11TH STANDARD

MATHEMATICS -UNIT 1V

ASSIGNMENT 1&2

K.BAKTHAVACHALAM.,
P.G.ASSISTANT (MATHS),
VIRINCHIPURAM
VELLORE DISTRICT
CELL.9944481639

S.RAVIKUMAR.,
P.G.ASSISTANT (MATHS),
SENTHAMANGALAM
VELLORE DISTRICT
CELL.9894127745

1. கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, எல்லா மிகை எண்கள் $n \geq 1$ க்கு $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்க.

$n=1$ எனில்

$L.H.S = 1$

$R.H.S = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$

$= 1.$

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க

$1+2+3+\cdots k = \frac{k(k+1)}{2} \longrightarrow (1)$

$P(k+1)$ உண்மை என நிறுவ வேண்டும்.

$1+2+3+\cdots+k+k+1 = (1+2+3+\cdots k)+k+1$

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \longrightarrow (2)$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை.

கணித தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ உண்மையென நிரூபிக்கப்பட்டது.

2. கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம், எல்லா மிகை எண்கள் $n \geq 1$க்கு $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n): 1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என்க

$n=1$ எனில்

$L.H.S = 1^2 = 1$

$R.H.S = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

$P(1)$ என்பது உண்மை

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \longrightarrow (1)$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்

$$P(k+1) = \underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots k^2} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை.
எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி
$P(n)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

3. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 1$ க்கு
$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு:
$P(n): 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ என்க.

$n=1$ எனில் $L.H.S = 1$

$$R.H.S = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

$P(1)$ என்பது உண்மை.
$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$1^3+2^3+3^3+\dots k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \longrightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{1^3+2^3+3^3+\dots+k^3} + (k+1)^3$$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2$$

எனவே $P(k+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதலின் படி $P(n)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 1$ க்கு
$1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $P(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ என்க.

$n=1$ எனில் $L.H.S = 1^2 = 1$

$$R.H.S = \frac{1(2-1)(2+1)}{3} = 1$$

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \rightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2(k+1)-1]^2$$

$$= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. பூச்சியமற்ற முதல் n இரட்டை எண்களின் கூடுதல் n^2+n என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n) : 2 + 4 + 6 + \cdots 2n = n^2 + n$ என்க

$n=1$ எனில் $L.H.S = 2$

$$R.H.S = 1^2 + 1 = 2$$

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ என்பது உண்மை எனக் கொள்க.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k \rightarrow (1)$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{2 + 4 + 6 + \cdots 2k}\ + 2(k+1)$$

$$= k^2 + k + 2(k+1)$$

$$= (k+1)^2 + (k+1)$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. முதல் n ஒற்றை மிகை எண்களின் கூடுதல் n^2 எனத் தொகுத்தறிதல் முறையால் நிறுவுக.

தீர்வு: $P(n) : 1 + 3 + \cdots \cdots 2(n-1) = n^2$ என்க.

$n=1$ எனில் $L.H.S = R.H.S$ $\therefore P(1)$ என்பது உண்மை

P(k) உண்மை எனக் கொள்க.

$1+3+5+\cdots+2(k-1) = k^2 \longrightarrow (1)$

P(k+1) உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{1+3+5+\cdots 2(k-1)} + [2(k+1)-1]$$

$$= (k+1)^2$$

P(k+1) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.
எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி
$1+3+5+\cdots\cdots 2(n-1) = n^2$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.
அதாவது P(n) உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையால் $n \geq 1$க்கு
$1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $P(n): 1.2+2.3+3.4+\cdots n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ என்க.

n = 1 எனில் $L.H.S = 1.2 = 2$

$R.H.S = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$

P(1) என்பது உண்மை. P(k) உண்மை எனக் கொள்க.

$1.2+2.3+3.4+\cdots k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} \longrightarrow (1)$

P(k+1) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{1.2+2.3+3.4+\cdots k(k+1)} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

P(k+1) என்பதும் உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி P(n) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம், எல்லா இயல் எண்கள் n-க்கும் $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ என நிறுவுக.

$P(n) := \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ என்க

$n=1$ எனில் $L.H.S = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$R.H.S = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$P(k) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \longrightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+1+1}$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

9. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் n க்கும் $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n) : \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

$n=1$ எனில்

$L.H.S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{6}$

$R.H.S = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} \rightarrow (I)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+3)}{4(k+1+1)(k+1+2)}$$

P(k+1) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி P(n) என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

10. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் - n க்கும் $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n): \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$ என்க.

n=1 எனில் $L.H.S = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$

$R.H.S = \frac{1}{6+4} = \frac{1}{10}$

P(1) என்பது உண்மை. P(k) உண்மை எனக் கொள்க.

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4} \rightarrow (1)$$

P(k+1) உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}} + \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)}$$

$$= \frac{k}{6k+4} + \frac{1}{[3(k+1)-1][3(k+1)+2]}$$

$$= \frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

P(k+1) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி P(n) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

1. எந்த ஒரு இயல் எண் n க்கும், $a > b$ எனில் $a^n - b^n$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n) := a^n - b^n$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும் என்க

$n=1$ எனில் $a-b$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும்

$P(1)$ உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$a^k - b^k$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும்.

$a^k - b^k = \lambda(a-b)$ $\lambda \in N$.

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$$
$$= a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$$
$$= a\lambda(a-b) + b^k(a-b)$$
$$= (a-b)(a\lambda + b^k)$$

$\therefore$ $a^{k+1} - b^{k+1}$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும்.

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை. கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப் பட்டது.

2. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் n-க்கும் $x^{2n} - y^{2n}$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க

தீர்வு: $P(n) := x^{2n} - y^{2n}$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும் என்க.

$n=1$ எனில் $x^2 - y^2$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும்.

எனவே $P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$x^{2k} - y^{2k}$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும்

$$\Rightarrow x^{2k} - y^{2k} = \lambda(x+y) \rightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} = x^{2k+2} - y^{2k+2}$$
$$= x^{2k}.x^2 - y^{2k}.y^2$$
$$= x^{2k}x^2 - x^2y^{2k} + x^2y^{2k} - y^{2k}y^2$$
$$= x^2(x^{2k} - y^{2k}) + y^{2k}(x^2 - y^2)$$

$= x^2(\lambda(x^2-y^2)) + y^{2k}(x^2-y^2)$

$= x^2(\lambda(x+y)(x-y)) + y^{2k}(x+y)(x-y)$

$\Rightarrow x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும்.

∴ $P(k+1)$ உண்மை. எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி, $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

3. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n க்கும் n^3-7n+3 ஆனது 3 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n)$: n^3-7n+3 ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

$n=1$ எனில் $1^3-7(1)+3 = 1-7+3$
$= -3$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

∴ $P(1)$ உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

k^3-7k+3 ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

$k^3-7k+3 = 3\lambda$ என்க. $\longrightarrow (1)$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$(k+1)^3 - 7(k+1) + 3 = k^3+3k^2+3k+1-7k-7+3$
$= k^3+3k^2-4k-3$
$= k^3+3k^2$
$= 3\lambda + 3k^2+3k-6$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

எனவே $P(k+1)$ என்பதும் உண்மை. கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n-க்கும் $5^{n+1}+4\times 6^n$ ஐ 20 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 9 என நிறுவுக.

தீர்வு:-

$P(n)$: $5^{n+1}+4\times 6^n$ ஐ 20 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 9.

$n=1$ எனில் $P(1) = 5^2+4\times 6^1$
$= 25+24$
$= 49$ ஐ 20 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி 9. எனவே $P(1)$ என்பது உண்மை.

P(K) உண்மை எனக் கொள்க.

$5^{K+1} + 4\times 6^K = 20\lambda + 9 \longrightarrow (1)$

P(K+1) என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(K+1) = 5^{K+1+1} + 4\times 6^{K+1}$$
$$= 5\cdot 5^{K+1} + 4\times 6^K\cdot 6$$
$$= 5\cdot 5^{K+1} + 24\times 6^K$$
$$= 5\cdot 5^{K+1} + 20\times 6^K + 4\times 6^K$$
$$= 5\left(5^{K+1} + 4\times 6^K\right) + 4\times 6^K$$
$$= 5\left(20\lambda + 9\right) + 4\times 6^K$$
$$= 100\lambda + 45 + 4 - 4 + 4\times 6^K$$
$$= 100\lambda + 49 + 4\left(6^K - 1\right)$$

எல்லா மதிப்புகள் $K \geq 1$க்கும் $6^K - 1$ ஆனது 5 ஆல் வகுபடும். எனவே $4(6^K-1)$ ஆனது 20 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore 5^{K+1+1} + 4\times 6^{K+1}$ ஆனது 20 ஆல் வகுபட மீதி 9 கிடைக்கும்.

P(K+1) உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n க்கும் $10^n + 3\times 4^{n+2} + 5$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n)$: $10^n + 3\times 4^{n+2} + 5$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும்.

$n=1$ எனில் $P(1) = 10^1 + 3\times 4^3 + 5$
$$= 10 + 3(64) + 5$$
$$= 10 + 192 + 5$$
$$= 207$$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும்.

P(1) என்பது உண்மை.

P(K) உண்மை எனக் கொள்க.

$10^K + 3\times 4^{K+2} + 5$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும்

$10^K + 3\times 4^{K+2} + 5 = 9\lambda \longrightarrow (1)$

$P(K+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$10^{K+1} + 3\times 4^{K+1+2} + 5 = 10\cdot 10^{K} + 3\times 4^{K+2}\times 4 + 5$$

$$= 10\cdot 10^{K} + 12\times 4^{K+2} + 5$$

$$= 10\cdot 10^{K} + 30\times 4^{K+2} + 50 - 18\times 4^{K+2} - 45$$

$$= 10\left(10^{K} + 3\times 4^{K+2} + 5\right) - 9\left(2\times 4^{K+2} - 5\right)$$

9 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore P(K+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் படி $P(n)$ என்பது உண்மை.

6. $n \geq 1$ க்கு $3^{2n+2} - 8n - 9$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும் என்பதை நிரூபிக்க.

<u>தீர்வு:</u>

$P(n)$: $3^{2n+2} - 8n - 9$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும்.

$n=1$ எனில் $P(1) = 3^{4} - 8 - 9$

$= 64$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும்.

$P(1)$ என்பது உண்மை.

$P(K)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$3^{2K+2} - 8K - 9$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும்.

$\Rightarrow 3^{2K+2} - 8K - 9 = 8\lambda \rightarrow (1) \quad \lambda \in N.$

$P(K+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(K+1) = 3^{2(K+1)+2} - 8(K+1) - 9$$

$$= 3^{2K+2+2} - 8K - 8 - 9$$

$$= 9\cdot 3^{2K+2} - 72K + 64K - 81 + 64$$

$$= 9\cdot 3^{2K+2} - 72K - 81 + 64(K+1)$$

$$= 9(8\lambda) + 64(K+1)$$

$= 8\left[9\lambda + 8(K+1)\right]$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும்

$P(K+1)$ உண்மை. எனவே $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி $n \geq 1$ க்கு (11)
$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 > \frac{n^3}{3}$ என நிறுவு.

தீர்வு: $P(n): 1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 > \frac{n^3}{3}$ என்க.

$n=1$ எனில் $P(1) = 1^2 > \frac{1^3}{3}$ என்பது உண்மை.

$P(1)$ உண்மை.

$P(K)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+K^2 > \frac{K^3}{3} \longrightarrow (1)$$

$P(K+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(K+1) = 1^2+2^2+3^2+\cdots+K^2+(K+1)^2$$
$$> \frac{K^3}{3}+(K+1)^2 = \frac{(K+1)^3}{3}$$

$P(K+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே கணித தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

8 கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 2$ என உள்ள எந்த ஒரு முழு எண்ணிற்கும் $3n^2 > (n+1)^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $P(n)$: $n \geq 2$ என இருக்கும் போது $3n^2 > (n+1)^2$ என்க.

$n=2$ எனில் $P(1) : 3(2)^2 > (2+1)^2$ என்பது உண்மை

எனவே $P(1)$ உண்மை.

$P(K)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$K \geq 2$ என இருக்கும் போது $3K^2 > (K+1)^2 \longrightarrow (1)$

$P(K+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$3(K+1)^2 = 3[K^2+2K+1]$$
$$= 3K^2+6K+3$$
$$> (K+1)^2+6K+3$$
$$= (K+1)^2+6K+3$$
$$= K^2+2K+1+6K+3$$
$$= K^2+8K+4 = K^2+4K+4+4K.$$
$$= (K+2)^2+4K$$

$\Rightarrow 3(K+1)^2 > (K+2)^2, \quad K>0.$

எனவே $P(K+1)$ உண்மை. கணிதத் தொகுத்தறிதலின்படி $P(n)$ உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.

9. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையால் $n \geq 2$ என உள்ள எந்த ஒரு மிகு எண்ணிற்கும் $3^n > n^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $P(n)$: $n \geq 2$ என இருக்கும் போது $3^n > n^2$

$n=2$ எனில் $3^2 > 2^2$ உண்மை

$P(2)$ உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$3^k > k^2 \longrightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^k$$
$$> 3k^2 \quad (\because (1) \text{ லிருந்து})$$
$$> (k+1)^2.$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்டது.
எனவே கணித தொகுத்தறிதலின் கொள்கைப்படி $P(n)$ உண்மை.

10 கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி $n \geq 2$ எனக்கொண்ட எந்த ஒரு இயல் எண்ணுக்கும்
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு: $P(n)$: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ என்க.

$n=2$ எனில் $L.H.S = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$, $R.H.S = \frac{3}{4}$

$\therefore P(1)$ உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக்கொள்க.

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \longrightarrow (1)$$

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(k+1) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$= \frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$= \frac{k+1}{2k}\quad\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$$
$$= \frac{\cancel{k+1}}{2\cancel{k}}\quad\frac{\cancel{k}(k+2)}{(k+1)^{\cancel{2}}} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$P(k+1)$ என்பதும் உண்மை. எனவே $P(n)$ உண்மை.

கி. பக்தவச்சலம். மு.ஆ (கணிதம்) 9944461639.