2,3,5,7\}$

$A\times B=\{1,2,3\}\times\{2,3,5,7\}$

$=\{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$B\times A=\{2,3,5,7\}\times\{1,2,3\}$

$=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

3. $\boldsymbol{B\times A=\{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}}$ **எனில்,** $\boldsymbol{A}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B}$ **ஆகியவற்றைக் காண்க.**

$B=\{$ $B\times A$ யின் முதல் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$

$B=\{-2,0,3\}$

$A=\{$ $B\times A$ யின் இரண்டாம் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்$\}$

$A=\{3,4\}$

4. $\boldsymbol{A=\{5,6\},B=\{4,5,6\},C=\{5,6,7\}}$ **எனில்** $\boldsymbol{A\times A=(B\times B)\cap(C\times C)}$ **எனக் காட்டுக**

$A=\{5,6\},B=\{4,5,6\},C=\{5,6,7\}$

LHS: $A\times A=\{5,6\}\times\{5,6\}$

$=\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$ ....(1)

RHS:

$B\times B=\{4,5,6\}\times\{4,5,6\}$

$=\{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$C\times C=\{5,6,7\}\times\{5,6,7\}$

$=\{(5,5),(5,6),(5,7),(6,5),(6,6),(6,7),(7,5),(7,6),(7,7)\}$

$(B\times B)\cap(C\times C)=\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$..........(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $A\times A=(B\times B)\cap(C\times C)$

5. $\boldsymbol{A=\{1,2,3\},B=\{2,3,5\},C=\{3,4\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{D=\{1,3,5\}}$ **எனில்**
$\boldsymbol{(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)}$ **என்பது உண்மையா என சோதிக்கவும்.**

$A\cap C=\{1,2,3\}\cap\{2,3,5\}=\{2,3\}$

$B\cap D=\{2,3,5\}\cap\{1,3,5\}=\{3,5\}$

LHS: $(A\cap C)\times(B\cap D)=\{3\}\times\{3,5\}=\{(3,3),(3,5)\}$ ....(1)

RHS: $A\times B=\{1,2,3\}\times\{2,3,5\}$

$=\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5)\}$

$C\times D=\{3,4\}\times\{1,3,5\}$

$=\{(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

$(A\times B)\cap(C\times D)=\{(3,3),(3,5)\}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D)$ என்பது உண்மையாகும்.

Padasalai TrbTnpsc

6. $A = \{x \in \mathbb{W} | x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 4\}$ மற்றும் $C = \{3, 5\}$ எனில், கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A = \{x \in \mathbb{W} | x < 2\} = \{0,1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 4\} = \{2,3,4\}, \quad C = \{3,5\}$

LHS:

$B \cup C = \{2,3,4\} \cup \{3,5\} = \{2,3,4,5\}$

$A \times (B \cup C) = \{0,1\} \times \{2,3,4,5\}$

$= \{(0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$ ....(1)

RHS:

$A \times B = \{0,1\} \times \{2,3,4\} = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

$A \times C = \{0,1\} \times \{3,5\} = \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\} \cup \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$= \{(0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

LHS: $B \cap C = \{2,3,4\} \cap \{3,5\} = \{3\}$

$A \times (B \cap C) = \{0,1\} \times \{3\}$

$= \{(0,3), (1,3)\}$ ....(1)

RHS: $A \times B = \{0,1\} \times \{2,3,4\}$

$= \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

$A \times C = \{0,1\} \times \{3,5\}$

$= \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\} \cap \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$= \{(0,3), (1,3)\}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

LHS: $A \cup B = \{0,1\} \cup \{2,3,4\} = \{0,1,2,3,4\}$

$(A \cup B) \times C = \{0,1,2,3,4\} \times \{3,5\}$

$= \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$ ....(1)

RHS: $A \times C = \{0,1\} \times \{3,5\} = \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$B \times C = \{2,3,4\} \times \{3,5\} = \{(2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$

$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\} \cup \{(2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$

$= \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

7. ***A*** **என்பது 8-ஐவிடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், *B* என்பது 8-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் *C* என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.**

$A =$ 8-ஐவிடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம் $= \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$B =$ 8-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் $= \{2,3,5,7\}$

$C =$ இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் $= \{2\}$

(i) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$

LHS: $A \cap B = \{1,2,3,4,56,7\} \cap \{2,3,5,7\} = \{2,3,5,7\}$

$(A \cap B) \times C = \{2,3,5,7\} \times \{2\} = \{(2,2),(3,2),(5,2),(7,2)\}$ ....(1)

RHS: $A \times C = \{1,2,3,4,56,7\} \times \{2\}$

$= \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$B \times C = \{2,3,5,7\} \times \{2\}$

$= \{(2,2),(3,2),(5,2),(7,2)\}$..............(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(ii) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$

LHS: $B - C = \{2,3,5,7\} - \{2\} = \{3,5,7\}$

$A \times (B - C) = \{1,2,3,4,56,7\} \times \{3,5,7\}$

$= \{(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7),(4,3),(4,5),(4,7),$
$(5,3),(5,5),(5,7),(6,3),(6,5),(6,7),(7,3),(7,5),(7,7)\}$...........(1)

RHS: $A \times B = \{1,2,3,4,56,7\} \times \{2,3,5,7\}$

$= \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7),(4,2),(4,3),$
$(4,5),(4,7),(5,2),(5,3),(5,5),(5,7),(6,2),(6,3),(6,5),(6,7),(7,2),(7,3),(7,5),(7,7)\}$

$A \times C = \{1,2,3,4,56,7\} \times \{2\} = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$(A \times B) - (A \times C)$

$= \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7),(4,2),(4,3),$
$(4,5),(4,7),(5,2),(5,3),(5,5),(5,7),(6,2),(6,3),(6,5),(6,7),(7,2),(7,3),(7,5),(7,7)\}$
$- \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$= \{(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7),(4,3),(4,5),(4,7),$
$(5,3),(5,5),(5,7),(6,3),(6,5),(6,7),(7,3),(7,5),(7,7)\}$...........(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி

✓ A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் என்க. A யிலிருந்து B க்கு உள்ள உறவு R ஆனது சில விதிமுறைகளை நிறைவு செய்து, $A \times B$ யின் உட்கணமாக இருக்கும். $x \in A$ விற்கும் $y \in B$ க்குமான உறவு R யின் வழியாக இருந்தால் xRy என எழுதலாம். xRy என இருந்தால் மட்டுமே $(x,y) \in R$

உறவு R யின் மதிப்பகம் $= \{x \in A | xRy$, ஏதேனும் ஒரு $y \in B\}$

உறவு R ன் துணை மதிப்பபகம் $= B$ ஆகும்

உறவு R ன் வீச்சகம் $= \{y \in B | xRy,$ ஏதேனும் ஒரு $x \in A\}$

✓ ஓர் உறவை, பட்டியல் முறையிலோ அல்லது கணக்கட்டமைப்பு முறையிலோ குறிக்கலாம்.

- ✓ உறவைக் காட்சிப்படுத்தி அறிய அம்புக்குறி படத்தை பயன்படுத்தலாம்.
- ✓ ஒரு உறவில் உறுப்புகள் இல்லை என்றால் அது இன்மை உறவு (Null relation) எனப்படும்.
- ✓ $n(A) = p, n(B) = q$ எனில், A மற்றும் B க்கு இடையே கிடைக்கும் மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கையானது 2^{pq} ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $A = \{1, 2, 3, 7\}$ மற்றும் $B = \{3, 0, -1, 7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A லிருந்து B க்கான உறவுகளாகும்?

(i) $R_1 = \{(2,1), (7,1)\}$

$A \times B = \{1,2,3,7\} \times \{3,0,-1,7\}$

$= \{(1,3), (1,0), (1,-1), (1,7), (2,3), (2,0), (2,-1), (2,7), (3,3), (3,0),$
$(3,-1), (3,7), (7,3), (7,0), (7,-1), (7,7)\}$

$(2,1)$ மற்றும் $(7,1) \in R_1$ ஆனால் $(2,1), (7,1) \notin A \times B$

R_1 ஆனது <u>***A* லிருந்து *B* க்கான உறவு இல்லை**</u>

(ii) $R_2 = \{(-1,1)\}$

இங்கு $(-1,1) \in R_2$ ஆனால் $(-1,1) \notin A \times B$

R_2 ஆனது <u>***A* லிருந்து *B* க்கான உறவு இல்லை**</u>

(iii) $R_3 = \{(2,-1), (7,7), (1,3)\}$

இங்கு $R_3 \subseteq A \times B$

R_3 ஆனது <u>***A* லிருந்து *B* க்கான உறவு ஆகும்.**</u>

(iv) $R_4 = \{(7,-1), (0,3), (3,3), (0,7)\}$

இங்கு $(0,3)$ மற்றும் $(0,7) \in R_4$ ஆனால் $(0,3)$ மற்றும் $(0,7) \notin (A \times B)$

R_4 ஆனது <u>***A* லிருந்து *B* க்கான உறவு இல்லை**</u>

2. $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 45\}$ மற்றும் R என்ற உறவு "A - யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கப்பட்டால், R – ஐ $A \times A$ - யின் உட்கணமாக எழுதுக. மேலும் R - க்கான மதிப்பகத்தையும், வீச்சகத்தையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $A = \{1,2,3,4, \dots ,45\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \dots \dots (45,45)\}$

R என்ற உறவு "A - யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கபடுகிறது.

எனவே, $R = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36)\}$

$R \subseteq A \times A$

R - க்கான மதிப்பகம் $= \{1,2,3,4,5,6\}$

R - க்கான வீச்சகம் $= \{1,4,9,16,25,36\}$

3. R என்ற ஒரு உறவு $\{(x, y)/y = x + 3, x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக.

$R = \{(x, y)/y = x + 3, x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$

மதிப்பகம் $(x) = \{0,1,2,3,4,5\}$, வீச்சகம் $(y) = x + 3$

$y_0 = 0 + 3 = 3$

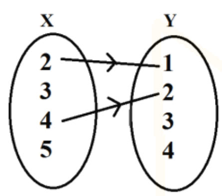
$y_1 = 1 + 3 = 4$

$y_2 = 2 + 3 = 5$
$y_3 = 3 + 3 = 6$
$y_4 = 4 + 3 = 7$
$y_5 = 5 + 3 = 8$
$R = \{(0,3), (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8)\}$
மதிப்பகம் $= \{0,1,2,3,4,5\}$
வீச்சகம் $= \{3,4,5,6,7,8\}$

4. **கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும் (1) அம்புக்குறி படம் (2) வரைபடம் (3) பட்டியல் முறையில் குறிக்க.**

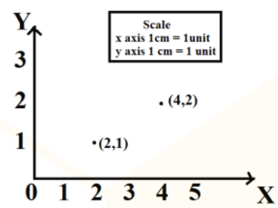
(i) $\{(x, y) | x = 2y, x \in \{2, 3, 4, 5\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

(1) அம்புக்குறி படம்



கொடுக்கப்பட்டது, $x = 2y$
$y = 1$ எனில், $x = 2$
$y = 2$ எனில், $x = 4$

(2) வரைபடம்



(3) பட்டியல் முறை

$R = \{(2,1), (4,2)\}$

(ii) $\{(x, y) | y = x + 3, x, y$ **ஆகியவை இயல் எண்கள்** $< 10\}$

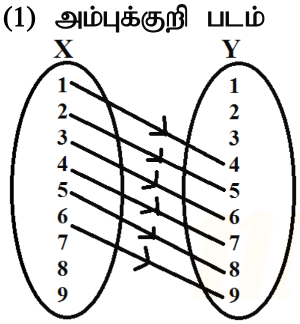
கொடுக்கப்பட்டது, x, y ஆகியவை இயல் எண்கள் < 10

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

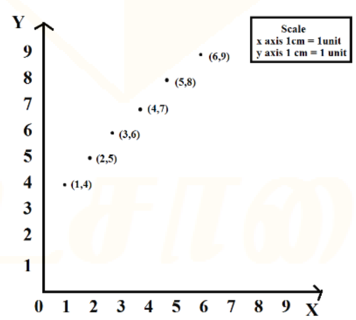
$y = x + 3$

இங்கு $R(1) = 4, R(2) = 5, R(3) = 6, R(4) = 7, R(5) = 8, R(6) = 9$

(1) அம்புக்குறி படம்



(2) வரைபடம்



(3) பட்டியல் முறை

$= \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9)\}$

5. **ஒரு நிறுவனத்தின் உதவியாளர்கள் (A) எழுத்தர்கள் (C), மேலாளர்கள் (M) மற்றும் நிர்வாகிகள் (E) ஆகிய நான்கு பிரிவுகளில் பணியாளர்கள் உள்ளனர். A, C, M மற்றும் E பிரிவு பணியாளர்களுக்கு ஊதியங்கள் முறையே ₹10,000, ₹ 25,000, ₹50,000, ₹1,00,000 ஆகும். A_1, A_2, A_3, A_4 மற்றும் A_5 ஆகியோர் உதவியாளர்கள். C_1, C_2, C_3, C_4 ஆகியோர் எழுத்தர்கள். M_1, M_2, M_3 ஆகியோர்கள் மேலாளர்கள். மற்றும் E_1, E_2 ஆகியோர் நிர்வாகிகள் ஆவர். $x\mathbb{R}y$ என்ற உறவில் x என்பது y என்பவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம் எனில் R - என்ற உறவை, வரிசைச் சோடிகள் மூலமாகவும் அம்புக்குறி படம் மூலமாகவும் குறிப்பிடுக.**

ஊதியங்கள் (S) $= \{10000, 25000, 50000, 100000\}$

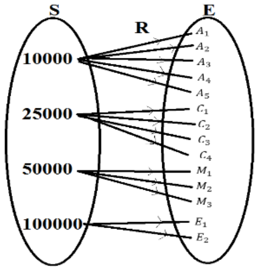
பணியாளர்கள் (E) $= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, C_1, C_2, C_3, C_4, M_1, M_2, M_3, E_1, E_2\}$

Padasalai TrbTnpsc

(a) வரிசைச் சோடிகள்

$R = \{(10000, A_1), (10000, A_2), (10000, A_3), (10000, A_4), (10000, A_5), (25000, C_1), (25000, C_2), (25000, C_3), (25000, C_4), (50000, M_1)(50000, M_2), (50000, M_3), (100000, E_1), (100000, E_2)\}$

(b) அம்புக்குறி படம்



நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி

- ✓ X மற்றும் Y என்ற வெற்றில்லா கணங்களுக்கிடையேயான ஒரு உறவு f-ல் ஒவ்வொரு $x \in X$ க்கும் ஒரே ஒரு $y \in Y$ கிடைக்கிறது எனில் f ஐ நாம் **"சார்பு"** என்கிறோம்.
- ✓ அதாவது, $f = \{(x, y)/$ஒவ்வொரு $x \in X$ க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$இருக்கும்$\}$
- ✓ ஒரு சார்பை, தொடர்புபடுத்துதல் அல்லது உருமாற்றம் செய்தல் என கருதாலாம்
- ✓ $f: X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,
  i) மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.
  ii) ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் இருக்கும்.
- ✓ முடிவுறு கணங்கள் A மற்றும் B யில் $n(A) = p,\ n(B) = q$ எனில், A மற்றும் B க்கு இடையேயான மொத்தச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை q^p ஆகும்.
- ✓ $f(a) = b$ ஆக இருந்ததால் சார்பு f ல் b ஆனது a யின் **நிழல் உரு** எனவும் மற்றும் a ஆனது b யின் **முன் உரு** எனவும் அழைக்கிறோம்.
- ✓ X யின் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணத்தை f-யின் வீச்சகம் என்கிறோம்.

பயிற்சி 1.3

1. $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $y = 2x\}$ ஆனது $\mathbb{N}$ - ன் மீதான ஓர் உறவு என்க. மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. இந்த உறவு சார்பாகுமா?

$y = f(x) = 2x$

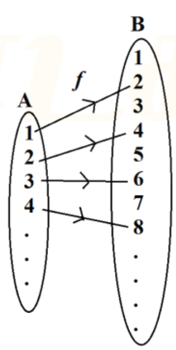
$f(1) = 2(1) = 2$

$f(2) = 2(2) = 4$

$f(3) = 2(3) = 6$

$f(4) = 2(4) = 8$

$\vdots$



f ஆனது Nன் மீதான ஓர் உறவு

f ன் மதிப்பகம் $= \{1,2,3,4, \ldots\}$

f ன் துணை மதிப்பகம் $= \{1,2,3,4, \ldots\}$

f ன் வீச்சகம் $= \{2,4,6,8, \ldots\}$

f ன் அம்புகுறி படத்திலிருந்து, $x \in A$ க்கும் ஒரே ஒரு $y \in B$ இருக்கும்.

ஆம், f ஒரு சார்பு ஆகும்.

2. $X = \{3, 4, 6, 8\}$. என்க. $\mathbb{R} = \{(x, f(x)) | x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ என்ற உறவானது X – லிருந்து $\mathbb{N}$ - க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

கொடுக்கப்பட்டது, $X = \{3,4,6,8\}$

$Y = \{1,2,3,4, \ldots.\}$

$R = \{(x, f(x)/x \in X, f(x) = x^2 + 1)\}$

$y = f(x) = x^2 + 1$

$f(3) = 3^2 + 1 = 10$

$f(4) = 4^2 + 1 = 17$

$f(6) = 6^2 + 1 = 37$

$f(8) = 8^2 + 1 = 65$

$R = \{(3,10), (4,17), (6,37), (8,65)\}$

மதிப்பகம் X ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் N ல் ஒரு நிழல் உரு உள்ளது.

ஆம், R ஆனது X லிருந்து N க்கு ஒரு சார்பாகும்.

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f: x \to x^2 - 5x + 6$, எனில்,

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$ (iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

(i) $f(-1)$

$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6$

$= 1 + 5 + 6 = 12$

(ii) $f(2a)$

$f(2a) = (2a)^2 - 5(2a) + 6$

$= 4a^2 - 10a + 6$

(iii) $f(2)$

$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6$

$= 4 - 10 + 6 = 0$

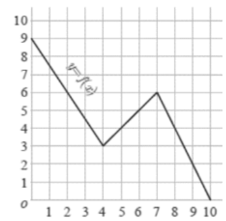
(iv) $f(x-1)$

$f(x-1) = (x-1)^2 - 5(x-1) + 6$

$= x^2 - 2x + 1 - 5x + 5 + 6$

$= x^2 - 7x + 12$

4. படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் $f(x)-$ யின் மூலமாக, $f(9) = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.



(i) பின்வரும் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க

(அ) $f(0)$ (ஆ) $f(7)$ (இ) $f(2)$ (ஈ) $f(10)$

(ii) $x-$ யின் எம்மதிப்பிற்கு $f(x) = 1$ ஆக இருக்கும்?

(iii) $f(x)$ - யின் (1) மதிப்பகம் (2) வீச்சகம் காண்க.

(iv) f என்ற சார்பில் 6 -ன் நிழல் உரு என்ன?

(i) படத்திலிருந்து, (அ) $f(0) = 9$ (ஆ) $f(7) = 6$ (இ) $f(2) = 6$ (ஈ) $f(10) = 0$

(ii) $f(x) = 1 \Rightarrow x = 9.5$

(iii) (1) f ன் மதிப்பகம் $= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ அல்லது

$f = \{x/0 \le x \le 10, x \in R\}$

(2) f ன் வீச்சகம் $= \{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$ அல்லது

$f = \{x/0 \le x \le 9, x \in R\}$

(iv) f என்ற சார்பில் 6 -ன் நிழல் உரு $= 5$

5. $f(x) = 2x + 5$ **என்க.** $x \neq 0$ **எனில்** $\frac{f(x+2)-f(2)}{x}$ **ஐக் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது, $f(x) = 2x + 5, x \neq 0$

$f(x+2) = 2(x+2) + 5 = 2x + 4 + 5 = 2x + 9$

$f(2) = 2(2) + 5 = 4 + 5 = 9$

எனவே, $\frac{f(x+2)-f(2)}{x} = \frac{2x+9-9}{x} = \frac{2x}{x} = 2$

6. ஒரு சார்பு f ஆனது $f(x) = 2x - 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
(i) $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ - ஐக் காண்க. (ii) $f(x) = 0$ எனும்பொழுது, x ஐக் காண்க.
(iii) $f(x) = x$ எனில் x ஐக் காண்க. (iv) $f(x) = f(1-x)$ எனில் x ஐக் காண்க.

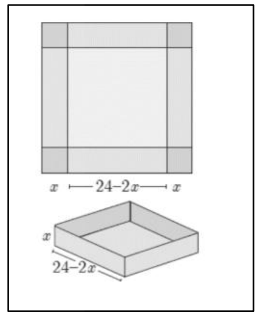
(i) $\frac{f(0)+f(1)}{2}$
$f(0) = 2(0) - 3 = -3$
$f(1) = 2(1) - 3 = -1$
$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

(ii) $f(x) = 0$
$2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$

(iii) $f(x) = x$
$2x - 3 = x$
$2x - x = 3$
$x = 3$

(iv) $f(x) = f(1-x)$
$2x - 3 = 2(1-x) - 3 = 2 - 2x - 3 = -2x - 1$
$2x + 2x = 3 - 1$
$4x = 2$
$x = \frac{1}{2}$

7. 24 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவத் துண்டிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்களை வெட்டி படத்தில் உள்ளவாறு மேல்புறம் திறந்த ஒரு பெட்டி செய்யப்படுகிறது. இந்த பெட்டியின் கன அளவு V எனில், V ஐ $x-$ யின் சார்பாகக் குறிப்பிடுக.



சதுர வடிவ துண்டின் பக்க அளவு $= 24$ செ.மீ
மூலைகளில் வெட்டப்படும் பகுதியின் பக்க அளவு $= x$ செ.மீ
மேல்புறம் திறந்த பெட்டியின் பக்க அளவு $= 24 - 2x$ செ.மீ
உயரம் $= x$ செ.மீ
மேல்புறம் திறந்த பெட்டியின் கன அளவு $V = lbh$ கன அலகுகள்.
$= (24-2x)(24-2x)(x)$
$= (24-2x)^2(x)$
$= (576 - 96x + 4x^2)x$
$= 4x^3 - 96x^2 + 576x$

8. f என்ற சார்பு $f(x) = 3 - 2x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $f(x^2) = (f(x))^2$ எனில் x -ஐக் காண்க

கொடுக்கப்பட்டது, $f(x) = 3 - 2x$
காண வேண்டியது x, $f(x^2) = (f(x))^2$
$3 - 2x^2 = (3-2x)^2$
$3 - 2x^2 = 9 - 12x + 4x^2$
$4x^2 + 2x^2 - 12x + 6 = 0$
$6x^2 - 12x + 6 = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$

9. ஒரு விமானம் 500 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. விமானம் 'd' தொலைவு செல்வதற்கு ஆகும் காலத்தை t(மணியில்) –ன் சார்பாக வெளிப்படுத்துக.

கொடுக்கப்பட்டது ,
வேகம்(S)= 500 கி.மீ/மணி
வேகம் $= \frac{\text{தூரம்}}{\text{நேரம்}}$
$S = \frac{d}{t}$
$d = 500t$

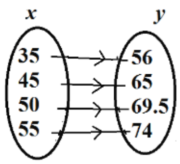
10. அருகில் உள்ள அட்டவணையில் பெண்களின் முன்னங்கைகளின் நீளம் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய உயரங்களின் தகவல்கள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர், உயரம் (y) மற்றும் முன்னங்கை நீளம் (x) –க்கான உறவை $y = ax + b$ எனக் கண்டுபிடித்தார். இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.

முன்னங்கைகளின் நீளம் (செ.மீ) 'x'	உயரம் (அங்குலம்) 'y'
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) இந்த உறவானது சார்பாகுமா என ஆராய்க.
(ii) a மற்றும் b –ஐக் காண்க.
(iii) முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்த பெண்ணின் உயரத்தைக் காண்க.
(iv) உயரம் 53.3 அங்குலம் எனில் அந்தப் பெண்ணின், முன்னங்கையின் நீளத்தைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது $y = ax + b$

(i) அம்புக்குறிப்படம்



x ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் y ல் ஒரே ஒரு நிழல் உரு கொண்டுள்ளது. எனவே இந்த உறவு சார்பாகும்.

(ii) a மற்றும் b –ஐக் காண

அட்டவணையிலிருந்து

$35a + b = 56$ ....(1)

$45a + b = 65$ ....(2)

$(-)\quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$-10a = -9$

$a = \frac{9}{10} = 0.9$

$a = 0.9$ என (1) ல் பிரதியிட

$35(0.9) + b = 56$

$31.5 + b = 56$

$b = 56 - 31.5 = 24.5$

$a = 0.9$ மற்றும் $b = 24.5$

(iii) நீளம் $= 40$செ.மீ, $a = 0.9, b = 24.5$

$y = ax + b$

$= (0.9)(40) + 24.5$

$= 60.5$

முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்த பெண்ணின் உயரம் $= 60.5$ அங்குலம்

(iv) உயரம் $= 53.3$ அங்குலம்

$y = ax + b$

$53.3 = (0.9)x + 24.5$

$= 0.9x + 24.5$

$0.9x = 53.3 - 24.5$

$= 28.8$

$x = \frac{28.8}{0.9}$

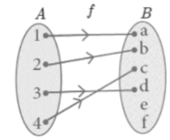
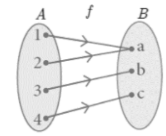
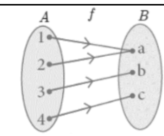
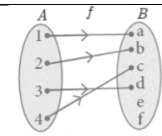
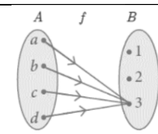
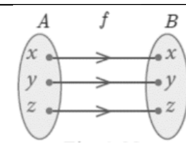
$x = 32$ செ.மீ

அந்தப் பெண்ணின், முன்னங்கையின் நீளம் $= 32$ செ.மீ

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 1.4)

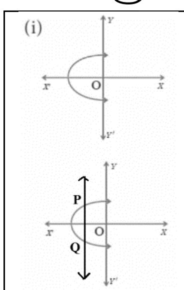
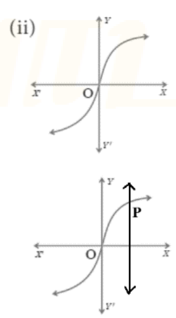
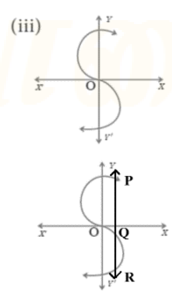
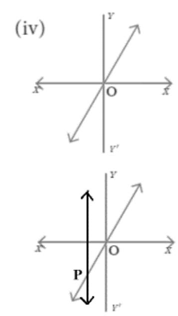
- ✓ சார்புகளை குறிக்கும் முறை
  (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை முறை
  (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபடம்
- ✓ **குத்துக்கோட்டுச் சோதனை(Vertical line test):** வளைவரையை ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் அவ்வளைவரை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.
- ✓ **கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனை (Horizontal line test):** வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றான சார்பைக் குறித்தால், வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை அதிகபட்சமாக ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும்.
- ✓ ஒவ்வொரு சார்பையும், ஒரு வளைவரையாக (curve) வரைபடத்தில் குறிப்பிடலாம். ஆனால் வரைபடத்தில் வரையப்படும் அனைத்து வரைளவரைகளும் சார்பாகாது.

Padasalai TrbTnpsc

வ.எண்	பெயர்	வரையறை	விளக்கம்
1	**ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (ஒரு புறச் சார்பு)**	$f: A \to B$ என்பது சார்பு என்க. Aன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துமானால், f என்பது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு** ஆகும்.	
2	**பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஐ **பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு** எனில், அச்சார்பில் A யின் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு, B ல் ஒரே நிழல் உரு இருக்கும்.	
3	**மேல் சார்பு (மேல்புறச் சார்பு)**	$f: A \to B$ என்ற ஒரு சார்பு, மேல் சார்பு எனில் f யின் வீச்சகமானது, f யின் துணை மதிப்பகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். $f(A) = B$	
4	**உட்சார்பு**	ஒரு சார்பு $f: A \to B$ ஆனது உட்சார்பு எனில், B ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பிற்காவது, A ல் முன் உரு இருக்காது.	
5	**மாறிலிச் சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஆனது மாறிலிச் சார்பு எனில், f ன் வீச்சகமானது ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்டதாகும். அதாவது, $f(x) = c$, அனைத்து $x \in A$ ஏதேனும் ஒரு நிலையான $c \in B$.	
6	**சமனிச் சார்பு**	A ஒரு வெற்றிலா கணம் என்க. சார்பு $f: A \to A$ ஆனது $f(x) = x$ அனைத்து $x \in A$, என வரையறுக்கப்பட்டால், அந்த சார்பு A யின் சமனிச் சார்பு எனப்படும். இதை I_A எனக் குறிக்கலாம்.	
7	**மெய் மதிப்புச் சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஆனது மெய் மதிப்புச் சார்பு எனில், f யின் வீச்சகமானது, R எனும் மெய்யெண்களின் உட்கணமாக இருக்கும். அதாவது $f(A) \subseteq R$	

பயிற்சி 1.4

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும்

 குத்துக்கோட்டுச் சோதனையிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது, **சார்பை குறிக்கவில்லை** என தெளிவாகிறது. ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக்கோடு P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.	 கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது, **சார்பை குறிக்கிறது.** ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக்கோடு P என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்கிறது.	 கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது, **சார்பை குறிக்கவில்லை.** ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக்கோடு P,Q மற்றும் R ஆகிய மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.	 கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடானது, **சார்பை குறிக்கிறது.** ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக கோடு, நேர்க்கோட்டை P என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்கிறது.

2. **$f: A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, என வரையறுக்கப்படுகிறது.**
இங்கு, $A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$,
$B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$. ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f-ஐ பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்
(ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறி படம்
(iv) வரைபடம்

$A = \{2,4,6,10,12\}, B = \{0,1,2,4,5,9\}$

$f(x) = \frac{x}{2} - 1$

எனவே, $f(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(4) = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(6) = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$f(10) = \frac{10}{2} - 1 = 5 - 1 = 4$

$f(12) = \frac{12}{2} - 1 = 6 - 1 = 5$

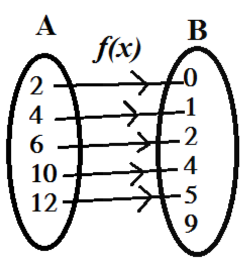
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

$f = \{(2,0), (4,1), (6,2), (10,4), (12,5)\}$

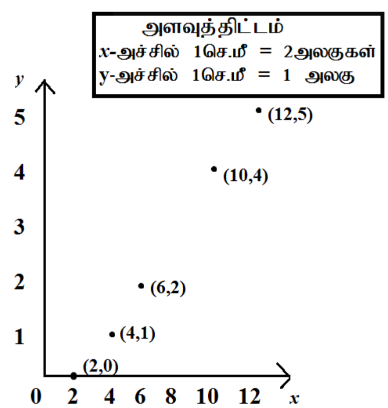
(ii) **அட்டவணை**

x	2	4	6	10	12
$f(x)$	0	1	2	4	5

(iii) **அம்புக்குறி படம்**



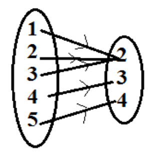
(iv) **வரைபடம்**



3. **$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$ என்ற சார்பினை (i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை (iii) வரைபடம் மூலமாகக் குறிக்கவும்.**

$f = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,3), (5,4)\}$

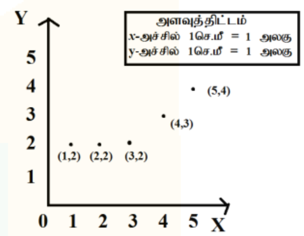
(i) **அம்புக்குறி படம்**



(ii) **அட்டவணை**

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	2	2	3	4

(iii) **வரைபடம்**



4. **$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.**

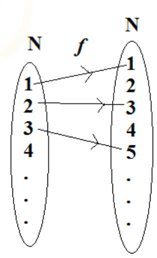
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = 1$ எனில், $f(1) = 2(1) - 1 = 1$

$x = 2$ எனில், $f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$x = 3$ எனில், $f(3) = 2(3) - 1 = 5$

அம்புக்குறிபடம்



$f: N \to N$ என்ற சார்பில் N ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் N ல் வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே f **ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.** ஆனால் துணைமதிப்பகத்தில் உள்ள இரட்டைப்படை எண்களுக்கு முன்உரு மதிப்பகத்தில் இல்லை எனவே f **ஆனது மேல் சார்பு இல்லை.**

5. $\boldsymbol{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ **என்ற சார்பு** $\boldsymbol{f(m)=m^2+m+3}$ **என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.**

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m)=m^2+m+3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$m=1, f(1)=(1)^2+1+3=1+1+3=5$

$m=2, f(2)=(2)^2+2+3=4+2+3=9$

$m=3, f(3)=(3)^2+3+3=9+3+3=15$

$m=4, f(4)=(4)^2+4+3=16+4+3=23$

N -ன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை N ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துவதால், f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும்.

6. $\boldsymbol{A=\{1,2,3,4\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B=\mathbb{N}}$ **என்க. மேலும்** $\boldsymbol{f:A\to B}$ **ஆனது,** $\boldsymbol{f(x)=x^3}$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், (i)** $\boldsymbol{f}$**- யின் வீச்சகத்தைக் காண்க. (ii)** $\boldsymbol{f}$ **எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க**

$A=\{1,2,3,4\}, B=\{1,2,3,\dots\}$

கொடுக்கப்பட்டது, $f:A\to B$ மற்றும் $f(x)=x^3$

$f(1)=1^3=1, f(3)=3^3=27$

$f(2)=2^3=8,\ f(4)=4^3=64$

(i) f- யின் வீச்சகம்= $\{1,8,27,64\}$

(ii) A யின் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துவதால், f என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். $2\in B$ க்கு A ல் முன்உரு இல்லாததால் இது ஒரு உட்சார்பு ஆகும்.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சார்பும் இருபுறச் சார்பா, இல்லையா? உன் விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

(i) $\boldsymbol{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x)=2x+1}$

$f(x)=2x+1$

$f(0)=2(0)+1=1$

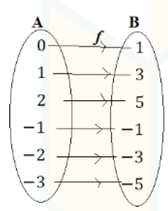
$f(1)=2(1)+1=3$

$f(2)=2(2)+1=5$

$f(-1)=2(-1)+1=-1$

$f(-2)=2(-2)+1=-3$

$f(-3)=2(-3)+1=-5$



f- யின் வீச்சகம்= $\{1,3,5,-1,-3,-5\}$

A யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது மற்றும் B ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் A ல் முன்உரு உள்ளது. எனவே f இருபுறச் சார்பு ஆகும்.

(ii) $\boldsymbol{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x)=3-4x^2}$

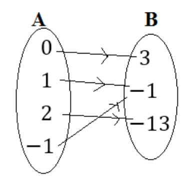
$f(x)=3-4x^2$

$f(0)=3-4(0)^2=3$

$f(1)=3-4(1)^2=-1$

$f(2)=3-4(2)^2=-13$

$f(-1)=3-4(1)^2=-1$



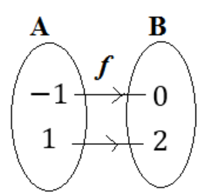
A ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகள் 1 மற்றும் -1 க்கு B ல் ஒரே நிழல் உரு உள்ளது. **எனவே** $\boldsymbol{f}$ **ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.** ஆனால் B ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் A ல் முன்உரு உள்ளது எனவே $\boldsymbol{f}$ **ஆனது மேல்சார்பு ஆகும்.**

எனவே f இருபுறச் சார்பு அல்ல.

8. $\boldsymbol{A=\{-1,1\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B=\{0,2\}}$ **என்க. மேலும்,** $\boldsymbol{f:A\to B}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x)=ax+b}$ **என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு எனில்,** $\boldsymbol{a}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{b-}$ **ஐக் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது. $A=\{-1,1\}$ மற்றும் $B=\{0,2\}$

$f:A\to B$ ஆனது $f(x)=ax+b$ என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு



[f ன் வீச்சகம் = துணைமதிப்பகம்]

$f(-1)=0\Rightarrow +a(-1)+b=0$

$f(1)=2\Rightarrow a(1)+b=2$

$-a+b=0$ ....(1)

$a+b=2$ ....(2)

(1)+(2) $\quad 2b=2$

$b=1$

$b=1$ என (2) ல் பிரதியிட

$a+1=2$

$a=2-1=1$

எனவே, $a=1$ மற்றும் $b=1$

9. $\boldsymbol{f}$ என்ற சார்பானது $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x+2 & ; x>1 \\ 2 & ; -1\le x\le 1 \\ x-1 & ; -3<x<-1 \end{cases}}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) $\boldsymbol{f(3)}$ **(ii)** $\boldsymbol{f(0)}$ **(iii)** $\boldsymbol{f(-1.5)}$ **(iv)** $\boldsymbol{f(2)+f(-2)}$ **ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.**

$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; x>1 \quad \text{இங்கு } x=2,3,4 \\ 2 & ; -1\le x\le 1 \quad \text{இங்கு } x=\{-1,0,1\} \\ x-1 & ; -3<x<-1 \quad \text{இங்கு } x=-2 \end{cases}$

(i) $f(3)$ $x=3$ எனில், $f(x)=x+2$ $f(3)=3+2=5$	(ii) $f(0)$ $x=0$ எனில், $f(x)=2$ $f(0)=2$
(iii) $f(-1.5)$ $x=-1.5$ எனில், $f(x)=x-1$ $f(-1.5)=-1.5-1=-2.5$	(iv) $f(2)+f(-2)$ $x=2$ எனில், $f(x)=x+2\Rightarrow f(2)=2+2=4$ $x=-2$ எனில், $f(x)=x-1\Rightarrow f(-2)=-2-1=-3$ $f(2)+f(-2)=4+(-3)=1$

10. $\boldsymbol{f:[-5,9]\to\mathbb{R}}$ **என்ற சார்பானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது**

$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} 6x+1 & ; -5\le x<2 \\ 5x^2-1 & ; 2\le x<6 \\ 3x-4 & ; 6\le x\le 9 \end{cases}}$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.**

(i) $\boldsymbol{f(-3)+f(2)}$ **(ii)** $\boldsymbol{f(7)-f(1)}$ **(iii)** $\boldsymbol{2f(4)+f(8)}$ **(iv)** $\boldsymbol{\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}}$

$f(x)=\begin{cases} 6x+1 & if\ -5\le x<2 \ ; \ \text{இங்கு } x=-5,-4,-3,-2,-1,0,1 \\ 5x^2-1 & if\ 2\le x<6 \ ; \ \text{இங்கு } x=2,3,4,5 \\ 3x-4 & if\ 6\le x\le 9 \ ; \ \text{இங்கு } x=6,7,8,9 \end{cases}$

(i) $f(-3)+f(2)$ $x=-3$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(-3)=6(-3)+1=-18+1=-17$ $x=2$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(2)=5(2)^2-1=20-1=19$ $f(-3)+f(2)=-17+19=2$	(ii) $f(7)-f(1)$ $x=7$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(7)=3(7)-4=21-4=17$ $x=1$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(1)=6(1)+1=6+1=7$ $\therefore f(7)-f(1)=17-7=10$
(iii) $2f(4)+f(8)$ $x=4$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(4)=5(4)^2-1$ $=80-1$ $=79$ $x=8$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(8)=3(8)-4$ $=24-4=20$ $2f(4)+f(8)=2(79)+20$ $=158+20$ $=178$	(iv) $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$ $x=-2$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(-2)=6(-2)+1=-12+1=-11$ $x=6$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(6)=3(6)-4$ $=18-4=14$ $x=4$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(4)=5(4)^2-1=80-1=79$ $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}=\frac{2(-11)-14}{79+(-11)}$ $=\frac{-22-14}{79-11}=\frac{-36}{68}=-\frac{9}{17}$

11. புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக t வினாடிகளில் ஒரு பொருள் கடக்கும் தூரமானது $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு a,b ஆகியவை மாறிலிகள் (g ஆனது புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம்). $S(t)$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா என ஆராய்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ (a,b ஆகியவை மாறிலிகள்)

$t=1,2,3,\ldots$ வினாடிகள் என எடுத்துக்கொள்ள

$t=1,\quad S(1)=\frac{1}{2}g(1)^2+a(1)+b$

$=\frac{1}{2}g+a+b$

$t=2,\quad S(2)=\frac{1}{2}g(2)^2+a(2)+b$

$=2g+2a+b$

$t=3,\quad S(3)=\frac{1}{2}g(3)^2+a(3)+b$

$=4.5g+3a+b$

A யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

12. t என்ற சார்பானது செல்சியஸில் (C) உள்ள வெப்பநிலையையும், பாரன்ஹீட்டில் (F) உள்ள வெப்பநிலையும் இணைக்கும் சார்பாகும். மேலும் அது $t(C)=F$ என வரையறுக்கப்பட்டால், (இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$). (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) $t(C)=212$ ஆக இருக்கும்போது C –ன் மதிப்பு (v) செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலை ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

t என்ற சார்பானது $t(C)=F$ என வரையறுக்கபடுகிறது. இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$

(i) $t(0)=\frac{9}{5}(0)+32=32°F$ (ii) $t(28)=\frac{9}{5}(28)+32$ $=9(5.6)+32$ $=50.4+32$ $=82.4°F$ (iii) $t(-10)=\frac{9}{5}(-10)+32$ $=-18+32$ $=14°F$ (iv) $t(C)=212$ எனில் $\frac{9}{5}C+32=212$ $\frac{9}{5}C=212-32=180$ $C=\frac{180\times5}{9}=100°C$	(v) $t(C)=F$ இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$ $t(F)=C$ இங்கு $C=\frac{9}{5}F+32$ செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலையை t என கொள்ள $t=\frac{9}{5}t+32°$ $t-\frac{9}{5}t=32°$ இருபுறமும் $\left(-\frac{5}{4}\right)$ ஆல் பெருக்க $-\frac{5}{4}\left(t-\frac{9}{5}t\right)=32°\times\left(-\frac{5}{4}\right)$ $-\frac{5}{4}t+\frac{9}{4}t=-40°$ $\frac{-5t+9t}{4}=-40°$ $\frac{4t}{4}=-40°$ $t=-40°$

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 1.5)

- ✓ $f: A \to B$ மற்றும் $g: B \to C$ ஆகியன இரண்டு சார்புகள் எனில் f மற்றும் g ன் சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f$ ஐ $g \circ f(x) = g(f(x))$ அனைத்து $x \in A$ என வரையறுக்கலாம்.
- ✓ பொதுவாக, ஏதேனும் இரு சார்புகள் f மற்றும் g க்கு, $f \circ g \neq g \circ f$ ஆகும்.எனவே சார்புகளின் சேர்ப்பு செயலி பரிமாற்று விதியை பூர்த்தி செய்வதில்லை.
- ✓ மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை பூர்த்தி செய்யும். அதாவது, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
- ✓ $f: R \to R$ என்ற சார்பானது, $f(x) = mx + c,\ m \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது **நேரிய சார்பாகும்.**
- ✓ ஒரு சார்பு $f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதை **இருபடிச் சார்பு** என்கிறோம்.
- ✓ ஒரு சார்பு $f: R \to R, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதைக் **கனச் சார்பு** அல்லது **முப்படி சார்பு** என அழைக்கிறோம்.
- ✓ ஒரு சார்பு $f: R - \{0\} \to R$, $f(x) = \frac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது **தலைகீழ்ச்சார்பு** எனப்படும்.
- ✓ ஒரு சார்பு $f: R \to R$ ஐ $f(x) = c$ அனைத்து $x \in R$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது **மாறிலிச்சார்பு** எனப்படும்.

பயிற்சி 1.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள f மற்றும் g எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ – ஐக் காண்க. $f \circ g = g \circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க.

(i) $f(x) = x - 6, g(x) = x^2$ $f \circ g = f \circ g(x)$ $= f(g(x))$ $= f(x^2)$ $= x^2 - 6$ ………….(1) $g \circ f(x) = g(f(x))$ $= g(x - 6)$ $= (x - 6)^2$ ……………(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g \neq g \circ f$	**(ii) $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 2x^2 - 1$** $f \circ g(x) = f(g(x))$ $= f(2x^2 - 1)$ $= \frac{2}{2x^2-1}$ ……………(1) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right)$ $= 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1 = \frac{8}{x^2} - 1$ ………….(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g \neq g \circ f$
(iii) $f(x) = \frac{x+6}{3}, g(x) = 3 - x$ $f \circ g(x) = f(g(x))$ $= f(3 - x)$ $= \frac{3-x+6}{3} = \frac{9-x}{3}$ ……………..(1) $g \circ f(x) = g(f(x))$ $= g\left(\frac{x+6}{3}\right)$ $= 3 - \left(\frac{x+6}{3}\right) = \frac{9-x-6}{3} = \frac{3-x}{3}$ ……..(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g \neq g \circ f$	**(iv) $f(x) = 3 + x, g(x) = x - 4$** $f \circ g(x) = f(g(x))$ $= f(x - 4)$ $= 3 + x - 4$ $= x - 1$ ……………(1) $g \circ f(x) = g(f(x))$ $= g(3 + x)$ $= 3 + x - 4$ $= x - 1$ ………………..(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g = g \circ f$

Padasalai TrbTnpsc

(v) $f(x) = 4x^2 - 1, g(x) = 1 + x$

$f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f(1 + x)$
$= 4(1 + x)^2 - 1$
$= 4 + 8x + 4x^2 - 1$
$= 4x^2 + 8x + 3$ ....(1)

$g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(4x^2 - 1)$
$= 1 + 4x^2 - 1$
$= 4x^2$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g \neq g \circ f$

2. $f \circ g = g \circ f$ எனில் k –யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $f(x) = 3x + 2, g(x) = 6x - k$

$f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f(6x - k)$
$= 3(6x - k) + 2 = 18x - 3k + 2$

$g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(3x + 2)$
$= 6(3x + 2) - k = 18x + 12 - k$

கொடுக்கப்பட்டது, $f \circ g = g \circ f$
$18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$
$18x - 18x - 3k + k = 12 - 2$
$-2k = 10$
$k = -5$

(ii) $f(x) = 2x - k, g(x) = 4x + 5$

$f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f(4x + 5)$
$= 2(4x + 5) - k = 8x + 10 - k$

$g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(2x - k)$
$= 4(2x - k) + 5 = 8x - 4k + 5$

கொடுக்கப்பட்டது, $f \circ g = g \circ f$
$8x + 10 - k = 8x - 4k + 5$
$8x - 8x - k + 4k = 5 - 10$
$3k = -5$
$k = -\frac{5}{3}$

3. $f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x+1}{2}$ எனில், $f \circ g = g \circ f = x$ எனக் காட்டுக.

$f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x+1}{2}$

$f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f\left(\frac{x+1}{2}\right)$
$= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1$
$= x + 1 - 1 = x$ ....(1)

$g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(2x - 1) = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f \circ g = g \circ f$

4.(i) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2$ மற்றும் $g \circ f(a) = 1$ எனில், a –ஐக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2$

$g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(x^2 - 1) = x^2 - 1 - 2 = x^2 - 3$

கொடுக்கப்பட்டது, $g \circ f(a) = 1$
$a^2 - 3 = 1$
$a^2 = 1 + 3$
$a^2 = 4$
$a = \pm 2$

(ii) $f(k) = 2k - 1$ மற்றும் $f \circ f(k) = 5$ எனில், k –ஐக் காண்க.

$f \circ f(k) = f(f(k))$
$= f(2k - 1)$
$= 2(2k - 1) - 1$
$= 4k - 2 - 1 = 4k - 3$

ஆனால் $f \circ f(k) = 5$
$4k - 3 = 5$
$4k = 5 + 3 = 8$
$k = \frac{8}{4} = 2$

5. $A, B, C \subseteq N$ மற்றும் $f: A \to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனவும் மற்றும் $g: B \to C$ ஆனது $g(x) = x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்பட்டால் $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

$f: A \to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனவும் மற்றும் $g: B \to C$ ஆனது $g(x) = x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது மற்றும் $A, B, C \subseteq N$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$f \circ g$ யின் வீச்சகம்$= \{y/y = 2x^2 + 1, x \in N\}$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(2x + 1) = (2x + 1)^2$

$g \circ f$யின் வீச்சகம்$= \{y/y = (2x + 1)^2, x \in N\}$

6. $f(x) = x^2 - 1$ எனில் (i) $f \circ f$ (ii) $f \circ f \circ f$ –ஐக் காண்க.

(i) $f \circ f$

$f \circ f(x) = f(f(x))$

$= f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1$

$= x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$

(ii) $f \circ f \circ f$

$f \circ f \circ f(x) = f\left(f(f(x))\right)$

$= f(f(x^2 - 1))$

$= f((x^2 - 1)^2 - 1)$

$= f(x^4 - 2x^2 + 1 - 1)$

$= f(x^4 - 2x^2) = [x^4 - 2x^2]^2 - 1$

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ மற்றும் $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது முறையே, $f(x) = x^5$, $g(x) = x^4$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f, g ஆகியவை ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா மற்றும் $f \circ g$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா என்று ஆராய்க

$f: R \to R$ ஆனது $f(x) = x^5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^5) = (x^5)^5 = x^{25}$

$f \circ f(1) = (1)^{25} = 1$

$f \circ f(2) = (2)^{25}$

$f \circ f(3) = (3)^{25}$

f ல் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வெவ்வேறான நிழல் உரு உள்ளது எனவே f ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

$g: R \to R$ ஆனது $g(x) = x^4$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^4) = (x^4)^4 = x^{16}$

$g \circ g(-1) = (-1)^{16} = 1$

$g \circ g(1) = (1)^{16} = 1$

$g \circ g(2) = (2)^{16}$

-1 மற்றும் 1 ஆகியவை ஒரே நிழல் உருவை கொண்டுள்ளன. எனவே g ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^4)$

$= (x^4)^5 = x^{20}$

$f \circ g(1) = (1)^{20} = 1$

$f \circ g(-1) = (-1)^{20} = 1$

-1 மற்றும் 1 ஆகியவை ஒரே நிழல் உருவை கொண்டுள்ளன. எனவே $f \circ g$ ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x), g(x), h(x)$ ஆகியவற்றை கொண்டு $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ எனக் காட்டுக.

(i) $f(x) = x - 1, g(x) = 3x + 1$ மற்றும் $h(x) = x^2$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(g(x))$

$= f(3x + 1)$

$= 3x + 1 - 1 = 3x$

$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x))$

$= (f \circ g)(x^2)$

$= 3x^2$…………….(1)

$(g \circ h)(x) = g(h(x))$

$= g(x^2)$

$= 3x^2 + 1$

So, $f \circ (g \circ h)x = f(3x^2 + 1)$

$= 3x^2 + 1 - 1$

$= 3x^2$…………………(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Padasalai TrbTnpsc

(ii) $f(x)=x^2, g(x)=2x$ மற்றும் $h(x)=x+4$	(iii) $f(x)=x-4, g(x)=x^2$ மற்றும் $h(x)=3x-5$
$f\circ g(x)=f(g(x))$ $=f(2x)$ $=(2x)^2=4x^2$ $(f\circ g)\circ h(x)=(f\circ g)(h(x))$ $=(f\circ g)(x+4)$ $=4(x+4)^2$ $=4(x^2+8x+16)$ $=4x^2+32x+64$...(1) $(g\circ h)x=g(h(x))$ $=g(x+4)=2(x+4)=2x+8$ $f\circ(g\circ h)x=f(2x+8)$ $=(2x+8)^2$ $=4x^2+32x+64$.........(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$	$f\circ g(x)=f(g(x))$ $=f(x^2)=x^2-4$ $(f\circ g)\circ h(x)=f\circ g(h(x))$ $=f\circ g(3x-5)$ $=(3x-5)^2-4$ $=9x^2-30x+25-4$ $=9x^2-30x+21$...(1) $(g\circ h)x=g(h(x))$ $=g(3x-5)=(3x-5)^2$ $=3x^2-30x+25$ $f\circ(g\circ h)(x)=f(9x^2-30x+25)$ $=9x^2-30x+25-4$ $=9x^2-30x+21$ ....(2) (1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

9. $f=\{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -லிருந்து $\mathbb{Z}$ -க்கான ஒரு நேரிய சார்பு எனில், $f(x)$ –ஐக் காண்க.

$f=\{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது Z லிருந்து Z க்கான நேரிய சார்பு ஆகும்.

$f(x)=mx+c$ ஐ

$f=\{(x,mx+c)/\ x\in Z\}$ என எழுத

$f(-1)=3$

$-m+c=3$ ....(1)

$f(0)=-1$

$c=-1$ ....(2)

$c=-1$ என (1) ல் பிரதியிட

$-m+c=3$

$-m-1=3$

$m=-1-3=-4$

$\therefore f(x)=-4x-1$

10. ஒரு மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின் படி, $C(t)$ என்ற ஒரு நேரிய சுற்று, $C(at_1+bt_2)=aC(t_1)+bC(t_2)$, -ஐக் பூர்த்தி செய்கிறது. மேலும் இங்கு a,b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில், $C(t)=3t$ ஆனது ஒரு நேரிய சுற்று எனக் காட்டுக.

$C(t_1)=t$

$C(t_2)=2t$ இங்கு $t=t_1+t_2$

$C(t)=C(t_1+t_2)=C(t_1)+C(t_2)$

$t+2t=3t$

$\therefore C(t)=3t$ ஆனது நேரிய சுற்று ஆகும்.

பயிற்சி 1.6

1. $n(A\times B)=6$ மற்றும் $A=\{1,3\}$ எனில், $n(B)$ ஆனது

(1) 1 (2) 2 **(3) 3** (4) 6

$n(A\times B)=6, n(A)=2$

$n(A\times B)=n(A)\times n(B)\Rightarrow n(B)=\frac{n(A\times B)}{n(A)}=\frac{6}{2}=3$

2. $A = \{a, b, q\}, B = \{2,3\}, C = \{p, q, r, s\}$ எனில், $n[(A \cup C) \times B]$ ஆனது

(1) 8 (2) 20 **(3) 12** (4) 16

$A \cup C = \{a, b, q\} \cup \{p, q, r, s\} = \{a, b, p, q, r, s\}$
$n(A \cup C) = 6$
$n(B) = 2$
$n[(A \cup C) \times B] = n(A \cup C) \times n(B) = 6 \times 2 = 12$

3. $A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}, C = \{5,6\}$ மற்றும் $D = \{5,6,7,8\}$ எனில் கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது சரியான கூற்று?

(1) $(A \times C) \subset (B \times D)$ (2) $(B \times D) \subset (A \times C)$
(3) $(A \times B) \subset (A \times D)$ (4) $(D \times A) \subset (B \times A)$

$A \times C = \{1,2\} \times \{5,6\} = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6)\}$
$B \times D = \{1,2,3,4\} \times \{5,6,7,8\}$
$= \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8)\}$
$A \times B = \{1,2\} \times \{1,2,3,4\}$
$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$
$A \times D = \{1,2\} \times \{5,6,7,8\}$
$= \{(1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8)\}$
$(A \times C) \subset (B \times D)$ என்பது சரியான கூற்றாகும்.

4. $A = \{1,2,3,4,5\}$ –லிருந்து, B என்ற கணத்திற்கு 1024 உறவுகள் எனில் B –ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 **(2) 2** (3) 4 (4) 8

உறவுகளின் எண்ணிக்கை $= 2^{mn}$
$2^{mn} = 1024$
$2^{5n} = 1024$
$2^{5n} = 2^{10}$
$5n = 10$
$n = \frac{10}{2} = 2$

5. $R = \{(x, x^2) | x$ ஆனது $13 -$ ஐ விடக் குறைவான பகா எண்கள்$\}$ என்ற உறவின் வீச்சகமானது

(1) $\{2,3,5,7\}$ (2) $\{2,3,5,7,11\}$ **(3) $\{4,9,25,49,121\}$** (4) $\{1,4,9,25,49,121\}$

$R = \{(x, x^2) | x$ ஆனது $13 -$ ஐ விடக் குறைவான பகா எண்கள்$\}$
$f(x) = x^2$
$f(2) = 2^2 = 4$
$f(3) = 3^2 = 9$
$f(5) = 5^2 = 25$
$f(7) = 7^2 = 49$
$f(11) = 11^2 = 121$
R ன் வீச்சகம் $= \{4,9,25,49,121\}$

6. $(a + 2, 4)$ மற்றும் $(5, 2a + b)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், (a, b) என்பது

(1) $(2,-2)$ (2) $(5,1)$ (3) $(2,3)$ **(4) $(3,-2)$**

கொடுக்கப்பட்டது, $(a+2,4)=(5,\ 2a+b)$

$a+2=5$

$a=5-2=3$

எனவே, $2a+b=4$

$2(3)+b=4$

$6+b=4$

$b=4-6=-2$

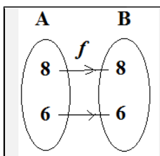
$(a,b)=(3,-2)$

7. $n(A)=m$ மற்றும் $n(B)=n$ என்க. A –லிருந்து B –க்கு வரையறுக்கப்பட்ட வெற்று கணமில்லாத உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

(1) m^n (2) n^m **(3) $2^{mn}-1$** (4) 2^{mn}

8. $\{(a,8),(6,b)\}$ ஆனது ஒரு சமனிச் சார்பு எனில், a மற்றும் b மதிப்புகளாவன முறையே

(1) (8,6) (2) (8,8) (3) (6,8) (4) (6,6)



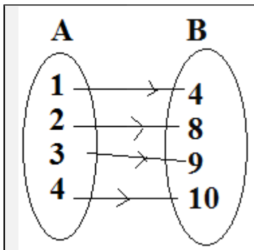
$f(x)=x, x\in A$

$\therefore (a,b)=(8,6)$

9. $A=\{1,2,3,4\}, B=\{4,8,9,10\}$ என்க. சார்பு $f:A\to B$ ஆனது $f=\{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் f -என்பது

(1) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு (2) சமனிச் சார்பு

(3) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு (4) உட்சார்பு



A யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

10. $f(x)=2x^2$ மற்றும் $g(x)=\frac{1}{3x}$, எனில் $f\circ g$ ஆனது

(1) $\frac{3}{2x^2}$ (2) $\frac{2}{3x^2}$ **(3) $\frac{2}{9x^2}$** (4) $\frac{1}{6x^2}$

$$f\circ g=f(g(x))=f\left(\frac{1}{3x}\right)=2\left(\frac{1}{3x}\right)^2=2\left(\frac{1}{9x^2}\right)=\frac{2}{9x^2}$$

11. $f:A\to B$ ஆனது இருபுறச் சார்பு மற்றும் $n(B)=7$, எனில் $n(A)$ ஆனது

(1) 7 (2) 49 (3) 1 (4) 14

$f:A\to B$ ஆனது இருபுறச் சார்பு எனில், அது ஒன்றுக்கு ஒன்றா சார்பு மற்றும் மேல் சார்பு ஆகும். எனவே $n(A)=7$

12. f மற்றும் g என்ற இரண்டு சார்புகளும்

$f = \{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$
$g = \{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $f \circ g$ –ன் வீச்சகமானது
(1) $\{0,2,3,4,5\}$ (2) $\{-4,1,0,2,7\}$ (3) $\{1,2,3,4,5\}$ **(4) $\{0,1,2\}$**

x	$f(x)$	x	$g(x)$
0	1	0	2
2	0	1	0
3	-4	2	4
4	2	-4	2
5	7	7	0

(i) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(0)) = f(2) = 0$

(ii) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(1)) = f(0) = 1$

(iii) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(2)) = f(4) = 2$

(iv) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(-4)) = f(2) = 0$

(v) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(7)) = f(0) = 1$

$f \circ g$ ன் வீச்சகம் $= \{0,1,2\}$

13. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ எனில்
(1) $f(xy) = f(x).f(y)$ (2) $f(xy) \geq f(x).f(y)$
(3) $f(xy) \leq f(x).f(y)$ (4) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை

$x = 1, y = -1$ என கொள்ள
$f(x) = \sqrt{1+x^2}$
$f(x) = f(1)$
$= \sqrt{1+1^2}$
$= \sqrt{2}$
$f(y) = f(-1)$
$= \sqrt{1+(-1)^2}$
$= \sqrt{2}$
$xy = (1)(-1) = -1$
$f(xy) = f(-1)$
$= \sqrt{1+(-1)^2}$
$= \sqrt{2}$
$f(xy) \leq f(x).f(y)$

14. $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ என்ற சார்பானது $g(x) = \alpha x + \beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் α மற்றும் β –வின் மதிப்பு
(1) $(-1,2)$ **(2) $(2,-1)$** (3) $(-1,-2)$ (4) $(1,2)$

$f = \{(x, \alpha x + \beta)/x \in R\}$

$x = 1$ எனில், $f(x) = 1$

$\alpha + \beta = 1$ …….(1)

$x = 2$ எனில், If , $f(x) = 3$

$2\alpha + \beta = 3$…….(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$\alpha + \beta = 1$

$2\alpha + \beta = 3$

$\alpha \quad = 2$

$\alpha = 2$ என (1) ல் பிரதியிட

$\alpha + \beta = 1$

$2 + \beta = 1$

$\beta = 1 - 2 = -1$

$(\alpha, \beta) = (2, -1)$

15. $f(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ குறிப்பிடும் சார்பானது

(1) நேரிய சார்பு (2) ஒரு கனச் சார்பு (3) தலைகீழ்ச் சார்பு **(4) இருபடிச் சார்பு**

$f(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$

$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

$= 6x^2 + 2$

இது ஒரு இருபடிச் சார்பாகும்.

அலகு பயிற்சி - 1

1. $(x^2 - 3x,\ y^2 + 4y)$ மற்றும் $(-2,5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், x மற்றும் y – ஐக் காண்க.

$(x^2 - 3x,\ y^2 + 4y)$ மற்றும் $(-2,5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம்

எனவே, $x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)\ (x-2) = 0$

$x = 1$ (or) $x = 2$

$x = 1, 2$

மேலும் $y^2 + 4y = 5$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$(y-1)\ (y+5) = 0$

$y = 1$ (or) $y = -5$

$y = -5, 1$

2. $A \times A$ கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனின் 9 உறுப்புகளில், உறுப்புகள் $(-1, 0)$ மற்றும் $(0, 1)$ –யும் இருக்கிறது எனில், A –யில் உள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. மற்றும் $A \times A$ –ன் மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

$n(A \times A) = n(A) \times n(A) = 9$

$n(A) = 3$

கார்டீசியன் பெருக்கலில் உள்ள உறுப்புகள் $(-1, 0)$ $(0,1)$,

எனவே $A = \{-1, 0, 1\}$

$A \times A$ –ன் மீதமுள்ள உறுப்புகள்

$= \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$

$= \{(-1,-1), (-1,1), (0,-1), (0,0), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ 4 & x<1\end{cases}$ **எனக் கொடுக்கப்பட்டால், i) $f(0)$ ii) $f(3)$ iii) $f(a+1)$ ($a\geq 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) ஆகியவற்றை காண்க.**

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1 & x=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\\ 4 & x<1 & x=0,-1,-2,-3\ldots\ldots\end{cases}$

i) $f(0)=4$

ii) $f(3)=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

iii) $f(a+1)=\sqrt{a+1-1}=\sqrt{a}$

4. $A=\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ **என்க. மற்றும் $f:A\to N$ ஆனது $f(n)=n$ -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி ($n\in A$) என வரையறுக்கப்பட்டால் f –ன் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதுக மற்றும் f –ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.**

$A=\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$

$f:A\to N$ ஆனது $f(n)=n$ -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி ($n\in A$) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$f=\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$

f ன் வீச்சகம் $=\{2,3,5,11,13,17\}$

$9=3\times 3$	$10=5\times 2$	$11=1\times 11$	$12=3\times 4$	$13=1\times 13$	$14=2\times 17$
$15=5\times 3$	$16=2\times 8$	$17=1\times 17$			

5. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ **என்ற சார்பின் மதிப்பகத்தைக் காண்க**

$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ எனில், $f(x)$ ஆனது மெய் அல்ல.

$x\in[-1,1]$எனில், $f(x)$ ஆனது மெய் ஆகும்.

$\therefore$ மதிப்பகம் $\{-1,0,1\}$

6. $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ **மற்றும்** $h(x)=x-2$ **எனில்,** $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ **என நிறுவுக.**

$f(x)=x^2,\quad g(x)=3x\quad h(x)=x-2$

$f\circ g(x)=f(g(x))$

$=f(3x)$

$=(3x)^2=9x^2$

$(f\circ g)\circ h(x)=(f\circ g)\ (h(x))$

$=(f\circ g)\ (x-2)$

$=9(x-2)^2$

$=9(x^2-4x+4)$

$=9x^2-36x+36\ldots(1)$

$(g\circ h)\ (x)=g(h(x))$

$=g(x-2)$

$=3(x-2)=3x-6$

$f\circ(g\circ h)\ (x)\ =f(3x-6)$

$=(3x-6)^2$

$=9x^2-36x+36\ldots\ldots(2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

7. $A=\{1,2\},B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{5,6\}$ **மற்றும்** $D=\{5,6,7,8\}$ **எனில்,** $A\times C$ **ஆனது** $B\times D$ **உட்கணமா எனச் சரிபார்க்க.**

$A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{5,6\}$ and $D=\{5,6,7,8\}$

$A\times C=\{1,2\}\times\{5,6\}$

$=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$ ……………… (1)

$B\times D=\{1,2,3,4\}\times\{5,6,7,8\}$

Padasalai TrbTnpsc

$= \{(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)$
$(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$ .... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $A \times C \subseteq B \times D$.

8. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 1$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$, எனக் காட்டுக.

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 1$

$f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$= \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{\frac{x-1-x+1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}} = \frac{-2}{2x} = \frac{-1}{x}$, $x \neq 0$

எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

9. சார்பு f மற்றும் g ஆகியவை $f(x) = 6x + 8$; $g(x) = \frac{x-2}{3}$ எனில்,
i) $gg\left(\frac{1}{2}\right)$ – யின் மதிப்பைக் காண்க.
ii) $gf(x)$ –ஐ எளிய வடிவில் எழுதுக.

$f(x) = 6x + 8$; $g(x) = \frac{x-2}{3}$

i) $gg\left(\frac{1}{2}\right) = g \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)$

$= g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= g\left(\frac{\frac{-1}{2}-2}{3}\right)$

$= g\left(\frac{-3}{2\times3}\right)$

$= g\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{\frac{-1}{2}-2}{3}\right)$

$= \left(\frac{-1-4}{2\times3}\right)$

$= \left(\frac{-5}{6}\right)$

ii) $gf(x) = g \cdot f(x)$

$= g(f(x))$

$= g(6x+8)$

$= \frac{6x+8-2}{3}$

$= \frac{6x+6}{3}$

$= \frac{6\,(x+1)}{3}$

$= 2(x+1)$

10. பின்வருவனவற்றின் மதிப்பகங்களை எழுதுக.
i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$ ii) $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$
iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$ iv) $h(x) = x + 6$

i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$

$x = 9$ எனில் $f(9)$ வரையறுக்கப்படவில்லை.

எனவே, f ஆனது $x = 9$ஐ தவிர எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

f ன் மதிப்பகம் $= R - \{9\}$

ii) $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$

p ஆனது எல்லா இயல் எண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, மதிப்பகம் $P = R$

iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$

$x \in (-\infty, 2)$ எனில் $g(x)$ ஆனது மெய் அல்ல

$x \in [2, \infty)$ எனில் $g(x)$ ஆனது மெய்

∴ எனவே மதிப்பகம் $[2, \infty)$

iv) $h(x) = x + 6$

h ஆனது எல்லா இயல் எண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, மதிப்பகம் $h = R$

2. எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்

நினைவில் கொள்ள...(பயிற்சி 2.1)

தேற்றம் 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

a மற்றும் b $(a > b)$ என்பன ஏதேனும் இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r, 0 \leq r < b$ என்றவாறு q, r எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

குறிப்பு:

- வகுத்தலில் கிடைக்கும் மீதியானது வகுக்கும் எண்ணை விட எப்பொழுதும் சிறியதாகவே இருக்கும்.
- $r = 0$ எனில் $a = bq$. எனவே b ஆனது a ஐ வகுக்கும்.
- இதுபோன்ற, b ஆனது a ஐ வகுக்கும் எனில், $a = bq$

பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றம்:

a மற்றும் $b(a < b)$ என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் எனில், $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$ என்றவாறு q, r எனும் முழுக்கள் கிடைக்கும்.

தேற்றம் 2:

a மற்றும் b என்பன $a = bq + r$, என அமையும் மிகை முழுக்கள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் அனைத்துப் பொது வகுத்திகளும் முறையே b மற்றும் r ஆகியவற்றின் பொது வகுத்திகளுக்குச் சமமாக இருக்கும், மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை:

a மற்றும் $b, a > b$ என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் காண

படி 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி $a = bq + r; 0 \leq r < b$ இங்கு q என்பது ஈவு r என்பது மீதி. $r = 0$ எனில் a மற்றும் b யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி b ஆகும்.

படி 2: அவ்வாறில்லையெனில், யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி b ஐ r ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது $b = rq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < r$.

படி 3: $r_1 = 0$ எனில் a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி r ஆகும்.

படி 4: அவ்வாறில்லையெனில் மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பூச்சியம் மீதியாக வரும் நிலையில் அமையும் வகுத்தியானது a மற்றும் b யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

குறிப்பு:

- மேற்கண்ட வழிமுறையில் நிச்சயம் ஏதாவது ஒரு படிநிலையில் மீதி பூச்சியமாகும். ஆகவே இவ்வழிமுறை நிச்சயம் முடிவு பெறும்.
- பூச்சியம் மீதியாக வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த வேண்டும்.

தேற்றம் 3: a மற்றும் b என்பன இரு மிகை முழுக்கள் மற்றும் $a > b$ எனில்,
(a, b)யின் மீ.பொ.வ $=$ $(a - b, b)$யின் மீ.பொ.வ

மூன்று எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி: a, b, c என்பன கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் என்க.

(i) a, b யின் மீ.பொ.வ காண்க. அதை d எனக் கொள்க

$$d = (a, b)$$

(ii) d மற்றும் c யின் மீ.பொ.வ காண்க.

இந்த மீப்பெரு பொது வகுத்தியே கொடுக்கப்பட்ட மூன்று மிகை முழுக்கள் a, b, c யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

குறிப்பு: இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி 1 எனில், அவ்விரு எண்களும் சார்பகா எண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

பயிற்சி 2.1

1. 3 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 2 – ஐத் தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களையும் காண்க.

q என்பது மிகை முழுக்கள் என்க

வகுத்தி $=3$ மற்றும் மீதி $=2$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$$a=bq+r,\quad 0\le r<b$$

$q=0,1,2,3,4\ldots$என்க

$(\because b=3, r=2)$

$3q+2=a$

$q=0\Rightarrow\ 3(0)+2=\ 0+2=2$

$q=1\Rightarrow\ 3(1)+2=\ 3+2=5$

$q=2\Rightarrow 3(2)+2=6+2=8$

$q=3\Rightarrow 3(3)+2=9+2=11$

$\therefore$ மிகை முழுக்கள் $2,5,8,11\ldots$

2. ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார். எத்தனை வரிசைகள் முழுமை பெறும் எனவும் மற்றும் எத்தனை பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும் எனவும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார்.

வகுபடும் எண் $=532$

வகுக்கும் எண் $=21$

25
21 | 532
42
112
105
7

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$$a=bq+r\ ,0\le r<b$$

$532=25(21)+7$

ஈவு $=25$, மீதி $=7$

$\therefore 25$ வரிசைகள் முழுமை பெறும் 7 பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும்.

3. தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

$2x$ மற்றும் $2x+1$ என்பன தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்கள் என்க.

$$2x(2x+1)=4x^2+2x$$
$$=2(2x^2+x)$$

இது 2 ன் மடங்காக உள்ளது.

$\therefore$ எனவே இது 2ஆல் வகுபடும்.

3. மாற்றுமுறை:

n மற்றும் $n+1$ ஆகியன தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்கள் என்க.

$$n(n+1)=n^2+n$$

$n=2m+1$ என்பது ஒற்றைப்படை எண் என்க.

$$n^2+n=(2m+1)^2+(2m+1)$$
$$=4m^2+2(2m)(1)+1^2+2m+1$$
$$=4m^2+4m+1+2m+1$$
$$=4m^2+6m+2$$
$$=2(2m^2+3m+1)$$

$\therefore$ இது 2 ஆல் வகுபடும்

$n=2m$ என்பது இரட்டைப்படை எண் என்க.

$$n^2+n=(2m)^2+2m$$
$$=4m^2+2m$$
$$=2(2m^2+m).$$

இது 2 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore$ எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. a,b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7, 10 எனில் $a+b+c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.

கெடுக்கப்பட்டது: a,b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7, 10.

$a+b+c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

எனவே வகுத்தி =13

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a=bq+r\ ,0\le r<b$

$a=13q_1+9$

$b=13q_2+7$

$c=13q_3+10$

$a+b+c$

$$=13q_1+9+13q_2+7+13q_3+10$$
$$=13q_1+13q_2+13q_3+26$$
$$a+b+c=13(q_1+q_2+q_3+2)+0$$

$(\because$மீதி $=0)$

$\therefore a+b+c$ ஆனது13 ன் மடங்காக உள்ளது.

$\therefore$ எனவே, இது 13 ஆல் வகுபடும்.

5. எந்த மிகை முழுவின் வர்கத்தையும் 4 ஆல் வகுக்குபோது மீதி 0 அல்லது 1 மட்டுமே கிடைக்கும் என நிறுவுக.

வகுத்தி $= 4$

$n = 2x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் என்க.

$n^2 = (2x)^2 = 4x^2$

4 இது 4ஆல் வகுபடும்.

$\therefore$ மீதி 0 ஆகும்.

$n = 2x + 1$ ஒரு ஒற்றைப்படை எண் என்க.

$n^2 = (2x+1)^2$

$= 4x^2 + 2(2x) + 1^2$

$= 4x^2 + 4x + 1$

$= 4(x^2 + x) + 1$

$= 4q + 1$ $\quad$ ($q = x^2 + x$ ஆனது முழுக்கள்)

$\therefore$ மீதி 1 ஆகும்

இரட்டைப்படை மிகை முழு எண்ணின் வர்கத்தை 4 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 0 கிடைக்கும்.
ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண்ணின் வர்கத்தை 4 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 கிடைக்கும

6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.
(i) 340 மற்றும் 412 (ii) 867 மற்றும் 255 (iii) 10224 மற்றும் 9648 (iv) 84,90 மற்றும் 120

(i) 340 மற்றும் 412

$a = 412$ மற்றும் $b = 340$ என்க

$a > b$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \le r < b$

$412 = 340(1) + 72; 72 \ne 0$

$340 = 72(4) + 52; 52 \ne 0$

$72 = 52(1) + 20; 20 \ne 0$

$52 = 20(2) + 12; 12 \ne 0$

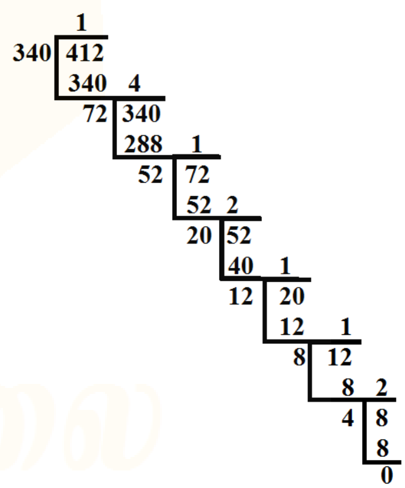
$20 = 12(1) + 8; 8 \ne 0$

$12 = 8(1) + 4\,; 4 \ne 0$

$8 = 4(2) + 0.$

$\therefore$ மீதி 0 ஆகும்.

$\therefore$ 340 மற்றும் 412ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ **4.**



(ii) 867 மற்றும் 255

$a = 867$ மற்றும் $b = 255$ என்க

$a > b, a$ ஆனது வகுபடும் எண், b ஆனது வகுக்கும் எண் என்க.

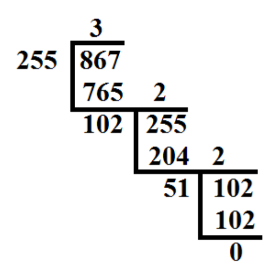
யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r; 0 \le r < b$

$867 = 255\ (3) + 102$

மீதி $102 \ne 0$

$255 = 102(2) + 51$



மீதி $51 \neq 0$

$102 = 51(2) + 0$

$\therefore$ மீதி 0.

$\therefore$ 867 மற்றும் 255ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ **51.**

(iii) 10224 மற்றும் 9648

$a = 10224$ மற்றும் $b = 9648$

$a > b$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b.$

$10224 = 9648\ (1) + 576$

மீதி $576 \neq 0$

$9648 = 576\ (16) + 432$

மீதி $432 \neq 0$

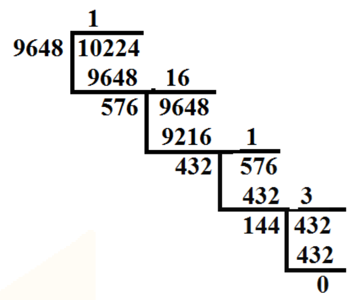
$576 = 432\ (1) + 144$

மீதி $144 \neq 0$

$432 = 144\ (3) + 0$

$\therefore$ மீதி 0

$\therefore$ 10224 மற்றும் 9648 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ **144.**



(iv) 84, 90 மற்றும் 120

$a = 120, b = 90, c = 84$ என்க

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

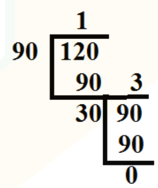
$120 = 90(1) + 30$

மீதி $30 \neq 0$

$90 = 30(3) + 0$

$\therefore$ மீதி 0.

$\therefore$ 120 மற்றும் 90ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 30.



$d = 30$ மற்றும் $c = 84$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ – ஐக் காண

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$c > d$

$84 = 30(2) + 24$

மீதி $24 \neq 0$

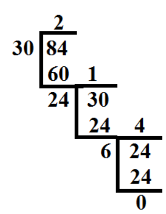
$30 = 24(1) + 6$

மீதி $6 \neq 0$

$24 = 6(4) + 0$

$\therefore$ மீதி 0

$\therefore$ 84,90 மற்றும் 120 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ **6**



7. 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.

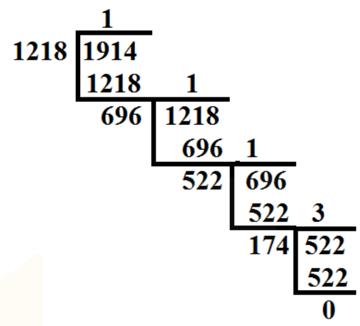
1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண வேண்டும்.

$1230 - 12 = 1218$ மற்றும்

$1926 - 12 = 1914.$

$a = 1914$ மற்றும் $b = 1218$ என்க

$a > b$



யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < 1$

$1914 = 1218(1) + 696$

மீதி $696 \neq 0$

$1218 = 696(1) + 522$

மீதி $522 \neq 0$

$696 = 522\,(1) + 174$

மீதி $174 \neq 0$

$522 = 174\,(3) + 0$

மீதி 0

∴ 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் **174**

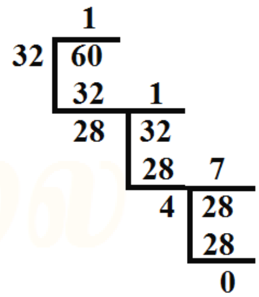
8. 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d என்க. $d = 32x + 60y$ எனில் x மற்றும் y என்ற முழுக்களைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \qquad 0 \leq r < b$

$a = 60, b = 32, a > b$ என்க.



$60 = 32\,(1) + 28$ ....(1)

மீதி $28 \neq 0.$

$32 = 28\,(1) + 4$ ....(2)

$4 \neq 0$

$28 = 4(7) + 0$

மீதி 0

∴ 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 4

$d = 4$

சமன்பாடு (2) லிருந்து

$4 = 32 - 28 \times 1$ [(1) லிருந்து]

$4 = 32 - (60 - (32 \times 1))$

$= 32 - 60 + 32$

$4 = 32(2) + 60(-1)$

$d = 32x + 60y$ உடன் ஒப்பிட

$\therefore x = 2, y = -1$

9. ஒரு மிகை முழுவை 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது. அதே மிகை முழுவை 11 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

n ஐ ஒரு மிகை முழு என்க.

கொடுக்கப்பட்டது: ஒரு மிகை முழுவை(n), 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

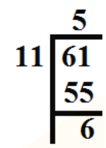
$a = bq + r$ $\quad 0 \le r < b.$

$n = 88q + 61$ $\quad$ (இங்கு q ஒரு முழு)

$(88q + 61)$ ஐ 11 ஆல் வகுக்க

மீதி 61 கிடைக்கிறது.

எனவே, $88q$ ஆனது 11 ஆல் வகுபடும்.



61 ஐ 11 ஆல் வகுக்க

$61 = 11(5) + 6.$

$\therefore$ மீதி **6.**

10. எந்த இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுவும் சார்பகா எண்கள் என நிறுவுக.

$k, (k+1)$ என்பன இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழு எண் என்க.

$k, k+1$ ஆகியவை சார்பகா எண்கள் என நிறுவ வேண்டும்.

$k, (k+1)$ ஆகியவை சார்பகா எண்கள் அல்ல என **கருதுக**.

$k, k+1$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ. $d > 1$ என்க.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$k = dq\,,$ $\quad q$ ஒரு முழுக்கள்

$k + 1 = dq + 1$

$k+1$ என்பது மிகை முழு எண், d ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 கிடைக்கிறது.

$\therefore d$ ஆனது $k+1$ ன் காரணி அல்ல.

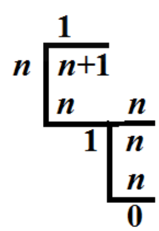
இது நாம் **கருதியதற்கு** முரண்பாடாக உள்ளது.

$\therefore k, k+1$ ஆகியவை சார்பகா எண்கள் ஆகும்.

மாற்றுமுறை:

$n, (n+1)$ என்பன அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் என்க.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,



$a = bq + r$ $\quad 0 \le r < b$

$n + 1 > n.$ எனவே

$(n+1) = n(1) + 1$

$n = (1)(n) + 0$

மீதி $= 0.$ வகுத்தி $= 1.$

$\therefore n, (n+1)$ என்பனவற்றின் மீ.பொ.வ 1

$\therefore$ எனவே, இவை சார்பகா எண்கள் ஆகும்.

Padasalai TrbTnpsc

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.2)

தேற்றம் 4 (அடிப்படை எண்ணியில் தேற்றம்)

1 ஐ தவிர்த்து மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த முடியும். மேலும் இந்த காரணிப்படுத்துதலானது (பகா எண்களை எழுதும் வரிசையைத் தவிர்த்து) ஒரே முறையில் அமையும்.

குறிப்பு:

- ab ஐ p என்ற பகா எண் வகுக்கும் எனில், p ஆனது a ஐ வகுக்கும் அல்லது p ஆனது b ஐ வகுக்கும். அதாவது p ஆனது a, b ல் ஏதேனும் ஒன்றை வகுக்கும்.
- ab ஐ n என்ற பகு எண் வகுக்கும் எனில், n ஆனது a யையும் வகுக் வேண்டியதில்லை b ஐயும் வகுக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, 6 ஆனது 4×3ஐ வகுக்கும். ஆனால் 6 ஆனது 4ஐயும் வகுக்காது. 3 ஐயும் வகுக்காது.

பயிற்சி 2.2

1. **n ஓர் இயல் எண் எனில், எந்த n மதிப்புகளுக்கு 4^n ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?**

கொடுக்கப்பட்டது: $n \in N$ மற்றும் 4^n

$n = 1,2,3,4 \ldots.$

$4^1 = 4$ $\quad$ $4^4 = 256$

$4^2 = 16$ $\quad$ $4^5 = 1024$

$4^3 = 64$ $\quad$ $4^6 = 4096$

இதிலிருந்து, 4^nஆனது n ன் மதிப்பு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும் போது 6இல் முடிகிறது

2. **m மற்றும் n இயல் எண்கள் எனில், எந்த m –யின் மதிப்புகளுக்கு $2^n \times 5^m$ என்ற எண் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?**

கொடுக்கப்பட்டது: $m, n \in N$ மற்றும் $2^n \times 5^m$

$n = 1, m = 1 \Rightarrow 2^1 \times 5^1 = 2 \times 5 = 10$

$n = 1, m = 2 \Rightarrow 2^1 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

$n = 2, m = 3 \Rightarrow 2^2 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$

$\therefore 2^n$ ஆனது இரட்டைப்படை எண் ஆகும்.
5ன் பெருக்கற்பலன் 0ல் முடிகிறது.
$2^n \times 5^m$ல் 5ல் முடியும்படி எந்த மதிப்பும் இல்லை.

3. **252525 மற்றும் 363636 என்ற எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க.**

252525ன் காரணிகள்

$= 5 \times 5 \times 10101$

5	252525
5	50505
	10101

363636 ன் காரணிகள்

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 10101$

2	363636
2	181818
3	90909
3	30303
	10101

$\therefore$ 252525 மற்றும் 363636 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 10101

4. **$13824 = 2^a \times 3^b$ எனில், a மற்றும் b –யின் மதிப்புக் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது $13824 = 2^a \times 3^b$

13824 ஐ காரணிப்படுத்த,

$13824 = 2^9 \times 3^3$

எனவே, $2^a \times 3^b = 2^9 \times 3^3$

$\therefore a = 9$ மற்றும் $b = 3$

3	13824
3	4608
3	1536
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ **இங்கு, p_1, p_2, p_3, p_4 என்பன ஏறுவரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள் மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன முழுக்கள் எனில், p_1, p_2, p_3, p_4 மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.**

113400 ஐ காரணிப்படுத்த,

5	113400
5	22680
2	4536
2	2268
2	1134
3	567
3	189
3	63
3	21
	7

$113400 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$

$= 5^2 \times 2^3 \times 3^4 \times 7^1$

Given, $113400 = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4}$

p_1, p_2, p_3, p_4 என்பன ஏறுவரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள்

மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன முழுக்கள்

$p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$

$p_1^{x_1} = 2^3$	$p_2^{x_2} = 3^4$	$p_3^{x_3} = 5^2$	$p_4^{x_4} = 7^1$
$p_1 = 2; x_1 = 3$	$p_2 = 3, x_2 = 4$	$p_3 = 5, x_3 = 2$	$p_4 = 7, x_4 = 1$

$\therefore\ p_1, p_2, p_3, p_4 = 2,3,5,7$

$x_1, x_2, x_3, x_4 = 3,4,2,1$

6. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயனபடுத்தி 408 மற்றும் 170 என்ற எண்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ காண்க.

408 மற்றும் 170 ஆகிய எண்களை காரணிப்படுத்த,

2	408
2	204
2	102
3	51
3	17

2	170
5	85
	17

$408 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 17$

$= 2^3 \times 3 \times 17$ and

$170 = 2 \times 5 \times 17$

408 மற்றும் 170 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$

$= 8 \times 15 \times 17$

$= 2040$

408 மற்றும் 170 ஆகியவற்றிறன் மீ.பொ.வ $= 2 \times 17$

$= 34$

7. 24, 15, 36 ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகப்பெரிய ஆறிலக்க எண்ணைக் காண்க.

3	24, 15, 36
2	8, 5, 12
2	4, 5, 6
	2, 5, 3

24, 15, 36 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம 360.

அந்த எண் 360 ஆல் வகுபடும்.

$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 360$

மிகப்பெரிய 6 இலக்க எண் 999999

$\therefore\ = 999999 - 279$

$= 999720$

```
         2777
360 | 999999
      720
      2799
      2520
       2799
       2520
        2799
        2520
         279
```

8. 35, 56 மற்றும் 91 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 7 ஐத் தரக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் எது?

35, 56 மற்றும் 91 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம $= 3640$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$

$n = 35q_1 + 7$

$n = 56q_2 + 7$

$n = 91q_3 + 7$

$n = 3640 + 7$

$= 3647$

$\therefore$ தேவையான, மிகச்சிறிய எண் 3647.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 35, 56, 91 \\ \hline & 5, 8, 13 \end{array}$$

$7 \times 5 \times 8 \times 13 = 3640$

9. முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் எது?

முதல் 10 இயல் எண்கள் $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$.

$1,2,3,4,5,6,7,8,9$ மற்றும் 10 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம

$= 1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$= 8 \times 9 \times 35$

$= 2520$

$\therefore$ முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் 2520.

$1 = 1$
$2 = 2$
$3 = 3$
$4 = 2^2$
$5 = 5$
$6 = 2 \times 3$
$7 = 7$
$8 = 2^3$
$9 = 3^2$
$10 = 5 \times 2$

நினைவில் கொள்ள...(பயிற்சி 2.3)

மட்டு ஒருங்கமைவு (Congruence Modulo): a மற்றும் b க்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் n யின் மடங்கு எனில் மட்டு n யின் அடிப்படையில் a யும் b யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். அதாவது $b - a = kn, k \in Z$ இதை $a \equiv b$ (மட்டு n)எனவும் எழுதலாம். இங்கு n என்பது மட்டு எண் என அழைக்கப்படுகிறது. $a \equiv b$ (மட்டு n) என்பதன் பொருள் $a - b$ ஆனது n ஆல் வகுபடும் எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: $61 \equiv 5$ (மட்டு 7) ஏனெனில் $61 - 5 = 56$ என்பது 7ஆல் வகுபடும்.

குறிப்பு:

- ஒரு மிகை முழுவை n ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிக்கான சாத்தியக்கூறுகள் $0,1,2,3, \ldots n-1$ஆகும்.
- எனவே மட்டு n ஐ கணக்கிடும்போது, நாம் அனைத்து எண்களையும் n ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதிகளான $0,1,2,3, \ldots, n-1$ ஆல் பதிலிட வேண்டும்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தை மட்டு எண் கணிதத்துடன் தொடர்புபடுத்துதல்

m மற்றும் n என்பன இரு முழுக்கள் மற்றும் m ஒரு மிகை முழு என்க. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி $n \equiv mq + r$ இங்கு $0 \leq r < m$ மற்றும் q ஒரு முழு

$n = mq + r$

$n - r = mq$

$n - r \equiv 0$ (மட்டு m)

$n \equiv r$ (மட்டு m)

ஆகவே, யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் மூலம் பெறப்பட்ட $n = mq + r$ என்ற சமன்பாட்டை $n \equiv r$ (மட்டு m) என்ற மட்டு ஒருங்கிசைவாக எழுதலாம்.

குறிப்பு:

📖 a மற்றும் b என்ற இரு முழுக்களும் மட்டு m ஐப் பொறுத்து ஒருங்கிசைவாக அமைய, அதாவது $a \equiv b$ (மட்டு m)என எழுத வேண்டுமானால் அவ்விரு எண்களையும் m ஆல் வகுக்கும் போது ஒரே மமீதியைத் தர வேண்டும்.

மட்டு எண்கணிதச் செயல்பாடுகள்:

தேற்றம் 5 : a, b, c மற்றும் d என்பன முழுக்கள் மற்றும் m என்பது ஒரு மிகை முழு.

$a \equiv b$ (மட்டு m) மற்றும் $c \equiv d$ (மட்டு m)எனில்,

(i) $(a + c) \equiv (b + d)$(மட்டு m) (ii) $(a - c) \equiv (b - d)$(மட்டு m)

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d)$(மட்டு m)

தேற்றம் 6 : $a \equiv b$ (மட்டு m) எனில்

(i) $ac = bc$ (மட்டு m)

(ii) $a \pm c = b \pm c \ (mod\ m)$for any integer c.

குறிப்பு:

📖 இயற்கணிதத்தில் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது பெரும்பாலும் நமக்கு முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான தீர்வுகள் கிடைக்கும். ஆனால், மட்டு ஒருங்கிசைவு சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் போது நமக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு x –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $71 \equiv x$ (மட்டு 8) **(ii) $78 + x \equiv 3$ (மட்டு 5)**

(iii) $89 \equiv (x + 3)$(மட்டு 4) **(iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$(மட்டு 5)**

(v) $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

(i) $71 \equiv x$ (மட்டு 8) கொடுக்கப்பட்டது: $71 \equiv x$(மட்டு 8) $71 - x = 8k,$ k –ஒரு முழு $71 - x$ ஆனது 8 ன் மடங்காகும். குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x = 7$	(ii) $78 + x \equiv 3$ (மட்டு 5) கொடுக்கப்பட்டது: $78 + x \equiv 3$ (மட்டு 5) $78 + x - 3 = 5k$ k ஒரு முழு $75 + x = 5k$ $75 + x$ ஆனது 5 ன் மடங்காகும். குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x = 5$
(iii) $89 \equiv (x + 3)$(மட்டு 4) கொடுக்கப்பட்டது: $89 \equiv (x + 3)$(மட்டு 4) $89 - x - 3 \equiv 4k,$ k ஒரு முழு $86 - x = 4k.$ $86 - x$ ஆனது 8 ன் மடங்காகும். குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x = 2$	(iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$(மட்டு 5) கொடுக்கப்பட்டது: $96 = \frac{x}{7}$(மட்டு 5) ....(1) $96 = 1$(மட்டு 5) ....(2) (1) மற்றும் (2) ஐத் தவிர $\frac{x}{7} = 1$ $x = 7$
(v) $5x \equiv 4$ (மட்டு 6) கொடுக்கப்பட்டது: $5n \equiv 4$(மட்டு 6) $5x - 4 = 6k$ k ஒரு முழு $5x - 4$ ஆனது 6 ன் மடங்காகும். குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x = 2$	

2. x ஆனது மட்டு 17 –யின் கீழ் 13 உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது எனில், $7x - 3$ ஆனது எந்த எண்ணுடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்?

கொடுக்கப்பட்டது:

[$a \equiv b$(மட்டு m) எனில் $a \times c \equiv b \times c$ (மட்டு m)]

$x \equiv 13$ (மட்டு17)

7 ஆல் பெருக்க

$7x = 91$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 91 - 3$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 88$(மட்டு 17)

$7x - 3 \equiv 3$ (மட்டு 17) [$\because 88 \equiv 3$ (மட்டு 17)]

(17) 88 (5 : 85, மீதி 3)

$\therefore 7x - 3$ ஆனது 3 உடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்.

3. தீர்க்க: $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

கொடுக்கப்பட்டது: $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

$5x - 4 \equiv 6k$, k ஒரு முழு

$5x \equiv 6k + 4$

$x = \frac{6k+4}{5}$

$6k + 4$ ஆனது 5 ஆல் வகுபடும்.

$k = 1,6,11,16 \ldots$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{6(1)+4}{5} = \frac{6+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$k = 6 \Rightarrow x = \frac{6(6)+4}{5} = \frac{36+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$k = 11 \Rightarrow x = \frac{6(11)+4}{5} = \frac{66+4}{5} = \frac{70}{5} = 14$

$\therefore n = 2,8,14 \ldots$

4. தீர்க்க: $3x - 2 \equiv 0$ (மட்டு 11)

கொடுக்கப்பட்டது: $3x - 2 \equiv 0$(மட்டு 11)

$3x - 2 = 11k$ k ஒரு முழு

$3x = 11k + 2$

$x = \frac{11k+2}{3}$

$11k + 2$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

$k = 2, 5, 8, \ldots$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{11(2)+2}{3} = \frac{22+2}{3} = \frac{24}{3} = 8$

$k = 5 \Rightarrow x = \frac{11(5)+2}{3} = \frac{55+2}{3} = \frac{57}{3} = 19$

$k = 8 \Rightarrow x = \frac{11(8)+2}{3} = \frac{88+2}{3} = \frac{90}{3} = 30$

$\therefore x = 8, 19, 30, \ldots$

5. முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு நேரம் என்ன?

தொடங்கும் நேரம் முற்பகல் 7 மணி,

அதன் பின் 100 மணி நேரத்திற்கு பிறகு நேரம் காண வேண்டும்.

மட்டு 24ஐ பயன்படுத்த

$100 + 7$ (மட்டு 24) $= 107$ (மட்டு 24)

$= 11$ (மட்டு24)

(24) 107 (4 : 96, மீதி 11)

$107 = 4(24) + 11$

$\therefore$ முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு முற்பகல் 11 மணி

6. பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் என்ன?

தொடங்கும் நேரம் பிற்பகல் 11 மணி $= 23$ மணி

மட்டு 24ஐ பயன்படுத்த

பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் $= 23 - 15$ (மட்டு 24)

$= 8$ (மட்டு 24)

= பிற்பகல் 8 மணி

7. இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவதாகக் கூறியுள்ளார். என்னுடைய மாமா எந்தக் கிழமையில் வருவார்?

0,1,2,3,4,5 மற்றும் 6 என்பன முறையே ஞாயிறு முதல் சனி வரை உள்ள கிழமைகளைக் குறிப்பதாக கொள்வோம்.

இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவார்.

$2 + 45$ (மட்டு 7) $= 47$(மட்டு 7)

$= 5$ (மட்டு 7) $(\because 47 \equiv 5$ மட்டு 7)

$= 5$ (மட்டு 7)

(7 | 47: ஈவு 6, 42, மீதி 5)

∴ என்னுடைய மாமா வெள்ளிக் கிழமையில் வருவார்

8. எந்த ஒரு மிகை முழு எண் n –ற்கும் $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

$2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவ வேண்டும்.

$9 \equiv 2$ (மட்டு 7)

$9 \times 9 \equiv 2 \times 9$ (மட்டு7)

$9^2 \equiv 18$ (மட்டு7) $\quad ac = bc$ (மட்டு m)

(7 | 18: ஈவு 2, 14, மீதி 4)

$9^2 \equiv 4$ (மட்டு7)

$9^2 \equiv 2^2$ (மட்டு7)

⋮

$9^n \equiv 2^n$ (மட்டு7)

$a \equiv b$(மட்டு m) $a^n \equiv b^n$(மட்டு m)

6 ஆல் பெருக்க

$6 \times 9^n = 6 \times 2^n$(மட்டு 7)..........(1)

மேலும், $2 \equiv 2$(மட்டு 7)

$2^n \equiv 2^n$(மட்டு 7)..................(2)

(1)+(2) ⇒

$2^n + 6 \times 9^n \equiv 2^n + (6 \times 2^n)$(மட்டு7) $\quad [\therefore a + c = b + d$ (மட்டு m)]

$2^n + 6 \times 9^n \equiv 2^n(1 + 6)$(மட்டு 7)

$2^n + 6 \times 9^n \equiv 7 \times 2^n$(மட்டு 7)

$2^n + 6 \times 9^n = 0$ (மட்டு 7) $\quad [\therefore 7 \times 2^n$ ஆனது 7ன் மடங்காகும்.]

∴ $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்.

எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

9. 2^{81} ஐ 17 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி காண்க..

$512 \equiv 2$ (மட்டு 17)

$2^9 \equiv 2$ (மட்டு 17)

$(2^9)^9 \equiv 2^9$ (மட்டு17)

$2^{81} \equiv 512$(மட்டு17) $\quad [\because 512 = 2$(மட்டு17)]

(17 | 512: ஈவு 30, 510, மீதி 2)

$2^{81} \equiv 2$ (மட்டு17)

$\therefore 2^{81} - 2 = 17k \quad k$ ஒரு முழு

$2^{81} = 17k + 2.$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \qquad 0 \le r < b.$

∴ எனவே மீதி **2.**

Padasalai TrbTnpsc

10. பிரிட்டிஷ் ஏர்லைன்ஸ் விமானத்தில் சென்னையிலிருந்து லண்டன் செல்லப் பயணநேரம் தோராயமாக 11 மணிநேரம். விமானம் தனது பயணத்தை ஞாயிற்றுக்கிழமை 23:30 மணிக்குத் தொடங்கியது. சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4.30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்குமெனில், விமானம் லண்டனில் தரையிறங்கும் நேரத்தைக் காண்க.

தொடங்கும் நேரம் 23:30 ஞாயிற்றுக்கிழமை. பயண நேரம் 11 மணி.

மட்டு 24ஐ பயன்படுத்த

தரையிரங்கும் நேரம் $= 23.30 + 11$ (மட்டு 24)

$= 34.30$ (மட்டு 24) $\quad [\because 34.30 = 10.30$ (மட்டு 24)$]$

$= 10.30$ (மட்டு 24)

விமானமானது, சென்னை நேரப்படி. லண்டன் விமான நிலையத்தில் திங்கள் அன்று 10.30க்கு தரையிரங்கும். சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4.30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்கும் என்பதால்,

தரையிரங்கும் நேரம் $= 10.30 - 4.30 = 6$ (காலை)

$\therefore$ விமானமானது திங்கள் அன்று காலை 6 மணியளவில் இலண்டன் விமான நிலையத்தில் தரையிரங்கும்.

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.4)

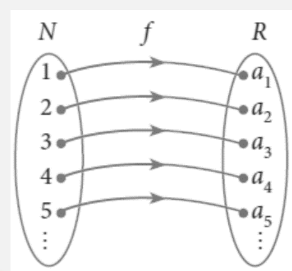
மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது இயல் எண்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட, மெய்யெண் மதிப்புகளைப் பெறும் சார்பாகும்.

உறுப்பு தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு நிலையில் வரும் எண்ணும், தொடர்வரிசையின் ஓர் உறுப்பு எனப்படும்.

முடிவுறு தொடர்வரிசை : ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அது முடிவுறு தொடர்வரிசை எனப்படும்.

முடிவுறாத் தொடர்வரிசை :ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின் அது முடிவுறாத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

தொடர்வரிசையை ஒரு சார்பாக அறிதல்: தொடர்வரிசையானது இயல் எண்களின் N மீது வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு சார்பாகும். குறிப்பாகத் தொடர்வரிசை ஆனது $f: N \to R$, இங்கு R என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும். தொடர்வரிசையானது $a_1, a_2, a_3, \ldots$ வடிவில் அமையுமானால், $a_1, a_2, a_3 \ldots$ என்றத் தொடர்வரிசைக்கு $f(k) = a_k, k = 1,2,3, \ldots$என்ற சார்பை தொடர்புபடுத்தலாம்.



குறிப்பு: எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளே ஆனால் எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசை ஆகாது.

பயிற்சி 2.4

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) 8,24,72,… (ii) 5,1, −3,… (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

(i) 8,24,72, …

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில், ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3ஆல் பெருக்க

$8 \times 3 = 24$, $24 \times 3 = 72$, $72 \times 3 = 216$

$216 \times 3 = 648$

$648 \times 3 = 1944$

$\therefore$ அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் 216,648,1944.

(ii) $5,1,-3,\ldots$ மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 4 ஆல் குறைக்க $5-4=1$ $1-4=-3$ $-3-4=-7$ $-7-4=-11$ $-11-4=-15$ ∴ அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $-7,-11,-15$.	(iii) $\frac{1}{4},\frac{2}{9},\frac{3}{16}$ இங்கு, தொகுதியானது 1 அதிகரித்துக்கொண்டே செல்கிறது. பகுதியானது தொகுதியுடன் 1ஐக் கூட்டி வர்க்கப்படுத்த கிடைக்கிறது. ∴ அடுத்த மூன்று எண்கள் $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$.

2. பின்வரும் n –வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = n^3 - 2$ (ii) $a_n = (-1)^{n+1}\, n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

(i) $a_n = n^3 - 2$

$n=1 \Rightarrow a_1 = (1)^3 - 2 = 1 - 2 = -1$

$n=2 \Rightarrow a_2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

$n=3 \Rightarrow a_3 = 3^3 - 2 = 27 - 2 = 25$

$n=4 \Rightarrow a_4 = 4^3 - 2 = 64 - 2 = 62.$

∴ முதல் நான்கு உறுப்புகள் : $-1,6,25,62.$

(ii) $a_n = (-1)^{n+1}\, n(n+1)$

$n=1 \Rightarrow a_1 = (-1)^{1+1}\ (1)(1+1) = (-1)^2\,(1)(2) = 2$

$n=2 \Rightarrow a_2 = (-1)^{2+1}(2)(2+1) = (-1)^3(2)(3) = -6$

$n=3 \Rightarrow a_3 = (-1)^{3+1}(3)(3+1) = (-1)^4(3)(4) = 12$

$n=4 \Rightarrow a_4 = (-1)^{4+1}(4)(5) = (-1)^5(20) = -20$

∴ முதல் நான்கு உறுப்புகள் : $2,-6,12,-20.$

(iii) $a_n = 2n^2 - 6$

Given $a_n = 2n^2 - 6$

$n=1 \Rightarrow a_1 = 2(1)^2 - 6 = 2(1) - 6 = -4$

$n=2 \Rightarrow a_2 = 2(2)^2 - 6 = 2(4) - 6 = 8 - 6 = 2$

$n=3 \Rightarrow a_3 = 2(3)^2 - 6 = 2(9) - 6 = 18 - 6 = 12$

$n=4 \Rightarrow a_4 = 2(4)^2 - 6 = 2(16) - 6 = 32 - 6 = 26$

∴ முதல் நான்கு உறுப்புகள் : $-4,2,12,26$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் n –வது உறுப்பைக் காண்க.

(i) $2,5,10,17,\ldots$ (ii) $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots$ (iii) $3,8,13,18,\ldots$

(i) $2,5,10,17,\ldots$

$1^2+1=2$

$2^2+1=5$

$3^2+1=10$

$4^2+1=17$

⋮

$n^2+1=a_n$

∴ n –வது உறுப்பு n^2+1

(ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ $\frac{1-1}{2} = 0$ $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$ $\vdots$ $\frac{n-1}{n} = a_n$ $\therefore n$ –வது உறுப்பு $\frac{n-1}{n}$	(iii) $3, 8, 13, 18, \ldots$ $3 = 5(1) - 2$ $8 = 5(2) - 2$ $13 = 5(3) - 2$ $18 = 5(4) - 2$ $\vdots$ $a_n = 5(n) - 2$ $\therefore n$ –வது உறுப்பு $a_n = 5n - 2$

4. கீழ்க்கண்ட தொடர்வரிசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் n –வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13} **(ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 மற்றும் a_{11}**

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13}

$n = 6 \Rightarrow a_6 = \frac{5(6)}{6+2} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

$n = 13 \Rightarrow a_{13} = \frac{5(13)}{13+2} = \frac{65}{15} = \frac{13}{3}$

$\therefore a_6 = \frac{15}{4}, \quad a_{13} = \frac{13}{3}$

(ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 மற்றும் a_{11}

$a_n = -(n^2 - 4)$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = -[(4)^2 - 4] = -(16 - 4) = -12$

$n = 11 \Rightarrow a_{11} = -[(11)^2 - 4] = -(121 - 4) = -117$

$\therefore a_4 = -12, \quad a_{11} = -117$

5. $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3}; & \text{ஓர் ஒற்றை எண் } n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1}; & \text{ஓர் இரட்டை எண் } n \in N \end{cases}$ என்பது n –வது உறுப்பு எனில், a_8 மற்றும் a_{15} காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3}; & \text{ஓர் ஒற்றை எண் } n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1}; & \text{ஓர் இரட்டை எண் } n \in N \end{cases}$

a_8 மற்றும் a_{15} ஐ காண வேண்டும்.

$n = 8$ (இரட்டை எண்)

$a_n = \frac{n^2-1}{n+3}$

$a_8 = \frac{8^2-1}{8+3} = \frac{64-1}{11} = \frac{63}{11}$

$n = 15$, n ஓர் ஒற்றை எண்

$a_n = \frac{n^2}{2n+1}$;

$a_{15} = \frac{(15)^2}{2(15)+1}$

$= \frac{225}{30+1} = \frac{225}{31}$

$\therefore a_8 = \frac{63}{11},\ \ a_{15} = \frac{225}{31}$

6. **$a_1 = 1, a_2 = 1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3, n \in N,$ எனில், தொடர்வரிசையின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் காண்க.**

$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1$

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\qquad n \geq 3, n \in N.$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2a_{3-1} + a_{3-2} = 2a_2 + a_1 = 2(1) + 1 = 3$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2a_{4-1} + a_{4-2} = 2a_3 + a_2 = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + a_3 = 2(7) + 3 = 14 + 3 = 17$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = 2a_{6-1} + a_{6-2} = 2a_5 + a_4 = 2(17) + 7 = 34 + 7 = 41$

$\therefore$ முதல் 6 உறுப்புகள் 1,1,3,7,17,41.

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.5)

கூட்டுத்தொடர் வரிசை: a மற்றும் d மெய்யெண்கள் எனில், $a, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots$என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை அமைக்கும். கூட்டுத்தொடர்வரிசையை சுருக்கமாக A.P. (Arithmetic progression) என குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு a என்ற எண்ணை முதல் உறுப்பு என்றும் d என்ற எண்ணை பொது வித்தியாசம் என்றும் அழைக்கிறோம்.

(i) எண்களின் வடிவம்	$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\quad a+(n-1)d.$
(ii) n ஆவது உறுப்பு	$t_n = a + (n-1)d$
(iii) பொது வித்தியாசம்	$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \cdots$ $d = t_n - t_{n-1}$ for $n = 2,3,4, \ldots$ பொது வித்தியாசமானது மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ அமையலாம்.
(iv) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

குறிப்பு:

📖கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எந்த இரு தொடர்ச்சியான உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாத எண்ணாக இருக்கும். இந்த மாறாத எண் "**பொது வித்தியாசம்**" என அழைக்கப்படுகிறது.

📖ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது **முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசை** எனப்படும்.

📖 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது **முடிவுறா கூட்டுத்தொடர்வரிசை** எனப்படும்.

📖 ஒரு முடிவுற கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு a , கடைசி உறுப்பு l எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ ஏனெனில்

$l = a + (n-1)d$

ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில்,

- ஒவ்வொரு உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையாகும்.
- ஒவ்வொர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.
- ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையின் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $a-d, a$ மற்றும் $a+d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் d ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $a-3d, a-d, a+d$ மற்றும் $a+3d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் $2d$ ஆகும்.

மூன்று எண்கள் கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் அமைவதற்கான நிபந்தனை: மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் a, b, c என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் இருந்தால் மட்டுமே $2b = a+c$

பயிற்சி 2.5

1. **பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையா எனச் சோதிக்கவும்.**

(i) $\boldsymbol{a-3, a-5, a-7, \ldots}$ **(ii)** $\boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots}$ **(iii)** $\boldsymbol{9, 13, 17, 21, 25, \ldots}$

(iv) $\boldsymbol{\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots}$ **(v)** $\boldsymbol{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots}$

(i) $a-3, a-5, a-7, \ldots$

கொடுக்கப்பட்டது:

$a-3, a-5, a-7$

$d = t_2 - t_1$

$= a-5-(a-3)$

$= \not{a} - 5 - \not{a} + 3$

$d = -2$……………….(1)

$d = t_3 - t_2$

$= a-7-(a-5)$

$= \not{a} - 7 + 5 - \not{a}$

$d = -2$ ……………….(2)

(1) மற்றும்(2) லிருந்து, $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$

$t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = \frac{-1}{12}$

$\therefore t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை அல்ல.

(iii) 9,13,17,21,25, …

$t_2 - t_1 = 13 - 9 = 4$

$t_3 - t_2 = 17 - 13 = 4$

$t_4 - t_3 = 21 - 17 = 4$

$t_5 - t_4 = 25 - 21 = 4$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

(iv) கொடுக்கப்பட்டது: $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

$t_2 - t_1 = 0 - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$t_3 - t_2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$t_4 - t_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

(v) கொடுக்கப்பட்டது:$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$t_2 - t_1 = -1 - 1 = -2.$

$t_3 - t_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

$t_4 - t_3 = -1 - 1 = -2$

$\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை அல்ல

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d –க்குக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.

(i) $a = 5, d = 6$ (ii) $a = 7, d = -5$ (iii) $a = \frac{3}{4}, d = \frac{1}{2}$

(i) $a = 5, d = 6$ கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம் $a, a + d, a + 2d,\ a + 3d, \ldots$ $5, (5 + 6), (5 + (2 \times 6)), 5 + 3(6), \ldots$ $5, 11,\ 5 + 12,\ 5 + 18, \ldots$ $5,11,17,23, \ldots$	(ii) $a = 7, d = -5$ கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம் $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ $7,7 - 5,\ 7 + 2(-5), 7 + 3(-5), \ldots$ $7,2,7 - 10,7 - 15, \ldots$ $7,2, -3, -8, \ldots$

(iii) $a = \frac{3}{4}, d = \frac{1}{2}$

கூட்டுத்தொடரின் பொது வடிவம் $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

$\frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right), \left(\frac{3}{4} + 3\left(\frac{1}{2}\right)\right), \ldots$

$\frac{3}{4}, \left(\frac{3+2}{4}\right), \left(\frac{3}{4} + 1\right), \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right), \ldots$

$\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \ldots$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க

(i) $t_n = -3 + 2n$ (ii) $t_n = 4 - 7n$

(i) $t_n = -3 + 2n$ முதல் உறுப்பு $a = t_1$ $= -3 + 2(1) = -3 + 2$ $\boldsymbol{a = -1}$ $n = 2 \Rightarrow t_2 = -3 + 2(2) = -3 + 4$ $t_2 = 1$ பொது வித்தியாசம் $d = t_2 - t_1$ $= 1 - (-1) = 1 + 1$ $\boldsymbol{d = 2}$	(ii) $t_n = 4 - 7n$ $n = 1 \Rightarrow$ $t_1 = 4 - 7(1) = 4 - 7 = -3$ $n = 2 \Rightarrow$ $t_2 = 4 - 7(2) = 4 - 14 = -10$ $d = t_2 - t_1 = -10 + 3 = -7$ $\therefore$ முதல் உறுப்பு $a = -3$, பொது வித்தியாசம் $d = -7$.

4. $-11, -15, -19, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 19 –வது உறுப்பைக் காண்க. கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை $-11, -15, -19, \ldots$ $a = -11, d = t_2 - t_1 = -15 + 11$ $d = -4$ n ஆவது உறுப்பு $t_n = a + (n - 1)d$ $n = 19 \Rightarrow t_{19} = -11 + (19 - 1)(-4)$ $= -11 + 18(-4)$ $= -11 - 72$ $t_{19} = -83$	**5. $16, 11, 6, 1, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் -54 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?** கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை $16,11,6,1, \ldots$ $t_n = -54$, $d = t_2 - t_1$ $a = 16, d = 11 - 16 = -5$ $t_n \Rightarrow a + (n - 1)d = -54$ $16 + (n - 1)(-5) = -54$ $(n - 1)(-5) = -54 - 16$ $(n - 1)(-5) = -70$ $n - 1 = \frac{-70}{-5}$ $n - 1 = 14 \Rightarrow n = 15$ -54 என்பது 15 ஆவது உறுப்பு

6. $9, 15, 21, 27, \ldots, 183$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர்

$9,15,21,27,\ldots 183.$

$a = 9, \quad d = t_2 - t_1 = 15 - 9$

$l = 183, \; d = 6$

கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{183-9}{6} + 1 = \frac{174}{6} + 1$

$= 29 + 1$

$n = 30$

$n = 30$ ஒரு இரட்டை ,

நடு உறுப்பு $= \frac{n}{2}$ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ஆவது உறுப்பு

$= \frac{30}{2}$ ஆவது உறுப்பு $\frac{30}{2} + 1$ ஆவது உறுப்பு

$= 15$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் 16 ஆவது உறுப்பு

$t_n = a + (n-1)d$

$n = 15 \Rightarrow$

$t_{15} = 9 + (15-1)(6) = 9 + (14)(6)$

$t_{15} = 93$

$n = 16 \Rightarrow$

$t_{16} = 9 + (16-1)(6) = 9 + (15)(6)$

$t_{16} = 99$

∴ நடு உறுப்புகளாவன

$t_{15} = 93, \; t_{16} = 99$

7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒன்பதாவது உறுப்பின் ஒன்பது மடங்கும், பதினைந்தாவது உறுப்பின் பதினைந்து மடங்கு சமம் எனில் இருபத்து நான்காவது உறுப்பின் ஆறு மடங்கானது பூச்சியம் என நிறுவுக.

$9t_9 = 15t_{15} \quad (\because t_n = a + (n-1)d)$

$9[a + (9-1)]d = 15[a + (15-1)d]$

$9(a + 8d) = 15\,(a + 14d)$

$9a + 72d = 15a + 210d$

$9a - 15a + 72d - 210d = 0$

$-6a - 188d = 0$

$-6(a + 23d) = 0$

$6[a + (24-1)d] = 0$

$6t_{24} = 0$

∴ எனவே, நிறுவப்பட்டது.

8. $3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், k –யின் மதிப்புக் காண்க.

$3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

ie, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$18 - k - (3 + k) = 5k + 1 - (18 - k)$

$18 - k - 3 - k = 5k + 1 - 18 + k$

$15 - 2k = 6k - 17$

$15 + 17 = 6k + 2k$

$32 = 8k$

$k = 4$

9. $x, 10, y, 24, z$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், x, y, z –ஆகியவற்றின் மதிப்புக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது.

$x, 10, y, 24, z$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$10 - x = y - 10$ ……..(1)

$t_3 - t_2 = t_4 - t_3$

$y - 10 = 24 - y$

$y + y = 24 + 10$

$2y = 34$

$y = 17$

$y = 17$ என (1) ல் பிரதியிட

$10 - x = 17 - 10$

$-x = 7 - 10$

$-x = -3 \Rightarrow x = 3$

மேலும், $t_4 - t_3 = t_5 - t_4$

$24 - y = z - 24$

$24 - y + 24 = z \quad (y = 17$ என பிரதியிட$)$

$48 - 17 = z$

$z = 31$

∴ $x = 3, \; y = 17, \; z = 31$

10. ஒரு சினிமா அரங்கின் முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகளும் மொத்தம் 30 வரிசைகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அதற்கு முந்தைய வரிசையைவிட இரண்டு இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. கடைசி வரிசையில் எத்தனை இருக்கைகள் இருக்கும்?

சினிமா அரங்கில் மொத்தம் 30 வரிசைகள் உள்ளன. $n = 30$

முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகளும் உள்ளன

$a = 20$

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 2 இருக்கைகள் அதிகப்படுத்தப்படுகின்றன. 1,2,3,… வரிசைகள் முறையே $20, 22, 24, \ldots$ ஆகும்.

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையயை அமைக்கிறது.

$d = t_2 - t_1 = 22 - 20 = 2$

t_{30} ஐக் காண வேண்டும்.

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{30} = 20 + (30-1)2$

$= 20 + (29)(2)$

$= 20 + 58$

$t_{30} = 78$

78 இருக்கைகள் கடைசி வரிசையில் அமையும்.

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 288 எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$a-d, \quad a, \quad a+d$

கொடுக்கப்பட்டது: $a - d + a + a + d = 27$

$3a = 27$

$a = 9$

மேலும், $(a-d)(a)(a+d) = 288$

$(a^2 - d^2)a = 288$

$(9^2 - d^2) = \frac{288}{9}$

$81 - d^2 = 32$

$-d^2 = 32 - 81$

$-d^2 = -49$

$d = \pm 7$

$a = 9, d = 7$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$9-7, \quad 9, \quad 9+7$

$2, \quad 9, \quad 16$

$a = 9, d = -7$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$9+7, \quad 9, \quad 9-7$

$16, \quad 9, \quad 2.$

12. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6-வது மற்றும் 8-வது உறுப்புகளின் விகிதம் 7:9 எனில், 9-வது மற்றும் 13-வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $t_6 : t_8 = 7 : 9$

$\frac{t_6}{t_8} = \frac{7}{9}$

$\frac{a+(6-1)d}{a+(8-1)d} = \frac{7}{9} \qquad [\because t_n = a + (n-1)d]$

$9(a+5d) = 7(a+7d)$

$9a + 45d = 7a + 49d$

$9a - 7a = 49d - 45d$

$2a = 4d$

$a = 2d$ ....(1)

$t_9 : t_{13} = \frac{t_9}{t_{13}}$

$= \frac{a+(9-1)d}{a+(13-1)d}$

$= \frac{a+8d}{a+12d}$

$= \frac{2d+8d}{2d+12d} \qquad$ ($a = 2d$ என பிரதியிட)

$= \frac{10d}{14d}$

$= \frac{5}{7}$

$\therefore t_9 : t_{13} = 5 : 7$

13. ஒரு குளிர்காலத்தில் திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை ஊட்டியின் வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. திங்கள் கிழமை முதல் புதன்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $0°C$ மற்றும் புதன்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $18°C$ எனில், ஐந்து நாட்களின் வெப்பநிலைகளைக் காண்க.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$ என்பன முறையே ஊட்டியில் திங்கள் முதல் வெள்ளி வரை நிலவும் வெப்பநிலை என்க .

கொடுக்கப்பட்டது: திங்கள் முதல் புதன் வரை வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $0°C$

$a+a+d+a+2d=0$

$3a+3d=0$

$a+d=0$

$a=-d$ ....(1)

புதன் கிழமை முதல் வெள்ளி கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $18°C$.

$a+2d+a+3d+a+4d=18$

$3a+9d=18$

$-3d+9d=18$ ($=-d$ என பிரதியிட)

$6d=18$

$d=3$

$d=3$ என (1) ல் பிரதியிட , $a=-3$

ஒவ்வொரு நாளின் வெப்பநிலை

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$

$(-3), (-3+3), (-3+2(3)), (-3+3(3)), (-3+3(4))$

$-3, 0, -3+6, -3+9, -3+12,$

$-3°C, 0°C, 3°C, 6°C, 9°C$

14. பிரியா தனது முதல் மாத வருமானமாக ₹15,000 ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹1500 உயர்கிறது. அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹13,000 மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹900 உயர்கிறது. பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹20,000 அடைய எவ்வளவு காலம் ஆகும்?

பிரியா தனது முதல் மாத வருமானமாக ₹15,000 ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹1500 உயர்கிறது.

1,2,3,…ஆண்டுகளில் அவளது வருமானம் முறையே $15000, 16500, 18000, \ldots$

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் அமைந்துள்ளது,

அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹13,000 மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹900 உயர்கிறது.

1,2,3,… ஆண்டுகளில் அவளது செலவு முறையே $13{,}000, 13900, 14800, \ldots..$

,2,3,… ஆண்டுகளில் அவளது சேமிப்பு முறையே

$15000-13000, 16500-13900, 18000-14800, \ldots$

₹ 2000, ₹2600, ₹3200,…

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளது.

$a=2000, d=2600-2000=600$

$t_n=20000,\quad t_n=a+(n-1)d$

$2000+(n-1)600=20000$

$(n-1)600=20000-2000$

$(n-1)600=18000$

$n-1=\frac{18000}{600}$

$n-1=30$

$n=31$

∴ பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹20,000 அடைய 31 வருடம் ஆகும்

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.6)

தொடர்	ஒரு தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் தொடர் எனப்படும். $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$ என்பது ஒரு மெய்யெண் தொடர்வரிசை என்க. இங்கு $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ என்பது மெய்யெண் தொடர் ஆகும்.
முடிவுறு தொடர்	ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு தொடர் எனப்படும்.
முடிவுறாத் தொடர்	ஒரு தொடரில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறாத்தொடர் எனப்படும்.
கூட்டுத்தொடர்	ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையுமானால் அத்தொடர் கூட்டுத்தொடர் எனப்படும்.

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

- ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது S_n என குறிக்கப்படுகிறது.

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

- ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் கடைசி உறுப்பு l கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

பயிற்சி 2.6

1. **பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.**

(i) $3, 7, 11, \dots 40$ உறுப்புகள் வரை (ii) $102, 97, 92, \dots 27$ உறுப்புகள் வரை

(iii) $6 + 13 + 20 + \cdots + 97$

(i) $3,7,11,\dots$ ஆகியன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$$a = 3, d = t_2 - t_1 = 7 - 3 = 4.$$

$$n = 40$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2(3) + (40-1)4]$$

$$= 20[6 + 39(4)]$$

$$= 20(6 + 156)$$

$$= 20(162)$$

$$S_{40} = 3240$$

(ii) $102,97,92,\dots$ ஆகியன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$$a = 102, \quad d = 97 - 102 = -5$$

$$n = 27.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}[2(102) + (27-1)(-5)]$$

$$= \frac{27}{2}[204 + 26(-5)]$$

$$= \frac{27}{2}[204 - 130] = \frac{27}{2}[74]$$

$$S_{27} = 999$$

(iii) $6 + 13 + 20 + \cdots + 97$ ஆகியன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$$a = 6 \quad d = t_2 - t_1 = 20 - 13 = 7, \ l = 97$$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$n = \frac{97-6}{7} + 1 = \frac{91}{7} + 1 = 13 + 1 = 14$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

Padasalai TrbTnpsc

$S_{14} = \frac{14}{2}[2(6) + (14-1)(7)]$
$= 7[12 + 13(7)]$
$= 7[12 + 91] = 7(103)$
$S_{14} = 721$

2. 5 –லிருந்து தொடங்கி எத்தனை தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் 480 கிடைக்கும்?

தேவையான கூட்டுத்தொடர் $5 + 7 + 9 + \cdots$

$a = 5$
$d = t_2 - t_1 = 7 - 5$
$d = 2$

$S_n = 480$
$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 480$
$\frac{n}{2}[2(5) + (n-1)2] = 480$
$\frac{2n}{2}[5 + n - 1] = 480$
$n(4 + n) = 480$
$n^2 + 4n - 480 = 0$
$(n - 20)(n + 24) = 0$
$n - 20 = 0$ (அல்லது) $n + 24 = 0$
$n = 20$ (அல்லது) $n = -24$
$n = -24$ என்பது ஏற்புடையதல்ல, எனவே $n = 20$.
$\therefore$ 20 உறுப்புகளின் கூடுதல் 480
$S_{20} = 480$

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு $4n - 3$ எனில், அதன் முதல் 28 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$t_n = 4n - 3$
$n = 1 \Rightarrow t_1 = 4(1) - 3 = 4 - 3$
$t_1 = a = 1$
$n = 2 \Rightarrow t_2 = 4(2) - 3 = 8 - 3$
$t_2 = 5$
$n = 3 \Rightarrow t_3 = 4(3) - 3 = 12 - 3$
$t_3 = 9$
$a = 1, d = t_2 - t_1 = 5 - 1$
$d = 4$
$n = 28$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$S_{28} = \frac{28}{2}[2(1) + (28-1)4]$
$= 14[2 + 27(4)]$
$= 14[2 + 108]$
$= 14(110)$
$S_{28} = 1540$

4. ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் $2n^2 - 3n$ எனில், அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $S_n = 2n^2 - 3n$
$n = 1 \Rightarrow S_1 = 2(1)^2 - 3(1) = 2(1) - 3$
$S_1 = -1 = t_1$
$n = 2 \Rightarrow S_2 = 2(2)^2 - 3(2) = 2(4) - 6$
$S_2 = 8 - 6 = 2$

Padasalai TrbTnpsc

$t_1 + t_2 = 2 \qquad (\because S_2 = t_1 + t_2)$

$t_1 = -1$ என பிரதியிட $\Rightarrow -1 + t_2 = 2$

$t_2 = 3$

$n = 3 \Rightarrow S_3 = 2(3)^2 - 3(3) = 2(9) - 9$

$= 18 - 9$

$S_3 = 9$

$t_1 + t_2 + t_3 = 9 \qquad (\because t_1 + t_2 = 2)$

$2 + t_3 = 9$

$t_3 = 7$

$\therefore$ கூட்டுத்தொடர் $-1 + 3 + 7 + \cdots$

$d = t_2 - t_1 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$

$t_3 - t_2 = 7 - (3) = 4$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் $-1 + 3 + 7 + \cdots$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 104-வது உறுப்பு மற்றும் 4-வது உறுப்புகள் முறையே 125 மற்றும் 0. அத்தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

$t_{104} = 125, t_4 = 0$

$t_n = a + (n-1)d$

$t_4 = 0$

$a + (4-1)d = 0$

$a + 3d = 0$

$a = -3d$ ………….(1)

$t_{104} = 125$

$a + (104-1)d = 125$

$a + 103d = 125$

$a = -3d$ என பிரதியிட

$-3d + 103d = 125$

$100d = 125 \Rightarrow d = \frac{125}{100} \Rightarrow d = \frac{5}{4}$

$a = -3\left(\frac{5}{4}\right)$

$a = \frac{-15}{4}$ என (1) ல் பிரதியிட

தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண வேண்டும், $n = 35$.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{35} = \frac{35}{2}\left[2\left(\frac{-15}{4}\right) + (35-1)\frac{5}{4}\right]$

$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15}{2} + 34\left(\frac{5}{4}\right)\right]$

$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15+85}{2}\right]$

$= \frac{35}{2}\left(\frac{70}{2}\right)$

$S_{35} = \frac{1225}{2}$

$S_{35} = 612.5$

6. 450-க்குக் குறைவாக உள்ள அனைத்து ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடர், $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 449$.

$a = 1, d = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2, \quad l = 449.$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{449-1}{2} + 1$

$= \frac{448}{2} + 1$

$= 224 + 1$

$n = 225$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$S_n = \frac{225}{2}[1 + 449]$

$= \frac{225}{2}[450]$

$= 225(225)$

$s_{225} = 50625$

7. 602-க்கும் 902-க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

602 க்கும் 902 க்கும் இடையே உள்ள வரிசை

$603 + 604 + 605 + \cdots + 901$

$a = 603, d = 1, l = 901$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{901-603}{1} + 1$

$= 298 + 1$

$n = 299$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$S_{299} = \frac{299}{2}(603 + 901)$

$= \frac{299}{2}(1504) = 299(752)$

$S_{299} = 224848$

602-க்கும் 902-க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல்

$604 + 608 + 612 + \cdots + 900$

$a = 604, d = 4, l = 900.$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{900-604}{4} + 1$

$n = \frac{296}{4} + 1$

$= 74 + 1$

$n = 75$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{75} = \frac{75}{2}(604 + 900)$

$= \frac{75}{2}(1504)$

$S_{75} = 56400$

4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் $= S_{299} - S_{75}$

$= 224848 - 56400$

$= 168448$

8. இரகு ஒரு மடிக்கணினி வாங்க விரும்புகிறார். அவர் அதற்கான தொகையான ₹40,000-ஐ உடனடியாக பணமாகவும் செலுத்தலாம் அல்லது 10 மாதத் தவணைகளில் முதல் தவணை ₹4800, இரண்டாம் தவணை ₹4750, மூன்றாம் தவணை ₹4700 என்ற அடிப்படையிலும் செலுத்தலாம். அவர் இந்த வகையில் பணம் செலுத்துகிறார் எனில்,

(i) 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை

(ii) மாதத் தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும்போது அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

மடிகணினியின் விலை ₹40000.. இரகு செலுத்திய மாதத் தவணை முறையே

₹4800, ₹4750, ₹4700...

$ie, 4800 + 4750 + 4700 + \cdots$ ஒரு கூட்டுத்தொடர்

$a = 4800, d = t_2 - t_1 = 4750 - 4800 = -50$

$n = 10$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{10} = \frac{10}{2}[2(4800) + (10-1)(-50)]$

$= \frac{10}{2} \times 2[4800 + (9)(-25)]$

$= 10[4800 - 225]$

$= 10[4575]$

$S_{10} = 45750.$

$\therefore$ 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை ₹45750.

(ii) அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை $= 45750 - 4000$

$= ₹5750$

9. ஒருவர் தான் பெற்ற ₹65,000 கடனை திருப்பிச் செலுத்த முதல் மாதம் ₹400 செலுத்துகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் முந்தைய மாதம் செலுத்தியதைவிட ₹300 கூடுதலாகச் செலுத்துகிறார். அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க எவ்வளவு காலம் தேவைப்படும்?

ஒருவர் பெற்ற கடன் ₹65000. 1,2,3,… ஆகிய மாதங்களில் அவர் செலுத்திய பணம் முறையே ₹400, ₹700, ₹1000…

$ie, 400 + 700 + 1000 + \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசை

$a = 400, d = 300,$

$S_n = ₹65000.$

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 65000$$

$$\frac{n}{2}[2(400) + (n-1)300] = 65000$$

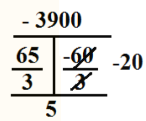
$$\frac{n}{2}(2)[400 + 150n - 150] = 65000$$

$$n[250 + 150n] = 65000$$

$$50[5n + 3n^2] = 65000$$

$$5n + 3n^2 = 1300$$

$$3n^2 + 5n - 1300 = 0$$



$$(3n + 65)(n - 20) = 0$$

$3n + 65 = 0$ அல்லது $n - 20 = 0$

$n = \frac{-65}{3}$ அல்லது $n = 20$ ($\because n = \frac{-65}{3}$ என்பது ஏற்புடையதல்ல)

$n = 20$

∴ அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க 20 மாதம் தேவைப்படும்.

10. செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் 30 படிகட்டுகள் உள்ளன. கீழ்ப் படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அடுத்தடுத்த படிக்கட்டுகள் அமைப்பதற்கு முந்தைய படிக்கட்டை விட இரண்டு செங்கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது.

(i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

(ii) படிகட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் 30 படிகட்டுகள் உள்ளன.

கீழ்ப் படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது.

1,2,3….30 படிகட்டுகளுக்கு தேவைப்படும் செங்கற்களின் எண்ணிக்கை முறையே 100,98,96,94 … $100 + 98 + 96 + 94 + \cdots 30$ படிகள் வரை . இது ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளது.

$a = 100, d = -2, n = 30.$

(i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு தேவையான செங்கற்கள் $= t_{30}$.

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{30} = 100 + (30-1)(-2)$$

$$= 100 + (29)(-2)$$

$$= 100 - 58$$

$$t_{30} = 42$$

∴ உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 42 செங்கற்கள் தேவை

(ii) $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_{30}=\frac{30}{2}[2(100)+(30-1)(-2)]$

$=\frac{30}{2}[200+(29)(-2)]$

$=\frac{30}{2}[200-58]$

$=\frac{30}{2}[142]$

$=30(71)$

$s_{30}=2130$

∴ படிகட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு 2130 செங்கற்கள் தேவை

11. **$S_1, S_2, S_3, \dots S_m$ என்பன m வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் n உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். முதல் உறுப்புகள் $1, 2, 3, \dots m$ மற்றும் பொது வித்தியாசங்கள் $1, 3, 5, \dots, (2m-1)$ முறையே அமைந்தால், அந்த கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $S_1+S_2+S_3+\dots+S_m=\frac{1}{2}mn(mn+1)$ என நிரூபிக்க.**

	முதல் உறுப்பு	பொது வித்தியாசம்
S_1	$a_1=1$	$d_1=1$
S_2	$a_2=2$	$d_2=3$
S_3	$a_3=3$	$d_3=5$
⋮		
S_m	$a_m=m$	$d_m=2m-1$

$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_1+S_2+S_3+\dots+S_m=\frac{n}{2}[2(a_1+a_2+a_3+\dots+a_m)+(n-1)(d_1+d_2+d_3+\dots+d_m)]$

$=\frac{n}{2}[2(1+2+3+\dots+m)+(n-1)(1+3+5+\dots 2m-1)]$

$S_1+S_2+S_3+\dots+S_m=\frac{n}{2}[(2+4+6+\dots+2m)+(n-1)(1+3+5+\dots+(2m-1))]$ .....(1)

$2+4+6+\dots+2m$ லிருந்து

$a=2, d=t_2-t_1=4-2=2, l=2m$ மற்றும் m உறுப்புகள்

$S_n=\frac{n}{2}[a+l]$

$2+4+6+\dots+2m=\frac{m}{2}(2+2m)$

$=\frac{m}{2}(2)(1+m)$

$2+4+6+\dots 2m=m(1+m)$ ....(2)

$1+3+5+\dots+(2m-1)$

$a=1, d=t_2-t_1=3-1=2, l=2m-1$ மற்றும் m உறுப்புகள்

$1+3+5+\dots+2m-1=\frac{m}{2}[1+2m-1]$ $\left(\because S_n=\frac{n}{2}(a+l)\right)$

$=\frac{m}{2}(2m)$

$=m^2$.............(3)

(2) & (3) ஆகியவற்றை (1) ல் பிரதியிட ⇒

$S_1+S_2+S_3+\dots+S_m=\frac{n}{2}[m(1+m)+(n-1)m^2]$

$$= \frac{n}{2}[m + m^2 + m^2 n - m^2]$$

$$= \frac{mn}{2}[1 + \cancel{m} + mn - \cancel{m}]$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m = \frac{mn}{2}[mn + 1]$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

12. $\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots 12 \text{ உறுப்புகள்}\right]$ **என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots$ 12 உறுப்புகள்

$a = \frac{a-b}{a+b}, n = 12$

$d = t_2 - t_1$

$= \frac{3a-2b}{a+b} - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

$= \frac{3a-2b-a+b}{a+b} = \frac{2a-b}{a+b}$

$d = \frac{2a-b}{a+b}$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + (12-1)\left(\frac{2a-b}{a+b}\right)\right]$

$= \frac{12}{2}\left[\frac{2a-2b}{a+b} + \frac{22a-11b}{a+b}\right]$

$= \frac{6}{a+b}[2a - 2b + 22a - 11b]$

$S_{12} = \frac{6}{a+b}[24a - 13b]$

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி

பெருக்குத்தொடர் வரிசை

வரையறை	முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரு பூச்சியமற்ற மாறாத எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடர்வரிசையானது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும். இந்த மாறாத எண் பொது விகிதம் எனப்படும். பொது விகிதம் வழக்கமாக r எனக் குறிக்கப்படும்.
பொது வடிவம்	$a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ இங்கு a என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் r என்பது பொது விகிதம்
பொது உறுப்பு	$t_n = a\,r^{n-1}$

☑ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதத்தை கருதினால் நாம் பெறுவது

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r \ ; \ \frac{t_3}{t_2} = \frac{ar^2}{ar} = r$$

$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{ar^3}{ar^2} = r \ ; \frac{t_5}{t_4} = \frac{ar^4}{ar^3} = r$$

ஆகவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் எப்போதும் ஒரு மாறிலியாகத்தான் இருக்கும். இந்த மாறிலிதான் அந்த தெடர்வரிசையின் பொது விகிதமாகும்.

☑ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

☑ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

☑ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

மூன்று எண்கள் பெருக்குத்தொடர்வரிசையில் அமைய நிபந்தனை

a, b, c என்ற எண்கள் பெருக்குத்தொடர்வரிசையில் அமையுமெனில், $b^2 = ac$

கூட்டுவட்டிக் கணக்குகளில் மொத்தத் தொகை காணும் சூத்திரம்

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

இங்கு, A என்பது மொத்த தொகை, P என்பது அசல், r என்பது வட்டி வீதம் மற்றும் என்பது ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை

பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?

(i) $3, 9, 27, 81, \ldots$ **(ii)** $4, 44, 444, 4444, \ldots$ **(iii)** $0.5, 0.05, 0.005, \ldots$ **(iv)** $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots.$

(v) $1, -5, 25, -125, \ldots$ **(vi)** $120, 60, 30, 18, \ldots$ **(vii)** $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$

(i) $3,9,27,81, \ldots$

$$a = 3, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{9}{3} = 3$$
$$r = \frac{t_3}{t_2} = \frac{27}{9} = 3$$
$$r = \frac{t_4}{t_3} = \frac{81}{27} = 3$$
$$\therefore \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = r$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.

(ii) $4,44,444,4444, \ldots$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{44}{4} = 11$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{444}{44} = \frac{111}{11}$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{4444}{444} = \frac{1111}{111}$$
$$\frac{t_2}{t_1} \neq \frac{t_3}{t_2} \neq \frac{t_4}{t_3}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசை அல்ல.

(iii) $0.5,0.05,0.005, \ldots$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{0.05}{0.5} \times \frac{100}{100} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$
$$r = \frac{t_3}{t_2} = \frac{0.005}{0.05} \times \frac{1000}{1000} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$
$$\therefore \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.

(iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots.$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{2}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.

(v) $1, -5, 25, -125, \ldots$

Given, sequence is,

$1, -5, 25, -125, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{-5}{1} = -5$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{25}{-5} = -5$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{-125}{25} = -5$$
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = -5$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.

(vi) $120,60,30,18, \ldots$

Given, $120,60,30,18, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} \neq \frac{t_4}{t_3}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசை அல்ல.

(vii) $16,4,1,\frac{1}{4}, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Padasalai TrbTnpsc

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{4}; \frac{t_4}{t_3} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3}$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) $a = 6, r = 3$ (ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$ (iii) $a = 1000, r = \frac{2}{5}$

(i) $a = 6, r = 3$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2

$= 6, 6(3), 6(3)^2$

$= 6, 18, 54$

(ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2

$= \sqrt{2}, \sqrt{2}(\sqrt{2}), \sqrt{2}\,(\sqrt{2})^2$

$= \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2}$.

(iii) $a = 1000, r = \frac{2}{5}$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2

$= 1000, 1000\left(\frac{2}{5}\right), 1000\left(\frac{2}{5}\right)^2$

$= 1000, 200(2), 1000\left(\frac{4}{25}\right)$

$= 1000, 400, 160$

3. $729, 243, 81, \dots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 7-வது உறுப்பைக் காண்க.

$729, 243, 81, \dots$ ஆகியன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

$a = 729$,

$r = \frac{243}{729} = \frac{1}{3}$,

$n = 7$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_7 = 729\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$

$= 729\left(\frac{1}{3}\right)^6$

$= 729\left(\frac{1}{729}\right)$

$t_7 = 1$

4. $x + 6, x + 12$ மற்றும் $x + 15$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில், x –யின் மதிப்பைக் காண்க.

$x + 6, x + 12, x + 15$ ஆகியன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$

$\frac{x+12}{x+6} = \frac{x+15}{x+12}$

$(x + 12)(x + 12) = (x + 15)(x + 6)$

$x^2 + 12x + 12x + 144 = x^2 + 6x + 15x + 90$

$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 21x + 90$

$x^2 + 24x - 21x + 144 - 90 - x^2 = 0$

$3x + 54 = 0$

$3x = -54$

$x = -18$

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) , $8, 16, \dots, 8192$? (ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{2187}$

(i) $4, 8, 16, \dots, 8192$?

கொடுக்கப்பட்ட பெருக்குத்தொடர்வரிசை $4, 8, 16, \dots, 8192$

$a = 4, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{8}{4} = 2, t_n = 8192$

$t_n = ar^{n-1}$

$8192 = 4(2)^{n-1}$

$\frac{8192}{4} = (2)^{n-1}$

$2048 = 2^{n-1}$

$2^{11} = 2^{n-1}$

$11 = n - 1$

$n = 12$

$t_{12} = 8192$

∴ 12 உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{2187}$

கொடுக்கப்பட்ட பெருக்குத்தொடர்வரிசை $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{2187}$

$a = \frac{1}{3}, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$

$t_n = \frac{1}{2187} \Rightarrow a\, r^{n-1} = \frac{1}{2187}$

$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2187}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2187} \times 3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{729}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6}$

$n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$

7 உறுப்புகள் உள்ளன.

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 9-வது உறுப்பு 32805 மற்றும் 6-வது உறுப்பு 1215 எனில், 12-வது உறுப்பைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது**:** $t_9 = 32805,\ t_6 = 1215$

t_{12} ஐ காண வேண்டும்.

$t_n = a(r)^{n-1}$

$t_9 = ar^{9-1} = 32805$

$ar^8 = 32805$ ………..(1)

$t_6 = ar^{6-1} = 1215$

$t_6 = ar^5 = 1215$…………….(2)

$\frac{t_9}{t_6} = \frac{ar^8}{ar^5} = \frac{32805}{1215}$

$r^3 = 27 \Rightarrow \quad r = 3$

$r = \mathbf{3}$ என (2) ல் பிரதியிட

$a(3)^5 = 1215$

$a = \frac{1215}{243}$

$a = 5$

$t_{12} = a\, r^{12-1}$

$t_{12} = 5(3^{11})$

7. ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் 8-வது உறுப்பு 768 மற்றும் பொது விகிதம் 2 எனில், அதன் 10-வது உறுப்பைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $t_8 = 768$ மற்றும் $r = 2$

$ar^{8-1} = 768$ $(\because t_n = ar^{n-1})$

$a(2)^7 = 768$ $(\because 2^7 = 128)$

$a = \frac{768}{128}$

$a = 6$

$t_{10} = ar^{10-1}$

$= 6(2)^9$

$= 6(512)$

$t_{10} = 3072$

8. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில் $3^a, 3^b, 3^c$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்டது: a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்

$2b = a + c$

3ன் அடுக்கில் இருபுறமும் எழுத

$3^{2b} = 3^{a+c}$

$(3^b)^2 = 3^a \times 3^c$ $[\because a^{mn} = (a^m)^n]$ $[a^{m+n} = a^m \times a^n]$

$b^2 = ac$

இங்கு $b = 3^b, a = 3^a, c = 3^c$

∴ மேலும் $3^a, 3^b, 3^c$ ஆகியவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளது.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 27 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கூடுதல் $\frac{57}{2}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

$\frac{a}{r}, a, ar$ ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் என்க.

$\frac{a}{r} \times a \times ar = 27$

$a^3 = 27$

$a = 3$

மேலும்,

$\frac{a}{r} \times a + a \times ar + ar \times \frac{a}{r} = \frac{57}{2}$

$a^2\left(\frac{1}{r} + r + 1\right) = \frac{57}{2}$

$(3)^2\left(\frac{1+r^2+r}{r}\right) = \frac{57}{2}$

$2\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}$

$6[r^2 + r + 1] = 19r$

$6r^2 + 6r - 19r + 6 = 0$

$6r^2 - 13r + 6 = 0$

$\left(r - \frac{3}{2}\right)\left(r - \frac{2}{3}\right) = 0$

$r = \frac{3}{2}, r = \frac{2}{3}$

இங்கு $a = 3, r = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{3/2}, 3, 3\left(\frac{3}{2}\right)$

$2, 3, \frac{9}{2}$

இங்கு $a = 3, r = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{2/3}, 3, 3\left(\frac{2}{3}\right)$

$\frac{9}{2}, 3, 2$

∴ மூன்று உறுப்புகள்

$\frac{9}{2}, 3, 2,$ (அ) $2, 3, \frac{9}{2}$

10. ஒரு நபர் ஒரு நிறுவனத்தில் துணை மேலாளராகப் பணியில் சேர்கிறார். அவருக்கு அந்நிறுவனம் முதல் மாத ஊதியமாக ₹60,000 வழங்குகிறது மற்றும் ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5% வழங்குவதாக ஒப்புக்கொள்கிறது. 5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் எவ்வளவு?

அந்த நபரின் முதல் மாத ஊதியம் ₹ 60,000. ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5%

P = 60000 , $r = 5\%, n = 5$ years

$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$= 60000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^5$

$= 60000\left(\frac{21}{20}\right)^5$

$= 60000\left(\frac{21\times21\times21\times21\times21}{20\times20\times20\times20\times20}\right)$

$= \frac{12252303}{160}$

$= 76576.89$

$A =$ ₹ 76577

5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் ₹ 76577

11. சிவமணி ஒரு பணிக்கான நேர்காணலில் பங்கேற்கிறார். அந்நிறுவனம் அவருக்கு இரண்டு விதமான வாய்ப்புகளை வழங்குகிறது.

வாய்ப்பு A: முதல் மாத ஊதியம் ₹20,000 மற்றும் நிச்சயமான 6% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.

வாய்ப்பு B: முதல் மாத ஊதியம் ₹22,000 மற்றும் நிச்சயமான 3% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.

A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4-வது வருட ஊதியம் எவ்வளவு?

A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4-வது வருட ஊதியம் காண வேண்டும். அதாவது t_4ஐக் காண வேண்டும்.

வாய்ப்பு – A

முதல் மாத ஊதியம் ₹20,000 மற்றும் நிச்சயமான 6% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.

முதல் வருட ஊதியம் $= ₹\ 20000$

2ம் வருட ஊதியம் $= 20000 + 20000\left(\frac{6}{10}\right)$

$= 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)$

3ம் வருட ஊதியம் $= 20000\left(1+\frac{6}{100}\right) + 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)\left(\frac{6}{100}\right)$

$= 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)$

$= 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)^2$

இதே போல் தொடர, ஊதியமானது

$20000, 20000\left(1+\frac{6}{100}\right), 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)^2$ இது ஒரு பெருக்குத்தொடராகும்.

$a = 20000, r = 1+\frac{6}{100}$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_4 = 20000\left(1+\frac{6}{100}\right)^{4-1} = 20000\left(\frac{106}{100}\right)^3$

$= 20000\left(\frac{53}{50}\right)^3$

$= 20000 \times \frac{53\times53\times53}{50\times50\times50}$

$= \frac{4\times53\times53\times53}{25}$

$= \frac{595508}{25}$

$t_4 = ₹\ 23820.32$

வாய்ப்பு B:

இதே போல், 1,2,3,.. ஆண்டுகளின் ஊதியம்

$22000, 22000\left(1+\frac{3}{100}\right), 22000\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$ இது ஒரு பெருக்குத்தொடராகும்.

$a = 22000, r = 1+\frac{3}{100}, n = 4$ வருடங்கள்

$t_n = ar^{n-1}$

$t_4 = 22000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{4-1}$

$= 22000\left(\frac{103}{100}\right)^3 = 22000\left(\frac{103\times103\times103}{100\times100\times100}\right)$

$= \frac{11\times103\times103\times103}{500}$

$= \frac{1201997}{500}$

$t_4 =$ ₹ 24039.994

A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4-வது வருட ஊதியம் காண வேண்டும். அதாவது t_4ஐக் காண வேண்டும். சிவமணியின் 4 வருட ஊதியம் வாய்ப்பு A ல் ₹ 23820, மற்றும் வாய்ப்பு B ல் ₹ 24040

12. **a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் மற்றும் x, y, z என்பன ஒரு பெருக்கு தொடர்வரிசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில் $x^{b-c}\times y^{c-a}\times z^{a-b} = 1$ என நிறுவுக.**

கொடுக்கப்பட்டது:

a, b, c ஆகியன ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன

$\Rightarrow 2b = a + c$

x, y, z ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

$y^2 = xz$

$y = \sqrt{xz}$

நிறுவ வேண்டியது: $x^{b-c}\times y^{c-a}\times z^{a-b} = 1$

LHS : $x^{b-c}\times y^{c-a}\times z^{a-b}$

$= x^{b-c}\times(\sqrt{xz})^{c-a}\times z^{a-b}$

$= x^{b-c}\times(xz)^{\frac{1}{2}(c-a)}\times z^{a-b}$

$= x^{b-c}\times(xz)^{\frac{c-a}{2}}\times z^{a-b}$

$= x^{b-c}\times(x)^{\frac{c-a}{2}}\times(z)^{\frac{c-a}{2}}\times z^{a-b}$

$= x^{b-c+\frac{c-a}{2}}\times z^{a-b+\frac{c-a}{2}}$ $(\because a^m\times a^n = a^{m+n})$

$= x^{\frac{2b-2c+c-a}{2}} z^{\frac{c-a+2a-2b}{2}}$

$= x^{\frac{2b-c-a}{2}} z^{\frac{c+a-2b}{2}}$

$= x^{\frac{2b-(a+c)}{2}} z^{\frac{(c+a)-2b}{2}}$

$2b = a + c$ என பிரதியிட

$= x^{\frac{2b-2b}{2}} z^{\frac{2b-2b}{2}}$

$= x^0 z^0$ $[\because a^0 = 1]$

LHS : 1

$x^{b-c}\times y^{c-a}\times z^{a-b} = 1$

எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.8)

பெருக்குத்தொடர்: ஒரு தொடரில் உள்ள அனைத்தும் பெருக்குத்தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் அந்த தொடர் பெருக்குத்தொடர் எனப்படும்.

பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$

$r \neq 1, r > 1$	$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$
$r = 1$	$S_n = a + a + a + \cdots + a$ $S_n = na$
$r < 1$	$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$

பயற்சி 2.8

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

(i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, ...$ (ii) $256, 64, 16, ...$

(i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, ...$

கொடுக்கப்பட்டது: $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, ...$

$a = 5, r = \frac{t_2}{t_1} = -\frac{3}{5}, r < 1$

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$= 5\left(\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}\right) = 5\left(\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{5+3}{5}}\right) = 5 \times \frac{5}{8}\left(1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$

$S_n = \frac{25}{8}\left(1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$

(ii) $256, 64, 16, ...$

கொடுக்கப்பட்டது: $256, 64, 16, ...$

$a = 256, r = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$ Here $r < 1$

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$S_n = 256\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = 256\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{4-1}{4}}\right) = 256 \times \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$S_n = \frac{1024}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

2. 5, 15, 45,… என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $5, 15, 45, ...$

$a = 5, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{15}{5} = 3$

S_6 ஐ காண வேண்டும்.

$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right), r > 1$

$S_6 = 5\left(\frac{3^6-1}{3-1}\right)$

$= 5\left(\frac{729-1}{2}\right)$

$= 5\left(\frac{728}{2}\right)$

$= 5(364)$

$S_6 = 1820$

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் 5 மற்றும் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் 46872 எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது:

$r = 5$ மற்றும் $S_6 = 46872$

$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right), r > 1$

$S_6 = a\left[\frac{5^6-1}{5-1}\right]$

$46872 = a\left[\frac{15625-1}{4}\right]$

$46872 = a\left(\frac{15624}{4}\right)$

$46872 = a(3906)$

$a = \frac{46872}{3906}$

$a = 12$

4. பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.

(i) $9+3+1+\cdots$ (ii) $21+14+\frac{28}{3}+\cdots$

(i) $9+3+1+\cdots$

கொடுக்கப்பட்ட முடிவுறா தொடர் $9+3+1+\cdots$

$S_n=\frac{a}{1-r}, -1<r<1$

$a=9, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{3}{9}$

$S_n=\frac{9}{1-\frac{3}{9}}=\frac{9}{\frac{9-3}{9}}=9\times\frac{9}{6}=\frac{27}{2}$

(ii) $21+14+\frac{28}{3}+\cdots$

கொடுக்கப்பட்ட முடிவுறா தொடர் $21+14+\frac{28}{3}+\cdots$

$a=21, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

$S_n=\frac{a}{1-r}, -1<r<1$

$=\frac{21}{1-\frac{2}{3}}=\frac{21}{\frac{3-2}{3}}=21\times\frac{3}{1}$

$S_n=63$

5. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 8 மற்றும் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $\frac{32}{3}$ எனில் அதன் பொது விகிதம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடர்

முதல் உறுப்பு $a=8$

$S_n=\frac{32}{3}$

r ஐக் காண வேண்டும்.

$S_n=\frac{a}{1-r}, -1<r<1$

$\frac{32}{3}=\frac{8}{1-r}$

$1-r=8\times\frac{3}{32}$

$-r=\frac{3}{4}-1$

$-r=\frac{3-4}{4}$

$-r=-\frac{1}{4}$

$r=\frac{1}{4}$

6. பின்வரும் தொடர்களின் n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

(i) $0.4+0.44+0.444+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $0.4+0.44+0.444+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை

$=4(0.1+0.11+0.111+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $)$

9 ஆல் பெருக்கி வகுக்க,

$=\frac{4}{9}[0.9+0.99+0.999+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை$]$

$= \frac{4}{9}[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\cdots+ n$ உறுப்புகள் வரை $]$

$= \frac{4}{9}[(1+1+\cdots+ n$ உறுப்புகள் வரை $) - (0.1+0.01+0.001+\cdots+ n$ உறுப்புகள் வரை$)]$

$= \frac{4}{9}\left[(1+1+\cdots+ n\right.$ உறுப்புகள் வரை $) - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+ n\right.$ உறுப்புகள் வரை$\left.\left.\right)\right]$

$a=1, r=\frac{t_2}{t_1}=1$ $S_n = na$ $1+1+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $= n(1) = n$	$a=\frac{1}{10}, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{100}\times\frac{10}{1}=\frac{1}{10}$ $r=\frac{1}{10}$ $S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right), r<1$ $=\frac{1}{10}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\right]$$

$$S_n = \frac{4n}{9} - \frac{4}{81}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

(ii) $3+33+333+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $3+33+333+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை

$= 3(1+11+111+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை$)$

9 ஆல் பெருக்கி வகுக்க,

$= \frac{3}{9}(9+99+999+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை$)$

$= \frac{3}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை$)]$

$= \frac{3}{9}[(10+100+1000+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $) - (1+1+1+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $)]$

$a=10, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{100}{10}=10$ $S_n = a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right] = 10\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$	$a=1, r=1$ $S_n = na, r=1$ $S_n = n(1) = n$

$$S_n = \frac{3}{9}\left[10\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) - n\right]$$

$$= \frac{10}{3}\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) - \frac{n}{3}$$

$$S_n = \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}$$

Padasalai TrbTnpsc

7. $3+6+12+\cdots+1536$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட பெருக்குத் தொடர் $3+6+12+\cdots+1536$

$a=3, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{6}{3}=2\,, l=1536$

$t_n=ar^{n-1}$

$1536=3(2)^{n-1}$

$\frac{1536}{3}=2^{n-1}$

$512=2^{n-1}$

$2^9=2^{n-1}$

$9=n-1$

$n=10$

$S_n=a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], r>1$

$S_{10}=3\left[\frac{2^{10}-1}{2-1}\right]$

$S_{10}=3(1024-1)$

$=3(1023)$

$=3069$

8. குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார். இந்தச் செயல்முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுகின்றது. ஒரு கடிதத்தற்கான செலவு ₹2 எனில் 8 நிலைகள் வரை கடிதங்கள் அனுப்புவதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது, குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார்.

$4+16+64+\cdots$ இது ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையில் அமைகிறது.

$a=4, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{16}{4}=4\,,\ n=8$

$S_n=a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right]\,, r>1$

$S_8=4\left[\frac{(4)^8-1}{4-1}\right]$

$=4\left[\frac{65536-1}{3}\right]$

$=4\left[\frac{65535}{3}\right]=4[21845]$

$=87380$

∴8 நிலைகள் வரை 87380 கடிதங்களை அனுப்பவேண்டும்.

ஒரு கடிதத்தற்கான செலவு ₹2

மொத்த செலவு $=2\times 87380=$ ₹ 174760

9. $0.\overline{123}$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.

$0.\overline{123}=0.123123123\ldots$

$=0.123+0.000123+0.000000123+\cdots$

$=\frac{123}{1000}+\frac{123}{1000000}+\frac{123}{1000000000}+\cdots$

$=\frac{123}{1000}\left[1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000000}+\cdots\right]$

$1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000000}+\cdots$ ஒரு முடிவுறாத் தொடராகும்.

$S_n=\frac{a}{1-r}\,, a=1, r=\frac{1}{1000}$

$0.\overline{123}=\frac{123}{1000}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}\right]$

$=\frac{123}{1000}\left[\frac{1}{\frac{1000-1}{1000}}\right]$

$=\frac{123}{1000}\left(\frac{1000}{999}\right)$

$=\frac{123}{999}$

$0.\overline{123}=\frac{41}{333}$

10. $S_n = (x+y) + (x^2+xy+y^2) + (x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots n$ உறுப்புகள் வரை எனில் $(x-y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} - \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்டது : $S_n = (x+y) + (x^2+xy+y^2) + (x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots + n$ உறுப்புகள் வரை

$(x-y)$ ஆல் பெருக்கி வகுக்க,

$S_n = \frac{1}{x-y}[(x-y)(x+y) + (x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \cdots + n$

$= \frac{1}{x-y}[(x^2-y^2) + (x^3-y^3) + (x^4-y^4) + \cdots + n$ உறுப்புகள் வரை]

$S_n = \frac{1}{x-y}[(x^2+x^3+x^4+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $) - (y^2+y^3+y^4+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $)]$

$(x-y)S_n = [x^2(1+x+x^2+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $) - y^2(1+y^2+y^3+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை$)]$

$1+x+x^2+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $= 1\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$ $\left(\because S_n = a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right]\right)$

இங்கு $a = 1, r = \frac{x}{1} = x$

$1+y+y^2+\cdots+n$ ஆகியவை பெருக்குத்தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

$a = 1, r = \frac{y}{1} = y$

$1+y+y^2+\cdots+n = 1\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right)$

$(x-y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} - \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$

எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

நினைவில் கொள்ள…(பயிற்சி 2.9)

சிறப்புத் தொடர்கள்: சில தொடர்களின் கூடுதலை தனித்த சூத்திரங்கள் மூலம் காணலாம். இத்தகைய தொடர்களைச் சிறப்புத் தொடர்கள் என்கிறோம்.

முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்	$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$
முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

பயிற்சி 2.9

1. **பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.**

(i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$
(iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$
(iv) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$

(i) $1+2+3+\cdots+60$

கொடுக்கப்பட்டது $1+2+3+\cdots+60$, இங்கு $n = 60$

$1+2+3+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1+2+3+\cdots+60 = \frac{60(60+1)}{2}$

$= 30(61)$

$= 1830$

(ii) $3+6+9+\cdots+96$

கொடுக்கப்பட்டது:

$3+6+9+\cdots+96 = 3(1+2+3+\cdots+32)$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, இங்கு $n = 32$

$= 3 \times \frac{32(32+1)}{2}$

$= 3 \times 16 \times 33$

$= 1584$

(iii) $51+52+53+..+92$

கொடுக்கப்பட்டது: $51+52+53+\cdots+92$

$= (1+2+3+\cdots+92) - (1+2+3+\cdots+50)$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{92(92+1)}{2} - \frac{50(50+1)}{2}$

$= 46(93) - 25(51)$

$= 4278 - 1275$

$= 3003$

(iv) $1+4+9+16+\cdots+225$

கொடுக்கப்பட்டது: $1+4+9+16+\cdots+225$

$= 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+15^2$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

இங்கு, $n = 15$

$= \frac{15(15+1)(2\times15+1)}{6}$

$= \frac{5(16)(31)}{2}$

$= 1240$

(v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

கொடுக்கப்பட்டது: $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2) - (1^2+2^2+\cdots+5^2)$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{21(21+1)(2\times21+1)}{6} - \frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6}$

$= \frac{7(22)(43)}{2} - 5(11)$

$= 3311 - 55$

$= 3256$

(iv) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$

கொடுக்கப்பட்டது: $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$

$= (1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3) - (1^3+2^3+\cdots+9^3)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$= \left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{9(9+1)}{2}\right]^2$

$= \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 - \left[\frac{9(10)}{2}\right]^2$

$= [10(21)]^2 - [9(5)]^2$

$= (210)^2 - (45)^2$

$= 44100 - 2025$

$= 42075$

(vii) $1+3+5+\cdots+71$

கொடுக்கப்பட்டது: $1+3+5+\cdots+71$

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்$= n^2$

$a = 1, d = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2, l = 71$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{71-1}{2} + 1$

$= \frac{70}{2} + 1 = 35 + 1$

$n = 36$

$S_n = n^2$

$S_{36} = (36)^2 = 1296$

2. **$1+2+3+\cdots+k = 325$, எனில் $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ யின் மதிப்பு காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது: $1+2+3+\cdots+k = 325$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} = 325$

$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 = (325)^2$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3 = 105625$

3. **$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$ எனில், $1+2+3+4+\cdots+k$ யின் மதிப்பு காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது: $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2=44100$$

$$\frac{k(k+1)}{2}=\sqrt{44100}$$

$$1+2+3+4+\cdots+k=\sqrt{210^2}=210$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

4. **$1^3+2^3+3^3+\cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 14400 கிடைக்கும்?**

கொடுக்கப்பட்டது:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=14400$$

n ஐக் காண வேண்டும்.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=14400$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=14400$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\sqrt{14400}$$

$$n^2+n=2\left(\sqrt{120^2}\right)$$

$$n^2+n=240$$

$$n^2+n-240=0$$

$$(n+16)(n-15)=0$$

$n=-16$ அல்லது $n=15$

$n=-16$ என்பது ஏற்புடையதல்ல

$\therefore n=15$

5. **முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 285 மற்றும் முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் 2025 எனில் n –யின் மதிப்பு காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது:

முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=2025$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=2025$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\sqrt{2025}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=45 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=285$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=285$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\times 3}=285$$

(1) ஐப் பிரதியிட

$$45\left(\frac{2n+1}{3}\right)=285$$

$$15(2n+1)=285$$

$$2n+1=\frac{285}{15}$$

$$2n+1=19$$

$$2n=19-1$$

$$2n=18$$

$$n=9$$

6. **ரேகாவிடம் 10 செ.மீ, 11 செ.மீ, 12 செ.மீ,…,24 செ.மீ என்ற பக்க அளவுள்ள 15 சதுர வடிவ வண்ணக் காகிதங்கள் உள்ளன. இந்த வண்ணக் காகிதங்களைக் கொண்டு எவ்வளவு பரப்பை அடைத்து அலங்கரிக்க முடியும்?**

சதுரத்தின் பரப்பளவு $=a^2$

வண்ணக் காகிதங்களால் அலங்கரிக்கப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு $=10^2+11^2+12^2+\cdots+24^2$

$$=(1^2+2^2+\cdots+24^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)$$

$= \frac{24(24+1)(24\times2+1)}{6} - \frac{9(9+1)(2\times9+1)}{6}$

$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 4(25)(49) - 3(5)(19)$

$= 4900 - 285$

$= 4615$ செ.மீ^{2}

7. $\mathbf{(2^3-1)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\cdots}$ **என்ற தொடர்வரிசையின்**

(i) n உறுப்புகள் வரை (ii) 8 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $(2^3-1)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\cdots$

(i) n உறுப்புகள் வரை

$(2^3-1)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை

$= (2^3+4^3+6^3+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை$) - (1^3+3^3+5^3+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை$)$

$= 2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n\ terms)$

$-[(1^3+2^3+3^3+\cdots+2n$ உறுப்புகள் வரை$) - (2^3+4^3+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை$)]$

$= 2^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 - 2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n\right.$ உறுப்புகள் வரை $\left.)\right]$

$= 2^3\left(\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}\right) - \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{2^2} + 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$= 8\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) - \frac{4n^2(2n+1)^2}{4} + 8\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$

$= 16\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) - n^2[(2n)^2 + 2(2n)(1) + (1)^2]$

$= 4n^2(n^2+2n+1) - \left(n^2(4n^2+4n+1)\right)$

$= 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 - 4n^4 - 4n^3 - n^2$

$= 8n^3 - 4n^3 + 4n^2 - n^2$

$S_n = 4n^3 + 3n^2$

(ii) 8 உறுப்புகள் வரை

$S_n = 4n^3 + 3n^2$

$S_n = 4(8)^3 + 3(8)^2$

$= 4(512) + 3(64)$

$= 2048 + 192$

$= 2240$

பயிற்சி 2.10

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி a மற்றும் b என்ற மிகை முழுக்களுக்கு, தனித்த மிகை முழுக்கள் q மற்றும் r, $a = bq + r$ என்றவாறு அமையுமானால், இங்கு r ஆனது
(1) $1 < r < b$ (2) $0 < r < b$ **(3) $0 \le r < b$** (4) $0 < r \le b$

2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, எந்த மிகை முழுவின் கனத்தையும் 9 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள்
(1) 0, 1, 8 (2) 1, 4, 8 (3) 0, 1, 3 (4) 1, 3, 5

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \qquad 0 \le r < b$

$1^3 = 9(0) + 1 \qquad 2^3 = 9(0) + 8$

$3^3 = 9(3) + 0 \qquad 4^3 = 9(7) + 1$

$5^3 = 9(13) + 8$

எனவே, மீதியானது 0,1,8

3. 65 மற்றும் 117 –யின் மீ.பொ.வ –வை $65m - 117$ என்ற வடிவில் எழுதும்போது, m –யின் மதிப்பு

(1) 4 **(2) 2** (3) 1 (4) 3

65 மற்றும் 117 –யின் மீ.பொ.வ 13.

$65m - 117 = 13$

$65m = 13 + 117$

$m = \frac{130}{65}$

$m = 2$

1
65 | 117
65 1
52 | 65
52 4
13 | 52
52
0

4. 1729 –ஐ பகாக் காரணிப்படுத்தும் போது, அந்தப் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் கூடுதல்

(1)1 (2) 2 **(3) 3** (4) 4

1729 –ஐ பகாக் காரணிப்படுத்த $= 7^1 \times 13^1 \times 19^1$

பகா எண்களின் அடுக்குகளின் கூடுதல் $= 1 + 1 + 1 = 3$

7 | 1729
13 | 247
19

5. 1 முதல் 10 வரையுள்ள (இரண்டு எண்களும் உட்பட) அனைத்து எண்களாலும் வகுபடும் மிகச்சிறிய எண்

(1)2025 (2)5220 (3) 5025 **(4) 2520**

1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்களுக்கு மீ.பொ.ம

$= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$= 8 \times 9 \times 35$

$= 2520$

∴ மிகச்சிறிய எண் 2520

2 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
3 | 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5
5 | 1, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 4, 3, 5
2 | 1, 1, 1, 2, 1, 1, 7, 4, 3, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1, 7, 2, 3, 1

6. $7^{4k} \equiv$ _____ (மட்டு 100)

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

$7^4 = 2401$

$2401 \equiv 1$ (மட்டு 100)

$7^4 \equiv 1$(மட்டு 100)

$(7^4)^k \equiv 1^k$(மட்டு 100)

$7^{4k} \equiv 1$(மட்டு 100)

7. $F_1 = 1, F_2 = 3$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ எனக் கொடுக்கப்படின் F_5 ஆனது

(1)3 (2)5 (3) 8 **(4)11**

$F_1 = 1, F_2 = 3$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$n = 3 \Rightarrow F_3 = F_2 + F_1 = 3 + 1 = 4$

$n = 4 \Rightarrow F_4 = F_3 + F_2 = 4 + 3 = 7$

$n = 5 \Rightarrow F_5 = F_4 + F_3 = 7 + 4 = 11$

Padasalai TrbTnpsc

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4 எனில், பின்வரும் எண்களில் எது இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்?

(1) 4551 (2) 10091 **(3) 7881** (4) 13531

முதல் உறுப்பு =1, பொது வித்தியாசம் $d = 4$

$t_n = a + (n-1)d$

$t_n = 1 + (n-1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$

$t_n + 3 = 4n$

$t_n + 3$ ஆனது 4ன் மடங்காகும்

$\therefore 7881 + 3 = 7884$ ஆனது 4ன் மடங்காகும்

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6வது உறுப்பின் 6 மடங்கும் 7வது உறுப்பின் 7 மடங்கும் சமம் எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13-வது உறுப்பு

(1) 0 (2) 6 (3) 7 (4) 13

$6t_6 = 7t_7$

$6(a+5d) = 7(a+6d)$

$6a + 30d = 7a + 42d$

$7a - 6a + 42d - 30d = 0$

$a + 12d = 0$

$a + (13-1)d = 0$

$t_{13} = 0$

10. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 31 உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் 16-வது உறுப்பு m எனில், அந்த கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்.

(1)16m (2) 62m **(3) 31m** (4) $\frac{31}{2}$ m

$n = 31$ மற்றும் $t_{16} = m$

$t_{16} = m = a + (16-1)d$ $\qquad t_n = a + (n-1)d$

$m = a + 15d$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{31} = \frac{31}{2}[2a + (31-1)d]$

$= \frac{31}{2}[2a + 30d]$

$= \frac{31}{2}(2)[a + 15d]$……….(1)

$m = a + 15d$ ஐ (1) ல் பிரதியிட

$S_{31} = 31m$

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4. இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் அதன் கூடுதல் 120 கிடைக்கும்?

(1) 6 (2) 7 **(3) 8** (4) 9

$a = 1, d = 4$

$S_n = 120$

$\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 120$

$\frac{n}{2}[2(1)+(n-1)4] = 120$

$\frac{n}{2}[2+4n-4] = 120$

$n(4n-2) = 120 \times 2$

$4n^2 - 2n - 240 = 0$

2 ஆல் வகுக்க $2n^2 - n - 120 = 0$

$(2n+15)(n-8) = 0$

$n = -\frac{15}{2}$ ஏற்புடையதல்ல $n = 8$

12. $A = 2^{65}$ மற்றும் $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \cdots + 2^0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றில் எது உண்மை?

(1) B ஆனது A ஐ விட 2^{64} (2) A மற்றும் B சமம்

(3) B ஆனது A –ஐ விட 1 அதிகம் **(4) A ஆனது B –ஐ விட 1 அதிகம்**

$A = 2^{65}$ மற்றும் $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \cdots + 2^0$

B யிலிருந்து, $a = 2^{64}, r = \frac{2^{63}}{2^{64}} = \frac{1}{2}, n = 65$

$S_n = a\left[\frac{1-r^n}{1-r}\right] = 2^{64}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{65}}{1-\frac{1}{2}}\right] = 2^{64}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{65}}{\frac{1}{2}}\right] = 2^{64}\left[\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{65}\right) \times \frac{2}{1}\right]$

$= 2^{64} \times 2\left[\left(1 - \frac{1}{2^{65}}\right)\right]$

$= 2^{65}\left[\left(\frac{2^{65}-1}{2^{65}}\right)\right] = 2^{65} - 1$

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் அடுத்த உறுப்பு

(1) $\frac{1}{24}$ **(2) $\frac{1}{27}$** (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{81}$

கொடுக்கப்பட்டது: $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \ldots$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{8} \times \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{12} \times \frac{8}{1} = \frac{2}{3}$

$\frac{t_4}{t_3} = \frac{1}{18} \times \frac{12}{1} = \frac{2}{3}$

அடுத்த உறுப்பு $= \frac{1}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

14. $t_1, t_2, t_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில், $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ என்பது

(1) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(2) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(3) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையுமல்ல, பெருக்குத் தொடர்வரிசையுமல்ல

(4) ஒரு மாறிலித் தொடர் வரிசை

$t_n = a + (n-1)d$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை
$t_{12} - t_6 = (a+11d) - (a+5d) = a + 11d - a - 5d = 6d$
$t_{18} - t_{12} = (a+17d) - (a+11d) = a + 17d - a - 11d = 6d$
$\therefore t_6, t_{12}, t_{18}$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ யின் மதிப்பு
(1) 14400 (2) 14200 **(3) 14280** (4) 14520

கொடுக்கப்பட்டது, $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \text{மற்றும்} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$= \left[\frac{15(16)}{2}\right]^2 - \left[\frac{15(16)}{2}\right]$
$= [15(8)]^2 - 15(8)$
$= 120^2 - 120$
$= 14400 - 120$
$= 14280$

அலகுப் பயிற்சி - 2

1. **எல்லா மிகை முழுக்கள் n –க்கும் $n^2 - n$ ஆனது 2 –ஆல் வகுப்படும் என நிறுவுக.**

$2k$ மற்றும் $2k+1$ ஆகியன மிகை முழுக்கள் என்க
கொடுக்கப்பட்டது, $n^2 - n$
$2k$ (இரட்டை எண்)
$= (2k)^2 - (2k) = 4k^2 - 2k = 2k(2k-1)$
இது 2 ன் மடங்காகும். எனவே இது 2 ஆல் வகுபடும்.
$2k+1$ (ஒற்றை எண்)
$= (2k+1)^2 - (2k+1)$
$= 4k^2 + 2(2k)(1) + 1^2 - 2k - 1$
$= 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1$
$= 4k^2 + 4k - 2k$
$= 4k^2 + 2k$
$= 2(2k^2 + k)$
இது 2 ன் மடங்காகும். எனவே இது 2 ஆல் வகுபடும்.
$n^2 - n$ ஆனது 2 ஆல் வகுபடும்.
எனவே நிறுவப்பட்டது.

2. **ஒரு பால்காரரிடம் 175 லிட்டர் பசும் பாலும் 105 லிட்டர் எருமைப்பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார். (i) இவ்வாறு விற்பதற்குத் தேவைப்படும் கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு எவ்வளவு? இவ்வாறாக (ii) எத்தனை கலன் பசும்பால் மற்றும் (iii) எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்?**

Padasalai TrbTnpsc

ஒரு பால்காரரிடம் 175 லிட்டர் பசும் பாலும் 105 லிட்டர் எருமைப்பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார்.

175, 105 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 35

5	175, 105
7	35, 21
	5, 3

(i) சம அளவு கொண்ட கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு=35 லிட்டர்

(ii) பசும்பால்

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

$175 = 35(5) + 0$

(35) 175 (5; 175; 0)

∴ 5 கலன் பசும்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்.

(iii) எருமைப்பால்

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$105 = 35(3) + 0$

(35) 105 (3; 105; 0)

∴ 3 கலன் எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்.

3. **a, b, c என்ற எண்களை 13 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7 மற்றும் 10. $a + 2b + 3c$ ஐ 13-ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.**

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

$a = 13q_1 + 9, \quad b = 13q_2 + 7, \quad c = 13q_3 + 10$

$a + 2b + 3c = 13q_1 + 9 + 2(13q_2 + 7) + 3(13q_3 + 10)$

$= 13q_1 + 9 + 26q_2 + 14 + 39q_3 + 30$

$= 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3) + 9 + 14 + 30$

$= 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3) + 53 \qquad (\because 53 = 52 + 1)$

$a + 2b + 3c = 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4) + 1$

$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4$ ஒரு முழுக்கள்

∴ மீதி **1.**

4. **107 ஆனது $4q+3$, q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என்ற வடிவில் அமையும் என நிறுவுக.**

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b$

$107 = 4q + 3$

$104 = 4q$

$26 = q$

∴ $4(26) + 3 = 107$ ஆனது $4q + 3$ என்ற வடிவில் அமைகிறது.

5. **ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $(m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு எனில், $(3m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(m+n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.**

கொடுக்கப்பட்டது: $t_{m+1} = 2t_{n+1} \qquad (\because t_n = a + (n-1)d)$

$a + (m + 1 - 1)d = 2[a + (n + 1 - 1)d]$

$a + md = 2(a + nd)$

$a + md = 2a + 2nd$

$2a - a + 2nd - md = 0$

$a + 2nd - md = 0$

$a = md - 2nd$

நிறுவ வேண்டியது

$t_{(3m+1)} = 2t_{(m+n+1)}$ $(\because t_n = a + (n-1)d)$

$t_{m+n+1} = a + (m + n + 1 - 1)d$ ....(1)

$a = md - 2nd$ ன் மதிப்பை (1)ல் பிரதியிட

$t_{m+n+1} = md - 2nd + md + nd$

$t_{m+n+1} = 2md - nd$ ....(1)

$t_{3m+1} = a + (3m + 1 - 1)d$

$= a + 3md$ ....(2)

$a = md - 2nd$ ன் மதிப்பை (2)ல் பிரதியிட

$t_{3m+1} = md - 2nd + 3md$

$= 4md - 2nd$

$= 2(2md - nd)$

$t_{3m+1} = 2t_{m+n+1}$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. **$-2, -4, -6, \dots. -100$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12வது உறுப்பைக் காண்க.**

இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12வது உறுப்பைக் காண வேண்டும்

கூட்டுத்தொடர் வரிசையை பின் இருந்து எழுத

$-100, -98, -96, \dots. -2$

எனவே, $a = -100, d = t_2 - t_1 = -98 - (-100) = -98 + 100 = 2$

$n = 12$

$t_{12} = -100 + (12 - 1)2$ $(\because t_n = a + (n-1)d)$

$= -100 + 11(2)$

$= -100 + 22$

$t_{12} = -78$

7. **இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொதுவித்தியாசம் கொண்டுள்ளன. ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 2 மற்றும் மற்றொரு தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 7. இரு தொடர்வரிசைகளின் 10வது உறுப்புளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம், 21-வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என நிருபித்து உள்ளது. இந்த வித்தியாசம் அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமமாக உள்ளது என நிறுவுக.**

இரண்டு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளில், a_1, a_2 என்பன முதல் உறுப்புகள் மற்றும் d என்பது பொது வித்தியாசம்

$a_1 = 2, a_2 = 7$

இரண்டு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளும் ஒரே பொது வித்தியாசம் கொண்டுள்ளதால்,

$t_n = a + (n-1)d$

முதல் கூட்டுத்தொடர் வரிசை

10 ஆவது உறுப்பு $= t_{10} = a_1 + (10-1)d$

$t_{10} = 2 + 9d$

21 ஆவது உறுப்பு $= t_{21} = 2 + 20d$

இரண்டாவது கூட்டுத்தொடர் வரிசை

21 ஆவது உறுப்பு $= t_{21} = a_2 + (21-1)d$

$t_{21} = 7 + 20d$

10 ஆவது உறுப்பு $t_{10} = 7 + 9d$

10 ஆவது உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம்

= 2ஆவது கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 ஆவது உறுப்பு
− முதல் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 ஆவது உறுப்பு

$= 7 + 9d - (2 + 9d)$

$= 7 + 9d - 2 - 9d$

$= 5$ ……………..(1)

21 ஆவது உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம்

= 2ஆவது கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 21 ஆவது உறுப்பு
− முதல் கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 21 ஆவது உறுப்பு

$= 7 + 20d - (2 + 20d)$

$= 7 + 20d - 2 - 20d$

$= 5$ ………………..(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, 10ஆவது மற்றும் 21ஆவது உறுப்புகள் சமமாகும்

இரு கூட்டுத்தொடர்வரிசைகளிலும் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகும்.

8. ஒரு நபர் 10 வருடங்களில் ₹16500 ஐ சேமிக்கிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹100 அதிகம். அவர் முதல் வருடம் எவ்வளவு சேமித்திருப்பார்?

கொடுக்கப்பட்டது : $S_{10} = ₹16500$

அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹100 அதிகம். $d = 100$

S_1 ஐ கண்டறிய வேண்டும்.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{10} = \frac{10}{2}[2a + (10-1)100]$

$16500 = 5[2a + 900]$

$\frac{16500}{5} = 2a + 900$

$3300 - 900 = 2a$

$2400 = 2a$

$a = \frac{2400}{2}$

$a = 1200$

அவர் முதல் வருடம் ₹ 1200 சேமித்திருப்பார்.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 2-வது உறுப்பு $\sqrt{6}$ மற்றும் 6-வது உறுப்பு $9\sqrt{6}$ எனில் அந்தத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது:

$t_2 = \sqrt{6}$ மற்றும் $t_6 = 9\sqrt{6}$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_2 = ar^{2-1} = \sqrt{6}$

$t_2 = ar = \sqrt{6}$ ....(1)

$t_6 = ar^{6-1} = 9\sqrt{6}$

$t_6 = ar^5 = 9\sqrt{6}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$\frac{t_6}{t_2} = \frac{ar^5}{ar} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$r^4 = 9$ $\quad (\because 9 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3})$

$r = \sqrt{3}$

$(1) \Rightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{6}$

$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

$\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{3}, \sqrt{2}(\sqrt{3})^2, \sqrt{2}(\sqrt{3})^3, \ldots$

$\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \ldots$

10. ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 15% குறைகிறது. வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹45000 எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு என்ன?

வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹45000

ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 15% குறைகிறது.

முதல் வருடம் $= 45000 - 45000\left(\frac{15}{100}\right) = 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right)$

இரண்டாம் வருடம் $= 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right) - 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right)\left(\frac{15}{100}\right)$

$= 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right)\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right)^2$

இதே போல் தொடர, அது ஒரு பெருக்குத்தொடரை அமைக்கும்

$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

இங்கு, $P = 45000, r = 15\%, n = 3$

$A = 45000\left(1 - \frac{15}{100}\right)^3 = 45000\left(\frac{100-15}{100}\right)^3 = 45000\left(\frac{85}{20}\right)^3$

$= 45000\left(\frac{17}{20}\right)^3$

$= 45000\left(\frac{17\times17\times17}{20\times20\times20}\right)$

$= 45 \times 614.125$

$= 27635.625$

$A = 27636$

3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு ₹ 27636