



Padalsalai's Telegram Groups!

(தலைப்பிற்கு கீழே உள்ள லிங்கை கிளிக் செய்து குழுவில் இணையவும்!)

- Padalsalai's NEWS - Group
https://t.me/joinchat/NIfCqVRBNj9hhV4wu6_NqA
- Padalsalai's Channel - Group
<https://t.me/padasalaichannel>
- Lesson Plan - Group
<https://t.me/joinchat/NIfCqVWwo5iL-21gpzrXLw>
- 12th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_12th
- 11th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_11th
- 10th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_10th
- 9th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_9th
- 6th to 8th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_6to8
- 1st to 5th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_1to5
- TET - Group
https://t.me/Padalsalai_TET
- PGTRB - Group
https://t.me/Padalsalai_PGTRB
- TNPSC - Group
https://t.me/Padalsalai_TNPSC

பொது கணிதம் விடைத் தொகுப்பு

கணிதம் கற்றல் கையேடு மேனிலை-II ஆண்டு(தமிழ் வழி)

முதன்மை கல்வி அலுவலர் (திருவள்ளூர் மாவட்டம்) அவர்கள் வழிகாட்டுதலின் கீழ் தயாரிக்கப்பட்டது.

நெறியாளரை:

திருமதி.R.THIRUVALARSELVI

முதன்மை கல்வி அலுவலர்

திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

ஒருங்கிணைப்பாளர்கள்:

திரு. B. RAVI

DEO (I/C)

பொன்னேரி கல்வி மாவட்டம்

&

திரு. P.THIRUMALAI

DI

பொன்னேரி கல்வி மாவட்டம்

ஆசிரியர் குழு:

Mr. K. AGATHIYAN PG ASST J.S GHSS, PAZHVERKADU	
Mrs. S. LALITHA PG ASST GBHSS,SHOLAVARAM	Mrs. R.MALARVIZHI, PG ASST, JGGGHSS, PONNERI
Mrs. G.LAKSHMIKALA,PG ASST JGGGHSS,PONNERI	Mrs.A.GEETHA, PG ASST, DVSRHSS, MINJUR
Mrs. V.SANKARI PG ASST, JGGHSS,MANALI NEW TOWN	Mr.D.SATHISH, PG ASST, GHSS, ELAVUR
Mr. M.LOGANATHAN, PG ASST,GHSS ARAMBAKKAM	Mrs.J.SRIDEVI, PG ASST GHSS, ALAMATHI
Mr. N.VAJJIRAM, PG ASST, GBHSS, PONNERI	Mrs.R.SRIDEVI, PG ASST GHSS, KAVARIPETTAI
Mr. S.SIVARAJ, PG ASST, MKVGBHSS, ARANI	Mrs.PUSHPA SHOBANA JOY, PG ASST, KLKGBHSS, GUMMIDIPOONDI

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

I. இரண்டு மதிப்பெண்

1.If $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, எனில் A^{-1}

ஐக் காண்க:

தீர்வு:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}} \text{adj}(A)$$

$$\begin{aligned} \text{Therefore } |\text{adj } A| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1[1-4] - 2[1-4] + 2[2-2] \\ &= -1[-3] - 2[-3] + 2[0] \\ &= 3+6 = 9 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. If $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, எனில்

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_2$$

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}; \text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= |A| = 24 - 20 = 4 \neq 0$$

$$\begin{aligned} A(\text{adj } A) &= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 - 20 & 32 - 32 \\ -15 + 15 & -20 + 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| I_2 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_2$$

என்பது சரி.

3. பின்வரும் அணிக்கு ஏறுபடி வடிவத்தை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \end{bmatrix} R_1 \rightarrow (-R_1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$$

$$\therefore P(A) = 3$$

4. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க $2x+5y = -2$, $x+2y = -3$.

தீர்வு:

$$2x+5y = -2, x+2y = -3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A \times = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 - 5 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிபடி தீர்க்க

$$\frac{3}{x} + 2y = 12, \frac{2}{x} + 3y = 13.$$

தீர்வு:

$$\frac{3}{x} + 2y = 12, \frac{2}{x} + 3y = 13.$$

$$\text{Let } a = \frac{1}{x}, 3a + 2y = 12$$

$$2a + 3y = 13$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 26 = 10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 24 = 15$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

II. மூன்று மதிப்பெண் வினாக்கள்:

$$1. \text{adj } (A) = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A -$$

ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{adj } (A) = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|\text{adj } (A)| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 7(77 - 35) - 7(-7 - 77) - 7(-5 - 121)$$

$$= 7(42) - 7(-84) - 7(-126)$$

$$= 294 + 588 + 882 = 1764$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}} \text{adj } (\text{adj } (A))$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1764}}$$

$$\begin{vmatrix} +(77 - 35) & -7(-7 - 77) & (-5 - 121) \\ -(49 + 35) & +(49 + 77) & -(35 - 77) \\ +(49 + 77) & -(49 - 7) & +(77 + 7) \end{vmatrix}^{\wedge}_T$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} 42 & 84 & -126 \\ -84 & 126 & 42 \\ 126 & -42 & 84 \end{bmatrix}^{\wedge}_T$$

$$A = \pm \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A^{-1} =$$

A^T என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 64 + 1 + 16 & -32 + 4 + 28 & -8 - 8 + 16 \\ -32 + 4 + 28 & 16 + 16 + 49 & 4 - 32 + 28 \\ -8 - 8 + 16 & 4 - 32 + 28 & 1 + 64 + 16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AA^T = I \quad \text{இதிலிருந்து}$$

$$\therefore A^{-1} = A^T$$

3). $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற பூச்சிய மற்றக் கோவை அணிக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறை மூலம் நேர்மாறு காண்க

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \sim \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow -R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2}{5} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + 6R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6/5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1 \\ 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்.

$$1. \frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0, \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0,$$

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0, \quad \text{கிராமர் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க.}$$

தீர்வு:

$$\text{Let } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$$

$$3a - 4b - 2c = 1$$

$$a + 2b + c = 2$$

$$2a - 5b - 4c = -1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3[-8+5] + 4[-4-2] - 2[-5-4]$$

$$= 3[-3] + 4[-6] - 2[-9]$$

$$= -9 - 24 + 18$$

$$= -15 \neq 0$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1[-8+5] + [-8+1] - 2[-10+2]$$

$$= -3 - 28 + 16$$

$$= -15$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3[-8+1] - 1[-4-2] - 2[-1-4]$$

$$= -21 + 6 + 10$$

$$= -5$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3[-2+10] + 4[-1-4] + 1[-5-4]$$

$$= 24 - 20 - 9$$

$$= -5$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x=1, y=3, z=3$$

2. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறைபடி தீர்க்க $4x+3y+6z=25$, $x+y+7z=13$, $2x+9y+z=1$.

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A/B] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - (-1)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - (-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow 17R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{bmatrix}$$

$$X+5y+7z = 13 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$17y+22z = 27 \rightarrow \textcircled{2}$$

$$199z = 398 \rightarrow \textcircled{3}$$

$$Z = 398/199 = 2$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow 17y+22(2) = 27$$

$$\Rightarrow 17y = 27 - 44$$

$$\Rightarrow = -17$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x=5(-1)+7(2)=13$$

$$\Rightarrow x-5+14=13$$

$$\Rightarrow x+9=13$$

$$\Rightarrow x=13-9$$

$$\Rightarrow =4$$

Therefore the solution is $x=4, y=-1, z=2$.

3) λ, μ -இன் எம்மதிப்பிற்கு $x+2y+z = 7$,

$x+y+\lambda z = \mu$, $x+3y-5z = 5$ என்ற சமன்பாடுகள்

i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிருக்கும் ii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு:

மாறிகளின் எண்ணிக்கை = 3

$$x+2y+z = 7, x+y+\lambda z = \mu, x+3y-5z = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[A/B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & \mu - 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & \mu - 7 \\ 1 & 3 & \lambda - 7 & \mu - 9 \end{array} \right]$$

நிலை i) $\lambda = 7, \mu = 9$ எனில்

$$P(A) = P(A/B) = 2 < 3.$$

ஒருங்கமைவு உடையது,
எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு.

நிலை ii) $\lambda \neq 7, \mu \neq 9$ எனில்

$$P(A) = P(A/B) = 3$$

ஒருங்கமைவு உடையது, ஒரே ஒரு தீர்வு.

நிலை iii) If $\lambda = 7, \mu \neq 9$

$$P(A) = 2, P(A/B) = 3$$

$$\therefore P(A) \neq P(A/B)$$

ஒருங்கமைவு அற்றது, தீர்வு இல்லை.

4) k-ன் எம்மதிப்புகளும் பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$kx - 2y + z = 1, x - 2ky + z = -2, x - 2y + kz = 1$
i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதை ஆராய்க.

தீர்வு:

மாறிகளின் எண்ணிக்கை = 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - kR_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k + 2 & 1 - k & -3 \\ 0 & -2k + 2 & 1 - k^2 & 1 - k \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2(1 - k) & 1 - k & -3 \\ 0 & 0 & 2 - k - k^2 & -k - 2 \end{array} \right]$$

$$2 - k - k^2$$

$$-(k^2 + k - 2)$$

$$-(k - 1)(k + 2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 2(1 - k) & 1 - k & -3 \\ 0 & 0 & (k - 1)(k + 2) & k + 2 \end{array} \right]$$

நிலை (i)

$$k = -2 \text{ எனில் } p(A) = 2, p(A/B) = 2 < 3,$$

ஒருங்கமைவு உடையது,
எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு.

நிலை (ii)

$$k = 1, k \neq -2, \text{ எனில் } p(A) = 2,$$

$$p(A/B) = 3, p(A) \neq p(A/B)$$

ஒருங்கமைவு அற்றது, தீர்வு பெற்றிராது.

நிலை (iii)

$$k \neq -1, k \neq -2, \text{ எனில்}$$

$$p(A) = p(A/B) = 3$$

ஒருங்கமைவு உடையது, ஒரே ஒரு தீர்வு
பெற்றிருக்கும்.

5. λ, μ -இன் எம்மதிப்புகளுக்கு
 $2x + 3y + 5z = 9, 7x + 3y - 5z = 8,$
 $2x + 3y + \lambda z = \mu$ என்ற சமன்பாடுகளின்

தொகுப்பானது, (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு:

மாறிகளின் எண்ணிக்கை = 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array} \right]$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 - 7R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -15 & -45 & -47 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & \mu - 9 \end{array} \right]$$

நிலை (i)

$\lambda = 5, \mu \neq 9$ எனில் $p(A) = 2, p(A/B) = 3, p(A) \neq p(A/B)$

ஒருங்கமைவு அற்றது, தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii)

$\lambda \neq 5, \mu \neq 9$ எனில் $p(A) = p(A/B) = 3$

ஒருங்கமைவு உடையது, ஒரே ஒரு தீர்வு

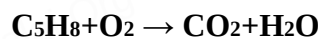
நிலை (iii)

$\lambda = 5, \mu = 9$ எனில்

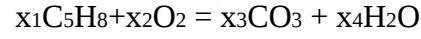
$p(A) = p(A/B) = 2 < 3$

ஒருங்கமைவு உடையது, எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு.

6. காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக.



தீர்வு:



கார்பன்:

$$5x_1 = x_3$$

$$5x_1 - x_3 = 0$$

ஹைட்ரஜன்:

$$8x_1 = 2x_4$$

$$4x_1 = x_4$$

$$4x_1 - x_4 = 0$$

ஆக்ஸிசன்:

$$2x_2 = 2x_3 + x_4$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

சமன்பாடுகள்:

$$5x_1 - x_3 = 0$$

$$4x_1 - x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A/0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_3 \rightarrow 4R_3 - 5R_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

மாறிகளின் எண்ணிக்கை = 4

$P(A) = P(A/0) = 3 < 4$

ஒருங்கமைவு உடையது,

எண்ணிக்கையற்ற தீர்வு

$$4x_1 - x_4 = 0 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \rightarrow \textcircled{2}$$

$$-4x_3 + 5x_4 = 0 \rightarrow \textcircled{3}$$

$$x_2 = t$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow -4x_3 + 5t = 0$$

$$x_3 = -5t / -4$$

$$= 5t / 4$$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2\left(\frac{5t}{4}\right) - t = 0$$

$$2x_2 - \frac{5t}{2} - t = 0$$

$$2x_2 - \frac{5t-2t}{2} = 0$$

$$2x_2 - \frac{7t}{2} = 0$$

$$2x_2 = \frac{7t}{2}$$

$$x_2 = \frac{7t}{4}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow$$

$$4x_1 - t = 0$$

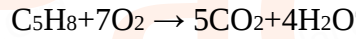
$$4x_1 = t$$

$$x_1 = t/4$$

$t=4$, என்க x_1, x_2, x_3, x_4 முழு எண்கள்

$x_1 = \frac{t}{4}$	$x_2 = \frac{7t}{4}$	$x_3 = \frac{5t}{4}$	$x_4 = t$
$x_1 = 1$	$x_2 = 7$	$x_3 = 5$	$x_4 = 4$

தேவையான சமன்பாடு



2. கலப்பு எண்கள்

இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) சுருக்குக.

$$i^{1948} - i^{1869}$$

தீர்வு :

$$1948 \div 4 = 487 \quad 1869 \div 4 = 467$$

$$= (i)^{4 \times 487} - (i)^{4 \times 467 + 1}$$

$$= (i^4)^{487} - (i)^{-4 \times 467 - 1}$$

$$= i^{487} - i^{-4 \times 467} \cdot (i)^{-1}$$

$$= 1 - (i^4)^{-467} \cdot \frac{1}{i}$$

$$= 1 - \frac{1 \cdot i}{i \cdot i}$$

$$= 1 - \frac{i}{-1}$$

$$\text{Ans} = 1+i$$

2) $Z = 2+3i$ என கொண்டு கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை ஆரக்கண்ட தளத்தில் குறிக்க

(1) z , iz மற்றும் $z + iz$

தீர்வு :

$$iz = i(2+3i)$$

$$= 2i + 3i^2$$

$$= 2i + 3(-1)$$

$$= 2i - 3$$

$$iz = -3 + 2i$$

$$z+iz = 2+3i-3+2i$$

$$z+iz = -1+5i$$

3) if $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 5$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

$$\text{I) } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$\text{ii) } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

தீர்வு :

L.H.S

$$(z_1 + z_2) + z_3 = 1 - 3i - 4i$$

$$= 1 - 7i$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = 1 - 7i + 5$$

$$= 6 - 7i$$

R.H.S

$$z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$z_2 + z_3 = -4i + 5$$

$$= 5 - 4i$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = 1 - 3i + 5 - 4i$$

$$= 6 - 7i$$

L.H.S = R.H.S நிறுவப்பட்டது.

$$\text{ii) } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

L.H.S

$$(z_1 z_2) z_3$$

$$z_1 z_2 = (1-3i)(-4i)$$

$$= -4i - 12$$

$$= -12 - 4i$$

$$(z_1 z_2) z_3 = (-12 - 4i) 5$$

$$= -60 - 20i$$

$$= -20(3 + i)$$

$$= \text{L.H.S}$$

R.H.S

$$z_1 (z_2 z_3)$$

$$(z_2 z_3) = -4i * 5$$

$$= -20i$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (1-3i)(-20i)$$

$$= -20i + 60i^2$$

$$= -20i - 60$$

$$= -60 - 20i$$

$$= -20(3 + i)$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

Hence verified

4) If $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-12i$, $z_3 = 6+8i$

மதிப்பிடுக $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$ $|z_1 + z_2|$

$$|z_2 - z_3|$$

$$|z_1 + z_3|$$

தீர்வு :

$$\text{i) } z_1 = 3+4i$$

$$|z_1| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$|z_1| = 5$$

$$\text{ii) } z_2 = 5 - 12i$$

$$|z_2| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$|z_2| = 13$$

$$\text{iii) } z_3 = 6+8i$$

$$|z_3| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$|z_3| = 10$$

$$\text{iv) } |z_1 + z_2| = |(3+4i) + (5-12i)|$$

$$= |3+4i + 5-12i|$$

$$= |8-8i|$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{8^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 64}$$

$$= \sqrt{128}$$

$$|z_1 + z_2| = 8\sqrt{2}$$

$$\text{v) } |z_2 - z_3| = |(5-12i) - (6+8i)|$$

$$= |5-12i - 6+8i|$$

$$= \sqrt{-1^2 - 20i}$$

$$= \sqrt{-1^2 - 20^2}$$

$$= \sqrt{-1^2 - 20^2}$$

$$= \sqrt{1 + 400}$$

$$= \sqrt{401}$$

$$\text{vi) } |z_1 + z_3| = |3+4i + 6+8i|$$

$$\begin{aligned}
 &= |(9 + 12i)| \\
 &= \sqrt{9^2 + 12^2} \\
 &= \sqrt{81 + 144} \\
 &= \sqrt{225}
 \end{aligned}$$

$$|z_1 + z_3| = 15$$

5) கலப்பெண்களின் துருவ வடிவினைக் காண்க.

i) $2 + i2\sqrt{3}$

தீர்வு :

$$z = x + iy$$

$$\text{மட்டு : } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{வீச்சு } \arg = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$x = 2, y = 2\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 4(3)}$$

$$= \sqrt{4 + 12}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$\text{மட்டு : } |z| = 4$$

வீச்சு :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$\arg: \alpha = \pi/3$$

$$\alpha = \pi/3$$

$$\Theta = \pi/3$$

$$\therefore \Theta = \alpha$$

துருவ வடிவம்:

$$Z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

$$= 4 [\cos \pi/3 + i\sin \pi/3]$$

$$2 + i2\sqrt{3} = 4 [\cos(\pi/3 + 2k\pi) + i\sin(\pi/3 + 2k\pi)] \quad k \in \mathbb{Z}$$

மூன்று மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) $(3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5$ and $2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் X மற்றும் Y ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$(3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5 =$$

$$2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$$

$$(3x - 2y + 5) + i(-x + y + 2) =$$

$$(2x - y + 3) + i(2y + 2)$$

மெய் சமப்படுத்தும்

$$3x - 2y + 5 = 2x - y + 3$$

$$3x - 2x - 2y + y + 5 - 3 = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

$$x - y = -2 \rightarrow \textcircled{1}$$

solve:

$$x - y = -2$$

$$\underline{-x - y = 0}$$

$$-2y = -2$$

$$y = 1$$

subt $y = 1$ in equation $\rightarrow \textcircled{1}$

$$x - 1 = -2$$

$$x = -2 + 1$$

$$x = -1$$

$$\therefore (x, y) = (-1, 1)$$

2) $(\sqrt{3} + i)^n$ ஆனது என் எந்த மீச்சிறு மிகை முழு எண் மதிப்புகளுக்கு 1)மெய் இருக்கும்.

தீர்வு :

$$(\sqrt{3} + i)^n$$

$$n = 2$$

$$(\sqrt{3} + i)^2 = [\sqrt{3}]^2 + 2\sqrt{3}i + i^2$$

$$[: [a+b]^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

$$= 3 + 2\sqrt{3}i - 1$$

$$= 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$= 2(1 + i\sqrt{3})$$

Take $n = 3$

$$(\sqrt{3} + i)^3 = (\sqrt{3} + i)^2 (\sqrt{3} + i)$$

$$= 2(1 + i\sqrt{3})[\sqrt{3} + i]$$

$$\{ \text{Subt ; } (\sqrt{3} + i)^2 = 2[1 + i\sqrt{3}] \}$$

$$= 2[\sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + ((\sqrt{3})i)^2]$$

$$= 2[\sqrt{3} + 4i - \sqrt{3}]$$

$$= 2[4i]$$

$$= 8i$$

$$n=3$$

$$(\sqrt{3} + i)^3 = 8i$$

முற்றிலும் கற்பனை

$$n=3$$

$$[(\sqrt{3} + i)^3]^2 = [8i]^2$$

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 64i^2$$

$$= -64 \text{ (மெய்)}$$

$$n=6 \quad \text{i) } n=6 \text{ மெய்}$$

$$\text{ii) } n=3 \text{ முற்றிலும் கற்பனை.}$$

$$3) \text{ If } |z_1| = 3 \text{ எனில் } 7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$$

$$\text{எனக் பண்புப்படி } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

தீர்வு :

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$z_1 = 6 - 8i$$

$$|z_1| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$||z| - |z_1|| \leq |z + z_1| \leq |z| + |z_1|$$

$$|3 - 10| \leq |z + 6 - 8i| \leq 3 + 10$$

$$7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$$

4) பின் வரும் சமன்பாடுகளின் $z = x + iy$ ன் நியமப்பாதையை கார்டீசியம் வடிவில் காண்க.

$$\text{i) } |z - 4| = 16$$

தீர்வு :

$$z = x + iy$$

$$|z - 4| = 16$$

$$|x + iy| = 16$$

$$|x + iy - 4| = 16$$

$$|x - 4 + iy| = 16$$

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 16$$

வார்க்கப்படுத்தும் (இருபுறமும்)

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16^2$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 256$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 256 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 240 = 0$$

$$i) |z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$$

$$\text{put : } z = x + iy$$

$$|z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$$

$$|x + iy - 4|^2 - |x + iy - 1|^2 = 16$$

$$|x - 4 + iy|^2 - |x - 1 + iy|^2 = 16$$

$$[\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{y^2}]^2 -$$

$$[\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{y^2}]^2 = 16$$

$$[(x-4)^2 + y^2] - [(x-1)^2 + y^2] = 16$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - [x^2 - 2x + 1 + y^2] = 16$$

$$-8x + 16 + 2x - 1 = 16$$

$$-6x - 1 + 16 = 16$$

$$-6x - 1 = 0$$

$$6x + 1 = 0$$

$$5) \left[\frac{1 + \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}}{1 + \sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}} \right]^{10} - \text{ன் மதிப்பு}$$

காண்க

Soln:

$$Z = \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}} * \frac{\sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}}$$

$$[\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]$$

$$\frac{1}{z} = \sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} \right)^{10} = \left(\frac{1+z}{\frac{z+1}{z}} \right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{z}} \right)^{10} = z^{10}$$

$$= z^{10} = \left[\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} \right]^{10}$$

[Demorire's theorem]

$$[\therefore (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \theta + i \sin \theta]$$

$$= 2^{10} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) \right]^{10}$$

$$= \left[\cos \frac{4\pi}{10} + i \sin \frac{4\pi}{10} \right]^{10}$$

$$= \left[\cos \frac{4\pi}{10} * 10 + i \sin * 10 \frac{4\pi}{10} \right]^{10}$$

$$= [\cos 4\pi + i \sin 4\pi]$$

$$= [\cos \pi + i \sin \pi]^4$$

$$= [-1 + i(0)]^4$$

$$= [-1]^4 = 1$$

$$\left[\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} \right]^{10} = 1$$

ஐந்து மதிப்பெண்கள் வினாக்கள்

1) If z_1, z_2, z_3 என்ற மூன்று

கலப்பெண்கள் $|z_1| = 1, |z_2| = 2,$

$|z_3| = 3$ $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$ என்றவாறு

உள்ளது எனில் $|9z_1z_2 + 4z_1z_3 + z_2z_3|$

$|z_3| = 6$ என நிறுவுக.

Soln:

$$|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$$

$$|z_1|^2 = 1, |z_2|^2 = 4, |z_3|^2 = 9$$

$$z_1 \bar{z}_1 = 1 \quad z_2 \bar{z}_2 = 4 \quad z_3 \bar{z}_3 = 9$$

$$z_1 = \frac{1}{z_1}, \quad z_2 = \frac{4}{z_2}, \quad z_3 = \frac{9}{z_3}$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 1$$

$$\left| \frac{\bar{z}_1 z_2 z_3 + 4 \bar{z}_1 z_3 + 9 \bar{z}_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} \right| = 1$$

$$\{ \text{By property } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \}$$

$$\frac{|z_1 z_2 z_3 + 4 \bar{z}_1 z_3 + 9 \bar{z}_1 z_2|}{|z_1| |z_2| |z_3|} = 1$$

$$\{ \text{By property } \left| \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2} \right| \}$$

$$|z_1| = |z_1|$$

$$\frac{|z_1 z_2 z_3 + 4 \bar{z}_1 z_3 + 9 \bar{z}_1 z_2|}{|z_1| |z_2| |z_3|} = 1$$

$$|z_1 z_2 z_3 + 4 \bar{z}_1 z_3 + 9 \bar{z}_1 z_2| = |z_1| |z_2| |z_3|$$

$$= (1)(2)(3)$$

$$|9z_1 z_2 + 4z_1 z_3 + z_1 z_3| = 6$$

2) If $z = x + iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு

கலப்பெண் $\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right)$ எனுமாறு

அமைந்தால் z -ன் நியமப்பாதை $2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$ எனக் காட்டுக.

Soln:

$$\text{Im}\left[\frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1}\right] = 0$$

$$\text{Im}\left[\frac{2x+2iy+1}{ix-y+1}\right] = 0$$

$$\text{Im}\left[\frac{(2x+1)+i(2y)}{i-y+ix}\right] = 0$$

$$\text{Im}\left[\frac{(2x+1)+i(2y)}{i-y+ix}\right] * \left[\frac{(i-y)-ix}{(i-y)-ix}\right] = 0$$

$$\text{Im}\left[\frac{-x(2x+1)+(2y)(1-y)}{(i-y)^2+x^2}\right] = 0$$

[Take only imaginary parts]

$$\Rightarrow -x(2x+1) + (2y)(1-y) = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x + 2y - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$$

3) $\sqrt{3} + i$ ன் எல்லா மூன்றாம் படி மூலங்களையும் காண்க.

Soln:

$$z^3 = \sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$r = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z^3 = 2 [\cos \pi/6 + i \sin \pi/6] \quad [\therefore r=2]$$

$$\theta = \pi/6]$$

$$z = 2^{1/3} [\cos \pi/6 + i \sin \pi/6]^{1/3}$$

Adding $2k\pi$

$$z = 2^{1/3} [\cos(2k\pi + \pi/6) + i \sin(2k\pi + \pi/6)]^{1/3}$$

Apply Demovire's theorem

$$z = 2^{1/3} \left[\cos\left(\frac{(2k\pi + \pi/6)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{(2k\pi + \pi/6)}{3}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2$$

If $K=0$

$$z = 2^{1/3} [\cos \pi/18 + i \sin \pi/18]$$

If $K = 1$

$$z = 2^{1/3} [\cos 13\pi/18 + i \sin 13\pi/18]$$

If $K = 2$

$$z = 2^{1/3} [\cos 25\pi/18 + i \sin 25\pi/18]$$

$$z = 2^{1/3} [\cos(\pi + \frac{7\pi}{18}) + i \sin(\pi + \frac{7\pi}{18})]$$

$$z = 2^{1/3} [-\cos \frac{7\pi}{18} - i \sin \frac{7\pi}{18}]$$

4) $2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}$, $2\cos\beta = y + \frac{1}{y}$ எனக் கொண்டு கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\alpha - \beta)$

ii) $xy + \frac{1}{2y} = 2i \sin(\alpha + \beta)$

iii) $\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i \sin(m\alpha - n\beta)$

iv) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2 \cos(m\alpha + n\beta)$

soln:

$$2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}$$

$$2\cos\alpha = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$(2\cos\alpha)x = x^2 + 1$$

$$x^2 - (2\cos\alpha)x + 1 = 0$$

$$[\therefore ax^2 + bx + c = 0]$$

$$a = 1, b = -2\cos\alpha, c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[quadratic equation]

$$x = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{-(1-\cos 2\alpha)}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{1-\cos 2\alpha}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\alpha \pm 2i\sin\alpha}{2}$$

$$= \frac{2[\cos\alpha \pm i\sin\alpha]}{2}$$

$$x = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (\text{or})$$

$$x = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

Let us consider $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} * \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i^2\sin^2\alpha}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin^2\alpha} \quad [\because i^2 = -1]$$

$$\frac{1}{x} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow x = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow y = \cos\beta + i\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \cos\beta - i\sin\beta$$

$$i) \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$$

$$= \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{y}{x} = \cos(\alpha - \beta) - i\sin(\alpha - \beta)$$

L.H.S

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) - i\sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \cos(\alpha - \beta)$$

$$ii) xy = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{1}{xy} = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

L.H.S

$$xy = \frac{1}{xy} = 2 i\sin(\alpha + \beta).$$

$$iii) \frac{x^m}{y^n} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m}{(\cos\beta + i\sin\beta)^n}$$

$$\frac{x^m}{y^n} = \cos(m\alpha - n\beta) + i\sin(m\alpha - n\beta)$$

$$\frac{y^n}{x^m} = -\cos(m\alpha - n\beta) + i\sin(m\alpha - n\beta)$$

$$\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2 i\sin(m\alpha - n\beta)$$

$$iv) x^m y^n = [\cos\alpha + i\sin\alpha]^m [\cos\beta + i\sin\beta]^n$$

$$= [\cos m\alpha + i\sin m\alpha] [\cos n\beta + i\sin n\beta]$$

$$x^m y^n =$$

$$\cos(m\alpha + n\beta) + i\sin(m\alpha + n\beta) \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta) - i\sin(m\alpha + n\beta) \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow$$

L.H.S

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$$

5) ஓ 1 என்பது ஒன்றின் முப்படிமூலம் மூலம் எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

$$(i) (1 - \omega + \omega^2)^6 + (1 + \omega - \omega^2)^6 = 128$$

$$(ii) (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)$$

$$(1 + \omega^8) + \dots + (1 + \omega^{2n}) = 1$$

Sol:

L.H.S.

$$= (1 - \omega + \omega^2)^6 + (1 + \omega - \omega^2)^6$$

$$= (1 + \omega^2 - \omega)^6 + (1 + \omega - \omega^2)^6$$

$$= (-\omega - \omega)^6 + (-\omega^2 - \omega^2)^6$$

$$= (-2\omega)^6 + (-2\omega^2)^6$$

$$= (-2)^6 \omega^6 + (-2)^6 (\omega^2)^6$$

$$= (-2)^6 [\omega^6 + \omega^{12}]$$

$$= 2^6[1+1] = 2^6(2)$$

$$= 2^7 = 128 \quad [\because 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2]$$

$$\text{ii)} (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$$

$$(1+\omega^{16})(1+\omega^{32})(1+\omega^{64})(1+\omega^{128})$$

$$(1+\omega^{256})(1+\omega^{512})(1+\omega^{1024})(1+\omega^{2048})$$

$$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)\dots$$

6 terms.

$$\therefore [(1+\omega)(1+\omega^2)]^6$$

$$[-\omega^2(-\omega)]^6 = [-\omega^2(-\omega)]^6$$

$$=[\omega^3]^6 = (1)^6 = 1$$

$$= 1$$

$$= \text{R.H.S.}$$

2. $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0$
3. $2 \cos^2 x - 9 \cos x + 20 = 0$

1. $2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0$
 Put $\cos x = t$ $2t^2 - 9t + 4 = 0$
 $(t - \frac{1}{2})(t - 4) = 0$
 $t = \frac{1}{2} \quad t = 4$
 $\cos x = 4$
 (Impossible)
 $t = \frac{1}{2}$
 $\cos x = \frac{1}{2}$
 $\cos x = \cos \pi/3$
 $x = 2n\pi \pm \pi/3$

State and prove Complex conjugate root theorem

(Theorem 3.2 in book)

- I. Find the sum of squares of the roots of the following:

1. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

2. $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 = 0$

- (1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Let the roots : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Sum of the squares of roots

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 -$$

$$2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\alpha + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (\Sigma_1)^2 - 2(\Sigma_2)$$

$$= (-b/a)^2 - 2(c/a)$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

II. தீர்க்க :

1. $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$
2. $2x^3 - 9x^2 + 10x = 3$
3. $8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$
4. $2x^3 + 11x^2 - 9x - 18 = 0$
5. $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$
6. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$
7. $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
8. $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

Note:

* If sum of the co-eff. is Zero 1 is the root

* Co-eff. odd power = co-eff. Even power -1 is a root

* If x^4, x^2 are the only co-eff. sub. $x^2 = t$

- 1) $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$

Sum of co-eff: $1 - 3 - 33 + 35 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -33 & 35 \\ & 0 & 1 & -2 & -35 \end{array}$$

$$1 \quad -2 \quad -35 \quad 0$$

Remaining factor: $x^2 - 2x - 35 = 0$

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

$$\begin{array}{cc} 35 & x = 7, -5 \\ -7 & +5 \end{array}$$

$\therefore$ roots are: 1, 7, -5

III. If α, β (Or) α, β, γ are the root of the equation whose roots are given against them.
 Equation 1. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

2. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

New roots:

3. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

$-\alpha, -\beta, -\gamma$

4. $17x^2 + 43x - 73 = 0$

$2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

5. $2x^2 - 7x + 13 = 0$

$1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$

$$\alpha + 2, \beta + 2$$

$$\alpha^2, \beta^2$$

- 1) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

Given roots

New roots

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha + \beta + \gamma = -2 & \Sigma_1 = -\alpha - \beta - \gamma & \\
 & = -(\alpha + \beta + \gamma) & \\
 & = -(-2) = 2 & \\
 \hline
 \alpha + \beta + \gamma + \gamma\delta = 3 & \Sigma_2 = \alpha + \beta + \gamma + \gamma\delta & \\
 & = 3 & \\
 \hline
 \alpha + \beta + \gamma = -4 & \Sigma_3 = (-\alpha) + (-\beta) + (-\gamma) & \\
 & = -4 & \\
 \hline
 \end{array}$$

The required equation

$$x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

IV. Obtain the condition:

1. The root of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are in A.P
2. The roots of $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are in G.P
3. The roots of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are in H.P
4. Solve: $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ roots are in A.P
5. Solve $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ roots are in G.P

Note: In A.P, take the roots as $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$

In G.P take the roots as $\alpha/t, \alpha, \alpha t$

In H.P reverse the co-efficient of given equation and use A.P. roots

3. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ here the roots are in H.P Reverse the co-efficient $rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ its roots are in A.P
roots are $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ sum of roots $\alpha - d + \alpha + \alpha + d = -q/r$
 $3\alpha = -q/r$

$$\alpha = \frac{-q}{3r}$$

$$\text{Sub in } rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

$$r\left(\frac{-q^3}{27r^3}\right) + q\left(\frac{q^2}{9r^2}\right) + p\left(\frac{-q}{3r}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{-q^3}{27r^2} + \frac{q^3}{9r^2} - \frac{pq}{3r} + 1 = 0$$

Multiply by $27r^2$

$$-q^3 + 3q^3 - 9pqr + 27r^2 = 0$$

$$2q^3 + 27r^2 = 9pqr$$

1). $2x^2 - 6x + 7 = 0$ க்கு மெய் தீர்வு இல்லை எனக் காட்டு

2). $X^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ க்கு மூலங்கள் சமம் எனில் $k = ?$

3). $2x^2 + kx + k = 0$ ன் மூலங்களின் இயல்பை K வழியாக ஆராய்க.

4). $4x^2 + 4px + p + 2 = 0$ ன் மூலங்களின் இயல்பை P வழி ஆராய்க

5). $x^2 - 2px + p^2 - q^2 + 2qr - r^2 = 0$ மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனக் காட்டு. (P, Q, R விகிதமுறு எண்கள்)

Rationals

குறிப்பு :

$$\rightarrow b^2 - 4ac = 0 \text{ மூலங்கள் மெய் சமம்}$$

$$\rightarrow \text{If } b^2 - 4ac > 0 \text{ மூலங்கள்}$$

வெவ்வேறானவை.

$$\rightarrow \text{If } b^2 - 4ac < 0 \text{ மூலங்கள் கற்பனை}$$

எண்கள்

$$1). 2x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\begin{array}{ccc}
 | & | & | \\
 a & b & c
 \end{array}$$

$$b^2 - 4ac = 36 - 4(2)(7)$$

$$= 36 - 56 = -20 < 0$$

→ :: மூலங்கள் கற்பனை எண்கள்

$$\alpha + \beta = 3$$

ஓர் எண்ணை அதன் கனமூலத்தோடு

மூ.பெ

கூட்டினால் 6 கிடைக்கிறது எனில்

$$(2 + i)(2 - i)(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})\alpha\beta = -$$

இதை சமன்பாடாக்குக.

$$140$$

$$x + x^{\frac{1}{3}} = 6$$

$$(4+1)(9-2)\alpha\beta = -140$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 6 - x \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (6 - x)^3$$

$$35\alpha\beta = -140$$

$$:: x = 216 - 3(6^2)x + 3(6)(x^2) - x^3$$

$$\alpha\beta = \frac{-140}{35}$$

$$X = 216 - 108x + 18x^2 - x^3$$

$$\alpha\beta = -4$$

$$X^3 - 18x^2 + 109x - 216 = 0$$

பெருக்கினால் -4, கூட்டினால் 3

5 Marks

தரக்கூடிய இரு எண்கள் -1, 4

1). If $2 + i, 3 - \sqrt{2}$ ஆகியவை

:: மூலங்கள்

$$x^6 - 13x^5 + 62x^4 - 126x^3 + 65x^2 +$$

$$(2 + i)(2 - i)(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) - 1, 4$$

$$127x - 140 = 0 \text{ ன் மூலங்கள் எனில்}$$

தீர்க்க :

அனைத்தும் மூலங்களையும் காண்க.

$$1). (x-2)(x-7)(x-3)(x+2) + 19 = 0$$

$$x^6 - 13x^5 + 62x^4 - 126x^3 + 65x^2 + 127x$$

$$2). (2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2) - 7 = 0$$

$$- 140 = 0$$

$$3). (x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = 504$$

மூலங்கள்:

$$4). (2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3) + 20 = 0$$

$$2 + i, 2 - i, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, \alpha, \beta$$

$$5). (x-4)(x-7)(x-2)(x+1) = 16$$

மூ.கூ

$$1). (x-2)(x-7)(x-3)(x+2) + 19 = 0$$

$$2 + 2 + 3 + 3 + \alpha + \beta = 13$$

Re arrange them

$$[(x-2)(x-3)][(x-7)(x+2)] + 19 = 0$$

$$[x^2 - 5x + 6][x^2 - 5x - 14] + 19 = 0$$

$$X^2 - 5x = t$$

$$(t+6)(t-14) + 19 = 0$$

$$t^2 - 8t - 84 + 19 = 0$$

$$t^2 - 8t - 65 = 0$$

$$(t-13)(t+5) = 0$$

$$t = 13, -5$$

$$x^2 - 5x = 13$$

$$x^2 - 5x - 13 = 0$$

$$= 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(-13)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 52}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{77}}{2}$$

:: The root are

$$\frac{5 \pm \sqrt{77}}{2},$$

$$x^2 - 5x = -5$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

The root are

$$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$3). 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ ன் ஒரு}$$

தீர்வு $1/3$ எனில் தீர்க்க

இது ஒரு தலை கீழ் சமன்பாடு

$1/3$ ஒரு தீர்வு எனில் 3 ம் ஒரு தீர்வு.

$\frac{1}{3}$	6	-5	-38	-5	6
	0	2	-1	-13	-6
					6
3	6	-3	-39	-18	
	0	18	45	18	
					0
	6	15	6		

: மீதமுள்ள காரணி: :

$$6x^2 + 15x + 6 = 0$$

36	$(x+2)(x + \frac{1}{2})$
$\swarrow \searrow$	
$\frac{12}{6} \quad \frac{3}{6}$	$x = -2, -\frac{1}{2}$

$$\text{தீர்வுகள் } \frac{1}{3}, 3, -2, -\frac{1}{2}$$

$$4). \text{தீர்க்க } 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

இது ஒரு தலை கீழ் சமன்பாடு

சோதித்தறிதல் மூலம் 2 ஒரு தீர்வு.

$\therefore \frac{1}{2}$ is also a root

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 6 & -35 & 62 & -35 & 6 & \\
 2 & 0 & 12 & -46 & 32 & -6 & \\
 \hline
 & 6 & -23 & 16 & -3 & 0 & \\
 \hline
 \frac{1}{2} & 0 & 3 & -10 & 3 & & \\
 \hline
 & 6 & -20 & 6 & 0 & &
 \end{array}$$

மீதமுள்ள காரணி $6x^2 - 20x + 6 = 0$

$$\begin{array}{l}
 36 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \frac{-2}{6} \quad \frac{-18}{6}
 \end{array}
 \quad (3 - \frac{1}{3})(x - 3) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, 3$$

$\therefore$ தீர்வுகள் $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3$

5). $X^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ தீர்க்க

$$\div x^2 : x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 26 = 0$$

$$X + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t - 2$$

$$(t^2 - 2) - 10t + 26 = 0$$

$$\therefore t^2 - 10t + 24 = 0$$

$$(t-6)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 6 \quad \text{or} \quad t = 4$$

$$X + \frac{1}{x} = 6$$

$$X^2 + 1 = 6x$$

$$X^2 - 6x + 1 = 0$$

$$X = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$x^2 + 1 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$$6) X^6 - 3x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 39x^2 - 39x + 135$$

$$= 0 \text{ மூலங்கள் } (1 + 2i), \sqrt{3} \text{ எனில் மற்ற}$$

மூலங்களைக் காண்க.

$$\text{மூலங்கள் : } (1 + 2i), (1 - 2i), \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \alpha, \beta$$

$$\text{மூ.கூ : } 1 + 1 + \alpha + \beta = 3$$

$$\alpha + \beta = 1$$

மூ.பெ:

$$(1+2i)(1-2i)(\sqrt{3}), (-\sqrt{3})(\alpha\beta) = 135$$

$$(1+4) \quad (-3) \quad \alpha\beta = 135$$

$$\alpha\beta = -9$$

மீதமுள்ள காரணி :

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - 1x - 9 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-9)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2} ::$$

$$(1+2i), (1-2i), \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

7). $2x^3 - 6x^2 + 3x + k = 0$ ன் ஒரு மூலம் மற்ற இரு மூலங்கள் கூடுதலின் இரு மடங்கு எனில் $K = ?$ தீர்க்க.

α, β, γ என்க

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{6}{2}$$

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 3$$

$$\alpha = \frac{3 \times 2}{3}$$

$$\alpha = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma = \frac{3}{2}$$

$$2(1) - \frac{k}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2 - \frac{3}{2} = \frac{k}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{4}$$

$$K = 2$$

$$\therefore \beta\gamma = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

மீதமுள்ள காரணி:

$$X^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

$$X^2 - 1x - \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$X = 2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-1)} / 2(2)$$

$$= \frac{+2 \pm \sqrt{12}}{4} \Rightarrow x = \frac{+2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{மூலங்கள்: } 2, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Solve : } 3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$$

ன் இரு மூலங்களின் பெருக்கல் 1 எனில் தீர்க்க.

ஒரு மூலம் மற்ற

இரண்டின் கூடுதலின்

இரு மடங்கு.

$$\alpha = 2(\beta + \gamma)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \beta + \gamma$$

$$1 = \beta + \gamma$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-k}{2}$$

$$2(\beta\gamma) = \frac{-k}{2}$$

$$\beta\gamma = \frac{-k}{4}$$

4. நேர்மாறு முக்கோணவியல்

சமன்பாடுகள்

I. Two mark questions and answers

1. find the value of $\sin^{-1}(\sin(5\pi/6))$

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(\sin(5\pi/6)) &= \sin^{-1}(\sin(\pi - \pi/6)) \\ &= \sin^{-1}(\sin \pi/6) \\ &= \pi/6 \dots \pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2]\end{aligned}$$

2. find the value of

$$\sin^{-1}(\sin(5\pi/9 \cos \pi/9 + \cos 5\pi/9 \sin \pi/9))$$

$$\begin{aligned}\text{sol: } \sin^{-1}(\sin((5\pi/9 + \pi/9))) \\ &= \sin^{-1}(\sin 6\pi/9) \\ &= \sin^{-1}(\sin 2\pi/3) \\ &= \sin^{-1}(\sin(\pi - \pi/3)) \\ &= \sin^{-1}(\sin \pi/3) \\ &= \pi/3\end{aligned}$$

3. Find the value of $\cos^{-1}(1/2) + \sin^{-1}(-1)$

$$\begin{aligned}\text{Sol: } \cos^{-1}(1/2) + \sin^{-1}(-1) &= \pi/3 - \pi/2 \\ &= \frac{2\pi - 3\pi}{6} \\ &= -\pi/6\end{aligned}$$

4. Find the value of $\sec^{-1}(-\frac{2\sqrt{3}}{3})$

$$\text{Sol: let, } \sec^{-1}(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \theta$$

$$\sec \theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\theta \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$$

we have,

$$\cos \theta = -\sqrt{3}/2 \text{ or } \sec \theta = -2/\sqrt{3}$$

$$\text{then, } \cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$$

$$\text{now, } \theta = 5\pi/6$$

$$\sec^{-1}(-2\sqrt{3}/3) = 5\pi/6$$

5. Prove that $\tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}&= \tan^{-1} \frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - (\frac{2}{11})(\frac{7}{24})} \\ &= \tan^{-1} \frac{\frac{48+77}{264}}{\frac{264-14}{264}}\end{aligned}$$

$$= \tan^{-1}(125/250)$$

$$= \tan^{-1}(1/2)$$

$$\tan^{-1}(2/11) + \tan^{-1}(7/24) = \tan^{-1}(1/2)$$

Hence the proved.

II. THREE MARK QUESTIONS AND ANSWERS.

1. Find the domain of $\sin^{-1}(2 - 3x^2)$

Sol: Range of $\sin^{-1}(x)$ is $[-1, 1]$

$$-1 \leq 2 - 3x^2 \leq 1$$

$$\text{Add } -2 \rightarrow -3 \leq 3x^2 \leq -1$$

$$-3 \leq -3x^2 \text{ then } x^2 \leq 1 \quad \text{---(1)}$$

$$-3x^2 \leq -1 \text{ then } x^2 \geq 1/3 \quad \text{---(2)}$$

From equations (1) and (2) we have get,

$$1/3 \leq x^2 \leq 1$$

$$\text{Then } 1/\sqrt{3} \leq |x| \leq 1$$

$$\text{Since } a \leq |x| \leq b,$$

implies $x \in [-b, -a] \cup [a, b]$

combining the equations (1) and (2)

$$x \in [-1, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, 1]$$

2. Find the domain of $f(x) = \sin^{-1} \frac{-x^2+1}{2x}$

Sol: range of $\sin^{-1} x$ is $[-1, 1]$

$$-1 \leq \frac{x^2+1}{2x} \leq 1$$

Multiply by $2x$

$$\begin{array}{l|l} -2x \leq x^2 + 1 \leq 2x & x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ 0 & \end{array}$$

$$0 \leq x^2 + 1 + 2x \quad (x-1)^2 \leq 0$$

$$0 \leq (x+1)^2 \quad x-1 \leq 0$$

$$0 \leq x+1 \quad x=1$$

$$x = -1$$

solution is $\{-1, 1\}$

3. Find the domain of $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$

Sol : range of $\sin^{-1}(x)$ is $[-1, 1]$

Range of $\cos^{-1}(x)$ is $[-1, 1]$

Then $-1 \leq x \leq 1$

$$x \in [-1, 1]$$

4. Find the domain $\tan^{-1}(\sqrt{9-x^2})$

Soln:

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$9 \geq x^2$$

$$x^2 \leq 9$$

$$x \leq \pm 3$$

$$\text{domain}[-3, 3]$$

5. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$ show that

$$x+y+z = xyz$$

$$\text{proof: } \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z =$$

$$\pi$$

$$\tan^{-1} \left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} \right] = \pi$$

$$\therefore \tan \pi = 0$$

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \tan \pi$$

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = 0$$

$$x+y+z-xyz = 0$$

$$x+y+z = xyz$$

Hence the proved.

- 1) If $a_1, a_2, \dots, a_n$ is an arithmetic progression with common difference d prove that,

$$\tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_1 a_2} \right) + \tan^{-1} \right.$$

$$\left(\frac{d}{1+a_2 a_3} \right) + \dots + \tan^{-1}$$

$$\left(\frac{d}{1+a_n a_{n-1}} \right) = \left(\frac{a_n - a_1}{1+a_1 a_2} \right)$$

Proof:-

$$\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_1 a_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a_2 - a_1}{1+a_1 a_2} \right)$$

$$\tan^{-1} a_2 - \tan^{-1} a_1 \rightarrow$$

1

III ly,

$$\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_2 a_3} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a_3 - a_2}{1+a_2 a_3} \right)$$

$$\tan^{-1} a_3 - \tan^{-1} a_2 \rightarrow$$

2

Continuing:-

$$\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_n a_{n-1}} \right) =$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{a_n - a_{n-1}}{1+a_n a_{n-1}} \right)$$

$$\tan^{-1} a_n - \tan^{-1} a_{n-1} \rightarrow$$

3

Adding equations 1, 2 and 3 We get

$$\left[\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_1 a_2} \right) + \tan^{-1} \right.$$

$$\left(\frac{d}{1+a_2 a_3} \right) + \dots + \tan^{-1}$$

$$\left(\frac{d}{1+a_n a_{n-1}} \right)$$

$$= \tan^{-1} a_2 - \tan^{-1} a_1 + \tan^{-1} a_3 - \tan^{-1}$$

$$a_2 + \dots + \tan^{-1} a_n - \tan^{-1} a_{n-1}$$

$$= \tan^{-1} a_n - \tan^{-1} a_1$$

Then,

$$\tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{d}{1+a_1 a_2} \right) + \right.$$

III. FIVE MARK QUESTIONS AND ANSWER .

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) + \dots + \left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) \\ = \tan [\tan^{-1} a_n - \tan^{-1} a_1] \\ = \tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{a_na_1}{1+a_na_1}\right)\right] \\ = \left(\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_2}\right) \end{aligned}$$

Hence the proved.

$$\begin{aligned} 2. \text{slove } \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \\ \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \\ \Pi/4 \\ \tan^{-1}\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \left(\frac{x+1}{x+2}\right) / 1 - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right] \\ = \Pi/4 \\ \frac{x^2+x-2x-2+x^2-x+2x-2}{1 - \frac{x^2-4}{x^2-x+1}} = \tan(\Pi/4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-4}{-3} &= 1 \\ 2x^2-4 &= -3 \\ 2x^2 &= 1 \\ X^2 &= 1/2 \\ X &= \pm 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{slove : } \cos(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)) = \\ \sin\{\cot^{-1} 3/4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol: we know } \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= \\ \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) &= \cos(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{-----} 1 \\ \text{Let us } \cot^{-1} 3/4 &= \theta \\ \cot \theta &= 3/4 \\ \theta \text{ is active angle then} \\ \sin\{\cot^{-1}(3/4)\} &= 4/5 \text{-----} 2 \\ \text{From equation 1 and 2 equal} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= 4/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &= 5/4 \\ 1+x^2 &= 25/16 \\ x^2 &= 25/16 - 1 \\ x^2 &= 25-16/16 \\ &= 9/16 \end{aligned}$$

$$x = \pm 3/4$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ 4. Prove that , } \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \\ \tan^{-1}z = \tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right] \end{aligned}$$

Proof:-

$$\begin{aligned} \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z &= \\ \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z \\ &= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x+y}{1-xy} + z}{1 - \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)z}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tan^{-1} \cdot \left[\frac{\frac{x+y+z-xyz}{1-xy}}{\left(\frac{1-xy-yz-zx}{1-xy}\right)}\right] \\ &= \tan^{-1} \cdot \left[\frac{X+Y+Z-XYZ}{(1-XY-YZ-ZX)}\right] \end{aligned}$$

Hence the proved

$$5. \text{slove : } 2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-a}{1+a^2}$$

$$\cos^{-1} \frac{1-b^2}{1+b^2}, a>0, b>0$$

Sol:

$$\begin{aligned} 2 \tan^{-1} x &= \cos^{-1} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ 2 \tan^{-1} x &= 2 \tan^{-1} a - 2 \tan^{-1} b \\ &= 2[\tan^{-1} a - \tan^{-1} b] \\ &= 2 \tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \end{aligned}$$

$$X = \frac{a-b}{1+ab}$$

5. இருபரிமான பகுமுறை

வடிவியல் - II

2 MARKS :

1. (2,-1) என்ற புள்ளியை மையமாகவும், (3,6) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க

தீர்வு:

மையம் : (h,k) = (2,-1)

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

இது (3,6) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதால்

$$\rightarrow (3-2)^2 + (6+1)^2 = r^2$$

$$1^2 + 7^2 = r^2$$

$$1 + 49 = r^2$$

$$r^2 = 50$$

$$\textcircled{1} \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 50$$

2. (-4,-2) மற்றும் (1,1) என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனையாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

(x₁,y₁) மற்றும் (x₂,y₂) என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$(x+4)(x-1) + (y+2)(y-1) = 0$$

$$X^2 + 4x - x - 4 + y^2 + 2y - y - 2 = 0$$

$$X^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0$$

இதுவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு.

3. முனை (-1,-2), அச்சு y - அச்சுக்கு இணை மற்றும் (3,6) வழிச்செல்லும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

அச்சு y- அச்சுக்கு இணை என்பதால் தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(x+1)^2 = 4a(x+2) \rightarrow \textcircled{1}$$

இது (3,6) வழிச் செல்வதால்

$$\textcircled{1} \rightarrow (3+1)^2 = 4a(6+2)$$

$$4^2 = 4a(8)$$

$$16 = 32a$$

$$a = \frac{16}{32}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow (x+1)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(y+2)$$

$$X^2 + 2x + 1 = 2y + 4$$

$$X^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

4. குவியங்கள் ($\pm 3,0$) மற்றும் $e = \frac{1}{2}$ உடைய நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரப்படி நெட்டச்சு x-அச்சின் மீதுள்ளது.

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$C.F = ae = 3 \rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$a = 6$$

$$a^2 = 36$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$= 36\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 36\left(\frac{3}{4}\right) = 27 \Rightarrow b^2 = 27$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

5. $9x^2 - 16y^2 = 144$ என்ற அதிபரவளையத்தின் குவியங்கள் காண்க.

தீர்வு:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
 [$\div$ by 144]
 $a^2=16, b^2=16 \Rightarrow a=4, b=3$
 குறுக்கச்சு x-அச்சு, என்பதால்
 முனைகள்: A(h+a, k), A'(h-a, k)
 $A(0+4, 0), A'(0-4, 0)$
 $A(4, 0), A'(-4, 0)$
 குவியங்கள்: S(h+c, k), S'(h-c, k)
 $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$
 $\Rightarrow c=5$
 குவியங்கள்: S (0+5,0) and S'(-5, 0)

 S (5,0) and S'(-5, 0)

3 MARKS

1. $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் நாண்
 $3x + y + 5 = 0$ - ஐ விட்டமாகக் கொண்ட
 வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

$x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டமும்
 $3x + y + 5 = 0$ என்ற நேர்கோடும்
 வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும்
 வட்டத்தின் சமன்பாடு
 $X^2 + y^2 - 16 + \lambda(3x + y + 5) = 0$
 மையம் $(\frac{-3\lambda}{2}, \frac{-\lambda}{2})$,

இது $3x + y + 5 = 0$ மீதுள்ளதால்

$$\begin{aligned}
 3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda}{2} + 5 &= 0 \\
 \frac{-9\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 5 &= 0 \\
 \frac{-10\lambda}{2} + 5 &= 0 \\
 -5\lambda + 5 &= 0 \\
 \Rightarrow \lambda &= 1
 \end{aligned}$$

$$X^2 + y^2 - 16 + \lambda(3x + y + 5) = 0$$

$$X^2 + y^2 + 3x + y - 11 = 0$$

2. (1,1), (2,-1) மற்றும் (3,2) என்ற மூன்று
 புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின்
 சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

வட்டத்தின் பொது சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \rightarrow (1)$$

இது (1,1), (2,1), (3,2) புள்ளிகள் வழிச்
 செல்வதால்

$$(1,1) \Rightarrow (1)^2 + (1)^2 + 2g(1) + 2f(1) + c = 0$$

$$2g + 2f + c = -2 \rightarrow (2)$$

$$(2,-1) \Rightarrow (2)^2 + (-1)^2 + 2g(2) + 2f(-1) + c = 0$$

$$4g - 2f + c = -5 \rightarrow (3)$$

$$(3,2) \Rightarrow (3)^2 + (2)^2 + 2g(3) + 2f(2) + c = 0$$

$$6g + 4f + c = -13 \rightarrow (4)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -2g + 4f = 3 \rightarrow (5)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow \frac{2g + 6f = -8}{0 + 10f = -5} \rightarrow (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow \frac{0 + 10f = -5}{f = \frac{-1}{2}}$$

$$f = \frac{-1}{2}$$

$$f = \frac{-1}{2} \text{ -ஐ } (6) \text{ பிரதியிட}$$

$$2g - 3 = -8$$

$$2g = -8 + 3$$

$$\rightarrow g = \frac{-5}{2}$$

f & g -ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட

$$2\left(\frac{-5}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) + c = -2$$

$$-5 - 1 + c = -2$$

$$C = 4$$

தேவையன் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-5}{2}\right)x + 2\left(\frac{-1}{2}\right)y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5x - y + 4 = 0$$

3) நீள்வட்டத்தின் மையம், குவியங்கள்
 முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகள்
 காண்க $(\frac{x^2}{25}) + (\frac{y^2}{9}) = 1$

தீர்வு:

$$\left(\frac{x^2}{25}\right) + \left(\frac{y^2}{9}\right) = 1$$

Here:

$$a^2 = 25, b^2 = 9$$

$$a = 5, b = 3$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$ae = 5 * \frac{4}{5} = 4 \Rightarrow ae = 4$$

i) மையம் : (0,0)

ii) குவியங்கள் : $(\pm ae, 0) = (\pm 4, 0)$

iii) முனைகள் : $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

iv) இயக்குவரைகள் : $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{4/5} = \pm \frac{25}{4}$

4) $(\frac{x^2}{16}) + (\frac{y^2}{64}) = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $10x - 3y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான தொடுகோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$(\frac{x^2}{16}) + (\frac{y^2}{64}) = 1 \Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 64$$

$$10x - 3y + 9 = 0 \text{ சாய்வு}$$

$$-3y = -10x - 9$$

$$Y = \frac{-10x}{-3} - (\frac{9}{3})$$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{10}{3}$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

$$= \frac{10}{3} x \pm$$

$$\sqrt{16(\frac{100}{9}) - 64}$$

$$= \frac{10}{3} x \pm \sqrt{\frac{1600 - 576}{9}}$$

$$= \frac{10}{3} x \pm \frac{32}{3}$$

$$3y = 10x \pm 32$$

$$10x - 3y \pm 32 = 0$$

5) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு ' t_1 ' என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, பரவளையத்தை மீண்டும் ' t_2 ', என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமெனில் $t_2 = -(t_1 + \frac{2}{t_1})$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$(a t_1^2, 2a t_1)$ -ல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y + x t_1 = a t_1^3, 2a t_1$$

$$\rightarrow y - 2at_1 = -xt_1 + a t_1^3$$

$$Y - 2at_1 = -t_1 (x - at_1^2)$$

$(a t_2^2, 2a t_2)$ பரவளையத்தின் மீதுள்ளதால்

$$2a t_2 - 2a t_1 = -t_1 (a t_2^2, a t_1^2)$$

$$2a(t_2 - t_1) = -at_1 (t_2^2 - t_1^2)$$

$$2a(t_2 - t_1) = -at_1 (t_2 + t_1) (t_2 - t_1)$$

$$2 = -t_1 (t_2 + t_1)$$

$$t_2 + t_1 = \frac{-2}{t_1}$$

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

நிறுபிக்கப்பட்டது.

5 MARKS

1. $4x^2 + 36y^2 + 40x - 288y + 532 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் குவியங்கள் முனைகள் மற்றும் அதன் நெட்டச்சு குற்றச்சு நீளங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

x & y மதிப்புகளை முழுவாக்கமாக்க

$$4x^2 + 36y^2 + 40x - 288y + 532 = 0.$$

$$4(x^2+10x) + 36(y^2-8y) = -532$$

$$4(x^2 + 10x + 5^2 - 5^2) + 36(y^2-8y + 4^2 - 4^2) = -532$$

$$4[(x+5)^2 - 25] + 36[(y-4)^2 - 16] = -532$$

$$4(x+5)^2 + 36(y-4)^2 = -532 + 100 + 576 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

$$a^2=36, b^2=4$$

இது ஒரு நீள்வட்டம் நெட்டச்சு x-அச்சுக்கு இணையானது

$$\text{மையம் : } x+5 = 0$$

$$y-4 = 0$$

$$x = -5$$

$$y = 4$$

$$C(-5, 4) = (h, k)$$

$$\text{முனைகள் : } (h \pm a, k)$$

$$= (-5 + 6, 4), (-5 - 6, 4)$$

$$= (1, 4), (-11, 4)$$

$$\text{குவியங்கள் : } (h \pm c, k)$$

$$\text{இங்கு } C^2 = a^2 + b^2$$

$$= 36 - 4$$

$$= 32$$

$$C = \sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

$$\text{குவியங்கள் : } (-5-4\sqrt{2}, 4), (-5+4\sqrt{2}, 4)$$

$$\text{நெட்டச்சின் நீளம்} = 2a = 2(6) = 12 \text{ units}$$

$$\text{குற்றச்சின் நீளம்} = 2b = 2(2) = 4 \text{ units}$$

2. ஒரு வழிப்பாதையில் உள்ள ஆரை நீள்வட்ட வளைவின் உயரம் 3மீ மற்றும் அகலம் 12மீ ஒரு சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3மீ மற்றும் உயரம் 2.7மீ எனில் இந்த வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியுமா?

தீர்வு:

படத்திலிருந்து

$$a=6, b=3$$

$$\text{நீள்வட்ட சமன்பாடு, } \left(\frac{x^2}{6^2}\right) + \left(\frac{y^2}{3^2}\right) = 1 \rightarrow \textcircled{1}$$

மையத்திலிருந்து 1.5மீ (3/2 மீ) தூரத்தில் வளைவின் உயரம் காண $x = \frac{3}{2}$ என பிரதியிட

$$\textcircled{1} \rightarrow \left(\frac{(1.5)^2}{36}\right) + \left(\frac{y^2}{9}\right) = 1$$

$$\left(\frac{y^2}{9}\right) = 1 - \left(\frac{(3/2)^2}{36}\right)$$

$$Y^2 = 9\left(1 - \left(\frac{9}{144}\right)\right)$$

$$= 9\left(\frac{9(135)}{144}\right)$$

$$= \left(\frac{135}{16}\right)$$

$$Y = \sqrt{\left(\frac{135}{16}\right)}$$

$$= \left(\frac{11.62}{4}\right)$$

$$= 2.90$$

இதனால் வளைவின் மையத்திலிருந்து 1.5மீ தூரத்தில் வளைவின் உயரம் 2.90மீ எனவே வாகனம் செல்லும்.

3. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் 60மீ சாலைப்பகுதிக்கு பரவளைய கம்பி வடம் படத்தில் உள்ளவாறு

பொறுத்தப்பட்டுள்ளது. செங்குத்து கம்பி வடங்கள் சாலைப்பகுதியில் ஒவ்வொன்றுக்கும் 6மீ இடைவெளி இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது முனையிலிருந்து முதல் இரண்டு செங்குத்து கம்பி வடங்களுக்கான நுளத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{முனை} = (h, k)$$

$$= (0, 3)$$

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

$$X^2 = 4a(y-3) \rightarrow \textcircled{1}$$

(30,16) பரவளையத்தின் மீதுள்ளதால்

$$30^2 = 4a(16-3)$$

$$= 4a(13)$$

$$a = \left(\frac{30 \cdot 30}{4 \cdot 13} \right) \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow x^2 = 4 \left(\frac{30 \cdot 30}{4 \cdot 13} \right) (y-3)$$

$$X^2 = \left(\frac{30 \cdot 30}{13} \right) (y-3) \rightarrow \textcircled{3}$$

i) x = 6 எனில்

$$\textcircled{3} \rightarrow 36 = \left(\frac{30 \cdot 30}{13} \right) (y-3)$$

$$(y-3) = \left(\frac{36 \cdot 13}{30 \cdot 30} \right) = \left(\frac{52}{100} \right) = 0.52$$

$$Y = 3 + 0.52$$

$$Y = 3.52 \text{ மீ}$$

ii) x=12 எனில்

$$\textcircled{3} \rightarrow 144 = \left(\frac{30 \cdot 30}{13} \right) (y-3)$$

$$(y-3) = \left(\frac{144 \cdot 13}{30 \cdot 30} \right) = \left(\frac{208}{100} \right) =$$

$$2.08$$

$$Y = 3 + 2.08$$

$$Y = 5.08 \text{ மீ}$$

4. ஒரு அணு உலை குளிருட்டும் நூணின் குறுக்கு வெட்டு அதிபரவிளைய வடிவில் உள்ளது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $\left(\frac{x^2}{(30)^2} \right) + \left(\frac{y^2}{(44)^2} \right) = 1$ தூண் 150மீ உயரமுடையது. மேலும், அதிபர விளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேற்பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுத் மற்றும் அடிப்பகுதியி விட்டங்களை காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டது

$$p+2p = 150$$

$$3p = 150$$

$$P=50$$

தூணின் மேற்பகுதியின் தூரம் = 50மீ

தூணின் அடிப்பகுதியின் தூரம் = 100மீ

$$\left(\frac{x^2}{(30)^2} \right) + \left(\frac{y^2}{(44)^2} \right) = 1 \rightarrow \textcircled{1}$$

i) y=50 எனில்

$$\textcircled{1} \rightarrow \left(\frac{x^2}{(30)^2} \right) + \left(\frac{y^2}{(44)^2} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{(30)^2} \right) = 1 + \left(\frac{(50)^2}{(44)^2} \right)$$

$$\left(\frac{x^2}{(30)^2} \right) = 1 + \left(\frac{2500}{1936} \right) =$$

$$\left(\frac{4436}{1936} \right) = 2.291$$

$$\Rightarrow x^2 = 30^2 \cdot 2.291$$

$$\Rightarrow x = 30\sqrt{2.291}$$

$$\Rightarrow = 30 * (2.4839)$$

$$\Rightarrow x = 74.51m$$

ii) $y = 100$ எனில்

$$\textcircled{1} \rightarrow \left(\frac{x^2}{(30)^2}\right) + \left(\frac{(100)^2}{(44)^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^2}{(30)^2}\right) = 1 + \left(\frac{10000}{1936}\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{(30)^2}\right) = \left(\frac{11936}{1936}\right) = 6.17$$

$$x^2 = 30^2 * 6.17$$

$$x = 30\sqrt{6.17} = 30 * (2.4839)$$

$$x = 74.51m$$

The diameter of the top = 45.41m

The diameter of the base = 74.51m.

5. A, B என்ற இரு புள்ளிகள் 10கி.மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இரதப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச்சத்தத்திலிருந்து வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் A என்ற புள்ளி B என புள்ளியைவிட 6.கி.மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபித்து அதன் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு:

$$sp - s'p = 6 \Rightarrow 2a = 6$$

$$a = 3$$

$$a^2 = 9$$

ss' -ன் மையம் c (0,0)

Then equation

$$\text{இதன் சமன்பாடு } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$cs = 5 \Rightarrow ae = 5$$

$$3e = 5$$

$$e = \frac{5}{3}$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$= 9 \left(\frac{25}{9} - 1\right)$$

$$= 9 \left(\frac{16}{9}\right)$$

$$b^2 = 16$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

இது ஒரு அதிபரவளையம் ஆகும்.

6.வெக்டர் இயற்கணிதம்

பிரிவு - ஆ

1). A(2, -1, 3) B(4, 2, 1) இரு புள்ளி
வழி செல்லும் கோட்டில் கார்சியம்
சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$$x_1 = 2, y_1 = -1, z_1 = 3$$

$$x_2 = 4, y_2 = 2, z_2 = 1$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-(-1)}{2-(-1)} = \frac{z-3}{1-3}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

$$2). \vec{r} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) = 7 \text{ மற்றும்}$$

$$\vec{r} \cdot \left(\lambda \vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} \right) = 26 \text{ இரு தளங்கள்}$$

செங்குத்து எனில் λ - ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) = 7,$$

$$\vec{n}_1$$

$$\vec{r} \cdot \left(\lambda \vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} \right) = 26$$

$$\vec{n}_2$$

$$\text{இரு தளங்கள் செங்குத்து } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) \cdot \left(\lambda \vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k} \right) = 0$$

$$\lambda + 4 - 21 = 0$$

$$\lambda - 17 = 0, \lambda = 17$$

3). இரண்டு நேர்க்கோடுகளுக்கு

$$\text{இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் காண்க } \frac{x+4}{3}$$

$$= \frac{y-7}{4} = \frac{z+5}{5},$$

$$\vec{r} = 4\vec{k} + t \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

தீர்வு :

$$\cos \theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| |\vec{d}|} = \frac{(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{6 + 4 + 5}{\sqrt{9 + 16 + 25} \sqrt{4 + 1 + 1}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{50} \sqrt{6}} = \frac{15}{5\sqrt{2}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

4). $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ எனில்

$$\vec{i} * \left(\vec{a} * \vec{i} \right) + \vec{j} * \left(\vec{a} * \vec{j} \right) + \vec{k} * \left(\vec{a} * \vec{k} \right)$$

$$= 2\vec{a} \text{ என நிரூபி.}$$

தீர்வு :

$$\vec{a} * \left(\vec{b} * \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c}$$

$$\therefore \vec{i} * \left(\vec{a} * \vec{i} \right) = \left(\vec{i} \cdot \vec{i} \right) \vec{a} - \left(\vec{i} \cdot \vec{a} \right) \vec{i} =$$

$$\vec{a} - a_1 \vec{i}$$

$$\therefore \vec{j} * \left(\vec{a} * \vec{j} \right) = \left(\vec{j} \cdot \vec{j} \right) \vec{a} - \left(\vec{j} \cdot \vec{a} \right) \vec{j} =$$

$$\vec{a} - a_2 \vec{j}$$

$$\therefore \vec{k} * \left(\vec{a} * \vec{k} \right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{k} \right) \vec{a} - \left(\vec{k} \cdot \vec{a} \right) \vec{k} =$$

$$\vec{a} - a_3 \vec{k}$$

$$= 3\vec{a} - \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \right)$$

$$= 3\vec{a} - \vec{a}$$

$$= 2\vec{a}$$

5). (2,3,4), (-1,4,5) (8,1,2) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

இரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z-4}{5-4}$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1} \quad (x,y,z) \text{ புள்ளிகள்}$$

(8,1,2) என பிரதியிட

$$\Rightarrow \frac{8-2}{-3} = \frac{1-3}{1} = \frac{2-4}{1}$$

$$\frac{6}{-3} = -2 = -2$$

$$-2 = -2 = -2 \Rightarrow \text{இவை ஒரு கோடமைவனவாகும்}$$

பிரிவு :

1). $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ வெக்டர் முறையில் நிரூபி.

தீர்வு :

$$\text{Let } \vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\vec{a} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{b} = \cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}$$

$$\vec{b} * \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} * \vec{a} = \vec{k} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{b} * \vec{a} = \left| \vec{b} \right| \left| \vec{a} \right| \sin(\alpha + \beta) \vec{k} \quad \text{---- (2)}$$

sum (1) and (2)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2). \vec{r} = \left(\frac{\vec{a}}{2i} + \frac{\vec{b}}{3j} + \frac{\vec{c}}{4k} \right) + t \left(-\frac{\vec{a}}{2i} + \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{2k} \right)$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

இடைப்பட்ட தூரம் காண்க.

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{2i} + \frac{\vec{b}}{3j} + \frac{\vec{c}}{4k}, \vec{b} = -\frac{\vec{a}}{2i} + \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{2k}$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{3i} - \frac{\vec{b}}{2k}, \vec{d} = \frac{\vec{a}}{2i} - \frac{\vec{b}}{j} + \frac{\vec{c}}{2k}$$

$$\vec{b} \text{ யும் } \vec{d} \text{ யும் இணை}$$

$$\vec{c} - \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{3i} - \frac{\vec{b}}{2k} - \frac{\vec{a}}{2i} - \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{4k}$$

$$\vec{c} - \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{i} - \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{6k}$$

$$\therefore d = \frac{\left| \left(\frac{\vec{a}}{i} - \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{6k} \right) * \vec{b} \right|}{\left| \vec{b} \right|}$$

$$\left(\frac{\vec{a}}{i} - \frac{\vec{b}}{3j} - \frac{\vec{c}}{6k} \right) * \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\vec{a}}{12i} + \frac{\vec{b}}{14j} - \frac{\vec{c}}{5k}$$

$$\left| \vec{b} \right| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$d = \frac{\left| \frac{\vec{a}}{12i} + \frac{\vec{b}}{14j} - \frac{\vec{c}}{5k} \right|}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{144+196+25}}{3} = \frac{\sqrt{365}}{3}$$

3). மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஐ பயன்படுத்தி வெக்டர் முறையில் நாக்ரம் ABCD ன் பரப்பு (காண்க) $\frac{1}{2}$

$\left| \vec{AC} \times \vec{BD} \right|$ என நிரூபி.

தீர்வு :

நாக்ரம் ABCD ன் பரப்பு

$$= \text{பரப்பு} [\Delta ABC + \Delta ACD]$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{AB} \times \vec{AC}) + \frac{1}{2} (\vec{AC} \times \vec{AD})$$

$$= \frac{1}{2} (-\vec{AC} \times \vec{AB}) + \frac{1}{2} (\vec{AC} \times \vec{AD})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times (-\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times (\vec{BA} + \vec{AD})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{AC} \times \vec{BD})$$

$$\text{Area of quadrilateral ABCD} = \frac{1}{2} \left| \vec{AC} \times \vec{BD} \right|$$

4). $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியின் பிம்பம் புள்ளிகள்

$\vec{r} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 38$ என்ற தளத்தில் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, p=38$$

பிம்பப் புள்ளி $\vec{v}$ ன் நிலைவெக்டர்

$$\vec{v} = \vec{u} + 2 \frac{[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})]}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= 1 + 4 + 12 = 17$$

$$|\vec{n}|^2 = (1)^2 + (2)^2 + (4)^2$$

$$= 1 + 4 + 16 = 21$$

$$\vec{v} = \frac{(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + 2 \left(\frac{(38-17)}{21} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \right)}{21}$$

$$= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + 2 (21) \frac{(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{21}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

1). A(3, -1, 2) B(1, -1, -3) மற்றும் C(4, -3, 1) Δ த்தில் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{OA} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k},$$

$$\vec{OC} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} - 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\Delta \text{ த்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} (0 - 10) - \vec{j} (2 + 5) + \vec{k} (4 - 0)$$

$$= -10\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{(-10)^2 + (-7)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{100 + 49 + 16} = \sqrt{165}$$

$$\Delta \text{ த்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \sqrt{165} \text{ ச.அ.}$$

2). Let $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ be unit vector

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ and the angle

between $\vec{b}$ and $\vec{c}$ is $\frac{\pi}{6}$. Prove that

$$\vec{a} = \pm 2(\vec{b} \times \vec{c})$$

Sol.

$$\text{Given } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{and } \vec{a} \perp \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp r \text{ to}$$

$$(\vec{b} \text{ and } \vec{c}) \Rightarrow \vec{b} \text{ and } \vec{c} \text{ are parallel}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left| \vec{b} \right| \left| \vec{c} \right| \sin \theta \text{ since } \vec{b} \text{ and } \vec{c} \text{ are parallel}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = 1 \times 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \vec{a}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\vec{a} = 2(\vec{b} \times \vec{c})$$

1). $x + 1 = 2y = -12z$ மற்றும்

$x = y + 2 = 6z - 6$ இவை ஒரு தளத்தில் அமையாக் கோடுகள் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\frac{x+1}{1} = 2y = -12z \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{-1}{12}} \text{ ---(1)}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{6z-6}{1} = \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{\frac{1}{6}} \text{ ----(2)}$$

$$\vec{a} = -\vec{i}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{12}\vec{k}$$

$$\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{k}$$

$$\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k}$$

$$\vec{c} - \vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k} + \vec{i} = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ 1 & 1 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) - \vec{j} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) + \vec{k} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \frac{2}{12}\vec{i} - \frac{3}{12}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \frac{1}{6}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

$$(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$$

$$= \left(\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + 1$$

$$= \frac{7}{6} \neq 0 \text{ இவை ஒரு தளத்தில் அமையாக் கோடுகள்}$$

$$2). \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{k}\vec{k}, \vec{b} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2j} + \frac{1}{2k},$$

$$\vec{c} = \frac{1}{3i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{3k} \text{ ஒரு தள வெக்டர் என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{k}\vec{k}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2j} + \frac{1}{2k}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{3i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{3k}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-6-2) - 3(3-6) + 1(1+6)$$

$$= 2(-8) - 3(-3) + 1(7)$$

$$= -16 + 9 + 7$$

= 0 இவை ஒரு தள வெக்டர்கள்

3). (2,3,6) புள்ளி வழி செல்வதும்

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1} \text{ மற்றும்}$$

$\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{-3}$ இவற்றிற்கு இணையாக கொடுத்தும் துணையாக ஆகாத வெக்டர் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{b} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{c} = \left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{b} * \vec{c} \right) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-9+5) - \vec{j}(-6-2) + \vec{k}(-10-6) \\ &= -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$\left(\vec{r} - \vec{a} \right) * \left(\vec{b} * \vec{c} \right) = \left(\vec{r} - \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) \right) * \left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right) = 50$$

$$\vec{r} * \left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right) = (-8 + 24 - 96) = 50$$

$$-4x + 8y - 16z = -80$$

$$\div \text{ by } -4 \Rightarrow x + 2y + 4z = 20$$

$$x - 2y + 4z - 20 = 0$$

4). (2,2,1) (9,3,6) என்ற ஒரு புள்ளி வழிக் பணித்தும் $2x + 6y + 6z = 9$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக செல்லக் கூடிய கோட்டில் வெக்டர் மற்றும் கார்டிசியம் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{b} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{c} = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$$

வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\vec{r} = (1-s)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + s\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) + t\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

கார்டிசியம் சமன்பாடுகள் =

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 9-2 & 3-2 & 6-1 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(6-30) - (y-2)(42-10) + (z-1)(42-2) = 0$$

$$(x-2)(-24) - (y-2)(32) + (z-1)(40) = 0$$

$$-24x + 48 - 32y + 64 + 40z - 40 = 0$$

$$\div \text{ by } -8 \Rightarrow 3x + 4y - 5z - 9 = 0$$

5). ஒரு முக்கோணத்தின்

உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிரூபி.

தீர்வு :

ΔABC

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OC} = \vec{c}$$

$$\vec{AD} \perp \text{r to } \vec{BC} \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{a} * \left(\vec{c} - \vec{b} \right) = 0$$

$$\left(\vec{a} * \vec{c} \right) - \left(\vec{a} * \vec{b} \right) = 0 \quad \text{-- (1)}$$

$$\vec{BE} \perp \text{r to } \vec{CA} \Rightarrow \vec{OB} \perp \vec{CA}$$

$$\Rightarrow \vec{b} * \left(\vec{a} - \vec{c} \right) = 0$$

$$\left(\vec{a} * \vec{b} \right) - \left(\vec{b} * \vec{c} \right) = 0 \quad \text{-- (2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \left(\vec{a} * \vec{c} \right) - \left(\vec{b} * \vec{c} \right) = 0$$

$$\left(\vec{c} \right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b} \right) = 0$$

$$\vec{OC} \perp \text{r to } \vec{BA}$$

$$\vec{CF} \perp \text{r to } \vec{BA}$$

△த்தின் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

7.

வகைநுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

2 marks

1). $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3$ எனும் விதிப்படி ஒரு துகள் நகரும் தூரம் அமைகின்றது எந்தெந்த நேரங்களில் அதன் திசைவேகமும் முடுக்கமும் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் ?

$$S(t) = \frac{3t^3}{3} - t^2 + 3$$

$$v : S'(t) = \frac{3t^2}{3} - 2t$$

$$a : S''(t) = 2t - 2$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$$t=0, \text{ மற்றும் } t=2$$

$\therefore t = 0, 2$ எனும் போது திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் .

$$t = 0, 2$$

$$S''(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0$$

$$2t = 2$$

$$t = 1$$

$\therefore t = 1$ எனும் போது முடுக்கம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும்.

2) $Y = x^4 + 2e^x$ வளைவரைக்கு (0, 2) புள்ளியில் தொடுகோடு, செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$y = x^4 + 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2e^x$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right) (0,2) = 4(0) + 2e^0$$

$$m = 0 + 2(1)$$

$$m = 2$$

(0,2) -ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x - 0)$$

$$y - 2 = 2x$$

$$\Rightarrow 2x - y + 2 = 0$$

(0,2) - ல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு.

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$2(y - 2) = -1(x)$$

$$2y - 4 = -x$$

$$\therefore X + 2y - 4 = 0$$

3). $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பிற்கு a, b யை முழுஎண்களாக கொண்ட முடிய இடைவெளி [a,b] ல் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி இறுதி மதிப்பு $\sqrt{ab}$ - என நிறுவுக

$F(x)$ ஆனது [a,b] ல் தொடர்ச்சியானது (a,b) - ல் வகையிடத்தக்கது .

$\therefore$ சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின்படி $C \in (a, b)$ ஆனது.

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad - (1) \text{ என்று இருக்கும்.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{-1}{c^2}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{c^2} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{a}\right)}{b-a}$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{b} \right) - \left(\frac{1}{a} \right)$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{a-b}{ba} \right]$$

$$= \frac{1}{a-b} \left[\frac{a-b}{ba} \right]$$

$$-\frac{1}{c^2} = ab$$

$$\therefore c = \sqrt{ab}$$

4). $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ சார்பிற்கு $[-1, 2]$ இடைவெளியில் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சறு அறுதி மதிப்புகளைக் காண்க.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$= 12x^2 (x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 (x-1) = 0$$

$$\rightarrow x=0, x=1$$

நிலைப்புள்ளிகள் $x = 0, 1$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$f(0) = 3(0) - 4(0) = 0$$

$$f(1) = 3(1) - 4(1) = 3-4 = -1$$

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 = 3(1) - 4(-1)$$

$$= 3+4 = 7$$

$$f(2) = 3(2)^4 - 4(2)^3$$

$$= 3(16) - 4(8)$$

$$= 48 - 32 = 16$$

மீப்பெரு பெருமம் = 16

மீச்சறு சிறுமம் = -1

5). $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ வளைவரைக்கு

தொலைத்தொடுகோடுகளைக் காண்க.

$$x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2-1$$

$$x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$= \frac{(-1)^2}{(-1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1, x = -1$ ஆகியவை நிலைக்குத்து தொடுகோடுகள்.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1-0}$$

$$= 1$$

$y=1$ என்பது கிடைமட்ட தொலைத்தொடுகோடு ஆகும்.

3 marks

1). $x^2 - y^2 = r^2$ மற்றும் $xy = c^2$ என்று வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் எனக்காட்டுக

c, r ஆகியவை மாறிலிகள்.

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (x, y) என்க.

$$x^2 - y^2 = r^2$$

x - யைப் பொறுத்து வகையிட

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-2y}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)} = \frac{x_1}{y_1}$$

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (x₁, y₁)

$$xy = c^2$$

$$Y = \frac{c^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c^2}{x^2}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)} = \frac{-c^2}{x_1^2}$$

$$m_1 m_2 = \left(\frac{x_1}{y_1} \right) \left(\frac{-c^2}{x_1^2} \right)$$

$$= \frac{-c^2}{x_1 y_1}$$

$$= \frac{-c^2}{c^2} \Rightarrow [x_1, y_1 = c^2]$$

$$m_1 m_2 = -1.$$

∴ வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும்.

2). log (1+x) ன் மெக்லாரனின் விரிவை

-1 < x ≤ 1 ல் நான்கு பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

	log(1+x)-ம் அதன் வகைக்கெழுக்களும்	x=0 -ல் மதிப்பு
f(x)	log(1+x)	log 1 = 0
f'(x)	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+0} = 1$
f''(x)	$\frac{-1}{(1+x)^2}$	$\frac{-1}{(1+0)^2} = -1$
f'''(x)	$\frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$	$\frac{2}{(1+0)^3} = 2$
f ^{IV} (x)	$\frac{2(-3)}{(1+x)^4} = \frac{-6}{(1+x)^4}$	$\frac{-6}{(1+0)^4} = -6$

மெக்லாரனின் விரிவு.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

$$\log (1+x) = 0 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(-6) + \dots$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1*2} + \frac{2x^3}{1*2*3} - \frac{6x^4}{1*2*3*4} + \dots$$

$$\log (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$3) \text{ மதிப்பிடுக : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$\text{Let } g(x) = (\sin x)^{\tan x}$$

$$\log g(x) = \log (\sin x)^{\tan x}$$

$$= \tan x \cdot \log (\sin x)$$

$$\log g(x) = \frac{\log (\sin x)}{\cot x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log (\sin x)}{\cot x}$$

$$\left(\frac{0}{0} \right) \text{ வடிவம்}$$

லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\cos x \sin x)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log g(x) = -(\infty)(1)$$

$$\log \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = e^0 = 1$$

4). இரண்டு மிகைஎண்களின் கூடுதல் 12 மேலும் பெருக்குத்தொகை பெருமம் எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.

இரு எண்கள் x, y என்க

$$\text{கூடுதல்} = 12$$

$$x+y=12$$

$$y = 12-x$$

பெருக்குத்தொகை :

$$A = xy$$

$$A = x(12-x)$$

$$A(x) = 12x - x^2$$

$$A'(x) = 12 - 2x$$

$$A''(x) = -2$$

பெருமம் நிபந்தனை $A'(x) = 0$

$$\Rightarrow 12 - 2x = 0$$

$$-2x = -12$$

$$\therefore x = 6$$

$$x=6 \text{ எனில் } A(x) = -2 < 0$$

$x=6$ -ல் $A(x)$ பெருமம் அடைகிறது

$$x=6 \Rightarrow y = 12 - 6, y = 6$$

தேவையான எண்கள் = 6, 6

$$\text{பெரும மதிப்பு} = xy$$

$$= (6)(6)$$

$$= 36$$

5) $F(x) = x(x+3) e^{-\frac{\pi}{2}}$, $-3 \leq x \leq 0$ என்ற வளைவரைக்கு x அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோட்டின் தொடும்

புள்ளியின் x ன் மதிப்பு $(-3, 6)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் என நிறுவுக.

$$\text{i.e } f(x) = (x^2+3x) e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$f'(x) = (2x+3) e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$f(x)$ ஆனது $[-3, 0]$ -ல் தொடர்சியானது

$(-3, 0)$ -ல் வகையிடத்தக்கது

$$f(-3) = f(0) = 0 \text{ ரோலின் தேற்றப்படி}$$

$c \in (-3, 0)$ யை $f'(c) = 0$ எனுமாறு காணலாம்

$$\therefore (2c+3) e^{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$2c + 3 = 0$$

$$2c = -3$$

$$c = -\frac{3}{2} = -1.5 \in (-3, 0)$$

$\therefore x = -1.5$ புள்ளியின் வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்

5 marks

கோளவடிவில் உள்ள ஒரு ஊதுபையில் காற்றினை வினாடிக்கு 1000 செமீ³ எனும் விதத்தில் நாம் ஊதினால் ஆரம் 7 செமீ எனும்போது ஊதுபையின் ஆரத்தின் மாறுபாட்டு வீதம் என்ன? மேலும் மேற்பரப்பு மாறுபாட்டு வீதத்தையும் கணக்கிடுக.

* கோளவடிவ ஊதுபையின் ஆரம் r என்க

$$\text{கன அளவு: } v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi (3r^2 \frac{dr}{dt})$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

: கணக்கின்படி $r = 7$ செமீ, $\frac{dv}{dt} = 1000$ செமீ³

$$(1) \Rightarrow 1000 = 4\pi (7)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1000}{4\pi(7)^2} \\ &= \frac{250}{49\pi} \text{ செமீ/ வினாடி} \end{aligned}$$

ஆரத்தின் மாறுபாட்டு விதம்: $\frac{250}{49\pi}$ செமீ/ வினாடி

கோளத்தின் மேற்பரப்பு: $S = 4\pi r^2$

$$\frac{ds}{dt} = 4\pi (2r \frac{dr}{dt})$$

$$= 8\pi (7) \left(\frac{250}{49\pi}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2000}{7}$$

பரப்பளவின் மாறுபாட்டு வீதம்

$$\frac{2000}{7} \text{ செமீ}^2/\text{வினாடி}$$

2) $y = x^2$ மற்றும் $y = (x-3)^2$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

$$x = x^2 \quad (1)$$

$$x = (x-3)^2 \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$x^2 = (x-3)^2$$

$$x^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$6x = 9$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = x^2 \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9/4$$

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)} = 2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$m_1 = 3$$

$$Y = (x - 3)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3)$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)} = 2\left(\frac{3}{2} - 3\right)$$

$$m_2 = 2\left(\frac{3-6}{2}\right)$$

$$m_2 = -3$$

கோணம் θ என்க

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{3 - (-3)}{1 + (3)(-3)} \right|$$

$$= \left| \frac{3+3}{1-9} \right|$$

$$= \left| \frac{6}{-8} \right|$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

3) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ என்ற சார்பிற்கு ஓரியல்பு இடைவெளிகள், இடஞ்சார்ந்த அறுதிமதிப்பு காண்க.

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$$

$$f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

$$f'(x) = 6(2x^2 + x - 1)$$

$$f'(x) = 6(x+1)(2x-1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 6(x+1)(2x-1) = 0$$

$$x = -1, \text{ or } 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

நிரைப்புள்ளிகள் $x = -1, \frac{1}{2}$

இடைவெளிகள் : $(-\infty, -1), (-1, 1/2), (-1/2, \infty)$

இடைவெளி	$(-\infty, -1)$ $x = -2$	$(-1, 1/2)$ $x = 0$	$(1/2, \infty)$ $x = 1$
$f'(x)$ இன்குறி $6(x+1)(2x-1)$	$(-)(-)=+$	$(-)(+)= -$	$(+)(+)= +$
ஒரியல்பு தன்மை	திட்டமாக ஏறும்	திட்டமாக இறங்கும்	திட்டமாக ஏறும்

$f(x)$ $(-\infty, -1)$, மற்றும் $(1/2, \infty)$, ல் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும் $(-1, 1/2)$ $F(x)$ திட்டமாக இறங்கும்

$f'(x)$ ன் குறி $x = -1$ ல் மிகையிலிருந்து குறையாக மாறுவதால்

$$\left. \begin{aligned} &\text{இடஞ்சார்ந்த பெருமதிப்பு} \\ &= f(-1) \\ &= 4(-3)^3 + 3(-1)^2 \\ &- 6(-1) + 1 \\ &= -4 + 3 + 6 + 1 \\ &= 6 \end{aligned} \right\}$$

$f'(x)$ ன் குறி $\frac{1}{2}$ -ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறுவதால்

$$\begin{aligned} &\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமதிப்பு} = f(1/2) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 4\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) - 3 + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 2$$

$$= \frac{2+3-8}{4}, = -\frac{3}{4}$$

5) ஒரு செவ்வக வடிவிலான பக்கத்தில் 24 செமீ² அளவிற்கு அச்சிடப்பட்டதுள்ளது. மேற்புற மற்றும் கீழ்ப்புற ஓரங்கள் 1.5 செமீ அளவிலும் மற்ற பக்கங்களின் ஓரங்கள் 1 செமீ அளவிலும் இடைவெளி விடப்பட்டுள்ளது. காகித பக்கத்தின் குறைந்த பரப்பளவிற்கு அதன் நீள, அகலங்கள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்.

அச்சிடப்பட்ட பக்கத்தின் நீளம் x அகலம் y என்க

$$\text{காகிதத்தின் நீளம்} = x + 2$$

$$\text{காகிதத்தின் அகலம்} = y + 3$$

$$\text{பரப்பு: } A = (x + 2)(y + 3)$$

$$A = xy + 3x + 2y + 6$$

$$\text{கணக்கின்படி } xy = 24$$

$$y = 24/x$$

$$\therefore A = 24 + 3x + 2\left(\frac{24}{x}\right) + 6$$

$$A(x) = 3x + \frac{48}{x} + 30$$

$$A'(x) = 3 - \frac{48}{x^2}$$

$$A''(x) = \frac{(-48)(-2)}{x^3} = \frac{96}{x^3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{48}{x^2} = 0$$

$$3 = \frac{48}{x^2}$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$x = 4 \text{ எனில், } A''(x) = \frac{96}{4^3} > 0$$

$\therefore x = 4$ எனில் $A(x)$ சிறுமம் அடைகிறது.

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{24}{x} = \frac{24}{4} = 6$$

குரைந்த பரப்பளவிற்கு தேவையான

$$\text{நீளம்} = x + 2 = 4 + 2 = 6 \text{ செமீ}$$

$$\text{அகலம்} = y + 3 = 6 + 3 = 9 \text{ செமீ}$$

6) $y = f(x) = x^2 - x - 6$ என்ற
வளைவரையை வரைக.

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

$$\Rightarrow y = (x - 3)(x + 2)$$

1. சார்பகம்: $(-\infty, \infty)$

2. வெட்டுத்துண்டுகள்:

$$y = 0 \Rightarrow \text{வெட்டுத்துண்டுகள் } x = 3, x = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{வெட்டுத்துண்டுகள் } y = -6$$

$$x \text{ வெட்டுத்துண்டுகள்: } (3, 0), (-2, 0)$$

$$y \text{ வெட்டுத்துண்டுகள்: } = (0, -6)$$

$$3. f'(x) = 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ ல் நினைப்புள்ளி அமையும்

$$4. f''(x) = 2 > 0 \neq x$$

$\therefore x = \frac{1}{2}$, ல் $f(x)$ சிறும மதிப்பை அடையும்

$$\text{சிறும மதிப்பு} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(1)^2}{(2)} - \left(\frac{1}{2}\right) - 6$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6$$

$$= \frac{1 - 2 - 24}{4} = \frac{-25}{4}$$

$$5. f(x) \text{ ன் வீச்சகம் } Y \geq -\frac{25}{4}$$

6. $f''(x) = 2, \neq x$ என்பதால் மெய்எண்
நேர்க்கோடு முழுமையிலும் மேல்நோக்கி
குழிவு ஆகும்

7. $f(x)$ வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் இல்லை

8. தொலைத்தொடுகோடுகள் இல்லை.

8. வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

2 மதிப்பெண் வினா விடைகள்

1) $f(x) = x^2 + 3x$ என்ற சார்பில் df காண்க மற்றும் $x=3$ மற்றும் $dx = 0.02$. எனும்போது df ஐக் மதிப்பிடுக.

$$f(x) = x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 2x + 3$$

$$\rightarrow df = (2 \cdot 3 + 3) 0.02$$

$$= 9(0.02) \quad [\because f'(x) = \frac{df}{dx}]$$

$$df = 0.18$$

2)பின்வரும் சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க
 $f(x) = x^3 - 5x + 12$, $x_0 = 2$.

Soln;

$$f(x_0) = 2^3 - 5(2) + 12$$

$$= 8 - 10 + 12$$

$$f(x_0) = 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'(0) = f'(2) = 3(2)^2 - 5$$

$$= 3(4) - 5 = 7$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 10 + 7(x - 2) \Rightarrow 10 + 7x - 14 \Rightarrow 7x - 4$$

3) $v(x, y, z) = xy + yz + zx$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. எனில் வகையீடு dv ஐக் காண்க.

Soln:

$$v(x, y, z) = xy + yz + zx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y + 0 + z = y + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + z + 0 = x + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + y + x = y + x$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dv = (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$$

4) ஒரு குறிப்பிட்ட பறவையின் முட்டை கிட்டத்தட்ட கோள வடிவமாக உள்ளது. முட்டையின் ஆரம் ஒட்டிற்கு உள்ளே 5 மிமீ ஆகவும் ஒட்டிற்கு வெளியே 5.3 மிமீ ஆகவும் உள்ளது எனில் ஒட்டின் தோராய கன அளவைக் காண்க.

Soln:

$$\text{கோளத்தின் கன அளவு} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{தோராய கன அளவு } r = 5 \text{ மிமீ}, \Delta r = dr \\ = 5.3 - 5 = 0.3 \text{ மிமீ}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{4}{3} \pi 3 r^2$$

$$dv = 4\pi r^2 dr \Rightarrow 4\pi(5^2)(0.3)$$

$$= 30\pi \text{ mm}^3$$

5) சார்பு $g(x, y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$ க்கு எல்லை

மதிப்பு

இருக்குமானால் $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} g(x, y)$ ஐ மதிப்பிடுக.

$$g(x, y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} g(x, y) =$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$$

$$= \frac{3(1)^2 - 1(2)}{1^2 + 2^2 + 3} = \frac{3 - 2}{8} = \frac{1}{8}$$

3 மதிப்பெண் வினா விடைகள்

1. f என்ற சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட x, Δx மதிப்புகளுக்கு . Δf மற்றும் df காண்க. மேலும் அவற்றை ஒப்பிடுக

$$f(x) = x^3 - 2x^2; x=2, \Delta x = dx = 0.5$$

soln :

$$f(x) = x^3 - 2x^2; x=2, \Delta x = dx = 0.5$$

$$df = f'(x) \Delta x$$

$$= (3x^2 - 4x) \Delta x$$

$$= [3(2)^2 - 4(2)] 0.5$$

$$= [3(4) - 8] 0.5$$

$$= (12 - 8) 0.5$$

$$= 4(0.5)$$

$$= 2.0$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= f(2 + 0.5) - f(2)$$

$$= f(2.5) - f(2)$$

$$= [(2.5)^3 - 2(2.5)^2] - [2^3 - 2(2)^2]$$

$$= [15.625 - 12.5] - [8 - 8]$$

$$= 3.125$$

2. சார்பு $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y^2 + 1}$, ஒவ்வொரு $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ க்கும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ என்பது ஒரு தன்னிச்சையாக புள்ளி என்க. f இன் தொடர்ச்சி தன்மையை (a, b) இல் ஆராய்வோம்.

$$i) f(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + 1} \text{ is defined for } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{x^2 + y^2}{y^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + 1} = L$$

Limit exist at $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$iii) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L = f(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + 1}$$

எனவே f எல்லா மூன்று நிபந்தனைகளும் (a, b) என்ற $\mathbb{R}^2$ ன் இன் தன்னிச்சையான புள்ளியில் பூர்த்தி செய்வதால் f ஆனது $\mathbb{R}^2$ இன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியுடையது

$$3) \text{ If } U(x, y, z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 + z^3}, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3}, \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$4) u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x + y}}, \text{ எனில் } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u$$

என நிறுவுக.

Soln:

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x + y}}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}}$$

$$\lambda^{\frac{-1}{2}} u(x, y) = \lambda^{\frac{3}{2}} u(x, y)$$

$u(x, y)$ படி $\frac{3}{2}$ உடைய சமன்பாடித்தான சார்பு ஆய்லின் தேற்றப்படி

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = n u$$

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3}{2} u .$$

5. $v(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, எனில்

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} . \text{ என நிறுவுக}$$

$$\text{Given : } v(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2 + 3xy = 3z^2 + 3xz$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 + 3xz = 3y^2 + 3xz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 + 3x = 3x \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 + 3x = 3x \rightarrow \textcircled{2}$$

① & ②

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} .$$

5-மதிப்பெண் வினா விடைகள்

1) ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செ.மீ க்கும் பதிலாக 12.5 செ.மீ என அளக்கப்படுகின்றது எனில் அதன் பரப்பு கணக்கிடுவதில் பின்வருவனவற்றை காண்க
1.தனிப்பிழை 2.சார் பிழை 3.சதவீதப் பிழை

$$r = 12.65 , \Delta r = \boxed{0.15}$$

$$\text{வட்ட வடிவ தகட்டின் பரப்பு } A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = 2 \pi r$$

$$= 2 \pi * 12.65 * (+0.15)$$

$$\text{தோராய மதிப்பு } 3.795 \pi \text{ cm}^2$$

$$\text{மெய் மதிப்பு} = A(12.5) - A(12.65)$$

$$= \pi(12.5)^2 - \pi(12.65)^2$$

$$= \pi(156.25 - 160.0225)$$

$$= 3.7725 \pi \text{ cm}^2$$

i) தனிப்பிழை : மெய்மதிப்பு-
தோராய மதிப்பு

$$= 3.7725 \pi - (3.795 \pi)$$

$$= 0.0225 \pi \text{ cm}^2$$

ii. சார் பிழை = மெய்மதிப்பு - தோராய மதிப்பு

மெய்ப்பிழை

$$= \frac{0.0225 \pi}{3.7725 \pi}$$

$$= 0.00596$$

$$= 0.006$$

iii. சதவீதப் பிழை * 100 : சார்பிழை

$$= 0.6 \%$$

$$2) w(x, y, z) = xy + yz + zx ; x = u - v ;$$

$$y = uv ; z = u + v . u, v \in \mathbb{R} \text{ எனில்}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \text{ காண்க மற்றும் } \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

இல் அவற்றின் மதிப்பு காண்க.

$$w(x, y, z) = xy + yz + zx ; x = u - v ;$$

$$y = uv ; z = u + v .$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + z ; \frac{\partial w}{\partial y} = x + z ; \frac{\partial w}{\partial z} = y + x .$$

$$x = u - v \quad y = uv \quad z = u + v .$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = -1 ; \frac{\partial y}{\partial u} = v, \frac{\partial y}{\partial v} = u \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1, \frac{\partial z}{\partial v} = 1 .$$

சங்கிலி விதிப்படி

$$(uv + u + v)(1) + 2u(v) + (uv + u - v)(1).$$

$$= uv + u + v + 2uv + uv + u - v.$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 4uv + 2u = 2u(2v+1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_{\left(\frac{1}{2}, -1\right)} = 2 * \frac{1}{2} (2+1) = 1(2+1) = 3$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= (uv + v + u)(-1) + (2u)(u) +$$

$$(uv + u - v)(1).$$

$$= -u - u - v + 2u^2 + uv + u - v$$

$$= 2u^2 - 2v = 2(u^2 - v)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)_{\left(\frac{1}{2}, -1\right)} = 2\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 2\left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right).$$

i) 3) $u = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ எனில்

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u. \text{ என நிறுவுக.}$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = \sin u \text{ என்பது சமபடித்தானது.}$$

$$f(tx, ty) = \left(\frac{tx+ty}{\sqrt{tx}+\sqrt{ty}}\right) = \left(\frac{t}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= t^{\frac{1}{2}} f(x,y), \forall x,y,t \geq 0.$$

இங்கு f படி $\frac{1}{2}$ உடைய சமபடித்தான சார்பாகும்

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} f(x,y)$$

$f = \sin u$ என பிரதியிட

$$x \frac{\partial \sin u}{\partial x} + y \frac{\partial \sin u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u.$$

$$x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u.$$

இருபுறமும் $\cos u$ ஆல் வகுக்க

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u.$$

$$4) z(x,y) = x^2y + 3xy^4, x, y \in \mathbb{R}.$$

எனில் $(2, -1)$ இல் z ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு காண்க.

$$\text{Let } z(x,y) = x^2y + 3xy^4, x, y \in \mathbb{R}.$$

$$z(2, -1) = 2^2(-1) + 3(2)(-1)^4$$

$$= -4 + 6 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3xy^4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1) = 2(2)(-1) + 3(-1)^4 = -4 + 3 = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,-1) = 2^2 + 12(2)(-1)^3$$

$$= 4 - 24 = -20$$

நேரியல் தோராய மதிப்பு காண்க.

$$L(x,y) = z(2,-1) + \frac{\partial z}{\partial x}(2,-1)(x-2)$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}(2,-1)(y+1).$$

$$= 2 + (-1)(x-2) + (-20)(y+1)$$

)

$$= 2 - x + 2 - 20y - 20$$

$$= -x - 20y + 16$$

$$L(x,y) = -(x + 20y - 16).$$

5) ஓர் எண்ணின் n ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதம் பிழை தோராயமாக ,அந்த எண்ணின் சதவீத பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

அந்த எண் x என்க $y = x^{\frac{1}{n}}$

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

பிறகு $\log$,

$$\log y = \log x^{\frac{1}{n}}$$

$$\log y = \frac{1}{n} \log x.$$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க
கிடைப்பது

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \right)$$

$$\frac{dy}{y} \times 100 = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

$$\frac{\Delta y}{y} \times 100 \approx \frac{dy}{y} \times 100 = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

அந்த எண்ணின் சதவீத பிழையின் $\approx \frac{1}{n}$
மடங்கு

எனவே எண்ணின் n ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதம் பிழை தோராயமாக ,அந்த எண்ணின் சதவீத பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும்.

9. தொகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

2 மதிப்பெண் வினாவிடைகள்

1). (எ.கா 9 :2) கூட்டலின் எல்லையாக

$$\int_0^1 x \, dx \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

தீர்வு :

$$F(x) = x \quad a = 0 \text{ and } b = 1$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left(\frac{r}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [1 + 2 + 3 + \dots + n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} n^2 \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} (1+0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2). மதிப்பிடுக : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

தீர்வு :

$$X^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 2^2$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2^2 + (x+1)^2}$$

$$I = \left(\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)_{-1}^1$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \tan^{-1} \frac{1+1}{2} - \tan^{-1} \frac{-1+1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

3). (எ.கா 9 :31) $\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx$, n என்பது ஒர் மிகை முழுக்கள் ஆகும் .

தீர்வு :

$$u = x^2 \text{ என்க } dv = \cos nx$$

$$u' = 2x \quad v = \frac{\sin nx}{n} \quad \int dr = \int \cos nx \, dx$$

$$u'' = 2 \quad v_1 = \frac{-\cos nx}{n^2} \quad v_2 = \frac{-\sin nx}{n^3}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos nx \, dx \\ &= \left\{ x^2 \left(\frac{\sin nx}{n}\right) - 2x \left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2 \left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right) \right\}_0^\pi \end{aligned}$$

$$I = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \quad \sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$$

4). மதிப்பிடுக : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx$

தீர்வு :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx$$

$$= \left(\frac{10-1}{10}\right) \left(\frac{10-3}{10-2}\right) \left(\frac{10-5}{10-4}\right) \left(\frac{10-7}{10-6}\right) \left(\frac{10-9}{10-8}\right) \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{63\pi}{512}$$

5). மதிப்பிடுக : $\int_0^\infty x^5 e^{-3x} \, dx$

தீர்வு :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$n=5, a=3$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-3x} \, dx = \frac{5!}{3^{5+1}} = \frac{5!}{3^6}$$

6). $6x+5y = 30$, x -அச்சு $x=-1$ மற்றும் $x=3$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பைக் காண்க.

. தீர்வு :

பரப்பானது x -அச்சின் மேல் உள்ளது.

எனவே தேவையான பரப்பு

$$A = \int_a^b y dx$$

$$= \int_{-1}^3 \frac{30-6x}{5} dx$$

$$= \frac{1}{5} (30x - 3x^2)_{-1}^3$$

$$= \frac{1}{5} (90 - 27) - \frac{1}{5} (-30 - 3)$$

$$= \frac{96}{5} \text{ sq. அலகுகள்}$$

7). $y = 2x^2$, $y = 0$ மற்றும் $x = 1$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x - அச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவை காண்க.

தீர்வு :

$$Y = 2x^2$$

$$Y=0, \Rightarrow x=0, x=1$$

$$\text{கன அளவு } V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 4x^4 dx$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^1$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{4\pi}{5}$$

3 மதிப்பெண் வினாவிடைகள்

1). கூட்டலின் எல்லையாக $\int_0^1 x^3 dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

$$F(x) = x^3 \quad a = 0 \text{ and } b = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \{1^3 + 2^3 + \dots + n^3\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{4}\right)^2$$

$$= \frac{(1+0)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

2). $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எனும் பிரிவினையுடன் இடது - முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x dx$ க்கு தோராய மதிப்பு காண்க .

தீர்வு :

$$\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

$$n = 5$$

$$x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, x_3 = 1.3,$$

$$x_4 = 1.4, x_5 = 1.5$$

$$\int_a^b f(x) dx = \{f(x) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \} \Delta x$$

$$\int_1^{1.5} x dx = \{f(1) + f(1.1) + f(1.2) +$$

$$f(1.3) + f(1.4) + \} 0.1$$

$$= \{1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4\} 0.1$$

$$= (6) (0.1)$$

$$\int_1^{1.5} x dx = 0.6$$

3). மதிப்பிடுக : $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} * \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad x = \sin t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt, \quad dx = \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin t dt \\ &= (t + \cos t)^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) - (0 + \cos 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

4). மதிப்பிடுக : $\int_0^1 x^5(1-x^2)^5 dx$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^5 (1-x^2)^5 dx, \quad [x = \sin \Theta] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \Theta (1 - \sin^2 \Theta)^5 \cos \Theta d\Theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \Theta \cos^{11} \Theta d\Theta :: [dx = \cos \Theta d\Theta] \\ &= \frac{10}{16} * \frac{8}{14} * \frac{6}{12} * \frac{4}{10} * \frac{2}{8} * \frac{1}{6} \\ [x=0, \sin \Theta=0] \\ &= \frac{1}{336} \quad [x=1, \sin \Theta=1, \Theta = \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

5). $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

செவ்வகத்தின் சமன்பாடு , $x=a$.

பரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்

$L(a, 2a)$ மற்றும் $L(a, -2a)$ ஆகும். பரவளையம் சமச்சீராக இருப்பதால் தேவையான பரப்பு A ஆனது $Y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$ என்ற பரவளையத்தின் பகுதி x -அச்ச , $x = 0, x = a$ அடைபடும் பரப்பைப் போல் இருமடங்கு ஆகும்.

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^a y dx \\ &= 2 \int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x} dx \\ &= 4\sqrt{a} \left\{ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right\}_0^a \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{a}(a\sqrt{a}) \\ &= \frac{8}{3} a^2 \end{aligned}$$

5 மதிப்பெண் வினாவிடைகள்

1). தொகையீடுகளை கூட்டலின் எவ்வையாக கணக்கிடுக $\int_1^4 (2x^2 + 3) dx$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f\left(a + (b-a) \frac{r}{n}\right) \\ F(x) &= 2x^2 + 3 \\ a &= 1, b = 4 \\ f\left(a + (b-a) \frac{r}{n}\right) &= 2 \left(\frac{1+3r}{n}\right)^2 + 3 \\ &= 5 + \frac{18r^2}{n^2} + \frac{12r}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x^2 + 3) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{r=1}^n \left(5 + \frac{18r^2}{n^2} + \frac{12r}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{15}{n} \sum_{r=1}^n 1 + \frac{54}{n^3} \sum_{r=1}^n r^2 + \frac{36}{n^2} \sum_{r=1}^n r \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{15}{n} n + \frac{54}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+n)}{6} + \frac{36}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 15 + 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$= 15 + 9 (1) (2) + 18 (1)$$

$$= 15 + 18 + 18 = 51$$

$$2). \text{ மதிப்பிடுக : } \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

தீர்வு :

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$\text{Put } x = \tan t \quad dx = \sec^2 t \, dt \quad \text{என்க}$$

$$X = 0 \quad t = 0$$

$$X = 1 \quad t = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \sec^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\tan t)}{\sec^2 t} \sec^2 t \, dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan t) \, dt \quad (1)$$

$$F(t) = \log(1 + \tan t)$$

$$F\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \log\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1 + \tan t + 1 - \tan t}{1 + \tan t}\right)$$

$$F\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \log\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right)$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a - x) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) dt \quad (1)$$

சமன் (1) + (2) லிருந்து

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan t) + \log\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) dt$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan t) \frac{2}{(1 + \tan t)} dt$$

$$= \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt$$

$$= \log 2 (t)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \log 2 \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{8} \log 2$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$$

$$3). \text{ மதிப்பிடுக : } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\sin^{-1} x} \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

தீர்வு :

$$t = \sin^{-1} x \quad dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = 0 \quad t = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t t \, dt$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t e^t \, dt = \{ t e^t - e^t \}_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} - e^{\frac{\pi}{4}}) - (0 - e^0)$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\pi}{4} - 1 \right\} + 1$$

4). $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் $y^2 = 6x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் பொதுவான அரங்கத்தின் பரப்பைக்காண்க.

தீர்வு :

$$\text{வட்டத்தின் சமன்பாடு } x^2 + y^2 = 16 \text{ --- (1)}$$

$$\text{பரவளையத்தின் சமன்பாடு } y^2 = 6x \text{ ---- (2)}$$

(1)& (2) தீர்வு

$$X^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x+8)(x-2) = 0$$

$$X = -8, \quad x = 2$$

$$X = -8 \quad y^2 = 6(-8) = -48 \text{ இயலாது}$$

$$X = 2 \quad y^2 = 6(2) = 12$$

$$Y = \pm 2\sqrt{3}$$

தேவையான பரப்பளவு = 2 { முதல்

கால்வட்டப்பகுதியின் பரப்பு }

$$= 2 \left\{ \int_0^2 \sqrt{6} x^{\frac{1}{2}} dx + \int_2^4 \sqrt{4^2 - x^2} dx \right\}$$

$$= 2 \left\{ \left\{ \sqrt{6} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right\}_0^2 + \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) \right\}_2^4 \right\}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}(2\sqrt{2})}{3} + 16 \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{12} - 16 \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{4^3}{3} \{ 4\pi + \sqrt{3} \}$$

5). பரவளையும் $y = x^2 + 4x + 5$, x-அச்ச கோடு $x = 0$, மற்றும் $x = 1$ ஆகியவற்றால் அடைப்பட்டுள்ள அரங்கத்தின் பரப்பை x- அச்சைப் பொருத்துச் சுழற்றினால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$Y = x^2 + 4x + 5$$

எல்லைகள் $x = 0, \quad x = 1$

x அச்சைப்பொருத்துச் சுழற்றப்படும் சுழற்றப்படும் அரங்கத்தின் பரப்பளவு ஏற்படுத்தும்

$$\text{கன அளவு } V = \pi \int_0^1 (X^4 + 4x + 5)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 + 16x^2 + 25 + 8x^3 + 40x + 10x^2) dx$$

$$= \pi \left\{ \frac{x^5}{5} + \frac{8x^4}{4} + \frac{26x^3}{3} + \frac{40x^2}{2} + 25x \right\}_0^1$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{5} + 2 + \frac{26}{3} + 20 + 25 \right\}$$

$$= \frac{838}{15} \pi$$

10. சாதாரண வகைக்கெடுச் சமன்பாடுகள்

2 மதிப்பெண்கள்

1. பின்வரும் வகைக் கெழுச் சமன்காட்டின் வரிசை மற்றும் படிகாண்க?

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{2/3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

தீர்வு:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{2/3} = 3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4$$

கனப்படுத்த,

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \left(3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4\right)^3$$

$$\text{வரிசை} = 3$$

$$\text{படி} = 2$$

2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

தீர்வு:

$$\text{வரிசை} = 2$$

ஆனால், இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை

சமன்காடாக எழுத இயலாது.

* படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

3. ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை T-ஐப் பொறுத்து ஆவி அழுத்தம் P-ன் மாறுவீதமானது, ஆவி அழுத்தத்திற்கு நேர் விகிதத்திலும், நேர் விகிதத்திலும், வெப்பநிலையின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகிதத்திலும் உள்ளது, என்ற இயற்பியல் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும் சமன்பாடாக எழுதுக? தீர்வு:

வெப்பநிலை T-ஐப் பொறுத்து $\propto \frac{P}{T^2}$

P-ன் மாறுவீதம்

$$\frac{dP}{dT} \propto \frac{P}{T^2}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{KP}{T^2}$$

4. ஒரு கோளவடிவ மழைத்துளி ஆனது அதன் வளைபரப்பின் மாறுவீதத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் ஆவியாகிறது மழைத்துளிகள் ஆரத்தின் மாறுவீதத்தை உள்ளடக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

தீர்வு:

ஆரம் r, கன அளவு v, வளைபரப்பு S

கன அளவு = r, வளைபரப்பு = v,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, S.A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dv}{dt} \propto A, \frac{dv}{dt} = -kA$$

$$\frac{4}{3}\pi(3r^2) \frac{dr}{dt} = -k4\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

5. $Y=2X^2$ சமன்பாடானது $xy' = 2y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$Y = 2x^2$$

$$Y' = 4x$$

x ஐப் பெருக்க,

$$Xy' = 4x^2$$

$$Xy' = 2(2x^2)$$

$$Xy' = 2y \quad (1 - \text{ன் மூலம்})$$

3 Mark Questions

1. (a, 0) மற்றும் (-a, 0) எனும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் விட்டத் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

மையம் : (0, b)

பிதாகரஸ் தேற்றம் மூலம்

- ஆரம் (r) = $\sqrt{a^2 + b^2}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$$

வகைப்படுத்த,

$$2x + 2(y - b) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y - b = - \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$$

$$b = \frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y$$

(1) - பிரதியிட,

$$x^2 \left(\frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) = a^2 + \left[\frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y \right]^2$$

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x^2 = a^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left[x + y \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]^2$$

$$(x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

2) ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், செல்லும் y அச்சின் மீது குவியங்களையும் கொண்ட நீள்வட்டத் தொகுதியின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

மாறத்தக்க மாறிலிகள் a, b

வகையிட - (1)

$$\frac{2x}{b^2} + \frac{2yy'}{a^2} = 0 \quad - (2)$$

வகையிட - (2)

$$\frac{1}{b^2} + \frac{yy'' + y'y'}{a^2} = 0 \quad - (3)$$

(1), (2), & (3) ன் மூலம் அணி வடிவம்

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x & yy' & 0 \\ 1 & yy'' + y'y' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Expanding along - (3)

$$1[xyy'' + y'y'] = 0 \quad (C3 \text{ வழி மதிப்பு காண})$$

$$Xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$$

$$3) \text{ தீர்க்க } \frac{dy}{dx} = (3x + y + 4)^2$$

தீர்வு:

Z = 3x + y + 4 என்க (பிரதியிடல் முறை)

$$\frac{dz}{dx} = 3 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + y + 4)^2 \text{ -ல் பிரதியிட,}$$

$$\frac{dz}{dx} - 3 = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 3$$

$$\int \frac{1}{z^2 + \sqrt{3}^2} dz = \int dx \quad (\text{மாறிகளை பிரிக்கும் முறை})$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{3}} \right) = x + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{3x + y + 4}{\sqrt{3}} \right) = x + c$$

4) $y = A e^{8x} + B e^{-8x}$, எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைவரை குடும்பத்தின் வகைக்கெழு சமன்பாட்டை காண்க இங்கு A, B என்பன இரு மாறிலிகள்.

தீர்வு:

$$Y = A e^{8x} + B e^{-8x}$$

வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = 8A e^{8x} - 8B e^{-8x}$$

வகையிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 64 Ae^{8x} + 64 Be^{-8x}$$

$$= 64 (Ae^{8x} + Be^{-8x})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 64y$$

$$4) \text{ தீர்க்க } y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$$

தீர்வு:

சமன்பாட்டை

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} \text{ என எழுதலாம்}$$

சமப்படுத்தான சமன்பாட்டிற்கும்

$$y = vx \text{ and } \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$V + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 x^2}{x(vx) - x^2} = \left(\frac{v^2}{v-1} \right) \frac{x^2}{x^2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v-1} - v = \frac{v^2 - v^2 + v}{v-1}$$

$$\int \frac{v-1}{v} dv = \int \frac{dx}{x} \text{ (மாறிகளை பிரித்தல்)}$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{v} \right) dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$V - \log |v| = \log |x| + \log |c|$$

$$V = \log |vxc|$$

$$y = vx \text{ லிருந்து } v = y/x \text{ எனப் பிரதியிட,}$$

$$y/x = \log \left| \frac{y}{x} xc \right|$$

$$c^{y/x} = cy$$

$$y = ke^{y/x} \text{ தீர்வாகும்}$$

5 Mark Questions:

1. ஆரதத்தில் ஒரு தொட்டியில் 50லி தூய்மையான நீர் உள்ளது. தொடக்க நேரம் $t=0$ -ல் ஒரு லிட்டர் நீரில் 2 கி வீதம் கரைக்கப்பட்ட உப்புகரைசலானது ஒரு நிமிடத்திற்கு 3லி வீதம் தொட்டியில் விடப்படுகிறது. இக்கலவை நன்கு

கலக்கப்பட்டு அதே வீதத்திலட தொட்டியில் இருந்து வெளியேறுகிறது $t>0$ எனும் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவினைக் காண்க.

தீர்வு:

t நேரத்தில் உப்பின் அளவு x என்க

$$\frac{dx}{dt} = (\text{உள்நுழையும் வீதம்}) - (\text{வெளியேறும் வீதம்})$$

$$= (2\text{கி} \cdot 3\text{லி}) - (3/50x)$$

$$= 6 - 3/50x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3}{50} \left(x - \frac{6 \cdot 50}{3} \right) = \frac{-3}{50} (x - 100)$$

$$\frac{dx}{x-100} = \frac{-3}{50} dt$$

தொகையிட,

$$\int \frac{dx}{x-100} = \frac{-3}{50} \int dt$$

$$\text{Log}(x-100) = \frac{-3}{50} t + \log c$$

$$\text{Log} \left(\frac{x-100}{c} \right) = \frac{-3t}{50}$$

$$\frac{x-100}{c} = e^{-3t/50}$$

$$x-100 = ce^{-3t/50} \quad (1)$$

$$t = 0 \text{ எனில் } x = 0$$

$$(1) \gg 0-100 = ce^0 \gg c = -100$$

$$(1) \gg x - 100 = -100 e^{-3t/50}$$

$$X = 100 - 100 e^{-3t/50}$$

$$X = 100 (1 - e^{-3t/50})$$

2). தீர்வு காண்க

$$\frac{dy}{dx} + 2y \cot x = 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x$$

தீர்வு y -ல் அமைந்த நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$\frac{dy}{dx} = py = Q, \text{ உடன் ஒப்பிட,}$$

$$P = 2\cot x,$$

$$Q = 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\text{தொகையீட்டுக் காரணி} = e^{\int p dx} = e^{\int 2\cot x dx}$$

$$= e^{2\log|\sin x|} = e^{\log|\sin x|^2} = \sin^2 x$$

சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y e^{\int p dx} = \int q e^{\int p dx} dx + c$$

$$y \sin^2 x = \int 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x \sin^2 x dx + c$$

$$y \sin^2 x = \int 3x^2 dx + c$$

$$y \sin^2 x = 3 \frac{x^3}{3} + c$$

$$y \sin^2 x = x^3 + c$$

$$3). \text{ Solve } \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$$

$$\text{Let } Z = x - y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$$

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{Z+5}{2Z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{Z+5}{2Z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2Z+7-Z-5}{2Z+7} = \frac{Z+2}{2Z+7}$$

$$\frac{2Z+7}{Z+2} dz = dx$$

$$\frac{2(Z+2)+3}{Z+2} dz = dx$$

$$\left(2 + \frac{3}{Z+2}\right) dz = dx$$

Integrating

$$2Z + 3\log|Z + 2| = x + c$$

$$2(x+y) + 3\log|x - y + 2| = x + c$$

Example 10.30

4). ஒரு தொட்டியில் உள்ள 1000லி நீரில் 100 கிராம் உப்பு கரைந்துள்ளது. பிரைன் என்பது அடர்ந்த அடர்த்திக் கொண்ட உப்புக் கரைசலாகும். வழக்கமாக சோடியம் குளோரைடு கரைசலாகும். பிரைன் 1 நிமிடத்திற்கு 10லி வீதம் உட்புகுத்தப்படுகிறது. மேலும் ஒவ்வொரு லிட்டர் நீரிலும் 5கி உப்பு கரைந்துள்ளது தொட்டியில் உள்ள நீரானது தொடர்ந்து கலக்கப்பட்டு சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது பிரைன் 1 நிமிடத்திற்கு 10லி வீதம் வெளியேறுகிறது t நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு:

t நேரத்தில் உப்பின் அளவு x என்க

$\frac{dx}{dt}$ = (உள்நுழையும் வீதம்) – (வெளியேறும் வீதம்)

$$\frac{dx}{dt} = 50 - \frac{10}{1000}x$$

$$= 50 - 0.01x = -0.01(x-5000)$$

$$\frac{dx}{dt} = -0.01(x-5000)$$

$$\frac{dx}{x-5000} = -0.01 dt$$

$$\log|x - 5000| = -0.01t + \log c$$

$$x-5000 = ce^{-0.01t}$$

$$x = 5000 + ce^{-0.01t} \text{ --(1)}$$

$$t=0, x=100, 100 = 5000 + c$$

$$-c = 5000 - 100$$

$$-c = 4900$$

$$C = -4900$$

$$(1) \Rightarrow x = 5000 - 4900 e^{-0.01t}$$

5) ஒரு பாத்திரத்தில் 100°C வெப்பநிலையில் கொதித்து கொண்டிருக்கும் நீரானது $t = 0$ எனும் நேரத்தில் அடுப்பிலிருந்து இறக்கி, குளிர்வதற்காக சமயலறையில் வைக்கப்படுகிறது. 5 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு நீரின் வெப்பநிலை 80°C மேலும் 5 நிமிடங்களுக்கும் பிறகு நீரின் வெப்பநிலை 65°C ஆக குறைகிறது எனில் சமயலறையின் வெப்பநிலையை காண்க.

தீர்வு:

t நேரத்தில்

T – நீரின் வெப்பநிலை

S – அறையின் வெப்பநிலை என்க

$$\frac{dT}{dt} \propto T - S$$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - S)$$

$$\frac{dT}{T - S} = k dt$$

$$\text{Log}(T - S) = Kt - C$$

$$T - S = e^{Kt + C}$$

$$T - S = ce^{kt} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0, T=100 \quad (1) \Rightarrow 100 - S = Ce^0$$

$$C = 100 - S$$

$$(1) \Rightarrow T - S = (100 - S) e^{kt} \quad \text{--- (2)}$$

$$t = 5, T = 80$$

$$80 - S = (100 - S)e^{5k}$$

$$e^{5k} = \frac{80 - S}{100 - S}$$

$$65 - S = \frac{(100 - S)(80 - S)}{(100 - S)} \cdot \frac{(80 - S)}{100 - S}$$

$$(100 - S)(65 - S) = (80 - S)^2$$

$$6500 - 165s + s^2 = 6400 - 160s + s^2$$

$$6500 - 6400 = 165s - 160s$$

$$5s = 100$$

$$S = 20^{\circ}\text{C}$$

ஆறையின் வெப்பநிலை $S = 20^{\circ}\text{C}$

11. நிகழ்தகவு பரவல்கள்

2- மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) X -என்பது மூன்று சீரான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது விழும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாறி

X -ன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு :

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$

:: X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கை

:: $X = 0, 1, 2, 3$

$X^{-1}(\{0\}) = \{HHH\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HHT, HTH, THH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{TTH, THT, HTT\}$

$X^{-1}(\{3\}) = \{TTT\}$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

2ஒரு ஜாடியில் 2 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் 3 பந்துகள் ஜாடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன X என்பது

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையை எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X ன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு

பிம்பங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு : $n(s) = {}^5C_3 = {}^5C_2 = 10$

X என்பது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 3 பந்துகளில் சிகப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை

:: $X = 1, 2, 3$ [$X = 0$ என்பது இங்கு பொருந்தாது]

$X = 1 \Rightarrow X$ (ஒரு சிகப்பு பந்து கிடைக்க)

$$= {}^3C_1 * {}^2C_2$$

$$= 3 * 1 = 3$$

$X = 2 \Rightarrow X$ (இரண்டு சிகப்பு பந்துகள் கிடைக்க)

$$= {}^3C_2 * {}^2C_1$$

$$= 3 * 2 = 6$$

$X = 3 \Rightarrow X$ (3 சிகப்பு பந்துகள் கிடைக்க)

$$= {}^3C_3 = 1.$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள்	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	3	6	1	10

3) மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.கிடைக்கும் தலைகளில் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பினை காண்க.

தீர்வு :

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$

$n(s) = 8$

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கை

:: $X = 0, 1, 2, 3$

$$f(0) = P(x=0) = 1/8$$

$$f(1) = P(x=1) = 3/8$$

$$f(2) = P(X=2) = 3/8$$

$$f(3) = P(X=3) = 1/8$$

∴ நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0,3 \\ \frac{3}{8} & x=1,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4) சமவாய்ப்பு மாறி X ன் நிகழ்தகவு

அடர்த்தி சார்பு. எனில் $F(x) = \begin{cases} Kxe^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$

எனில் K -ன் மதிப்பை காண்க.

$$\text{தீர்வு : } \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

F(x) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} kxe^{-2x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\Rightarrow k \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx = 1$$

$$k \left[\frac{1!}{2^{1+1}} \right] = 1$$

$$k \left(\frac{1}{4} \right) = 1 \Rightarrow k = 4.$$

5) ஒரு சீரான பகடை 10 முறை

உருட்டப்படுகிறது மற்றும் எண்

தோன்றுவதை X குறிக்கிறது எனில்

ஈருறுப்பு பரவலை காண்க.

தீர்வு :

$$n = 10$$

X = 4 தோன்றுவதன் எண்ணிக்கை

P = ஒரு பகடையில் 4 கிடைக்க

நிகழ்தகவு

$$= 1/6$$

$$q = 1 - P = 1 - 1/6 = 5/6$$

$$f(X) = nc_x p^x q^{n-x}$$

$$\therefore f(x) = 10 c_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$$

$$X = 0, 1, 2, \dots, 10$$

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி x க்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது

X	1	2	3	4	5
F(X)	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

(i) எனில் K மதிப்பு (ii) $P(2 \leq X < 5)$ (iii)

$P(3 < X)$ ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

i) F(x) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$\sum f(x) = 1$$

$$K^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1$$

$$6k^2 + 5K - 1 = 0$$

$$6k^2 + 6k - k - 1 = 0$$

$$6k(k+1) - 1(k+1) = 0$$

$$(6k-1)(k+1) = 0$$

$$K = 1/6, k = -1 \text{ (பொருந்தாது)}$$

$$\therefore K = 1/6$$

ii) $P(2 \leq x < 5)$

$$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= 2k^2 + 3k^2 + 2k$$

$$= 5k^2 + 2k$$

$$= 5\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{5+12}{36} = \frac{17}{36}$$

iii) $P(3 < x) = P(x > 3)$

$$= P(X=4) + P(x=5)$$

$$= 2k + 3k = 5k$$

$$= 5(1/6) = 5/6$$

2) சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

(i) எனில் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$

(ii) $P(0.3 \leq X \leq 0.6)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$i) f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}(2x + 1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x + 1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$$

(ii) $P(0.3 \leq X \leq 0.6)$

$$= F(0.6) - F(0.3)$$

$$= \frac{1}{2}[(0.6)^2 + 0.6] - \frac{1}{2}[(0.3)^2 + 0.3]$$

$$= \frac{1}{2}[0.36 + 0.6] - \frac{1}{2}[0.09 + 0.3]$$

$$= \frac{1}{2}[0.96] - \frac{1}{2}[0.39]$$

$$= 0.48 - 0.195 = 0.285$$

3) $F(x) = \left\{ \frac{4-x}{6}, x=1, 2, 3 \right\}$ என்ற நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் சராசரி, பரவற்படி காண்க.

தீர்வு :

$$X=1 \Rightarrow f(x) = \frac{4-1}{6} = 3/6$$

$$X=2 \Rightarrow f(x) = \frac{4-2}{6} = 2/6$$

$$X=3 \Rightarrow f(x) = \frac{4-3}{6} = 1/6$$

x	1	2	3	Total
F(x)	3/6	2/6	1/6	1

x. f(x)	3/6	4/6	3/6	10/6
---------	-----	-----	-----	------

$$\therefore E(x) = \sum x f(x) = \frac{10}{6}$$

$$= 5/3 = 1.67$$

$$= 1.67$$

X^2	1	4	9	மொத்தம்
f(x)	3/6	2/6	1/6	1
$x^2 f(x)$	3/6	8/6	9/6	20/6

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x)$$

$$= 20/6 = 10/3$$

$$\text{Variable}(x) = E(x^2) - [E(X)]^2$$

$$= 10/3 - (5/3)^2$$

$$= 10/3 - 25/9$$

$$= \frac{30-25}{9} = 5/9 = 0.56$$

$$\text{Variance} = 0.56$$

4) 600 டிக்கட்டுகள் கொண்ட ஒரு லாட்டரியில் ஒரு பரிசு ரூ 200 க்கும் நான்கு பரிசுகள் ரூ 100 க்கும் ஆறு பரிசுகள் ரூ 50 க்கும் எனக் கொடுக்கிறது. டிக்கட் செலவு ரூ 2 என்றால் ஒரு டிக்கட்டின் எதிர்பார்க்கப்படும் வெற்றித் தொகையை கண்டறியவும் .

தீர்வு :

$$n(s) = 600,$$

X = வெல்லும் தொகை எனில்:

$$X = \text{ரூ } 200, \text{ ரூ } 100, \text{ ரூ } 50, \text{ ரூ } 0$$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

X	200	100	50	0
---	-----	-----	----	---

F(X)	$\frac{1}{600}$	$\frac{4}{600}$	$\frac{6}{600}$	$\frac{589}{600}$
X. F(X)	$\frac{200}{600}$	$\frac{400}{600}$	$\frac{300}{600}$	0

$$\therefore E(X) = \sum x F(x) = \frac{900}{600}$$

$$= 3/2 = 1.5$$

டிக்கட்டின் விலை = Rs. 2

$\therefore$ எதிர்பார்க்கப்படும்

$$\text{வெற்றித்தொகை} = 1.5 - 2$$

$$= \text{Rs. } -0.50$$

5) $4P(X=4) = P(X=2)$ மற்றும் $n=6$
எனும்படி உள்ள $X \sim B(n, p)$ ன் பரவலின்
சராசரி, திட்டவிலக்கம் காண்க

தீர்வு :

$$n(6) \quad P(X=x) = nC_x p^x q^{n-x}$$

$$4p(x=4) = p(x=2)$$

$$4[6C_4 p^4 q^{6-4}] = 6 C_2 p^2 q^{6-2}$$

$$4[6.2 p^4 q^2] = 6.2 p^2 q^4$$

$$4 \frac{p^4}{p^2} = \frac{q^4}{q^2}$$

$$4p^2 = q^2 = (1-p)^2$$

$$= 1 + p^2 - 2p$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 1 - p^2 + 2p = 0$$

$$3p^2 + 2p - 1 = 0$$

$$(3p-1)(p+1) = 0$$

$$P = \frac{1}{3}, \quad p = -1 \text{ (பொருந்தாது)}$$

$$\Rightarrow q = 1 - p$$

$$P = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=x) = 6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$$

$$\text{சராசரி} = np = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\text{திட்டவிலக்கம் } D = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) சீரான இரு பகடைகள்
உருட்டப்படுகிறது x என்பது இரு
பகடையில் கிடைக்கும் கூட்டுத்தொகை
எனில் (i) கூறுவெளி (ii) x சமவாய்ப்பு
மாறியின் மதிப்புகள் (iii) 10, ன் நேர்மாறு
பிம்பங்கள் (iv) X , ன் நேர்மாறு பிம்பங்கள்

தீர்வு :

(i) கூறுவெளி

$$i) S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$$

$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),$$

$$(2,6)$$

$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$$

$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5),$$

$$(4,6)$$

$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5),$$

$$(5,6)$$

$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5),$$

$$(6,6) \}$$

$$n(s) = 36$$

(ii) X : இருபகடையில் உள்ள எண்களின்
கூட்டுத்தொகை

$$: X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

(iii) 10, ன் நேர்மாறு பிம்பங்கள்

$$X^{-1}(\{10\}) = \{(4,6) (5,5) (6,4)\}$$

(iv)) X, ன் நேர்மாறு பிம்பங்களின் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

X, ன் மதிப்புகள்											
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.											
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

2) ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி 0,1 மற்றும் 2. முதிப்புகளை மட்டுமே கொள்ளும் என்க.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{k} & x=0,1,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு நிறைசார்பிற்கு (i) K ன் மதிப்பு

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

(iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

(i) $F(X)$ என்பது நிகழ்தகவு நிறைசார்பு

$$X=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+1}{k} = \frac{1}{k}$$

$$X=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2+1}{k} = \frac{2}{k}$$

$$X=2 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2+1}{k} = \frac{5}{k}$$

$$\sum f(X) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{5}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{k} = 1$$

$$\Rightarrow k = 8$$

(ii) $F(X) = P(X \leq x)$

$$X=0 \Rightarrow F(0) = P(X \leq 0)$$

$$= P(X=0) = \frac{1}{k} = \frac{1}{8}$$

$$X=1 \Rightarrow F(1) = P(X \leq 1)$$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{2}{k} = \frac{3}{k} = \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$X=2 \Rightarrow F(2) = P(X \leq 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{5}{k} = \frac{8}{k} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\therefore F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{3}{8} & 1 \leq X < 2 \\ 1 & 2 \leq X < \infty \end{cases}$$

(iii) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$$= 1 - (P(X=0)) = 1 - F(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

3) ஓர் ஆறுபக்க பகடையில் ஒரு பக்கத்தில் "1" எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. அதன் இரு பக்கங்களில் "2" எனவும் மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் "3" எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. இருமுறை எறிதலின் மொத்தத் தொகையை X குறிக்கிறது எனில்

(i) நிகழ்தகவு நிறைசார்பு

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

(iii) $P(3 \leq X < 6)$

(iv) $P(x \geq 4)$) ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

பகடையின் மேல் உள்ள எண்கள் 1,2,2,3,3,3 ஆகும்

X இருபகடையின் கூட்டுத்தொகை

1/1	1	2	2	3	3	3
-----	---	---	---	---	---	---

1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

ஆட்டவனையிலிருந்து

$X = 2, 3, 4, 5, 6$

$$X = 2 \Rightarrow f(2) = p(x=2) = \frac{1}{36}$$

$$X = 3 \Rightarrow f(3) = p(x=3) = \frac{4}{36}$$

$$X = 4 \Rightarrow f(4) = p(x=4) = \frac{10}{36}$$

$$X = 5 \Rightarrow f(5) = p(x=5) = \frac{12}{36}$$

$$X = 6 \Rightarrow f(6) = p(x=6) = \frac{9}{36}$$

(i) நிகழ்தகவு நிரைசார்பு

x	2	3	4	5	6
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(2) = P(x \leq 2)$$

$$= P(x=2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P(x \leq 3)$$

$$= P(x=2) + p(x=3)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$F(4) = P(x \leq 4)$$

$$= P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$$

$$F(5) = P(x \leq 5)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{27}{36}$$

$$F(6) = P(x \leq 6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36}$$

$$= \frac{36}{36} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{15}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{27}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$(iii) P(3 \leq x < 6)$$

$$= P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}$$

$$(iv) P(x \geq 4)$$

$$= P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$$

$$4) F(x) = \begin{cases} cx^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ எனும் சார்பு}$$

ஒரு அடர்த்தி சார்பு எனில் மாறிலி C ன் மதிப்பு காண்க. மேலும்

$$i) P(1.5 < x < 3.5) \quad (ii) P(x \leq 2)$$

$$(iii) P(3 < x) \text{ ஆகியவற்றை காண்க.}$$

தீர்வு :

$f(x)$ நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^4 cx^2 dx = 1$$

$$C \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = 1$$

$$C \left[\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right] = 1$$

$$C \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = 1$$

$$C \left(\frac{63}{3} \right) = 1, C(21) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{21}$$

$$(i) P(1.5 < X < 3.5)$$

$$= \int_{1.5}^{3.5} f(X) dx$$

$$= \int_{1.5}^{3.5} cx^2 dx$$

$$= C \left[\frac{x^3}{3} \right]_{1.5}^{3.5}$$

$$= \frac{1}{21} \left[\frac{(3.5)^3}{3} - \frac{(1.5)^3}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{63} [42.875 - 3.375]$$

$$= \frac{1}{63} (39.5) = \frac{395}{630} = \frac{79}{126}$$

$$(ii) P(x \leq 2) = \int_{-\infty}^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 cx^2 dx$$

$$= C \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{21} \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{21} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{21} * \frac{7}{3} = \frac{1}{9}$$

$$(iii) P(3 < x) = P(x > 3)$$

$$= \int_3^{\infty} f(x) dx$$

$$= \int_3^4 cx^2 dx = C \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^4$$

$$= \frac{1}{21} \left[\frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{63} \left[\frac{64}{3} - \frac{27}{3} \right] = \frac{37}{63}$$

$$= \frac{1}{63} [64 - 27] = \frac{37}{63}$$

5) $F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு பிற மதிப்புகளுக்கு உள்ள ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X க்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு :

$$\text{சராசரி} = \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x(\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \right]$$

$$= \lambda \left[\frac{1!}{\lambda^{1+1}} \right] = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} (\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{2!}{\lambda^{2+1}} \right] = \lambda \left(\frac{2}{\lambda^3} \right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

பரவற்படி

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

6) ABC குழுமம் தயாரிக்கும் பொருட்களின் சராசரியாக 20% பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை எனக் கண்டறியப்படுகிறது. சமவாய்ப்பு முறையில் இதிலிருந்து 6 பொருட்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. மேலும் குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால்

1) இரு பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை

$$= \frac{4^5}{5^5 \times 5} * 10^2$$

2) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளது

$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

3) குறைந்தபட்சம் இரு குறைபாடுள்ளவை ஆகியவற்றை நிகழ்தகவு காண்க.

(iii) குறைந்தபட்சம் இரு குறைபாடுள்ளவை ஆகியவற்றை நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

$$n = 6$$

P = குறைபாடுள்ள பொருட்களின் நிகழ்தகவு

$$p = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$q = 1 - P = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$f(X) = nC_x p^x q^{n-x}$$

$$f(x) = 6C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}$$

$$X = 0, 1, 2, \dots, 6$$

(i) இரு பொருட்கள் குறைபாடுள்ளவை

$$P(x=2) = 6C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = f(2)$$

$$= \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times \frac{1}{5^2} \times \frac{4^4}{5^4}$$

$$= 15 \left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) அதிகபட்சம் ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளது

$$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1)$$

$$= 6C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{6-0} + 6C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}$$

$$= (1)(1) \frac{4^6}{5^6} + 6 \times \frac{1}{5} \times \frac{4^5}{5^5}$$

$$= \frac{4^6}{5^6} + 6 \left(\frac{4^5}{5^6}\right) = \frac{4^5}{5^6} (6+4)$$

12. தனிநிலைச் கணக்கியல்

2 – மதிப்பெண் வினா — விடை:

1. ஓர் இயற்கணித அமைப்பில் சமனி உறுப்பானது (உளது எனில்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது: திருபி.

நிரூபணம்:

(S,*) என்பது ஓர் இயற்கணித அமைப்பு என்க

S-ன் சமனி உறுப்புகள் e_1, e_2 என்க.

முதலி e_1 ஐ சமனி உறுப்பாகவும் e_2 ஐ ஏதேனும் உறுப்பாகவும் கொண்டால் வரையறைப்படி

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \rightarrow (1)$$

e_{12} ஐ சமனி உறுப்பாகவும் e_1 ஐ S-ன் உறுப்பாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 \rightarrow (2)$$

1, 2 – லிருந்து,

$$e_1 = e_2$$

சமனி உறுப்பு ஒருமை தன்மை வாய்ந்தது.

2. ஓர் இயற்கணித அமைப்பில் ஓர் உறுப்பின் எதிர்மறை (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது நிரூபி.

நிரூபணம்:

(S,*) என்பது ஓர் இயற்கணித அமைப்பு என்க $a \in S$ என்க

a -ன் எதிர் மறை உறுப்புகள்

a_1 & a_2 என்ற இரு உறுப்புகள் எனில்

$$a * a_1 = a_1 * a = e \rightarrow (1)$$

$$a * a_2 = a_2 * a = e \rightarrow (2)$$

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) \text{ (2-ன் படி)}$$

$$= (a_1 * a) * a_2$$

$$\text{(சேர்ப்பு பண்பின்படி)}$$

$$= e * a_2 \text{ (1-ன் படி)}$$

$$= a_2$$

(சமனிபண்பின்படி)

$$a_1 = a_2.$$

3. Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ஆகிய இரண்டும் ஒரே வகையான பூலியன் அணிகள் எனில் $A \vee B$ மற்றும் $A \wedge B$ ஆகியசற்றை காண்க.

தீர்வு:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. R-ன் மீது * ஆனது $(a*b) = a+b+ab-7$ என வரையறுக்கப்பட்டால் *, R-ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? ஆவ்வாறெனில் $3 * [-7/15]$ காண்க.

தீர்வு:

$a, b \in R$ என்க

$a, b, ab \in R$.

$$* a*b = a+b+ab-7 \in R.$$

$$* a*b \in R$$

* ஆனது R-ல் அடைவு பெற்றுள்ளது.

$$3 * \frac{-7}{15} = 3 - \frac{7}{15} + 3 * \frac{-7}{15}$$

$$= \frac{45 - 7 - 21 - 105}{15}$$

$$= \frac{45 - 133}{15}$$

$$= \frac{-88}{15}$$

5. * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி ஆனது $A = \{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் மீது பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்பட்டால் பின்வரும் பட்டியலைப் பூர்த்தி செய்க.

*	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

தீர்வு:

(i) அட்டவணைமையிலிருந்து, $b * a = c$

$a * b = c$ (பரிமாற்று பண்பு உடையது)

(ii) $c * a = a$, $\Rightarrow a * c = a$

(iii) $b * c = a$, $\Rightarrow c * b = a$

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

6. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ -ன் மெய்மை அட்டவணையைத் தருக:

தீர்வு:

P	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

3 மதிப்பெண் வினா விடை:

1. கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் மீது பின்வரும் செயலியானது (i) அடைவுப்

பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் (iii) சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவற்றை கொண்டுள்ளதா எனச் சரிபார்க்க

தீர்வு:

$$a * b = a^b ; \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Soln :

(i) $a * b = a^b \in \mathbb{N} ; \forall a, b \in \mathbb{N}$ என்பது உண்மை,

$\therefore \mathbb{N}$ -ஆனது *-ன் கீழ் அடைவ பெற்றுள்ளது.

$$(ii) a * b = a^b$$

$$b * a = b^a$$

$$\text{put } a = 2, b = 3$$

$$a * b = 2^3 = 8$$

$$b * a = 3^2 = 9$$

$$a * b \neq b * a$$

$\therefore *$ ஆனது பரிமாற்று பண்பு நிறைவு செய்யாது.

$$(iii) a * (b * c) = a * b^c = a^{b^c} \rightarrow (1)$$

$$(a * b) * c = a^b * c = (a^b)^c = a^{b^c} \rightarrow (2)$$

$$a * (b * c) \neq (a * b) * c.$$

$\therefore *$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது.

2. பின்வரும் கூட்டு கூற்று மெய்மை அல்லது முரண்பாடு அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க.

$$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg (p \rightarrow \neg q)$$

தீர்வு:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q)$	$\neg (p \leftrightarrow q) \wedge \neg (p \rightarrow \neg q)$

T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

கடைசி நிரல் T மற்றும் F கலந்து வருவதால் கொடுக்கப்பட்ட கூற்று மெய்மை அல்ல முரண்பாடும் அல்ல இது ஒரு நிச்சயமின்மை ஆகும்.

$$3. (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

தீர்வு:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

கடைசி நிரலில் T மட்டும் உள்ளதால் இரு ஒரு மெய்மை ஆகும்.

4. மெய்மை அட்டவணையைப் பயன் படுத்தமால் $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ என நிரூபிக்க.

நிரூபணம்:

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (\neg q \vee r) \\
 &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
 &[\therefore \text{சேர்ப்பு பண்பு}] \\
 &\equiv \neg (p \wedge q) \vee r \\
 &[\text{டி - மார்க்கன் விதி}]
 \end{aligned}$$

$$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r.$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. x, y என்ற எண்கள் $x = y$ என்றாவது உள்ளது எனில், பின்னர் $x^2 = y^2$ என்ற கூற்று சம்மந்தமான மறுதலை, எதிர்மறை மற்றும் நேர்மாறுகளை எழுதுகளை.

தீர்வு:

p : x, y என்ற எண்கள் $x = y$ என்றவாறு உள்ளது.

$$q : x^2 = y^2$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்று: $p \rightarrow q$

1 மறுதலை $q \rightarrow p$

x மற்றும் y என்ற எண்கள் $x^2 = y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x = y$

2 எதிர்மறை: $\neg p \rightarrow \neg q$

x, y என்ற இரு எண்கள்

$x \neq y$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x^2 \neq y^2$.

3 நேர்மாறு: $\neg q \rightarrow \neg p$.

x, y என்ற இரு எண்கள் $x^2 \neq y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x \neq y$.

5 - மதிப்பெண் வினா விடை:

1. மட்டு ii ஐப் பொறுத்து எச்சத் தொகுதிகளின் கணம் { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 } -ன் உட்கணம் A = { 1,3,4,5,9 } -ன் மீது x_{11} என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப்பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்பு பண்பு (iv) சமனிப்பண்பு (v) எதிர்மறைப்பண்பு ஆகியவற்றைச் சரி பார்க்க.

தீர்வு:

x_{11}	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

i) அடைவுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து x_{11} A-ன் மீது அடைவ பண்பு பெற்றுள்ளது.

ii) பரிமாற்றுப் பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து x_{11} பரிமாற்று பண்பு உடையதாகும்.

iii) சேர்ப்புப் பண்பு:

x_{11} என்பது வழக்கமாக சேர்ப்பு பண்புக்கு உட்பட்டது.

iv) சமனிப் பண்பு:

$1 \in A$ என்பது சமனிப் உறுப்பாகும்

v) எதிர்மறை பண்பு:

அட்டவணையிலிருந்து,

1-ன் எதிர்மறை $1 \in A$

3-ன் எதிர்மறை $4 \in A$

4-ன் எதிர்மறை $3 \in A$

5-ன் எதிர்மறை $9 \in A$

9-ன் எதிர்மறை $5 \in A$

2. சமமான மானவை பண்புகளைப் பயன்படுத்தி

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$[\because p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q]$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

[பரிமாற்று பண்பின்படி]

$$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q))$$

)

[பங்கிட்டு பண்பின்படி]

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)$$

[பங்கிட்டு பண்பின்படி]

$$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee F$$

[நிரப்பு விதிப்படி]

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$$

[சமனி விதிப்படி]

$$\equiv (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

[பரிமாற்று விதிப்படி]

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

[பரிமாற்று விதிப்படி]

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

$$3. M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}^*$$

என்பது அணிப்பெருக்கல் எனக் கொள்க

* ஆனது M-ன் மீது அரடவு

வெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க

அவ்வாறெனில் * ஆனது M-ன் மீது

பரிமாற்று பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு, சமனிப்

பண்பு எதிர்மறை பண்புகளை நிறைவு

செய்யுமா என சோதிக்க:

தீர்வு:

i) அடைவுப் பண்பு:

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in M$$

$$A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$$

$\therefore$ * ஆனது அடைவ பண்பு பெற்றுள்ளது.

ii) பரிமாற்றுப் பண்பு:

$A, B \in M$

$$\begin{aligned} A * B &= \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2yx & 2yx \\ 2yx & 2yx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \\ &= B * A \\ A * B &= B * A \end{aligned}$$

$\therefore *$ ஆனது M - ல் பரிமாற்று பண்பு பெற்றுள்ளது.

iii) சேர்ப்பு பண்பு:

அணிகளின் பெருக்கல் எப்போதும் சேர்ப்பு பண்புக்கு உட்படும்

$A * (B * C) = (A * B) * C \forall A, B, C \in M$.

iv) சமணிப் பண்பு:

$E = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}$ என்பது M -ன் சமணி உறுப்பு என்க

$$\therefore AE = A$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$2xe = x$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$$

இதே போன்று $EA = A \forall A \in M$

v) எதிர்மறைப் பண்பு:

$A \in M$,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix}$ A -ன் எதிர்மறை என்க.

$$AA^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \\ 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2xx^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2x} = \frac{1}{4x} \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in M.$$

என்பது A - ன் எதிர்மறை இதேபோன்று $A^{-1}A = E$ எனவும் காணலாம்

$\therefore *$ ஆனது எதிர்மறை பண்பை நிறைவு செய்யும்.

4) $A = a - \{1\}$ என்க A -ன் $*$ மீது $*$ வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது $x * y = x + y - xy$ ஆனது A -ன் மீது அடைவ பெற்றுள்ளதா அவ்வாறெனில் A -ன் மீது $*$ ஆனது பரிமாற்று பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு, சமணிப்பண்பு, எதிர்மறை பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா என சோதிக்க.

தீர்வு:

i) அடைவ பண்பு:

$x, y \in A$ என்க $x \neq 1, y \neq 1$

$$x - 1 \neq 0, y - 1 \neq 0$$

$$(x-1)(y-1) \neq 0$$

$$xy - x - y + 1 \neq 0$$

$$1 \neq x+y-xy$$

$$\Rightarrow x*y \neq 1$$

$$\therefore x*y \in A$$

$\therefore *$ ஆனது A -ல் அடைவ பெற்றுள்ளது.

ii) பரிமாற்று பண்பு:

$$x, y \in A$$

$$x*y = x+y-xy$$

$$= y+x-yx$$

$$= y*x$$

$\therefore *$ ஆனது பரிமாற்று பண்பை நிறைவு செய்கிறது.

iii) சேர்ப்பு பண்பு:

$$(x*y)*z = (x+y-xy)*z$$

$$= (x+y-xy) + z - (x+y-xy)z$$

$$= x+y+z - xy -xz-yz +xyz \rightarrow$$

①

$$x*(y*z) = x*(y+z-yz)$$

$$= x+(y+z-yz) - x(y+z-yz)$$

$$= x+y+z -xy -xz -yz +xyz \rightarrow \textcircled{2}$$

①&② லிருந்து

$$x*(y*z) = (x*y)*z$$

$\therefore *$ ஆனது சேர்ப்பு பண்புக்கு உட்படும்.

4) சமனிப் பண்பு:

$\in$ என்பது A -ன் சமனி உறுப்பு என்க

$$x \in A$$

$*$ -ன் வரையறைப்படி,

$$x*e = x+e - xe$$

e -ன் வரையறைப்படி,

$$x*e = x$$

$$\Rightarrow x+e -xe = x$$

$$\Rightarrow e - xe = 0$$

$$\Rightarrow e(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{0}{1-x} = 0$$

$$e = 0 \in A$$

$\therefore *$ என்பது சமனி உறுப்பு.

5) எதிர்மறைப் பண்பு:

x^{-1} என்பது x -ன் எதிர்மறை என்க

$$x*x^{-1} = e$$

$$x + x^{-1} - xx^{-1} = 0 \quad [\because e = 0]$$

$$\Rightarrow x^{-1}(1-x) = -x$$

$$\Rightarrow x^{-1} = \frac{-x}{1-x} \in A$$

$*$ எதிர்மறை பண்பு நிறைவு செய்கிறது.

Padasalai

CEO TIRUVALLUR