



Padalsalai's Telegram Groups!

(தலைப்பிற்கு கீழே உள்ள லிங்கை கிளிக் செய்து குழுவில் இணையவும்!)

- Padalsalai's NEWS - Group
https://t.me/joinchat/NIfCqVRBNj9hhV4wu6_NqA
- Padalsalai's Channel - Group
<https://t.me/padasalaichannel>
- Lesson Plan - Group
<https://t.me/joinchat/NIfCqVWwo5iL-21gpzrXLw>
- 12th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_12th
- 11th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_11th
- 10th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_10th
- 9th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_9th
- 6th to 8th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_6to8
- 1st to 5th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_1to5
- TET - Group
https://t.me/Padalsalai_TET
- PGTRB - Group
https://t.me/Padalsalai_PGTRB
- TNPSC - Group
https://t.me/Padalsalai_TNPSC

7. வகை-நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

வகையிடலின் எய்டுங்:-

$$① \text{ சாய்வு} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$② \text{ } S \text{ எண்யது இயல்பயர்ச்சி எண்யிஸ் } S=f(t) \\ \text{நிசைசலையகம் } v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{சுருக்கம் } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$③ \text{ சராசரி நிசைசலையகம் } = \frac{S(b) - S(a)}{b-a}$$

$$④ \text{ கணப்ஸாடுது நிசைசலையகம் } = S'(t)$$

$$\text{இயலாடுங் சூய்வு நிசைசலையகம் அனடயும் } \\ \text{புலாது } V=0$$

G. காந்தநிகையன்
நிசைசலையகம் மாவட்டம்

பயிற்சி 7.1

① ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து t கிணாடி கறாக்கு பிறகு ஒரு துகள் 2-ம்மா சூரத்தின் அளவு $S=2t^2+3t$ மீ எண்யம்படி. ஓரங்கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

ய) $t=3$ மற்றும் $t=6$ கிணாடிகறாக்கு இனடலையுள்ள சராசரி நிசைசலையகம் எண்யன்

(ii) $t=3$ மற்றும் $t=6$ கிணாடிகறாக்கு இனடலையுள்ள கணப்ஸாடுது நிசைசலையகம் எண்யன்?

$$S(t) = 2t^2 + 3t$$

ய)

$$a=3 \quad b=6$$

$$S(3) = 2(3^2) + 3(3)$$

$$= 18 + 9$$

$$= 27$$

$$S(6) = 2(6^2) + 3(6)$$

$$= 72 + 18$$

$$= 90$$

$$\text{சராசரி நிசைசலையகம்} = \frac{S(b) - S(a)}{b-a}$$

$$= \frac{S(6) - S(3)}{6-3}$$

$$= \frac{90-27}{3} = \frac{63}{3}$$

$$= 21 \text{ மீ/கி}$$

$$(ii) \quad S(t) = 2t^2 + 3t$$

$$S'(t) = 4t + 3$$

$t=3$ ல் கணப்ஸாடுது

$$\text{நிசைசலையகம்} = S'(3)$$

$$= 4(3) + 3 = 12 + 3$$

$$= 15$$

$t=6$ ல் கணப்ஸாடுது

$$\text{நிசைசலையகம்} = S'(6)$$

$$= 4(6) + 3$$

$$= 24 + 3$$

$$= 27 \text{ மீ/கி}$$

2) 400 அடி 2-ம்மா மணல் 2-ம்மா சூரத்திலிருந்து தவறுதலாக ஒரு புறகப்பல கருவி விடுகிறது. t கிணாடிகளில் புறகப்பல கருவி விடும் சூரம் $S=16t^2$ ஆகும்.

ய) ததரைய ரதாடும் முண்னர் புறகப்பல கருவி விடு எருந்துக் ரதாண்ட ஓரம் எண்யன்?

(ii) கீசுடி விடுந்த இறுதி 2 கிணாடிகளில் புறகப்பல கருவிவின் சராசரி நிசைசலையகம் எண்யன்?

(iii) ததரைய ரதாடும்புலாது புறகப்பல கருவிவின் கணப்ஸாடுது நிசைசலையகம் எண்யன்?

$$S(t) = 16t^2$$

ய) ததரைய அனடயும்புலாது

$$\text{சூரம்} = 400 \text{ மீ}$$

$$S(t) = 400$$

$$16t^2 = 400$$

$$t^2 = \frac{400}{16} = \frac{100}{4} = 25$$

$$t^2 = 25$$

$$t = \pm 5$$

ஆரம் $t=5$ கிணாடி

(ii) கனடசி இரண்டு கிணாடிகளில் சராசரி நிசைசலையகம் ஆரம் $t=3$ $t=5$

(2)

$$\begin{aligned} \text{சராசரி திசையகம்} &= \frac{S(5) - S(3)}{5 - 3} \\ &= \frac{16(5^2) - 16(3^2)}{2} \\ &= \frac{8(25 - 9)}{2} \\ &= 8 \times 16 \\ &= 128 \text{ அடி/மி} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) கணப்பொழுது திசையகம்} &= S'(t) \\ &= 16(2t) = 32t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=5 \text{ல் கணப்பொழுது திசையகம்} &= S'(5) \\ &= 32(5) \\ &= 160 \text{ அடி/மி} \end{aligned}$$

③ $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ கி.மீ. $t \geq 0$ எனும் வரையில் ஒரு காரை இயக்கித் துருவம் நகர்கிறது. $t=0$ முதல் $t=5$ வரையில் துருவத்தின் திசையகம் மாறுகின்றதா?

(i) முதல் 4 வினாடிகளில் துருவம் பயணித்த தூரம் என்ன?

(ii) திசையகம் பூச்சியமாகியவுடனும் ஒரு நொடிகளில் எல்லாம் துருவத்தின் திசையகம் காண்க?

$$S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$$

$$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

(i) துருவத்தின் திசையகம் மாறாமல் போகுமா?

$$S'(t) = 0$$

$$6t^2 - 18t + 12 = 0$$

$$6(t^2 - 3t + 2) = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t=1, t=2$$

$$t=1, 2 \text{ வினாடிகளில்}$$

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துருவம் பயணித்த தூரம்

$$= |S(1) - S(0)|$$

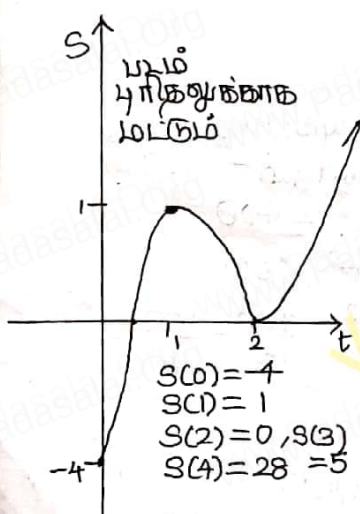
$$+ |S(2) - S(1)|$$

$$+ |S(3) - S(2)|$$

$$+ |S(4) - S(3)|$$

$$= |1 - 4| + |0 - 1| + |5 - 0| + |28 - 5|$$

$$= 3 + 1 + 5 + 23 = 32 \text{ மீ}$$



$$\text{(iii) } S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$S''(t) = 12t - 18$$

திசையகம் பூச்சியமாகியவுடனும் ஒரு நொடிகளில் $t=1, 2$

$$\text{முடிபகம் } S''(1) = 12(1) - 18 = -6 \text{ மீ/மி}^2$$

$$S''(2) = 12(2) - 18 = 6 \text{ மீ/மி}^2$$

4) x பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனசதுரத்தின் கனஅளவு $V = x^3$ எனில் $x=5$ அளவுகள் எவ்வளவு x அளவு பொறுத்து கனஅளவு மாறுவதில் காண்க.

$$\text{கனஅளவு } V = x^3$$

$$x \text{ அளவு பொறுத்து மாறுவதில்}$$

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} x=5 \text{ல் கனஅளவு மாறுவதில்} &= \left[\frac{dV}{dx} \right]_{x=5} \\ &= 3(5^2) = 75 \text{ அளவுகள்} \end{aligned}$$

5) x நீளமுள்ள (மீ) ஒரு வட்டவட்ட கோளின் திசையகம் $m(x)$ (கி.மீ/மீ) $m(x) = \sqrt{3x}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனில் $x=3$ மற்றும் $x=27$ மீ எவ்வளவு x அளவு பொறுத்து திசையகம் மாறுவதில் காண்க.

$$m(x) = \sqrt{3x}$$

$$a=3 \quad b=27$$

திசையகம் மாறுவதில் $m'(x)$

$$m'(x) = \sqrt{3} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(i) x=3 \text{ல்}$$

$$m'(3) = \sqrt{3} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ கி.மீ/மீ}$$

$$(ii) x=27 \text{ல்}$$

$$\begin{aligned} m'(27) &= \sqrt{3} \frac{1}{2\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} \text{ கி.மீ/மீ} \end{aligned}$$

6) ஒரு கோளத்தில் விடுந்த கல்லினால் பொது காலம் வட்டவட்டத்தின் வரையத்தில் சிற்றளவுகள் குறையுமின்றது. வரையத்தில் சிற்றளவுகளின் ஆரம் r வினாடிக்கு 2 மீ. விட அதிகமாகின்றது. ஆரம் 5 மீ. எவ்வளவு காலம் t இன்

பரப்பளவு மாறுவீதம் என்ன? (3)

$$= 2\pi \text{ கி.மீ./வி.}$$

தேரத்தில் பரப்பளவு A எனக்
கொள்ளின் பரப்பளவு $A = \pi r^2$

தேரம் வளையத்து வளைகயிட

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{--- (1)}$$

$$r = 5 \text{ மீ.} \quad \frac{dr}{dt} = 2$$

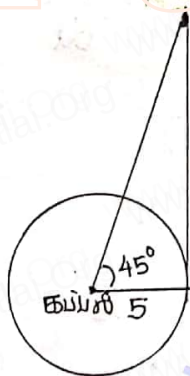
மேல்க்கையிட

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2(5) \cdot 2 = 20\pi$$

பரப்பளவு மாறுவீதம் $= 20\pi$ க.மீ.²/வி.

7) கப்பலின் கீழ்க்கண்ட சதுரவடிவிலிருந்து
ஒவ்வொரு 10 வினாடிகளுக்கு ஒரு
முறை சதுரவடிவிலிருந்து கடற்கரையில்
இருந்து 5 கி.மீ தூரத்தில் கப்பல்
நகர்ந்துகொண்டிருக்கிறது. அவ்வளவுகளை
ஒளிக்கண்ணை கடற்கரையுடன் 45°
கொண்டிருக்கிற தூரத்திலிருந்து
கடற்கரையில் ஒளிக்கண்ணை
செய்வதற்கு வேண்டிய நேரம்.

கொண்டிருக்கிற நேரம் $\frac{dt}{dt}$ என்க



10 வினாடிகளில்
கொண்டிருக்கிற
 $= 2\pi$
1 வினாடியில்
கொண்டிருக்கிற
 $= \frac{2\pi}{10}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{5} \quad x = 5 \tan \theta$$

தேரம் வளையத்து

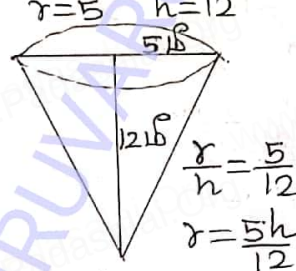
$$\frac{dx}{dt} = 5 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$\theta = 45^\circ$ ல் $x = 5$ கி.மீ எனும்போது
ஒளிக்கண்ணை நகரும் வீதம்

$$\frac{dx}{dt} = 5 \sec^2 45^\circ \frac{\pi}{5} = (\sqrt{2})^2 \pi$$

8) தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட
ஒரு கோள வடிவிலான குழியில் 2 மீ
ஒரு நீர்நிலைத் தொட்டியின் ஆழம் 12 மீ
மற்றும் குழியின் வட்டத்தின் ஆரம்
5 மீ என்க. நீர்நிலைக்கு 10 கனமீ
வேகத்தில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது. எனில்
3 மீ ஆழத்தில் நீர் இருக்கும்போது நீரின்
ஆழம் அதிகரிக்கும் வேகம் என்ன.

தேரத்தில் நீரின் கனஅளவு V என்க
ஆரம் $r = 5$ உயரம் (ஆழம்) $h = 12$



$$\frac{dV}{dt} = 10 \quad h = 8$$

எனில் $\frac{dh}{dt}$
காணவேண்டும்.

கொண்டிருக்கிற கனஅளவு $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{25h^2}{144} h$$

$$V = \frac{25\pi h^3}{3 \times 144}$$

தேரம் வளையத்து வளைகயிட

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{3 \times 144} 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{25\pi}{3 \times 144} 3 \times 8 \times 8 \times \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{10 \times 9}{4 \times 25\pi} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{10\pi} = \frac{9}{10\pi} \text{ மீ/நிமிஷம்}$$

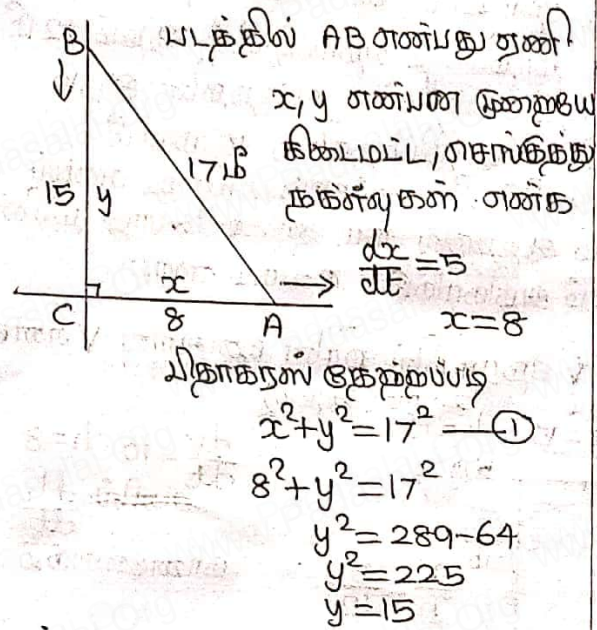
ஆழம் அதிகரிக்கும் வீதம் $\frac{9}{10\pi}$ மீ/நி.

9) 17 மீ நீளமுள்ள ஒரு துணி

செங்குத்தாக சுவரில் சாய்ந்து வைக்கப்
பட்டுள்ளது. துணியின் அடிப்பக்கம் சுவரில்
இருந்து விடுவிக்கப்பட்டால் வீதம் வினாடிக்கு
5 மீ எனில் துணியின் அடிப்பக்கம்
சுவரிலிருந்து 8 மீ தொலைவில்
இருக்கும்போது

ய அகலம் உச்சி என்ன வீதத்தில் கீழேவருகும்
கொண்டிருக்கிற கனஅளவு

(iii) எந்த வீதத்தில், துணி சவரம் மற்றும் துறை காகியவற்றால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறது?

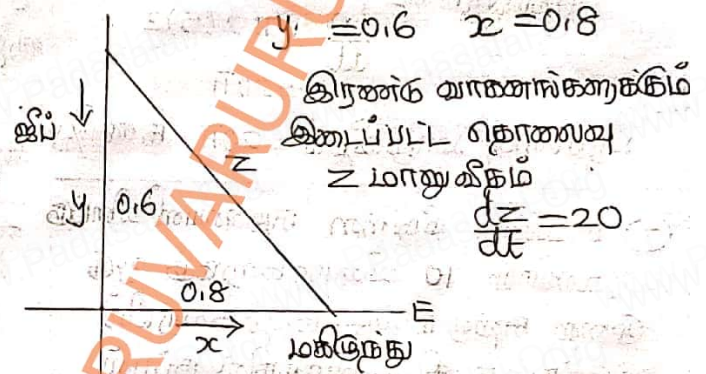


iv) $x^2 + y^2 = 17^2$
உருவாகும் வகையில்
 $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$
2 ஆவதுக்கு $8(5) + 15 \frac{dy}{dt} = 0$
 $15 \frac{dy}{dt} = -40$
 $\frac{dy}{dt} = -\frac{40}{15} = -\frac{8}{3}$
உயரம் குறையும் வீதம் = $\frac{8}{3}$ மீ/வி.

10) வட திசையில் இருந்து ஒரு செங்கோண சந்திர்ப்பை அணுகும் ஒரு காவல்துறை வாகனம் வேகமாக சென்று திடீரென்று கிடைத்து நிற்கும் சமயம் ஒரு மகிழ்வுறாத துறந்துகிறது. சாதாரண சந்திர்ப்பின் வடக்கே 0.6 கி.மீ தொலைவில் காவல்துறையின் வாகனமும் கிடைக்க 0.8 கி.மீ தொலைவில் மகிழ்வுறும் 20 மீ/வி வேகம், மின்னாந்த அணைக் கருவியின் துறை தொண்டு காவல்துறை தாங்காது வாகனம் திடுக்கிடும் மகிழ்வுறும் இடைப்பட்ட தூரம் மணிக்கு 20 கி.மீ வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது எனில் காவல்துறை

(4) வாகனம் மணிக்கு 60 கி.மீ வேகத்தில் நகர்கிறது எனில் மகிழ்வுறும் வேகம் என்ன?

உருவத்தில் மகிழ்வுறும் நகர்ந்த தூரம் z என்க
காவல்துறை கீழ் நகர்ந்த தூரம் y என்க
கீழ் வேகம் $\frac{dy}{dt} = -60$ கி.மீ/மணி



$y^2 + x^2 = z^2$
உருவாகும் வகையில்
 $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}$
2 ஆவதுக்கு
 $0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) = 1(20)$
 $0.8 \frac{dx}{dt} - 36 = 20$
 $0.8 \frac{dx}{dt} = 20 + 36$
 $\frac{dx}{dt} = \frac{56}{0.8} = 70$ கி.மீ/வி.
மகிழ்வுறும் வேகம் = 70 கி.மீ/வி

தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

① தொடுகோட்டின் சமன்பாடு
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
செங்கோட்டின் சமன்பாடு
 $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

② தொடுகோட்டின் சாய்வு $m = \frac{dy}{dx}(x, y_1)$

③ இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

4) செங்குத்தாக வட்டத்திற்கான சாய்வு $m_1 m_2 = -1$

பயிற்சி 7.2

i) தொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு தொடுகோட்டின் சாய்வை காண்க.

ii) $y = x^4 + 2x^2 - x$; $x = 1$
 x ஐ ஸ்பாஷத்து வகையில் $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x - 1$

சாய்வு $= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 4(1) + 4(1) - 1$
 $= 8 - 1$
 $= 7$

(ii) $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$; $t = \pi/2$

$\frac{dx}{dt} = 3a \cos^2 t (-\sin t)$
 $\frac{dy}{dt} = 3b \sin^2 t (\cos t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t}$
 $= -\frac{b}{a} \frac{\sin t}{\cos t}$

சாய்வு $= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\pi/2} = -\frac{b}{a} \frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2}$
 $= -\frac{b}{a} \frac{1}{0} = \infty$

② $y = x^2 - 5x + 4$ என்ற வளைவரைக்கு சப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு $3x + y = 7$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்?

$3x + y = 7$

சாய்வு $= -\frac{x\text{அச்சு}}{y\text{அச்சு}}$

⑤

சாய்வு $= -\frac{3}{1}$

$y = x^2 - 5x + 4$ — ①

$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$

தொடுப்புள்ளி (x, y_1) என்க

சாய்வு $= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x, y_1)} = 2x_1 - 5$

$2x_1 - 5 = -3$

$2x_1 = 5 - 3$

$2x_1 = 2$

$x_1 = 1$

(x, y_1) ல் ① $\Rightarrow y_1 = x_1^2 - 5x_1 + 4$

$y_1 = 1 - 5 + 4$

$y_1 = 0$

தொடுவாயுள்ள புள்ளி $(1, 0)$

3) $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ என்ற வளைவரைக்கு சப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடு $x + y = 1729$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக இருக்கும்.

செங்கோட்டின் சாய்வு $x + y = 1729$

சாய்வு $= -\frac{1}{1} = -1$

தொடுகோட்டின் சாய்வு $= -\frac{1}{\text{செங்கோட்டின் சாய்வு}}$
 $= -\frac{1}{-1}$
 $= 1$

தொடுப்புள்ளியை (x, y_1) என்க

$y_1 = x_1^3 - 6x_1^2 + x_1 + 3$ — ①

$y = x^3 - 6x^2 + x + 3$

x ஐ ஸ்பாஷத்து வகையில்

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 1$

சாய்வு $= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x, y_1)} = 3x_1^2 - 12x_1 + 1$

$3x_1^2 - 12x_1 + 1 = 1$

$3x_1(x_1 - 4) = 0$

$x_1 = 0$ $x_1 = 4$

$x_1 = 0$ ① $\Rightarrow y_1 = 3$ புள்ளி $(0, 3)$

$x_1 = 4$ ① $\Rightarrow y_1 = 4^3 - 6(4^2) + 4 + 3$

$= 64 - 96 + 4 + 3$

$= -25$ புள்ளி $(4, -25)$

தொடுப்புள்ளிகள் $(0, 3), (4, -25)$

- ④ $y^2 - 4xy = x^2 + 5$ என்து வளைவரைக்கு எப்போதிலும் வரையப்படும் தொடுகோடு கிடைமட்டமாக இருக்கும்?

தொடுபுள்ளியை (x_1, y_1) என்க

$$y_1^2 - 4x_1y_1 = x_1^2 + 5 \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 - 4xy = x^2 + 5$$

x ஐ ஸா. வகையிட

$$2y \frac{dy}{dx} - 4(x \frac{dy}{dx} + y(1)) = 2x + 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} - 4x \frac{dy}{dx} - 4y = 2x$$

$$2 \frac{dy}{dx} (y - 2x) = 2x + 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)}{2(y-2x)}$$

$$(x_1, y_1) \text{ல் சாய்வு} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)}$$

$$= \frac{x_1 + 2y_1}{y_1 - 2x_1}$$

கிடைமட்டமான தொடுகோட்டின்

$$\text{சாய்வு} = 0$$

$$\frac{x_1 + 2y_1}{y_1 - 2x_1} = 0$$

$$x_1 + 2y_1 = 0$$

$$x_1 = -2y_1 \quad \text{--- ②}$$

① சமீபத்தில்

$$y_1^2 = 4(-2y_1)y_1 = -4y_1^2 + 5$$

$$y_1^2 + 4y_1^2 = 5$$

$$5y_1^2 = 5$$

$$y_1^2 = 1$$

② $\Rightarrow$

$$y_1 = 1 \text{ எனில் } x_1 = -2 \quad (-2, 1)$$

$$y_1 = -1 \text{ எனில் } x_1 = 2 \quad (2, -1)$$

தொடுபுள்ளிகள் $(-2, 1), (2, -1)$.

- ⑤ கீழ்க்கண்ட வளைவரைகளின் மீது

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் தொடுகோடு ஊங்கும் செங்கோடு சமன்பாடுகளை காண்க,

$$\text{i) } y = x^2 - x^4 ; (1, 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^3$$

⑥

$$\text{சாய்வு } m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(1,0)} = 2(1) - 4(1)$$

$$= -2$$

$$m = -2$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2$$

$$2x + y - 2 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x - 2y + k = 0 \quad \text{--- ①}$$

இது $(1, 0)$ மீது செங்கோடு

$$1 - 2(0) + k = 0$$

$$k = -1$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\text{①} \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{ii) } y = x^3 + 2e^x ; (0, 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2e^x$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(0,2)} = 4(0) + 2e^0$$

$$= 0 + 2(1)$$

$$m = 2$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x - 0)$$

$$y - 2 = 2x$$

$$2x - y + 2 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + 2y + k = 0 \quad \text{--- ①}$$

இது $(0, 2)$ மீது செங்கோடு

$$0 + 2(2) + k = 0$$

$$k = -4$$

① $\Rightarrow$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{iii) } y = x \sin x ; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x + \sin x$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}(0) + 1$$

$$m = 1$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \pi/2 = 1(x - \pi/2) \quad m=1$$

$$y - \pi/2 = x - \pi/2 \quad (\pi/2, \pi/2)$$

$$x, y_1$$

$$x - y = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + y = 1 \quad \text{--- ①}$$

இது $(\pi/2, \pi/2)$ வழி செல்லும்

$$K = \pi/2 + \pi/2$$

$$K = \pi$$

$$\Rightarrow x + y = \pi$$

$$(iv) x = \cos t, y = 2 \sin^2 t; t = \pi/3$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2 \sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4 \sin t \cos t}{-\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \cos t$$

$$\text{சாய்வு } m = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\pi/3} = -4 \cos \pi/3$$

$$= -4(1/2) = -2$$

$$[m = -2]$$

$$(x_1, y_1) = (\cos(\pi/3), 2 \sin^2(\pi/3))$$

$$= (1/2, 2(\sqrt{3}/2)^2) = (1/2, 2 \times \frac{3}{4})$$

$$= (1/2, 3/2)$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3/2 = -2(x - 1/2)$$

$$\frac{2y - 3}{2} = -2x + 1$$

$$2y - 3 = -4x + 2$$

$$4x + 2y = 5$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x - 4y = K \quad \text{--- ①}$$

இது $(1/2, 3/2)$ வழி செல்கிறது

$$2(1/2) - 4(3/2) = K$$

$$1 - 6 = K$$

$$K = -5$$

$$\Rightarrow 2x - 4y = -5$$

$$\textcircled{6} y = 1 + x^3 \text{ என்ற வளைவரைக்கு}$$

$$x + 12y = 12 \text{ என்ற கோட்டிற்கு}$$

⑦ செங்குத்தாக 2-ம் மீள தொடுகோட்டுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க.

$$y = 1 + x^3$$

தொடுபுள்ளியை (x_1, y_1) என்க

$$y_1 = 1 + x_1^3 \quad \text{--- ①}$$

$$y = 1 + x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 3x^2$$

$$(x_1, y_1) \text{ ல் சாய்வு} = 3x_1^2$$

$$[m_1 = 3x_1^2]$$

$$x + 12y = 12$$

$$\text{சாய்வு} = -\frac{1}{12}$$

$$m_2 = -\frac{1}{12}$$

செங்குத்து கோடுகள் எனில்

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$3x_1^2 \left(-\frac{1}{12} \right) = -1$$

$$x_1^2 = 4$$

$$[x_1 = \pm 2]$$

(i) $x_1 = 2$ எனில்

$$\Rightarrow y_1 = 1 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\text{புள்ளி } (2, 9) \text{ சாய்வு } m_1 = 3(2)^2 = 3 \times 4 = 12$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 12(x - 2)$$

$$y - 9 = 12x - 24$$

$$12x - y - 24 + 9 = 0$$

$$12x - y - 15 = 0$$

(ii) $x_1 = -2$ எனில்

$$\Rightarrow y_1 = 1 - 8 = -7$$

$$\text{புள்ளி } (x_1, y_1) = (-2, -7)$$

$$\text{சாய்வு } m_2 = 3(-2)^2$$

$$m_2 = 12$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y + 7 = 12(x + 2)$$

$$y + 7 = 12x + 24$$

$$12x - y + 24 - 7 = 0$$

$$12x - y + 17 = 0$$

⑦ $y = \frac{x+1}{x-1}$ என்ற வளைவரைக்கு ⑧

$x+2y=6$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க,

தொடுபுள்ளி (x_1, y_1) என்க

$$y_1 = \frac{x_1+1}{x_1-1} \quad \text{--- ①}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1, y_1)} = \frac{-2}{(x_1-1)^2}$$

$$x+2y=6$$

$$\text{சாய்வு } m_2 = -\frac{1}{2}$$

இணை எனவே $m_1 = m_2$

$$\frac{-2}{(x_1-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$(x_1-1)^2 = 2 \times 2$$

$$x_1-1 = \pm 2$$

$$x_1 = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 3, -1$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 \quad (3, 2)$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{-1+1}{-1-1} = 0 \quad (-1, 0)$$

தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$x+2y=k \quad \text{--- ②}$$

இது $(3, 2)$ வழி செல்கிறது

$$\Rightarrow 3+2(2)=k \quad \boxed{x+2y=7}$$

$$7=k$$

இது $(-1, 0)$ வழி செல்கிறது

$$\Rightarrow -1+0=k \quad \boxed{x+2y=-1}$$

$$k=-1$$

⑧ $x=7\cos t$ மற்றும் $y=2\sin t$

$t \in \mathbb{R}$ என்ற வளைவரைக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளை காண்க,

$$\frac{dx}{dt} = -7\sin t \quad \frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2\cos t}{-7\sin t}$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = \frac{dy}{dx} (x-x_1)$$

$$y-2\sin t = \frac{2\cos t}{-7\sin t} (x-7\cos t)$$

$$-7y\sin t + 14\sin^2 t = 2x\cos t - 14\cos^2 t$$

$$14\sin^2 t + 14\cos^2 t = 2x\cos t + 7y\sin t$$

$$2x\cos t + 7y\sin t = 14(1)$$

$$2x\cos t + 7y\sin t = 14$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$7\sin t x - 2y\cos t = k \quad \text{--- ①}$$

இது $(7\cos t, 2\sin t)$ வழியாக செல்கிறது

$$7\sin t \cdot 7\cos t - 2\sin t \cdot 2\cos t = k$$

$$49\sin t \cos t - 4\sin t \cos t = k$$

$$k = 45\sin t \cos t$$

$$\Rightarrow 7\sin t x - 2y\cos t = 45\sin t \cos t$$

⑨ $xy=2$ என்ற செவ்வக

அதிபரவணையத்திற்கும் $x^2+4y=0$

என்ற பரவணையத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை காண்க,

$$xy=2 \quad \text{--- ①}$$

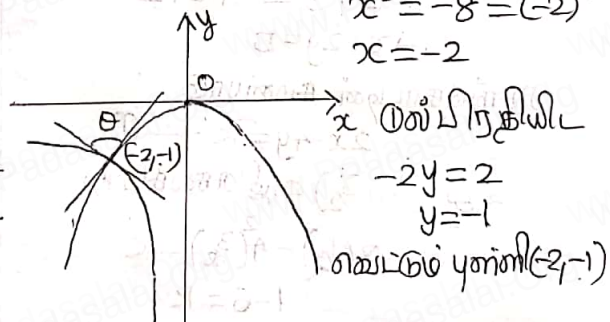
$$x^2=-4y \quad \text{--- ②}$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$x^2 = -4\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$x^3 = -8 = (-2)^3$$

$$x = -2$$



⑩ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$-2y=2$$

$$y=-1$$

வெட்டுப் புள்ளி $(-2, -1)$

$$xy=2 \quad \left| \begin{array}{l} 4y=-x^2 \\ 4\frac{dy}{dx}=-2x \\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4} \end{array} \right.$$

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(-2, -1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

(9)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(2,-1)} = \frac{+2}{+2} = +1$$

$$m_1 = -2 \quad [m_2 = 1]$$

வண்ணவகரகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - 1}{1 + (-2)(1)} \right|$$

$$= \left| \frac{-3}{-1} \right|$$

$$\tan \theta = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

$$(10) x^2 - y^2 = r^2 \text{ மற்றும் } xy = c^2$$

சுற்ற வண்ணவகரகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக. இங்கு c, r ஆகியவை மாறிலிகள்.

$$x^2 - y^2 = r^2$$

$$xy = c^2$$

வெட்டும் புள்ளி (x, y) என்க

$$x^2 - y^2 = r^2 \quad (1)$$

$$xy = c^2 \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = r^2$$

xஐ ஸொலுந்து வகையில்

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x,y)} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{c^2}{x}$$

xஐ ஸொலுந்து வகையில்

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{x^2}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x,y)} = -\frac{c^2}{x^2}$$

செங்குத்தாக வெட்டிகொள்ள நிபுணம் $m_1 \times m_2 = -1$

$$m_1 \times m_2 = \frac{x}{y} \times -\frac{c^2}{x^2}$$

$$= -\frac{c^2}{xy} = -\frac{c^2}{c^2}$$

$$m_1 m_2 = -1$$

இந்த வண்ணவகரகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

சுராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

① சுராவின் சூத்திரம்

$f(x)$ என்ற சார்பு, $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும், $f(a) = f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ஆனது $f'(c) = 0$ என காணலாம்.

② ஸெக்ராக்சியின் சுராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

$f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும், இருப்பின் எத்தனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ன்று $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

என காணலாம்.

③ $f(x)$ என்ற சார்பானது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், (a, b) ல் வகையில் தக்கதாகவும் இருந்து $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$ என இருந்தால்

$$x_1 < x_2 \text{ எனில் } f(x_1) < f(x_2)$$

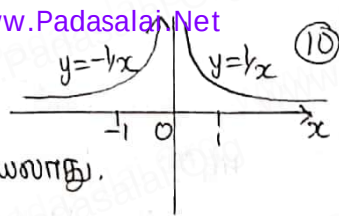
பயிற்சி 7.3

1. கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் சுராவின் சூத்திரம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்பதை விளக்குக.

அ) $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|, x \in [-1, 1]$

ப) $f(x)$ ஆனது $[-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சி அற்றது $x = 0 \in [-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சியற்றது.

ஏராலின்
தேற்றத்தை
பயன்படுத்த
கியலாது.



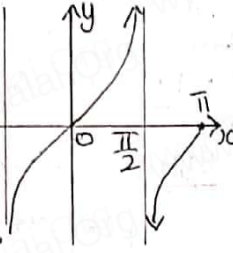
(i) $f(x) = \tan x$, $x \in [0, \pi]$

$f(x)$ ஆனது $[0, \pi]$ ல்
தொடர்ச்சி அற்றது.

$x = \pi/2 \in [0, \pi]$ ல்

$f(x)$ தொடர்ச்சி அற்றது.

ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த
இயலாது.



(ii) $f(x) = x - 2 \log x$, $x \in [2, 7]$

(i) $[2, 7]$ ல் $f(x)$ ஆனது
தொடர்ச்சியானது

(ii) $(2, 7)$ ல் $f(x)$ ஆனது
வகையிடத்தக்கது.

$f(a) = f(2) = 2 - 2 \log 2$

$f(b) = f(7) = 7 - 7 \log 7$

$f(a) \neq f(b)$

$f(x)$ ஆனது ஏராலின்
சமஸ்த 3 நிபந்தனாகளையும் பூர்த்தி
செய்யவில்லை

ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த
இயலாது.

2) ஏராலின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி
கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு x -ன்
சமீபிப்புக்களில் வரையப்படும்
தொடுகோடு x அச்சிற்கு இணையாக
இருக்கும்?

(i) $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 1]$

(i) $f(x)$ ஆனது $[0, 1]$ ல்
தொடர்ச்சியானதும்

(ii) $(0, 1)$ ல் வகையிடத்தக்கதாகவும்

(iii) $f(a) = f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(b) = f(1) = 1 - 1 = 0$

$f(a) = f(b)$

∴ ஏராலின் தேற்றப்படி ஒரு $c \in (0, 1)$
ஐ

$f'(c) = 0$ என காணலாம்

அப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு
வளைவரைக்கு x அச்சிற்கு இணையான
தொடுகோடாக அமையும்.

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 1 = 0$
 $c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$

$x = \frac{1}{2}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு
 x அச்சிற்கு இணையாக அமையும்.

(ii) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 2}$, $x \in [-1, 6]$

(i) $f(x)$ ஆனது $[-1, 6]$ ல் தொடர்ச்சியானது;

(ii) $(-1, 6)$ ல் வகையிடத்தக்கது,

(iii) $f(-1) = \frac{-1+2}{-1+2} = 1$

$f(a) = f(b)$

$f(6) = \frac{36-12}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$

∴ ஏராலின் தேற்றப்படி ஏதாவது $c \in (-1, 6)$
எனும்படியானது காணப்படும்

$f'(c) = 0$ எனும்படியானது

$f'(x) = \frac{(x+2)(2x-2) - (x^2-2x)(1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{(x+2)^2}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow c^2 + 4c - 4 = 0$

$c^2 + 4c + 4 = 8$

$(c+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$c+2 = \pm 2\sqrt{2}$

$c = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$c = -2 - 2\sqrt{2} \notin (-1, 6)$

$c = -2 + 2\sqrt{2} \in (-1, 6)$

$c = -2 + 2\sqrt{2}$ என்ற புள்ளியில்
வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சிற்கு
இணையாக இருக்கும்.

(iii) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{3}$, $x \in [0, 9]$

$f(x)$ ஆனது $[0, 9]$ ல் தொடர்ச்சியானதும்

$(0, 9)$ ல் வகையிடத்தக்கதாகவும்
உள்ளது.

$$f(a) = f(0) = 0 - \frac{0}{3} = 0$$

$$f(b) = f(9) = 3 - \frac{9}{3} = 0 \quad f(a) = f(b)$$

∴ ரோலின் தேற்றப்படி ஏதேனும் ஒரு $c \in (0, 9)$ ஐ $f'(c) = 0$ எனும்படி காண இயலும்

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2c} = \frac{1}{3}$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2}$$

$$c = \frac{9}{4} \in (0, 9)$$

$x = \frac{9}{4}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

③ கொடுக்கப் பட்ட சார்புகளுக்கு கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் லைக்ரான்ட்ரீயின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் ஏன் பயன்படுத்த முடியாது என்கிடுக.

i) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [-1, 2]$

$f(c)$ ஆனது $[-1, 2]$ ல் தொடர்ச்சியாக இல்லை.

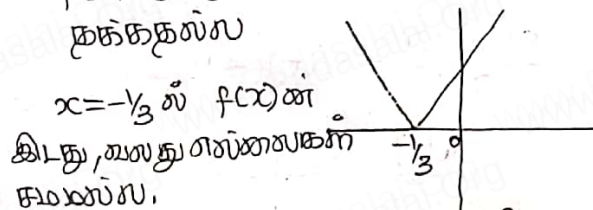
$$x = 0 \text{ ல் } f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

லைக்ரான்ட்ரீயின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்த இயலாது.

ii) $f(x) = |3x+1|, x \in [-1, 3]$

$f(x)$ ஆனது $[-1, 3]$ ல் தொடர்ச்சியாக

$f(x)$ ஆனது $(-1, 3)$ ல் வகையிட தக்கதல்ல



$x = -1/3$ ல் $f(x)$ இன் கிடைத்து, வளைத்து எல்லைகள் சமம்.

லைக்ரான்ட்ரீயின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்த இயலாது.

4) லைக்ரான்ட்ரீயின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி குணப்பொன்றின் வழியே எவ்வாறு நான்கு இணையாக ஒரு தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளியின் x மதிப்பை காண்க.

i) $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2, 2]$

$f(x)$ ஆனது $[-2, 2]$ ல் தொடர்ச்சியானது $[-2, 2]$ ல் வகையிட தக்கது

∴ லைக்ரான்ட்ரீயின் இடைமதிப்பு விதியின்படி ஏதேனும் ஒரு $c \in (-2, 2)$ ஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{--- ①}$$

எனும்படி காணலாம்.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3$$

$$f(a) = f(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$$

$$f(b) = f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 3 = \frac{4 - 0}{2 + 2}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{4}{4}$$

$$3c^2 = 1 + 3 \quad c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 2)$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு குணப்பொன்றின் வழியே எவ்வாறு நான்கு இணையாக இருக்கும்.

ii) $f(x) = (x-2)(x-7), x \in [3, 11]$

$$f(x) = x^2 - 9x + 14$$

$f(x)$ ஆனது $[3, 11]$ ல் தொடர்ச்சியானது, $[3, 11]$ ல் வகையிட தக்கது.

∴ லைக்ரான்ட்ரீயின் இடைமதிப்பு விதியின்படி $c \in (3, 11)$ ஐ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{--- ①}$$

எனும்படி காணலாம்.

$$f'(x) = 2x - 9$$

$$f'(c) = 2c - 9$$

$$f(b) = f(11) = 121 - 99 + 14 = 36$$

$$f(a) = f(3) = 9 - 27 + 14 = -4$$

$$\Rightarrow 2c - 9 = \frac{36 + 4}{11 - 3}$$

$$2c - 9 = \frac{40}{8}$$

$$2c = 9 + 5$$

$$2c = 14$$

$$c = 7$$

$x = 7$ ல் வரையப்படும் தொடுகோடு தொடுகோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்.

5) (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பிற்கு (12)

a, b தாய மிதைக் குறு எண்ணாக
கொண்ட $[a, b]$ ல் சராசரி மதிப்பு
கொண்டதின் படி இறுதி மதிப்பு $\sqrt{ab}$
என நினைவுக.

$f(x)$ ஆனது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது
(a, b எண்ப்பன மிதை
என்பதால்)

$f(x)$ ஆனது (a, b) ல் வகையிடத்தக்கது
∴ ஸகராத்தியின் இடைமதிப்பு விதிப்படி

$c \in (a, b)$ லு $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ என காணலாம்.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a}$$

$$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{ab}$$

$$c^2 = ab \quad c = \sqrt{ab}$$

$$c = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

$$\text{இறுதி மதிப்பு} = \sqrt{ab}$$

(ii) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ என்ற
சார்பிற்கு எந்த ஒரு முடிய இடைமயனி
 $[a, b]$ ல் சராசரி மதிப்பு கொண்டுள்ள
படி இறுதி மதிப்பு $\frac{a+b}{2}$ என நினைவுக.

$f(x)$ ஆனது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது,

$f(x)$ ஆனது (a, b) ல் வகையிடத்தக்கது,

ஸகராத்தியின் இடைமதிப்பு விதிப்படி

எந்த ஒரு $c \in (a, b)$ லு

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{என நினைவுக}$$

காண இயலும்

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

$$f'(c) = 2Ac + B$$

$$f(b) = Ab^2 + Bb + C$$

$$f(a) = Aa^2 + Ba + C$$

0 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2cA + B &= \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b - a} \\ &= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{A(b - a)(b + a) + B(b - a)}{b - a} \end{aligned}$$

$$2cA + B = (b - a) \left[\frac{A(b + a) + B}{(b - a)} \right]$$

$$2cA + B = A(b + a) + B$$

$$2cA = A(a + b)$$

$$c = \frac{a + b}{2} \in (a, b)$$

$$\text{இறுதி மதிப்பு} \quad c = \frac{a + b}{2}$$

6) ஒரு பந்தய மகிடுந்து ஆடுதல்
20 ஆம் கிலோமீட்டரில் இருந்து
முதல்படுகிறார். அதன் வேகம் 150 கிமீ/ம
தாய தாண்டவில்லை, எனில் அடுத்த
2 மணி நேரத்தில் அவரால் கடக்க
முடிந்த அதிகபட்ச (அளவு) காண்க.

$S(t)$ என்பது t நேரத்தில் தூரம்

என்க.

$$S(t_1) = 20$$

$$S(t_2) = ?$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 2$$

$$S'(t) \leq 150$$

$S(t)$ என்பது $[0, 2]$ தொடர்ச்சியானதும்

$(0, 2)$ ல் வகையிடத்தக்கதாகும்

இருப்பின் ஸ. இ. ம. கொண்டுள்ள

$$S'(t) = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{S(t_2) - 20}{2 - 0} = S'(t) \leq 150$$

$$\frac{S(t_2) - 20}{2} \leq 150$$

$$S(t_2) - 20 \leq 300$$

$$S(t_2) \leq 300 + 20$$

$$S(t_2) \leq 320$$

அதிகபட்சம் கடந்த தூரம்

$$= 320 - 20$$

$$= 300 \text{ கி.மீ}$$

(4 மீட்டர் விடை 320 தவறு)

- 7) $f(x)$ என்ற சார்பானது $f'(x) \leq 1$ (13)
 $1 \leq x \leq 4$ எனில் $f(4) - f(1) \leq 3$
 எனக் காட்டுக.

$f'(x) \leq 1$
 $(1,4)$ ல்
 எனவே $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது
 $\therefore f(x)$ ஆனது $[1,4]$ ல் தொடர்ச்சியானது.

$\therefore$ ம.இ.ம. தேற்றப்படி

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$a=1$$

$$b=4$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x) \leq 1$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{3} \leq 1$$

$$f(4) - f(1) \leq 3$$

- 8) $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பானது
 $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ மற்றும் $f'(x) \leq 2$
 $\forall x$ என்றவாறு இருக்க முடியுமா?
 உதவு விடைக்கு தக்கவிதமாக
 தருக?

$$f'(x) \leq 2$$

$f(x)$ வகையிடத்தக்கது ஆகவே
 $[0,2]$ ல் தொடர்ச்சியானது

ம.இ.ம. தேற்றப்படி $x \in (0,2)$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(x) \leq 2$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} \leq 2$$

$$f(2) - f(0) \leq 4 \quad \text{--- (1)}$$

ஆனால் கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து

$$f(2) - f(0) = 4 + 1 = 5 \neq 4$$

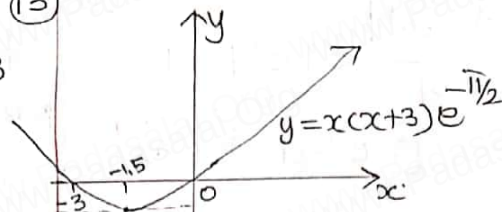
$\therefore f'(x) \leq 2$ என இருக்க இயலாது

$$\left[\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} \neq 2 \right]$$

$f'(x) \leq 2$ ஆக இருக்க இயலாது

- 9) $f(x) = x(x+3)e^{-1/2}$, $-3 \leq x \leq 0$

என்ற வகையானது x அச்சிற்கு
 இணையாக வரையப்படும் தொடக்கபுள்ளி
 தொடரு முன்னிலின் x மூலியு $(-3,0)$
 ல் அதாவது x அச்சிற்கு



$f(x)$ ஆனது $[-3,0]$ ல் தொடர்ச்சியானது

$f(x)$ ஆனது $(-3,0)$ ல் வகையிடத்தக்கது

$$f(a) = f(-3) = 0$$

$$f(b) = f(0) = 0$$

$$f(a) = f(b)$$

$\therefore$ ம.இ.ம. தேற்றப்படி முதலாம்

$c \in (-3,0)$ ஆக $f'(c) = 0$ எனவோது

காணலாம் $x=c$ ல் வரையப்படும்
 தொடக்கபுள்ளி x அச்சிற்கு இணையாக
 இருக்கும்.

$$f(x) = x(x+3)e^{-1/2}$$

$$f(x) = e^{-1/2}(x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = e^{-1/2}(2x + 3)$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow e^{-1/2}(2c + 3) = 0$$

$$2c = -3$$

$$c = -1.5 \in (-3,0)$$

$x = -1.5$ ல் வரையப்படும் தொடக்கபுள்ளி
 x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

- 10) ஏதாவது மூலியு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி

$$a > 0, b > 0, |e^{-a} - e^{-b}| < |a - b|$$

என்கிறதற்கு.

$$f(x) = e^{-x}$$

$f(x)$ ஆனது மிகை

என்கிறதின் மூலியு

இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதும்

திருத்த இடைவெளியில் வகையிட

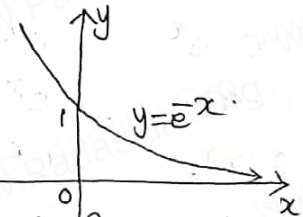
தக்கதாகவும் உள்ளது

$\therefore$ ம.இ.ம. தேற்றப்படி

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = -e^{-c}$$

இருவரும் மட்டுமே



(14)

$$\frac{|e^{-a} - e^{-b}|}{|a-b|} = |e^{-c}| \leq 1$$

$$[\because e^{-x} \leq 1 \quad \forall x > 0]$$

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$$

தொடரின் விரிவுகள்

a) தெய்வரின் தொடர்

$f(x)$. சதுரம் $x=a$ ல் முடிவற்ற
சுண்ணிக்கையிலான குறை வகையில
தங்குதல் எனில்

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

b) மெக்ஸுவரின் தொடர்

$a=0$ எனில்

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

பயிற்சி 7.4

i) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு
மெக்ஸுவரின் விரிவைக் காண்க

ii) e^x

சார்பு	e^x மற்றும் வகையகடு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = e^x$	e^x	$e^0 = 1$
$f'(x)$	e^x	$e^0 = 1$
$f''(x)$	e^x	$e^0 = 1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{(1)}{1!} x + \frac{(1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

(iii) $\sin x$

$$f(x) = \sin x$$

function சார்பு	$\sin x$ மற்றும் வகையகடு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \sin x$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f'(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f''(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f'''(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x)$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f^{(5)}(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{(-1)}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(iv) $\cos x$

சார்பு	$\cos x$ மற்றும் வகையகடு	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \cos x$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f'(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f''(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$f'''(x)$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$f^{(4)}(x)$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$f^{(5)}(x)$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$f^{(6)}(x)$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$

மெக்ஸுவரின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!} x + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(iv) \log(1-x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

(15)

சார்பு	$\log(1-x)$ மற்றும் அதன் வகைகளை	$x=0$ ல் அதன் மதிப்பு
$f(x) = \log(1-x)$	$\log(1-x)$	$\log 1 = 0$
$f'(x)$	$-\frac{1}{1-x}$	$-\frac{1}{1-0} = -1$
$f''(x)$	$-\frac{1}{(1-x)^2}$	$-\frac{1}{(1-0)^2} = -1$
$f'''(x)$	$\frac{2}{(1-x)^3}$	$\frac{2}{(1-0)^3} = 2$
$f^{IV}(x)$	$\frac{-6}{(1-x)^4}$	$\frac{-6}{(1-0)^4} = -6$

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\log(1-x) = 0 - \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

$$(v) \tan^{-1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

சார்பு	$\tan^{-1}x$ மற்றும் அதன் வகைகளை	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \tan^{-1}x$	$\tan^{-1}x$	$\tan^{-1}0 = 0$
$f'(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+0} = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$f''(x)$	$0 - 2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots$	0
$f'''(x)$	$-2 + 12x^2 - 30x^4 + \dots$	-2
$f^{IV}(x)$	$0 + 24x - 120x^3 + \dots$	0
$f^V(x)$	$24 - 360x^2 + \dots$	24

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\tan^{-1}x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 - \dots$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(vi) \cos^2 x$$

சார்பு	$\cos^2 x$ மற்றும் அதன் வகைகளை	$x=0$ ல் மதிப்பு
$f(x) = \cos^2 x$	$\cos^2 x$	$\cos^2 0 = 1^2 = 1$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x \quad -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos 2x (2) \quad -2 \cos 0 = -2$$

$$f'''(x) = -2(-\sin 2x) (2) \quad 4 \sin 0 = 0$$

$$f^{IV}(x) = 4 \cos 2x (2) \quad 8 \cos 0 = 8$$

மெக்ஸுலாஸின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\cos^2 x = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{8}{4!}x^4 - \dots$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} - \dots$$

2) $\log x, x > 0$ என்ற சார்பின் விரிவை
மெக்ஸுலாஸின் விரிவை $x=1$ ஐப் பயன்படுத்தி
முதல் மூன்று பூக்கியமற்ற உறுப்புகள்
வரை காண்க.

சார்பு	$\log x$ மற்றும் அதன் வகைகளை	$x=1$ ல் மதிப்பு
--------	---------------------------------	---------------------

$$f(x) = \log x \quad \log x \quad \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad -\frac{1}{1} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \frac{2}{1^3} = 2$$

பெயர்மின் விரிவு

(16)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\log x = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$= 0 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(-1)(x-1)^2}{2!} + \frac{2!}{2 \times 3}(x-1)^3 + \dots$$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

(3) $\sin x$ -ன் விரிவை $x = \pi/4$ ன் அடுக்குகளாக முதல் இன்று பூச்சிய மற்ற உறுப்புகள் வரை காண்க.

சார்பு $\sin x$ மற்றும் $x = \pi/4$ ன் வகைகளை

$$f(x) = \sin x \quad \sin x \quad \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x \quad \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x \quad -\sin \pi/4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

பெயர்மின் விரிவு $x = \pi/4$ ன்

$$f(x) = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}(x-\pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\pi/4) + \frac{-1}{2!}(x-\pi/4)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{(x-\pi/4)}{1!} - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \dots \right)$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{(x-\pi/4)}{1!} - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \dots \right)$$

4) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ன் பல்படிப்பு கோவையின் விரிவை $x=1$ ன் அடுக்குகளாக காண்க.

சார்பு $x^2 - 3x + 2$ ன் $x=1$ ன் வகைகளை

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad x^2 - 3x + 2 \quad 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 3 \quad 2x - 3 \quad 2 - 3 = -1$$

$$\begin{array}{ccc} f''(x) & 2 & 2 \\ f'''(x) & 0 & 0 \end{array}$$

பெயர்மின் விரிவு $x=1$ ன்

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

$$\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 + \frac{(-1)}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)^2 - (x-1)$$

தேர்வுபெறும் வடிவங்கள்

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

ஸெயிதாஸின் விதி

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ எனில்}$$

அல்லது

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ எனில்}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

தேர்வுபெறும் வடிவங்கள்
 $\frac{0^0}{0}, \frac{\infty}{1}, \frac{\infty}{\infty}$

சார்பு சார்பு தேர்வு

$$\lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$$

பயிற்சி 7.5

கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளைத் தேர்வுப்படுத்தி இடங்களில் ஸெயிதாஸின் விதியைப் பயன்படுத்தி காண்க.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

தேர்வுபெறும் வடிவம் $\left(\frac{0}{0} \right)$

லோபிதால் விதிபயன்படுத்த (17)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

மீண்டும் லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})}$$

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$\text{II} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவம்
லோபிதால் விதிபயன்படுத்த
(கரு முறை)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 0}{2x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \left(\frac{\infty}{\log \infty} = \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,

லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} \sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

$$\left(= \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ தேவஸ்பதாந வடிவம்

லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x} e^x}$$

$$= \frac{1}{\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \left(= \frac{0}{0} \right)$$

$\frac{0}{0}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,

லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x}$$

$$= \left(\frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \right)$$

மீண்டும் லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{x(-\cos x) + \cos x + \sin x}$$

$$= \frac{\sin 0}{0 + \cos 0 + \cos 0} = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - x^2 - x}{x^2 - 1} \left(= \frac{2 - 1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \right)$$

$\frac{0}{0}$ தேவஸ்பதாந வடிவில் உள்ளது,

லோபிதால் விதிபயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x-x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0-1-2x}{2x} \\ = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (= 0^0)$$

0^0 தேஜஸ்வரூப வடிவில் உள்ளது

$$y = x^x \text{ என்க}$$

மலக்கை எடுக்க

$$\log y = \log x^x$$

$$\log y = x \log x$$

ஸல்லை எடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} \quad \left(= \frac{\log 0}{1/0} = \frac{-\infty}{\infty} \right)$$

$\left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$ தேஜஸ்வரூப வடிவில் உள்ளது

ஸோலிதாஸ் விதியை பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = 0$$

எனவே என்ன தேஜஸ்வரூப

$$\log \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right) = 0$$

எதிர் மலக்கை எடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\infty} \right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

1^{∞} தேஜஸ்வரூப வடிவில் உள்ளது

$$y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \text{ என்க}$$

$$\log y = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\log y = x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

ஸல்லை காண

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x}$$

$$\left(= \frac{\log \left(1 + \frac{1}{\infty} \right)}{1/\infty} = \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

ஸோலிதாஸ் விதியை பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = 0$$

எனவே என்ன தேஜஸ்வரூப

$$\log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} y \right) = 0$$

எதிர் மலக்கை காண

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$$

$$= (\sin \pi/2)^{\tan \pi/2} = 1^{\infty}$$

(1^{∞}) தேஜஸ்வரூப வடிவில் உள்ளது

$$y = \sin x^{\tan x} \text{ என்க}$$

$$\log y = \log \sin x^{\tan x}$$

$$\log y = \tan x \log \sin x$$

$$\log y = \frac{\log \sin x}{\cot x}$$

സംസ്കൃത ഭാഷ

19

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \log y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log \sin x}{\cot x} = \frac{(\log 1 = 0)}{(\cot \pi/2 = 0)}$$

உலாபிதாஸ் கிந்தைய பயன்படுத்த

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log \sin x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} \times \left(-\frac{\sin^2 x}{1} \right)$$

$$= -\cos \pi/2 \sin \pi/2$$

$$= -0.01$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \log y = 0$$

செர்ப்ய சாபு இதழ்மப்படி

$$\log(\lim_{x \rightarrow \pi/2} y) = 0$$

தமிழ்மொழிநாடு அருங்கிதம்

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} y = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x \tan x = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2} = \cos 0^{1/0} = 1^\infty$$

1. ∞ கோணங்கள் வடிவில் உள்ளது

$y = \cos x^{\frac{1}{x^2}}$ என்க

$$\log y = \log \cos x$$

$$\log y = \frac{\log \cos x}{x^2}$$

உலகம் காண

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos 3x}{x^2}$$

$$\left(= \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

சொலிதாஸ் கிதிகைய பயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}.$$

$$= -\frac{1}{2} C_2 \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = -1/2$$

சென்சு சார்ஜ் கேதற்றப்படி

$$\log(\lim_{x \rightarrow 0} + y) = -1/2$$

சதிந்மடகூனக சடுக்க

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

12) A_0 எதனால் ஆரம்பித்த தொகையானது ஒரு வருடத்திற்கு n சதவீத r சதவீத வட்டி வீதத்தில் கூட்டு வட்டி முறையில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது எனில், முதலீடு செய்யப்பட்டு t வருடத்தில் தொகையின் மதிப்பு $A = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

வட்டியானது தொடர்ச்சியான வட்டி
 சூறையில் (அதாவது $n \rightarrow \infty$)
 கணக்கிடப்பட்டால் t காலத்திற்கு
 பின்னர் அந்த தொகையின் மதிப்பு
 $A = A_0 e^{rt}$ என காட்டுக.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad \text{என்பதை பயன்படுத்த}$$

$$= A_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right)^t$$

$$= A_0 (e^r)^t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A_0 e^{\gamma t}$$

முறை-II

(20)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ = A_0 (1^\infty)$$

தேடிப்பதற்கு வடிவில் உள்ளது

$$y = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \text{ என்க,}$$

$$\log y = \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = nt \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$\log y = t \frac{\log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

எனவே காண

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log y = \lim_{n \rightarrow \infty} t \frac{\log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

லேமிதால் விதியை பயன்படுத்த

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \log \left(1 + \frac{r}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t \left(\frac{1}{1 + \frac{r}{n}}\right) \left(-\frac{r}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= rt \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{r}{n}}$$

$$= rt \cdot \frac{1}{1+0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log y = rt$$

$$\log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y\right) = rt$$

எதிர்மடக்கை எடுக்க

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = e^{rt}$$

A_0 ஆல் பெருக்கி

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 e^{rt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = A_0 e^{rt}$$

குதலாம் வகைக் கொடுக்கி பயன்படுத்தஒரு சார்புf(x) என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow$

$$f(a) \leq f(b) \quad \forall a, b \in I$$

எனக்குந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் ஒரு சார்புஇறங்கும் சார்பு

f(x) என்ற சார்பு

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b), \quad \forall a, b \in I$$

எனில் I ல் f(x) இறங்கும் சார்பு

* f(x) என்ற சார்பு (a,b) ல் வகையிட தக்கது என்க, $\forall x \in (a,b)$ க்குi) $f'(x) \geq 0$ எனில்

f(x) ஏறும் சார்பு

ii) $f'(x) > 0$ எனில் f(x) திடீராக ஏறும் சார்புiii) $f'(x) \leq 0$ எனில் f(x) இறங்கும் சார்புiv) $f'(x) < 0$ எனில் f(x) திடீராக இறங்கும் சார்புதேக்கநிலைப்புள்ளி:f(x) என்ற சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு தேக்கநிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ ஆகும்.தேக்கநிலை எண்f(x) என்ற சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு நிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ அல்லது $f'(x_0)$ காணாததற்கு அல்ல.அந்த x_0 க்கு தேக்கநிலை எண் அல்லது நிலை எண் என்று பெயர்.மீள்பெரு பெருமம், மீச்சிறு சிறுமம்அவ்விடத்தில் தேற்றம்f(x) என்ற சார்பானது $[a,b]$ ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் f ஆனது

(21)

$[a, b]$ ஸ் நிபந்தனையுடைய,
மிச்சிறு சிறுமம் பெருமம்

$f(x)$ ஸ் நிபந்தனையுடைய, மிச்சிறு
சிறுமம் காணும் முறை

- 1) $f'(x)$ காண்க
- 2) $f'(x) = 0$ என்கொண்டு
நிலை எண்களை காண்க
- 3) நிலை எண்கள் முறைப்படுத்தி
 a மற்றும் b ஸ் f ஸ் மதிப்பு காண்க
- 4) படி 3 ஸ் பெரியது நிபந்தனையுடைய
சிறியது மிச்சிறுசிறுமம்

பெரியது தேர்வு

$f(x)$ க்கு $x=c$ ஸ் இடம்
சார்ந்த அந்தி உள்ளது எனில்
 c ஒரு நிலை எண் ஆகும்,
நிலை எண்ணினை $f'(x) = 0$ ஐ
நீர்வதாயும் $f'(x)$ (காணுதல்)
மதிப்பு காணிக் காண்பதன் மூலமாகவும்
பெறலாம்.

முதல் வகைகளைக் காண்க

- ① $f'(c)$ ஆனது c ஸ் -விகிதம்
+ ஆக மாறினால் $f(c)$ என்பது
இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்
- ② $f'(x)$ ஆனது c ஸ் +விகிதம்
- ஆக மாறினால் $f(c)$ ஆனது
இடஞ்சார்ந்த பெருமம்.
- ③ $f'(x)$ ஆனது c ஸ் இருபுறமும்
+ ஆகவோ அல்லது - ஆகவோ
(ஒரு குறியுடன்) இருப்பின் $f(c)$ ஆனது
இடஞ்சார்ந்த பெருமமும் அல்ல
சிறுமமும் அல்ல.

பயிற்சி 7.6

1, கிழக்காணும் சார்புக்கு
கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில்
நிபந்தனையும் மிச்சிறு அந்தி.
மதிப்புகளை காண்க.

$$\text{பு } f(x) = x^2 - 12x + 10 \quad ; \quad [1, 2]$$

$$f'(x) = 2x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{நிலை எண் } x = 6 \notin [1, 2]$$

(நிலை எண் $[1, 2]$ க்குள்
வரும் வகையில் கொடுக்கப் பட்ட
எல்லா இடைவெளியை $[1, 2]$ என
மாற்றினால் புத்தக விதையை
பெறலாம்)

நிலை எண்
 $x = 6, [1, 2]$ ல் அமைவதில்லை

$$f(1) = 1 - 12 + 10 = -1$$

$$f(2) = 4 - 24 + 10 = -10$$

$$\text{நிபந்தனையுடைய} = -1$$

$$\text{மிச்சிறு சிறுமம்} = -10$$

(கொடுக்கப்பட்ட வகைகளை
புத்தக விதையை)

$$\text{(ii) } f(x) = 3x^4 - 4x^3 \quad ; \quad [-1, 2]$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2(x-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

$$\text{நிலை எண்கள் } 0, 1 \in [-1, 2]$$

$$f(0) = 3(0) - 4(0) = 0$$

$$f(1) = 3 - 4 = -1$$

$$f(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$f(2) = 3(16) - 4(8) = 48 - 32 = 16$$

$$\text{நிபந்தனையுடைய} = 16$$

$$\text{மிச்சிறு சிறுமம்} = -1$$

(iii) $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[-1, 1]$ (22)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right) x^{4/3-1} - 3 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3-1} \\ &= 8x^{1/3} - x^{-2/3} \\ &= x^{1/3} \left(8 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{1/3} \left(\frac{8x-1}{x^{2/3}}\right) = \frac{8x-1}{x^{2/3}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 8x-1 &= 0 \\ 8x &= 1 \\ x &= 1/8 \end{aligned}$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ வரையறுக்கப்படவில்லை
நினைவூட்டம் = $0, 1/8$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1/8) &= 6\left(\frac{1}{8}\right)^{4/3} - 3\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} \\ &= 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{36}{16} - \frac{3}{2} = \frac{3-12}{8} \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$f(-1) = 6(-1)^{4/3} - 3(-1)^{1/3} = 6+3=9$$

$$f(1) = 6-3=3$$

$$\text{மீள்பெருவுருவம்} = 9$$

$$\text{மீச்சிறு சிறுமம்} = -\frac{9}{8}$$

(iv) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$; $[0, \pi/2]$

$$f'(x) = 2(-\sin x) + 2\cos 2x$$

$$f'(x) = 2(-\sin x + \cos 2x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1/2)(\sin x - 1/2) = 0$$

$$\sin x + 1 = 0 \quad \sin x = 1/2$$

$$\sin x = -1 \quad \sin x = \sin \pi/6$$

$$[0, \pi/2] \text{ ல் } \sin x \text{ குறைந்து} \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/6$$

$$\sin x = -1 \quad \text{மீச்சிறு சிறுமம்} \quad x = \pi/6$$

$$f(\pi/6) = 2\cos \pi/6 + \sin 2(\pi/6)$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = 2\cos 0 + \sin 0 = 2(1) + 0 = 2$$

$$f(\pi/2) = 2\cos \pi/2 + \sin \pi = 0 + 0 = 0$$

$$\text{மீள்பெருவுருவம்} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{மீச்சிறு சிறுமம்} = 0.$$

② கீழ்க்காணும் சார்புகளைக் கொண்டு
தூரிலேயே இடைவெளிகளைக் கண்டித்து
அதிலிருந்து இடஞ்சார்ந்த அல்லது
மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

$$\text{நினைவூட்டம் } x = -2, 1$$

$$\begin{array}{c} < & -2 & 1 & > x \end{array}$$

$$\text{இடைவெளி } (-\infty, -2), (-2, 1), (1, \infty)$$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = 6(x+2)(x-1)$	$f'(x)$ இன் குறியீடு	குறியீடு/ இடைவெளி
$(-\infty, -2)$	-3	$6(-1)(-4) = 24$	+	திட்டமாக குறைவு
$(-2, 1)$	0	$6(2)(-1) = -12$	-	திட்டமாக அதிகம்
$(1, \infty)$	2	$6(4)(1) = 24$	+	திட்டமாக குறைவு

$$x = -2 \text{ ல் இருபுறமும்}$$

(i) $f'(x)$ இன் குறியீடு + லிருந்து - ஆக மாறுகிறது

எனவே $f(x)$ $x = -2$ ல் இடஞ்சார்ந்த
வருமல் அடையும்

$$\text{வருமல் மதிப்பு} = f(-2)$$

$$= 2(-8) + 3(-2)^2 - 12(-2)$$

$$= -16 + 12 + 24$$

$$= 20$$

ii) $f(x)$ க்கு $x=1$ லு
கடக்கும்போது $-$ விடுந்து $+$ ஆக
மாறுகிறது எனவே $f(x)$ க்கு
 $x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்
உள்ளது.

$$\begin{aligned} \text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} \\ \text{மதிப்பு} &= f(1) \\ &= 2+3-12 \\ &= -7 \end{aligned}$$

இடஞ்சார்ந்த பெருமம் $= 20$
இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் $= -7$

iii) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

$$f'(x) = \frac{(x-5)1 - x(1)}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-5-x}{(x-5)^2} = \frac{-5}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-5)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f'(x)$ ஆனது $x=5$ ல் வகையறுக்கப்
படவில்லை.
 $x=5$ ஆக நினைவாக $x=5$ ல்

[தேனையில் $x=5$ ல் $f(x)$
வகையறுக்கப் படவில்லை எனவே
சார்வகம் $\mathbb{R}-\{5\}$

சார்வகத்தில் கிஸ்ஸாத $x=5$
நினைவாக அல்ல.

$(f(x))$ வகையறுக்கப்பட்டு $f'(x)$

வகையறுக்கப்படாத மதிப்புகளைக் காண
நினைவாக எண்ணாக எடுக்கவோம்

$$\therefore f'(x) < 0 \quad x \in \mathbb{R}-\{5\}$$

$\therefore f(x)$ ன் சார்வகம் குறைதல் திட்டமாக
ஏனும், நினைவாக கிஸ்ஸாத

$f(x)$ க்கு $x=5$ ல் மாறுமம் கிஸ்ஸாத

$\therefore f(x)$ க்கு இடஞ்சார்ந்த அல்லது
மதிப்புமம் கிஸ்ஸாத.

iv) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$

$$f'(x) = \frac{(1-e^x)e^x - e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

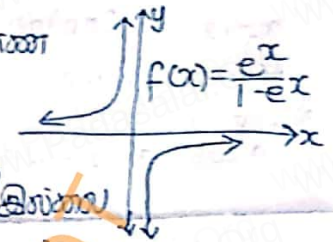
$$f'(x) = \frac{e^{2x} + e^{2x}}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ காண
கிஸ்ஸாத

நினைவாக $x=0$

என எடுந்து எண்ண
கிஸ்ஸாத



[தேனையில் $x=0$ ல் $f(x)$

வகையறுக்கப் படவில்லை எனவே

சார்வகம் $\mathbb{R}-\{0\}$

சார்வகத்தில் கிஸ்ஸாத $x=0$ ல்

நினைவாக எண்ணாக எடுக்க கிஸ்ஸாத.

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} > 0 \quad x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ல் குறைதல்

அல்லது $f(x)$ ன் சார்வகம் குறைதல்

$f(x)$ திட்டமாக ஏனும்,

நினைவாக கிஸ்ஸாத

$f'(x)$ க்கு $x=0$ ல் மாறுமம் கிஸ்ஸாத

இடஞ்சார்ந்த பெருமம்/சிறுமம் மதிப்புமம்
கிஸ்ஸாத.

v) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$

$(f(x))$ ஆனது $(0, \infty)$ ல் வகையறு
வகையறுக்கப் பட்டுள்ளது

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x^3-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-1}{x} = 0$$

$$x^3-1=0$$

$$x^3=1$$

$$x=1$$

$x=0$ ல் $f'(x)$ வகையறுக்கப் படவில்லை
நினைவாக $x=0, 1$



இதையானிகள் $(0, 1), (1, \infty)$

இதையானி மதிப்பு $f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$ க்கு

$(0, 1)$ ல் $\frac{1}{3} - \log \frac{1}{2}$ - திட்டமாக

$(1, \infty)$ ல் $2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ + திட்டமாக

$x=1$ ன் கிடுயுறும்
 $f'(x)$ ன் குறி - லிருந்து
 + ஆக மாறுகிறது

$x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த

குறும் 2 ன்னது

இடஞ்சார்ந்த

சிறுமதிப்பு $= f(1)$

$$= \frac{1}{3} - \log 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$$



(24)

ii) $x = \pi/4, 5\pi/4$ ல் கடக்கும்போது $f'(x)$ ன் குறி + லிருந்து - ஆக மாறுவதால்
 $x = \pi/4, x = 5\pi/4$ ல் இடஞ்சார்ந்த ரெகும்
 அடைகிறது.

$$f(\pi/4) = \frac{1}{2} \sin 2(\pi/4) + 5 = \frac{1}{2} + 5 = 11/2$$

$$f(5\pi/4) = \frac{1}{2} \sin 2(5\pi/4) + 5 = \frac{1}{2} \sin 5\pi/2 + 5 = \frac{1}{2} + 5 = 11/2$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த ரெகும்} = 11/2$$

$$(v) f(x) = \sin x \cos x + 5 \quad x \in (0, 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2 \sin x \cos x + 5$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x (2) = \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 2\pi$$

இடைமதிப்புகள்

$$(0, \pi/4), (\pi/4, 3\pi/4), (3\pi/4, 5\pi/4), (5\pi/4, 7\pi/4), (7\pi/4, 2\pi)$$

இடைமதிப்பு	மதிப்பு x	$f'(x) = \cos 2x$	$f'(x)$ ன் குறி	சிறுமதிப்பு
$(0, \pi/4)$	$\pi/8$	$\cos \pi/4 = \frac{1}{2}$	+	திட்டமாக ஏதும்
$(\pi/4, 3\pi/4)$	$\pi/2$	$\cos \pi = -1$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(3\pi/4, 5\pi/4)$	π	$\cos 2\pi = 1$	+	திட்டமாக ஏதும்
$(5\pi/4, 7\pi/4)$	$3\pi/2$	$\cos 3\pi = -1$	-	திட்டமாக இறங்கும்
$(7\pi/4, 2\pi)$	$11\pi/8$	$\cos 11\pi/4 = \frac{1}{2}$	+	திட்டமாக ஏதும்

$(0, \pi/4), (3\pi/4, 5\pi/4), (7\pi/4, 2\pi)$ ஆகிய இடைமதிப்புகளில் $f(x)$ திட்டமாக ஏதும்
 $(\pi/4, 3\pi/4), (5\pi/4, 7\pi/4)$ ல் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும்

$$(vi) x = 3\pi/4, 7\pi/4 \text{ ல் கடக்கும்போது}$$

$f'(x)$ ன் குறி - லிருந்து + ஆக மாறுகிறது, எனவே

$x = 3\pi/4, 7\pi/4$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த

சிறுமதிப்பு அடைகிறது.

$$f(3\pi/4) = \frac{1}{2} \sin 2(3\pi/4) + 5 = \frac{1}{2} (-1) + 5 = \frac{9}{2}$$

$$f(7\pi/4) = \frac{1}{2} \sin 2(7\pi/4) + 5 = \frac{1}{2} (-1) + 5 = \frac{9}{2}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமதிப்பு} = 9/2$$

கிரேஸ்டர்ஸ் உணர்ச்சிகரமான பின்புலம்

குறிவு தனிமை சோதனை

i) திறந்த இடைமதிப்புகள் I-ல் $f''(x) > 0$ எனில் I ல் $f(x)$ மேல்நோக்கி குறிவு

ii) திறந்த இடைமதிப்புகள் I-ல் $f''(x) < 0$ எனில் $f(x)$ கீழ்நோக்கி குறிவு

உணர்வு மாற்றம் புள்ளி

iii) $f''(c)$ காண தக்கது மற்றும் $f''(c)$ ன் குறி $x=c$ - கடக்கும் போது மாறுகிறது எனில் $(c, f(c))$ ஆனது f ன் உணர்வு மாற்றம் புள்ளி ஆகும்

iv) $x=c$ உணர்வு மாற்றம் புள்ளியில் $f''(c)$ காண தக்கது எனில் $f''(c) = 0$

இதனால் மூலம் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்

i) நினைவுப்படுத்திக் கொள் $f'(c) = 0$
மற்றும் c ன் அண்டையிலே
 $f'(x)$ மாறுபடுகிறது எனில்,

ii) $\frac{x=c}{f'(x) < 0}$ எனில் $f(x)$ இடதுபுறம்
மேல்மேல்

$f'(x) > 0$ எனில் $f(x)$ இடதுபுறம்
கீழ்மேல்

$f'(x) = 0$ எனில் இத்தகைய
இடதுபுறம் அல்லது மறுப்புறம்
பற்றிய தகவல் தராமல் சொல்லாம்,

பயிற்சி 7.7

i) கீழ்க்காணும் சார்புக்குக் குறியை
இடைவெளிக்குள் மற்றும் வரையறு
மாற்றும் புள்ளிகளைக் காண்க.

ii) $f(x) = x(x-4)^3$

$$f'(x) = x \cdot 3(x-4)^2 + (x-4)^3 \cdot (1)$$

$$= (x-4)^2 (3x + x - 4)$$

$$= (x-4)^2 (4x-4)$$

$$= (x-4)^2 4(x-1)$$

$$f''(x) = 4(x-4)^2(1) + 4(x-1)2(x-4)$$

$$= 4(x-4) [x-4 + 2x-2]$$

$$= 4(x-4) (3x-6)$$

$$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12(x-4)(x-2) = 0$$

$$x = 2, 4$$

இடைவெளிக்குள் $(-\infty, 2), (2, 4), (4, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = 12(x-4)(x-2)$	$f''(x)$	குறியை
$(-\infty, 2)$	0	96	+	மேல்மேல்
$(2, 4)$	3	-12	-	கீழ்மேல்
$(4, \infty)$	5	36	+	மேல்மேல்

வரையறு $(-\infty, 2), (4, \infty)$ ல் மேல்மேல்
குறியாகும், $(2, 4)$ ல் கீழ்மேல்
குறியாகும் எனப்படும்.

$x = 2, x = 4$ ல் $f'(x)$ ன் குறியை
மாற்றுகிறது

$$f(2) = 2(-2)^3 = -16$$

$$f(4) = 4(0) = 0$$

$$\text{வரையறு மாற்றப்படுகின்ற} = (2, -16), (4, 0)$$

iii) $f(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < 2\pi$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$$

$$-\sin x = \cos x$$

$$\tan x = -1$$

$$\tan x = \tan(\pi/4)$$

பொதுத் தீர்வு $x = n\pi + \alpha$
 $x = n\pi - \pi/4, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \in (0, 2\pi)$$

இடைவெளிக்குள்

$$(0, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f'(x) = \cos x - \sin x$	$f''(x)$ ன் குறியை	குறியை
$(0, \frac{3\pi}{4})$	$\pi/2$	$-(1+0) = -1$	-	கீழ்மேல்
$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	π	$-(0-1) = 1$	+	மேல்மேல்
$(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$	$\frac{11\pi}{6}$	$-(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	-	கீழ்மேல்

$f(x)$ ஆகிறது $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ ல் மேல்மேல்
குறியாகும், $(0, \frac{3\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ ல்
கீழ்மேல் குறியாகும் 2-ம் பகுதி.

$f'(x)$ ன் குறியை $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ல் மாற்றும்
பொது மாற்றுகிறது.

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \sin 135^\circ + \cos 135^\circ = \sin(180-45) + \cos(180-45)$$

$$= \sin 45 - \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin 315^\circ + \cos 315^\circ = -\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

வகைநிலை மூலம் $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

$$(ii) f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$x = 0$$

இடைவெளி $(-\infty, 0), (0, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு	$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f''(x)$ குறியீடு	குறிப்பு
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{e^{-1} - e^1}{2}$	-	கிடைசியாகும்
$(0, \infty)$	1	$\frac{e^1 - e^{-1}}{2}$	+	மேல் தாங்கும்

$x=0$ ஐ கட்டிப் பார்த்து $f''(0)$ ன்னைப் பார்க்கிறோம்

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

வகைநிலை மூலம் $(0, 0)$

2) இரண்டாம் வகைநிலை சோதனையை பயன்படுத்தி இடஞ்சார்ந்த அகதி மதிப்புகளை காண்க.

$$2) i) f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$$

$$= -15x^2(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = -15x^2(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -15x^2(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

தேக்கநிலை எண்ணம் $= 0, 1, -1$

$$f''(x) = -6x^3 + 30x$$

$$ii) x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 60 - 30 = 30 > 0$$

(26)

$f(x)$ ஆனது $x = -1$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறும மதிப்பை பெறும்

$$\text{அந்த சிறும மதிப்பு} = f(-1)$$

$$= 3 - 5$$

$$= -2$$

(ii) $x = 1$ எனில்

$$f''(1) = -60 + 30 = -30 < 0$$

$x = 1$ ல் $f(x)$ ஆனது இடஞ்சார்ந்த

பெரும மதிப்பை பெறும்

$$\text{அந்த பெரும மதிப்பு} = f(1)$$

$$= -3 + 5$$

$$= 2$$

(iii) $x = 0$ எனில்

$$f''(0) = 0$$

இரண்டாம் வகைநிலை சோதனை $x = 0$ ல்

f ன் இடஞ்சார்ந்த அகதி மதிப்புகளைப் பற்றி எந்த விவரமும் தருவதில்லை.

$$2) ii) f(x) = x \log x$$

$$f'(x) = x \left(\frac{1}{x}\right) + \log x$$

$$f'(x) = 1 + \log x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \log x = 0$$

$$\log x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

தேக்கநிலை எண் $x = \frac{1}{e}$

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

$x = \frac{1}{e}$ எனில்

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{1/e} = e > 0$$

$f(x)$ ஆனது $x = \frac{1}{e}$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறுமம் அடைகிறது

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு} = f\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \log\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{e} (\log 1 - \log e)$$

$$= \frac{1}{e} (0 - 1) = -\frac{1}{e}$$

$$\text{சிறும மதிப்பு} = -\frac{1}{e}$$

$$2) ii) f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = e^{-2x}(2x) + x^2 e^{-2x}(-2)$$

$$= 2e^{-2x}(x - x^2)$$

(27)

$$e^{-2x} \neq 0$$

$$x-x^2=0$$

$$-x(x-1)=0$$

$$x=0, 1$$

தேக்கநிலை எண்ணுள் $x=0, 1$

$$f''(x) = 2e^{-2x}(1-2x) + (x-x^2)2e^{-2x}$$

$$= 2e^{-2x}(1-2x-2x+2x^2)$$

$$f''(x) = 2e^{-2x}(2x^2-4x+1)$$

i) $x=0$ எனில்

$$f''(x) = 2e^0(1) = 2 > 0$$

$f(x)$ ஆனது $x=0$ ல் இடஞ்சார்ந்த

சிறுமம் அடைகிறது.

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமமதிப்பு} = f(0) = 0$$

(ii) $x=1$ எனில்

$$f''(x) = 2e^{-2}(2-4+1)$$

$$= 2e^{-2}(-1) < 0$$

$f(x)$ ஆனது $x=1$ ல் இடஞ்சார்ந்த

பெருமம் அடைகிறது.

$$\text{பெருமமதிப்பு} = f(1) = 1e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்தபெருமம்} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{சிறுமம்} = 0$$

3) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ என்ற சார்பிற்கு சூரியல்பு இடைமையனிகள், இடஞ்சார்ந்த அல்லது மதிப்புகள் குறித்து இடைமையனிகள் மற்றும் வகையடி மாற்றப் புள்ளிகளை காண்க.

$$f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

$$f''(x) = 6(2x+1) = 6(x+1)(2x-1)$$

$$f'(x) = 6(x+1)(2x-1) \quad \text{--- ①}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(2x^2+x-1) = 0$$

$$6(x+1)(2x-1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1}{2}$$

தேக்கநிலை எண்ணுள் $x = -1, \frac{1}{2}$

$$-\infty \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad \infty$$

இடைமையனிகள் $(-1, -1), (-1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$

இடைமையனி	மதிப்பு x	$f'(x) = 6(x+1)(2x-1)$	$f'(x)$ ன் குறி	குறும்/இறங்கும்
$(-1, -1)$	-2	$6(-1)(-5) = 30$	+	நிபமாத குறும்
$(-1, \frac{1}{2})$	0	$6(1)(-1) = -6$	-	நிபமாத இறங்கும்
$(\frac{1}{2}, \infty)$	1	$6(2)(1) = 12$	+	நிபமாத குறும்

$f(x)$ ஆனது $(-1, -1), (\frac{1}{2}, \infty)$ ல் நிபமாத குறும் சார்பாகவும் $(-1, \frac{1}{2})$ ல் நிபமாத இறங்கும் சார்பாகவும் உள்ளது.

$f'(x)$ ன் குறி: $x = -1$ ல் கடக்கும்போது +லிருந்து -ஆக மாறுவதால்

$x = -1$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அடைகிறது.

$$\text{பெருமமதிப்பு} = f(-1) = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$$

$f'(x)$ ன்குறி $x = \frac{1}{2}$ ல் கடக்கும்போது

-லிருந்து +ஆக மாறுவதால்

$x = \frac{1}{2}$ ல் இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் அடைகிறது

$$\text{சிறுமமதிப்பு} = f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{4}) - \frac{6}{2} + 1$$

$$= \frac{2+3-12+4}{4} = \frac{9-12}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்த சிறுமம்} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{இடஞ்சார்ந்தபெருமம்} = 6$$

$$\text{II } f'(x) = 6(2x^2+x-1)$$

$$f''(x) = 6(4x+1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$-\infty \quad -\frac{1}{4} \quad \infty$$

இடைமையனிகள் $(-\infty, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{4}, \infty)$

இடைமையனி	மதிப்பு x	$f''(x) = 6(4x+1)$	$f''(x)$ ன் குறி	குறிப்பு
$(-\infty, -\frac{1}{4})$	-1	-18	-	கீழ்க்காங்கி
$(-\frac{1}{4}, \infty)$	0	6	+	மேல்காங்கி

(28)

$f''(x)$ க்கு. $x = -\frac{1}{4}$ ல் கடங்கும்

புள்ளி மாற்றுகிறது.

$$f(-\frac{1}{4}) = 4(-\frac{1}{64}) + \frac{3}{16} - 6(-\frac{1}{4}) + 1$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{6}{4} + 1 = \frac{2}{16} + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{1+12+8}{8} = \frac{21}{8}$$

வண்ணு மாற்ற புள்ளி $(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8})$

2 கமக் கணக்குகளின்
பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 7.8 (7.9 என உள்ளது
பக்கம் 49ல்
மாற்றுகொள்க)

1) இரண்டு மிகை எண்களின் கூடுதல்
தொகை 12, அதன் பெருக்குத்தொகை
பெருமம் எனில், அந்த எண்களை
காண்க.

அந்த இரு எண்கள் x, y என்க

$$\text{கூடுதல்} = 12$$

$$x + y = 12$$

$$y = 12 - x \quad \text{--- ①}$$

$$\text{பெருக்குத்தொகை} = xy$$

$$P = x(12 - x)$$

$$P(x) = 12x - x^2$$

$$P'(x) = 12 - 2x$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0$$

$$-2x = -12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$\boxed{x = 6}$$

$$P''(x) = -2$$

$$x = 6 \text{ என பிரதியிட}$$

$$P''(x) = -2 < 0$$

$x = 6$ ல் $P(x)$ இடங்காணிந்த பெருமம்
அடைகிறது

$x = 6$ ல் பெருக்கு தொகை
பெருமம் ஆகிறது.

$$\text{①} \Rightarrow y = 12 - 6 = 6$$

அந்த இரு எண்கள் 6, 6.

2) இரண்டு மிகை எண்களின் பெருக்குத்
தொகை 20, பெருமம் அதன் கூடுதல்
சித்யமம் எனில், அந்த எண்களை காண்க.

இரு எண்கள் x, y என்க

$$\text{பெருக்குத்தொகை} = 20$$

$$xy = 20$$

$$y = \frac{20}{x} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{கூடுதல்} = x + y$$

$$S = x + \frac{20}{x}$$

$$S(x) = x + \frac{20}{x}$$

$$\boxed{S'(x) = 1 - \frac{20}{x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{20}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{20}{x^2}$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \pm \sqrt{20}$$

$$S''(x) = \frac{20}{x^3}$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{5}}$$

(+மிகை மிகை
எண்கள்)

$$x = 2\sqrt{5} \text{ எனில்}$$

$$S''(x) = \frac{20(2)}{(2\sqrt{5})^3} > 0$$

$x = 2\sqrt{5}$ எனில் $S(x)$ சித்யமம்
அடைகிறது.

$x = 2\sqrt{5}$ ல் கூடுதல் சித்யமாகிறது

$$\text{①} \Rightarrow y = \frac{20\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = 2\sqrt{5}$$

அந்த எண்கள் $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$

③ $x^2 + y^2$ க்கு குறைந்த மதிப்பினை
 $x + y = 10$ எனக் கொண்டு காண்க.

$$x + y = 10$$

$$f(x) = x^2 + y^2$$

$$y = 10 - x$$

$$f(x) = x^2 + (10 - x)^2$$

$$f'(x) = 2x + 2(10 - x)(-1)$$

$$f'(x) = 2[x + x - 10] = 2(2x - 10)$$

$$f'(x) = 4(x - 5)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x - 5) = 0$$

$$\boxed{x = 5}$$

$$f''(x) = 4(1) = 4$$

(29)

 $x=5$ எனில்

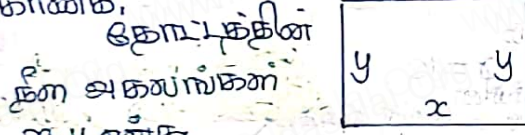
$$f'(x) = 4 > 0$$

$f(x)$ ஆனது $x=5$ ல் இடஞ்சார்ந்த
கிழமம் அடைகிறது.

$x=5$ ல் x^2+y^2 கிழமம் அடையும்

$$\begin{aligned} \text{கிழமமடையும் } f(5) &= 5^2 + (10-5)^2 \\ &= 25 + 25 \\ &= 50 \end{aligned}$$

4) ஒரு தோட்டம் எவ்வகையடிவில்
அமைக்கப்பட்டு கம்பிவேலி டூஸம்
பாதுகாக்கப் பட வேண்டும். 40 மீ
வேலிக்கம்பி டூஸம் பாதுகாக்கப்படும்
தோட்டத்தின் எவ்வகை பரப்பினைக்
காண்க.



காண்க.

$$\text{வேலியின் அளவு} = 40$$

$$2x + 2y = 40$$

$$x + y = 20$$

$$[y = 20 - x] \text{ --- ①}$$

$$\text{பரப்பளவு} = xy$$

$$A(x) = x(20 - x)$$

$$A(x) = 20x - x^2$$

$$A'(x) = 20 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$20 - 2x = 0$$

$$2x = 20$$

$$[x = 10]$$

$$A''(x) = -2$$

$$x = 10 \text{ எனில் } A''(x) = -2 < 0$$

$x = 10$ எனில் பரப்பு $A(x)$ எவ்வகை
அடைகிறது

$$x = 10 \Rightarrow y = 20 - 10$$

$$y = 10$$

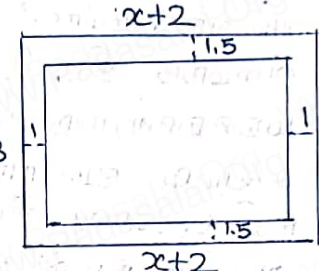
$$\text{எவ்வகை பரப்பளவு} = xy$$

$$= 10 \times 10$$

$$= 100 \text{ மீ}^2$$

5) ஒரு எவ்வகை வடிவிலான பக்கத்தில்
24 எசும்² அளவிற்கு அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
உட்புற மற்றும் கீழ்ப்புற ஆரங்கள்

1.5 எசும் அளவிலும் மற்ற இரு
பக்கங்களின் ஆரங்கள் 1 எசும் அளவிலும்
இடைவெளி விடப்பட்டுள்ளது. காண்க
பக்கத்தின் குறைந்த பரப்பளவிற்கு
அதன் நீள, அகலங்கள் என்னவாக
இருக்க வேண்டும்.



அச்சிடப்பட்ட
பகுதியின் நீளம் x
அகலம் y என்க.

$$\text{அச்சிடப்பட்ட பரப்பளவு} = 24$$

$$xy = 24$$

$$y = \frac{24}{x} \text{ --- ①}$$

காண்க
பக்கத்தின் நீளம் $= x+2$

$$\text{அகலம்} = y+3$$

$$\text{பரப்பளவு } A = (x+2)(y+3)$$

$$A = xy + 2y + 3x + 6$$

$$A(x) = 24 + 2y + 3x + 6$$

$$= 24 + 2\left(\frac{24}{x}\right) + 3x + 6$$

$$A(x) = 3x + \frac{48}{x} + 30$$

$$A'(x) = 3 + 48\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$3 - \frac{48}{x^2} = 0$$

$$3 = \frac{48}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{48}{3} = 16$$

$$[x = 4]$$

$$x = 4 \text{ எனில் } A''(x) = 0 + \frac{96}{x^3}$$

$$x = 4 \text{ எனில் } A''(x) = \frac{96}{4^3} > 0$$

$$A''(x) = \frac{96}{16 \times 4} = \frac{3}{2} > 0$$

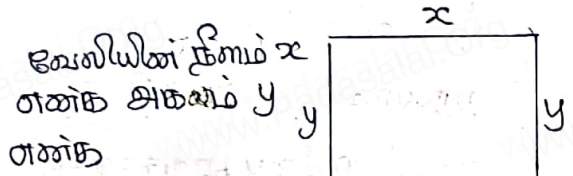
$x = 4$ எனில் $A(x)$ கிழமம்
அடைகிறது
 $x = 4$ ல் காண்க பரப்பளவு கிழமம்
அடைகிறது

$$\textcircled{1} \Rightarrow y = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{பக்கத்தின் நீளம்} = x+2 = 4+2 = 6 \text{ cm}$$

$$\text{அகலம்} = y+3 = 6+3 = 9 \text{ cm}$$

6) ஒரு கிவசாயி ஒரு நதிகைய ஆட்டிய செவ்வக மேய்ச்சல் நிலத்திற்கு வேலி அமைக்க திட்டமிட்டுள்ளார். மந்தைகளுக்கு போதுமான புல் வழங்க மேய்ச்சல் நிலம் 1,80,000 ச.மீ பரப்பளவு இருக்க வேண்டும். ஆற்றின் குறுக்கே வேலி அமைக்க தேவையில்லை. வேலி அமைக்க தேவையான குறுந்தாண்டை வேலிக் கம்பியின் நீளம் காண்க.



$$\text{பரப்பளவு} = 1,80,000$$

$$xy = 1,80,000$$

$$y = \frac{1,80,000}{x} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{வேலியின் மொத்த தூரம் (நீளம்)} = x+2y$$

$$L(x) = x + 2\left(\frac{1,80,000}{x}\right)$$

$$L'(x) = 1 - \frac{360,000}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{360,000}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{360,000}{x^2}$$

$$x^2 = 600^2$$

$$\boxed{x = 600}$$

$$L''(x) = +\frac{360,000(2)}{x^3} = \frac{720,000}{x^3}$$

$x = 600$ எனில்

$$L''(x) = \frac{720,000}{600^3} > 0$$

$x = 600$ ல் $L(x)$ வேலியின் நீளம் குறைமம் அடைகிறது.

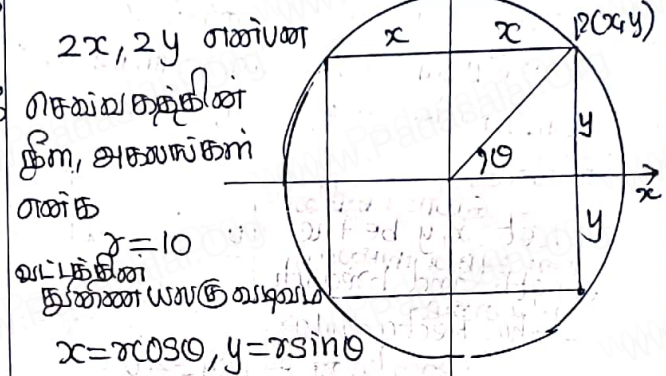
$$\textcircled{1} \Rightarrow y = \frac{1,80,000}{600} = 300$$

$$\text{குறுந்தாண்டை வேலிக் கம்பியின் நீளம்} = x+2y$$

$$= 600 + 2(300)$$

$$= 1200 \text{ மீ}$$

7) 10 ரேட் ஆரமுள்ள வட்டத்தின் அமைக்கப்படும் செவ்வகங்களுள் மீப்பாக பரப்புடைய செவ்வகத்தின் பரிமாணங்களைக் காண்க.



$$2x, 2y \text{ எண்பன}$$

செவ்வகத்தின் நீள, அகலங்கள் என்க

$$r = 10$$

வட்டத்தின் துணையளவு

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$x = 10 \cos \theta, y = 10 \sin \theta$$

$$\text{செவ்வகத்தின் நீளம்} = 2x = 20 \cos \theta$$

$$\text{அகலம் } 2y = 20 \sin \theta \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{செவ்வகத்தின் பரப்பு} = 2x \times 2y$$

$$A = 20 \cos \theta \cdot 20 \sin \theta$$

$$A(\theta) = 200 \sin 2\theta$$

$$A'(\theta) = 200 \cos 2\theta$$

$$A'(\theta) = 0 \Rightarrow 400 \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \pi/2$$

$$\theta = \pi/4$$

$$A''(\theta) = 400 (-\sin 2\theta)$$

$$A''(\theta) = -800 \sin 2\theta$$

$$\theta = \pi/4 \text{ எனில் } A''(\theta) = -800 \sin 2 \cdot \pi/4$$

$$= -800(1)$$

$$= -800 < 0$$

$\theta = \pi/4$ எனில் $A(\theta)$ இடஞ்சார்ந்த எருமம் அடைகிறது.

$\theta = \pi/4$ ல் பரப்பு எருமமாகிறது.

(31)

$$\Rightarrow 2x = 20 \cos \pi/4$$

$$2x = 10\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$2x = 10\sqrt{2} \text{ செ.மீ}$$

$$\text{இதேபோலவும் } 2y = 20 \cos \pi/4$$

$$2y = 20 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2y = 10\sqrt{2} \text{ செ.மீ}$$

நீள, அகலங்கள் $10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$

⑧ கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையுள்ள செவ்வகங்களை, சதுரம் மட்டுமே பெரும் பரப்பை கொண்டிருக்கும் என நிரூபிக்கும்.

செவ்வகத்தின் நீள அகலங்கள் x, y என்க

கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலை L என்க.

$$2x + 2y = L$$

$$2y = L - 2x$$

செவ்வகத்தின்

$$\text{பரப்பளவு} = xy$$

$$A(x) = x \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$A(x) = \frac{Lx}{2} - x^2$$

$$A'(x) = \frac{L}{2} - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} - 2x = 0$$

$$\frac{L}{2} = 2x$$

$$\boxed{x = \frac{L}{4}}$$

$$A''(x) = 0 - 2 < 0$$

$x = \frac{L}{4}$ எனில் $A(x)$ இடஞ்சார்ந்த பெருமம்

$x = \frac{L}{4}$ எனில் பரப்பு பெருமமாகும்

$$\Rightarrow y = \frac{L}{2} - \frac{L}{4}$$

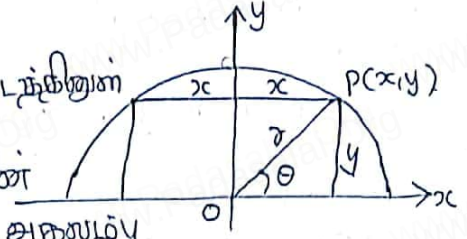
$$y = \frac{L}{4}$$

$$x = y = \frac{L}{4} \text{ இது ஒரு சதுரமாகும்}$$

சதுரம் மட்டுமே பெரும் பரப்பளவு கொண்டிருக்கும்.

9) r செ.மீ ஆரமுள்ள அரை வட்டத்தின் அமைக்கப்படும் செவ்வகங்களை நீள்வகு செவ்வகத்தின் பரிமாணங்களை காண்க.

அரைவட்டத்தின் அமைப்பும் செவ்வகத்தின் நீளம் $2x$, அகலம் y என்க



$$2x = 2r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \text{--- ①}$$

$$\text{பரப்பளவு} = 2x \times y$$

$$A = 2r \cos \theta \cdot r \sin \theta$$

$$A(\theta) = r^2 \sin 2\theta$$

$$A'(\theta) = r^2 \cos 2\theta (2)$$

$$A'(\theta) = 0 \Rightarrow 2r^2 \cos 2\theta = 0$$

$$\cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \pi/2$$

$$\boxed{\theta = \pi/4}$$

$$A''(\theta) = -4r^2 \sin 2\theta$$

$$\theta = \pi/4 \text{ எனில்}$$

$$A''(\theta) = -4r^2 \sin \pi/2$$

$$= -4r^2 (1) < 0$$

$\theta = \pi/4$ எனில் $A(\theta)$ இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அடைகிறது.

$\theta = \pi/4$ ல் செவ்வக பரப்பு பெருமமாகிறது.

$$\Rightarrow 2x = 2r \cos \pi/4 \quad y = r \sin \pi/4$$

$$= \sqrt{2}r \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$2x = \sqrt{2}r$$

$$\text{நீளம்} = \sqrt{2}r \quad \text{அகலம்} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

10) ஒரு உற்பத்தியாளர் ஒரு சதுர அடிதளத்தையும் 108 ச செ.மீ வையி (square base)

முதல்பரப்பையும் கொண்ட திறந்த பெட்டியை வடிவமைக்க விரும்புகிறார். அதிகபட்ச கனஅளவிற்கான பெட்டியின் பரிமாணங்களை காண்க.

(32)

x, x, y எண்பது
திருந்த ஸட்டியின்
நீளம், அகலம், உயரங்கள்
என்க

$$l=x; b=x, h=y$$

$$\text{அடிப்பரப்பு} = x^2$$

$$\text{பக்கப்பரப்பு} = 4xy$$

$$\text{கனம்} = 108$$

$$x^2 + 4xy = 108$$

$$y = \frac{108 - x^2}{4x} \quad \text{--- ①}$$

கனவகையக ஸட்டியின்

$$\text{கனம்} \quad V = lbh$$

$$V(x) = x^2 y$$

$$= x^2 \left(\frac{108 - x^2}{4x} \right)$$

$$V(x) = \frac{1}{4} (108x - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{1}{4} (108 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$108 - 3x^2 = 0$$

$$+3x^2 = +108$$

$$x^2 = \frac{108}{3} = 36$$

$$x^2 = 36$$

$$\boxed{x=6}$$

$$V''(x) = \frac{1}{4} (0 - 6x)$$

$$x=6 \text{ எனில்}$$

$$V''(x) = -\frac{36}{4} < 0$$

$$x=6 \text{ எனில் } V(x) \text{ ஆனது}$$

அதிகபட்ச ஸட்டியின் கனம் என்கிறது.

$x=6$ ல் ஸட்டியின் கனம் 108 என்கிறது.

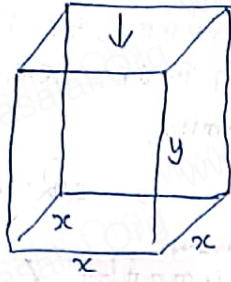
$$\Rightarrow y = \frac{108 - 6^2}{4(6)} = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24}$$

$$y=3$$

ஸட்டியின் அளவுகள் $6 \times 6 \times 3$

$$x=6, x=6, y=3$$

என்க.



⑪ ஒரு உருளைத்தொட்டியின் கனம்

$V = \pi r^2 h$ எனவும் $r+h=6$ எனில்
கனத்தொட்டியின் மீட்டர் மட்டும் மீட்டர்
மதிப்புகளை காண்க.

$$r+h=6$$

$$h=6-r \quad \text{--- ①}$$

$$\text{கனம்} \quad V = \pi r^2 h$$

$$V(r) = \pi r^2 (6-r)$$

$$V(r) = \pi (6r^2 - r^3)$$

$$V'(r) = \pi (12r - 3r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 12r - 3r^2 = 0$$

$$-3r(r-4) = 0$$

$$r=0, r=4$$

h, r எண்பது மீட்டர் மட்டும்
அளவுகள் மதிப்புகள் 6

$$\therefore 0 \leq h, r \leq 6$$

$$V(0) = \pi(0) = 0$$

$$V(4) = \pi(6 \times 16 - 64) = \pi(96 - 64) = 32\pi$$

$$V(6) = \pi(6(6^2) - 6^3) = 0$$

$$\text{மீட்டர் மட்டும்} = 32\pi$$

$$\text{மீட்டர் மட்டும்} = 0.$$

⑫ ஆரம் a எஃம் மீட்டர் மட்டும் உயரம்

b எஃம் மீட்டர் மட்டும் ஒரு வட்டத்தின்

கனம் ஒரு உருளைத்தொட்டியின் மீட்டர்

கனம் மீட்டர் மட்டும், அதன் அடியில்

உயரம் h என்க.

மீட்டர் மட்டும் உருளைத்தொட்டியின் கனம்

கனம் கனம் கனம் $\frac{4}{9}$ மீட்டர்

என்க.

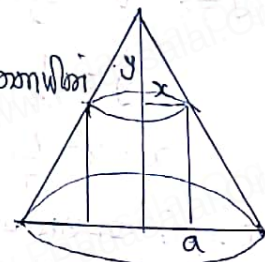
x என்க.

ஆரம் a என்க.

y என்க.

உருளைத்தொட்டியின் கனம்

மீட்டர் மட்டும் $\frac{4}{9}$ மீட்டர் மட்டும்

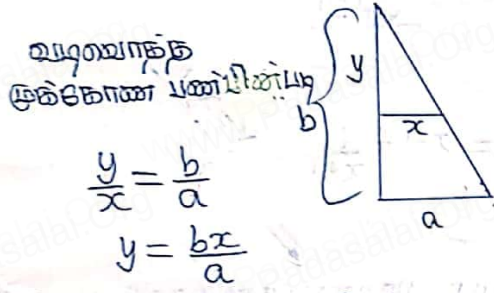


(33)

$$\text{கூம்பின் உயரம்} = b$$

$$\text{2-ருணையின் உயரம்} = b-y$$

$$\text{2-ருணையின் கனஅளவு } V = \pi x^2(b-y)$$



$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{bx}{a}$$

$$V(x) = \pi x^2 \left(b - \frac{bx}{a}\right)$$

$$V(x) = \pi b \left(x^2 - \frac{x^3}{a}\right) \quad \text{--- ①}$$

$$V'(x) = \pi b \left(2x - \frac{3x^2}{a}\right)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{3x^2}{a} = 0$$

$$x \left(2 - \frac{3x}{a}\right) = 0$$

$$x=0 \text{ சிவந்த } 2 - \frac{3x}{a} = 0$$

$$2 = \frac{3x}{a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2a}{3}$$

$$V''(x) = \pi b \left(2 - \frac{6x}{a}\right)$$

$$x = \frac{2a}{3} \text{ எனில்}$$

$$V''(x) = \pi b \left(2 - \frac{6}{a} \cdot \frac{2a}{3}\right)$$

$$= \pi b (2 - 4)$$

$$V''(x) = -2\pi b < 0$$

$$x = \frac{2a}{3} \text{ ல் } V(x) \text{ பெருமம் அடைகிறது.}$$

$$x = \frac{2a}{3} \text{ ல் 2-ருணையின் கனஅளவு பெருமமாகிறது.}$$

$$\text{①} \Rightarrow V(x) = \pi b \left(\frac{4a^2}{9} - \frac{8a^3}{27}\right)$$

$$= \pi 4b a^2 \left[\frac{1}{9} - \frac{2}{27}\right]$$

$$= 4\pi b a^2 \left[\frac{3-2}{27}\right]$$

$$= \frac{4}{9} \left[\frac{1}{3} \pi a^2 b\right]$$

மிக்ஸரி 2-ருணையின்

$$\text{கனஅளவு} = \frac{4}{9} (\text{கூம்பின் கனஅளவு})$$

சமச்சீர் தன்மை மற்றும் தொடர்பு
தொடர்புகளாக

சமச்சீர் தன்மை

① யு அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர்

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

(x க்கு -x என பிரதியிட்டு மீண்டும் $f(x, y)$ பெறப்பட்டால்)

② x அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர்

$$f(x, -y) = f(x, y)$$

(y க்கு -y என பிரதியிட்டு மீண்டும் $f(x, y)$ பெறப்பட்டால்)

③ ஆகியைப் பொறுத்து சமச்சீர்

$$f(-x, -y) = f(x, y)$$

(x க்கு -x, y க்கு -y என பிரதியிட்டு $f(x, y)$ பெறப்பட்டால்)

தொடர்பு தொடர்புகளாக

① கிடைமட்ட தொடர்பு தொடர்புகளாக

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = L$$

② நெருங்குதல் தொடர்பு தொடர்புகளாக

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

எனில்

③ சாய்ந்த தொடர்பு தொடர்புகளாக

தொடர்பின் மறு > பகுதியின் படி

இருந்தால் வரும்.

தொடர்பின் பகுதியாக வரும்

சாய்ந்த தொடர்பு தொடர்புகளாக

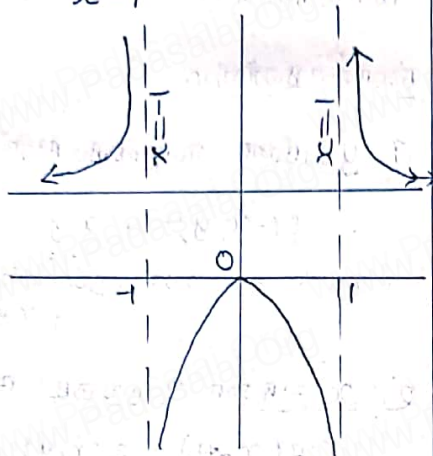
கிடைக்கும்.

பயிற்சி 7.9

(34)

① கீழ்க்காணும் வளைவரைகளுக்கு
தொலை தொடுகோடுகளை காண்க.

$$(i) f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$



$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

(நினைவூறு)
 $x=1$, $x=-1$ என்பன செங்குத்து
தொலை தொடுகோடுகள்

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

$y=1$ என்பது கிடைமட்ட
தொலை தொடுகோடாகும்.

$$(ii) f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

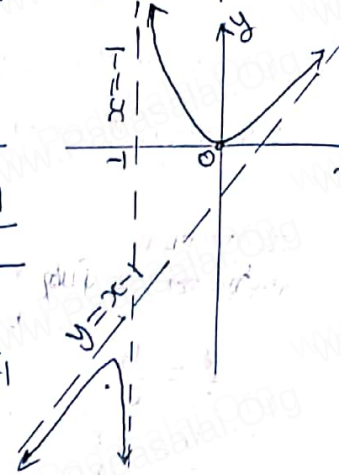
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x=-1$ என்பது நினைவூறு
தொலை தொடுகோடாகும்

தொடுகியின் படி > படுகியின் படி

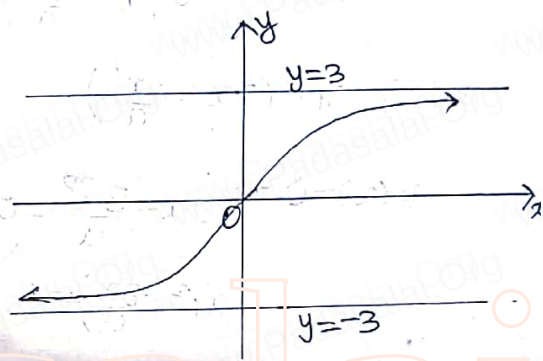
$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$



சாய்ந்த தொலை தொடுகோடு $y=x-1$

$$(ii) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$$



$$y = \frac{1}{x} \text{ எனில் } x = \frac{1}{y}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{3/y}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+2}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{3/y}{\frac{\sqrt{1+2y^2}}{y}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}} = 3$$

$\therefore y=3$ என்பது கிடைமட்ட தொலை
தொடுகோடு

$$y = -\frac{1}{x} \text{ எனில் } x = -\frac{1}{y}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-3/y}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+2}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-3/y}{\frac{\sqrt{1+2y^2}}{y}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{1+0}} = -3$$

$\therefore y=-3$ என்பதும் கிடைமட்ட தொலை
தொடுகோடு

$$(IV) f(x) = \frac{x^2 - 6x - 1}{x + 3}$$

$$① \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 + 18 - 1}{0} = \infty$$

$x = -3$ மட்டுமே செங்குத்து
தொண்டுகளாக

② தொகுதியின் படி > பகுதியின் படி

$$\begin{array}{r} x-9 \\ x+3 \overline{) x^2-6x-1} \\ \underline{-(x^2+3x)} \\ -9x-1 \\ \underline{-(-9x-27)} \\ 26 \end{array}$$

$$\frac{x^2-6x-1}{x+3} = x-9 + \frac{26}{x+3}$$

சாய்ந்த தொண்டுகளாக
 $y = x - 9$

$$(V) f(x) = \frac{x^2 + 6x - 4}{3x - 6}$$

$$① \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 4}{3x - 6} = \frac{4 + 12 - 4}{0} = \infty$$

$x = 2$ என்பது மட்டுமே நிரப்புகிறது
தொண்டுகளாக

② தொகுதியின் படி > பகுதியின் படி

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ 3x-6 \overline{) x^2+6x-4} \\ \underline{-(x^2+2x)} \\ 8x-4 \\ \underline{-(8x-16)} \\ 12 \end{array}$$

$$\frac{x^2+6x-4}{3x-6} = \frac{1}{3}(x+8) + \frac{12}{3x-6}$$

சாய்ந்த தொண்டுகளாக
 $y = \frac{1}{3}(x+8)$

(35)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளை வரைக

$$① y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$$

$y = 0$ எனில்

$$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)(x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ & & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x = -2, 1, 1$$

① சார்புகள் மற்றும் விச்சை

$f(x)$ ஒரு பன்மறுப்பு கோவை

சார்பு எண்ணு

சார்புகள் $(-\infty, \infty)$

விச்சை $(-\infty, \infty)$

② வரைபட துண்டு

x வரைபட துண்டு $= -2, 1$

y வரைபட துண்டு $= -\frac{2}{3}$

($x=0$ எனில் $y = -\frac{2}{3}$)

③ தேக்கநிலை

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

தேக்கநிலை

என்கள் $x = -1, 1$

$$y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$$

④ இடஞ்சார்ந்த அகதி மதிப்புகள்

$$f''(x) = -2x$$

$x = 1$ எனில் $f''(x) = -2 < 0$ $f(x)$ குந்து

$x = 1$ ல் இடஞ்சார்ந்த பெருமம்
அடைகிறது

பெருமமதிப்பு $f(1) = 0$

$x = -1$ எனில் $f''(x) = 2 > 0$

$x = -1$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த
சிறுமம் அடைகிறது

$$\text{சிறுமமதிப்பு} = f(-1) = -\frac{1}{3}(-1 + 3 + 2) = -\frac{4}{3}$$

⑤ குதிய

$$f'(x) = -2x$$

$$f''(x) = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

கிடைவனிகள் $(-\infty, 0), (0, \infty)$ $(-\infty, 0)$ ல் $f''(x) > 0$ மேல்வளைவு குதிய $(0, \infty)$ ல் $f''(x) < 0$ கீழ்வளைவு குதிய

⑥ வண்ணு மாற்ற புள்ளி

 $x=0$ க்கு கடக்கும்வாறு $f''(x)$ ன் குறி மாறுகிறதுவண்ணு மாற்ற புள்ளி $= (0, f(0))$

$$= (0, -\frac{2}{3})$$

⑦ மூலம் மூலங்களை

கிடைவாறு

$$(ii) y = x\sqrt{4-x}$$

$$4-x \geq 0$$

$$x \leq 4$$

① $f(x)$ ஆனது $x \leq 4$ க்கு மட்டுமே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதுசார்பகம் $(-\infty, 4]$ வீச்சகம் $(-\infty, \frac{16}{3}]$

② மையத்துண்டு

 x மையத்துண்டு $= 0, 4$ y மையத்துண்டு $= 0$

③ மாயுநிலை

$$f(x) = x(4-x)^{1/2}$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2} (4-x)^{1/2}$$

$$= (4-x)^{-1/2} \left[\frac{x}{2} (4-x) \right]$$

$$= (4-x)^{-1/2} \left(\frac{-x+8-2x}{2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{8-3x}{2(4-x)^{1/2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8-3x = 0$$

$$x = \frac{8}{3}$$

③⑥

 $x=4$ ல் $f'(x)$ வரையறுக்க

படவிலை

மாயுநிலை எண்கள் $x = \frac{8}{3}, 4$

④ இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகள்

$$f'(x) = \frac{8-3x}{2(4-x)^{1/2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{(4-x)^{1/2}(-3) - (8-3x) \cdot \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{(4-x)^{-1/2}}{2(4-x)^2} \left[4-x(-3) + \frac{1}{2}(8-3x) \right]$$

$$= \frac{1}{2(4-x)^{3/2}} \left[\frac{-6(4-x) + 8-3x}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4(4-x)^{3/2}} \left[-24+6x+8-3x \right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{4(4-x)^{3/2}} (3x-16)$$

① $x = \frac{8}{3}$ எனில்

$$f''(x) = \frac{1}{4(4-\frac{8}{3})^{3/2}} (3(\frac{8}{3})-16)$$

$$= \frac{-8}{4(\frac{4}{3})^{3/2}} < 0$$

 $x = \frac{8}{3}$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த மெகம் அடைகிறதுமெகம்திப்பு $= f(\frac{8}{3})$

$$= \frac{8}{3} (4-\frac{8}{3})^{1/2}$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8 \times 2}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

⑤ குதிய

$$f''(x) = \frac{3x-16}{4(4-x)^{3/2}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x-16}{4(4-x)^{3/2}} = 0$$

$$3x-16 = 0$$

$$3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

 $x \leq 4$ எனில் $(-\infty, 4]$ ல் மெகம் குதிய சாத்தனமெகம்திப்பு $f''(x) < 0$ எனவே $(-\infty, 4]$ ல் $f(x)$ கீழ்வளைவு குதிய மெகம்.

தெரியாது,

(iii) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

① சரிபார்க்கும், தீர்மானம்
 $x-4 \neq 0$

$$x^2 \neq 4$$

$$x \neq \pm 2$$

உகை வகையானது $x = \pm 2$ ல்
வகையானது 1 ல்

சாஸ்திரம் $R = \{2, 2\}$

விச்சகம் $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (1, \infty)$

② சமச்சீர்

$$f(-x, y) = f(x, y) \text{ சமன்பாடு}$$

$f(x)$ y அச்சு வரத்து சமச்சீர்

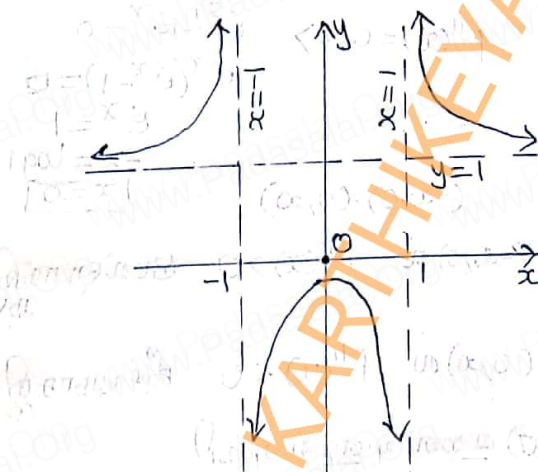
(3) உயர்நீதிமன்றம்

at $x=0$ $y = -\frac{1}{4}$

$$y=0 \Rightarrow x^2=0$$

y கைட்டுதுண்டு $= -1/4$

அமைப்பு துண்டு இல்லை.



④ தென்னாசிய தொழில் நெகிழ்ச்சி

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$$

$x = -2, x = 2$ என்பன நினைவுகூர்ந்து
தொண்டி தொடுகிறார்களாகும்.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

 $x \rightarrow \infty$

$\therefore y=1$ எனப்பது கிடைமட்ட

விதாணியை விதாடுகோடாகும்

③ மாநில நகராட்சி நிர்வாகம்

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x) + (x^2+1)(2x)}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 - 1)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x = 0$$

$x = -2, 2$ என்பன சார்புத்தொடரில் கிடைத்தன
 எனவே அவற்றை மாற்றினால்
 எண்ணிக்கை கொண்டு சீரமைக்கப்பட்டன
 $x = -2, 2$ ல் $f(x)$ மூலநிலைக்கிடக்கின்றன
 எனவே $f(x)$ மூலநிலைக்கிடக்கின்றன

മാനദൃഷ്ടിയിൽ $x=0$ ലെ വില

⑥ இடஞ்சார்ந்த வகைப்பாடுகள்

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-10) + 10x(2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 4) \cdot 10(-x^2 + 4 + 4x^2)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

$$x=0 \Rightarrow f'(x) = \frac{40}{(-4)^3} < 0$$

$x=0$ ல் $f(x)$ இடஞ்சார்ந்த
உபநிலம் அடைகிறது.

$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

⑦ கூடு

$$f''(x) = \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

(38)

$$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

இருப்பினும் $x = -2, 2$ ல்
வகையறுக் காய்பட கிடக்காது.

இடைவெளிகள் $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

இடைவெளி	மதிப்பு x	$f''(x) = \frac{10x^2 - 4}{(x-4)^3}$	குறியை	குறிப்பு
$(-\infty, -2)$	-3	$\frac{310}{125}$	+	மேல் நோக்கி
$(-2, 2)$	0	$\frac{40}{-64}$	-	கீழ் நோக்கி
$(2, \infty)$	3	$\frac{310}{125}$	+	மேல் நோக்கி

③ வகையறு மாற்ற முறை இல்லை,

② (iv) $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

① சார்புகம் மற்றும் வீச்சுகம்

$$y = f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad \text{இது } x \text{ க்கு}$$

ஸ்திரமும் மதிப்புகளாகவும்
வகையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்புகம் $(-\infty, \infty)$

வீச்சுகம் $(0, 1)$

② வடிவத்தினை

$$x=0 \text{ எனில் } y = \frac{1}{2}$$

$$y=0 \text{ எனில் } x = -\infty \text{ ல் மட்டும்}$$

x வடிவத்தினை இல்லை

$$y \text{ வடிவத்தினை } = \frac{1}{2}$$

③ தொலை தொடுகோடுகள்

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2} = 0$$

$y=0, y=1$ என்பன கிடைமட்ட

தொலைதொடு கோடுகளாகும்.

④ (தேங்க) மாறுநிலை எண்கள்

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+e^x)^2} (-e^x)$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^x)^2} > 0$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ எனவே}$$

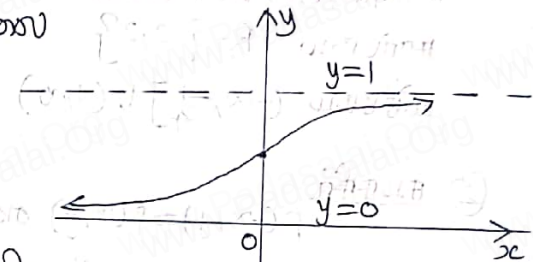
மாறுநிலை எண்கள் இல்லை

⑤ இடஞ்சார்ந்த அல்லது மதிப்புகள்

மாறுநிலை எண்கள் இல்லை

எனவே $f'(x)$ ன் குறிமற்ற வாய்ப்பில்லை

எனவே இடஞ்சார்ந்த அல்லது மதிப்புகள்
இல்லை



⑥ குறியை

$$f''(x) = \frac{(1+e^x)^2 (-e^x) - e^x (2(1+e^x))}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{(1+e^x) [-e^x - 2e^x]}{(1+e^x)^4} = \frac{-3e^x}{(1+e^x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^3} = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x} - e^{-x} = 0$$

$$e^{-x}(e^{-x}-1) = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

$$-x = \log 1$$

$$x = 0$$

$(-\infty, 0), (0, \infty)$

$(-\infty, 0)$ ல் $f''(x) > 0$ மேல்நோக்கி குறியை

$(0, \infty)$ ல் $f''(x) < 0$ கீழ்நோக்கி குறியை

⑦ வகையறு மாற்ற முறை

$x=0$ ஐ கடக்கும் போது $f'(x)$ ன் குறியை

மாறுவதால் வகையறு மாற்ற முறை

$$= (0, f(0))$$

$$= (0, \frac{1}{1+1}) = (0, \frac{1}{2})$$

(v) $y = \frac{x^2}{24} - \log x$ (நீக்கப்பட்டுள்ளது)
நன்றி

8. வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைகள்களுக்கள்

* தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$x = x_0 \text{ ல்}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

* தனிப்பிணை = மைய மதிப்பு - தோறாய மதிப்பு

* சார்பிணை = $\frac{\text{மைய மதிப்பு} - \text{தோறாய மதிப்பு}}{\text{மைய மதிப்பு}}$

(சு.கார்த்திகேயன்
கருவாடூர் மாவட்டம்)

* சதவீதப்பிணை = சார்பிணை $\times 100$.

பயிற்சி 8.1

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ என்க. $x=27$ இல்
தோரியல் தோறாய மதிப்பை காண்க,
தோரியல் தோறாய மதிப்பை பயன்படுத்தி
 $\sqrt[3]{27.2}$ மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = x^{1/3} \quad x_0 = 27$$

$$f(x_0) = f(27) = 27^{1/3} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$f'(x_0) = f'(27) = \frac{1}{3} \frac{(27)^{-2/3}}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{27} = \frac{1}{81}$$

$f(x)$ தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 3 + \frac{1}{81}(x - 27)$$

$$= 3 + \frac{x - 27}{81}$$

$$L(x) = \frac{x}{81} + 2$$

$$x = 27.2 \quad f(27.2) \approx L(27.2)$$

$$f(27.2) \approx \sqrt[3]{27.2}$$

$$\begin{array}{r} 1.0074 \\ 27 \overline{) 27.2} \\ \underline{27} \\ 200 \\ 189 \\ \underline{110} \end{array}$$

$$\approx \frac{27.2}{27} + 2$$

$$= 1.0074 + 2$$

$$\sqrt[3]{27.2} \approx 3.0074$$

2) தோரியல் தோறாய மதிப்பை
கூறையிலே, தோறாய மதிப்பு காண்க

i) $(123)^{2/3}$

$$f(x) = x^{2/3} \quad x_0 = 125$$

என்க.

$$f(x_0) = f(125) = (125)^{2/3} = 5^2 = 25$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{2/3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$f'(x_0) = \frac{2}{3} \frac{(125)^{-1/3}}{125} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{125 \times 5} = \frac{2}{1875}$$

தோரியல் தோறாய மதிப்பு

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 25 + \frac{2}{1875}(x - 125)$$

$$= 25 + \frac{2x}{1875} - \frac{125 \times 2}{1875}$$

$$= \frac{2x}{1875} + \frac{75 - 50}{3}$$

$$L(x) = \frac{2x}{1875} + \frac{25}{3}$$

$x = 123$ என பிரதியிட

$$f(123) = (123)^{2/3} \approx L(123)$$

$$\begin{array}{r} 24.733 \\ 15 \overline{) 371} \\ \underline{30} \\ 71 \\ \underline{60} \\ 110 \\ \underline{105} \\ 50 \\ \underline{45} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} = \frac{2(123)}{1875} + \frac{25}{3} \\ = \frac{246 + 125}{15} \\ = \frac{371}{15} \\ = \frac{24.733}{1} \end{array}$$

$$(123)^{2/3} \approx 24.733$$

ii) $4\sqrt{5}$

$$f(x) = x^{1/4} \text{ என்க } x_0 = 16$$

$$f(x_0) = f(16) = (16)^{1/4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{1/4 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-3/4}$$

$$f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{4} \frac{16^{1/4}}{16} = \frac{1}{24} \frac{2}{16}$$

$$= \frac{1}{32}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 2 + \frac{1}{32}(x - 16)$$

$$= 2 + \frac{x}{32} - \frac{16}{32} \cdot \frac{1}{2}$$

$$L(x) = \frac{x}{32} + \frac{3}{2}$$

$x = 15$ எனப் பிரதியிட

$$f(15) \approx L(15)$$

$$= \frac{15}{32} + \frac{3}{2} = \frac{15 + 48}{32}$$

$$= \frac{63}{32} = 1.968$$

$$4\sqrt{15} \approx 1.968$$

$$(ii) \sqrt[3]{26}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad x_0 = 27$$

என்க $\Delta x = -1$

$$f(x_0) = f(27) = (27)^{1/3} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{1}{3} \frac{x^{1/3}}{x}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \frac{(27)^{1/3}}{27} = \frac{1}{3} \frac{3}{27} = \frac{1}{27}$$

தொடர்வத் தொழில்

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

$$= 3 + \frac{x}{27} - \frac{27}{27}$$

$$L(x) = \frac{x}{27} + 2$$

$x = 26$ எனப் பிரதியிட

$$f(26) = \sqrt[3]{26} \approx L(26)$$

$$\approx \frac{26}{27} + 2$$

$$= 0.9629 + 2$$

$$\sqrt[3]{26} \approx 2.9629$$

3) பின்வரும் சார்புகளுக்கு
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில்
தொடர்வத் தொழில்
காண்க

2

$$(i) f(x) = x^3 - 5x + 12 \quad x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 2^3 - 5(2) + 12 = 8 - 10 + 12 = 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3(2^2) - 5$$

$$= 12 - 5 = 7$$

தொடர்வத் தொழில்

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 10 + 7(x - 2)$$

$$= 10 + 7x - 14$$

$$L(x) = 7x - 4$$

$$(ii) g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x_0 = -4$$

$$g(x_0) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x$$

$$g'(x_0) = g'(-4) = \frac{-4}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{-4}{5}$$

தொடர்வத் தொழில்

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 5 + \left(\frac{-4}{5}\right)(x + 4)$$

$$= 5 - \frac{4x}{5} - \frac{16}{5}$$

$$= \frac{25 - 4x - 16}{5}$$

$$L(x) = \frac{9 - 4x}{5}$$

$$(iii) h(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1$$

$$h(x_0) = h(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_0) = h'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

தொடர்வத் தொழில்

$$L(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{x+1}{4}$$

4) ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செ.மீ.க்கு பதிலாக 12.5 செ.மீ. அளவுக்குக் குறைக்கப்படுகிறது. எனில் அதன் பரப்பு மாற்றத்திற்குரிய பின்வருவன காண்க.

பி) தனிப்பிணை (i) சார்பிணை ஆரம் $r = 12.65$ பிணைப்பிணை

$$\Delta r = 12.5 - 12.65$$

$$\Delta r = -0.15$$

வட்ட தகட்டின் பரப்பு $A = \pi r^2$

அது பொதுத்து வகையில் $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi \times 12.65 \times (-0.15)$$

$$= -3.795\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{தொடர்பிணை} = -3.795\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{மைய பிணை} = A(12.5) - A(12.65)$$

$$= \pi(12.5)^2 - \pi(12.65)^2$$

$$= \pi(156.25 - 160.0225)$$

$$= -3.7725\pi \text{ செ.மீ}^2$$

பி) தனிப்பிணை = மையபிணை - தொடர்பிணை

$$= -3.7725\pi + 3.795\pi$$

$$= 0.0225\pi \text{ செ.மீ}^2$$

(ii) சார்பிணை = தனிப்பிணை

மையபிணை

$$= \frac{0.0225\pi}{-3.7725\pi}$$

$$= -0.00596$$

$$\approx -0.006$$

(iii) சதவீதப்பிணை = சார்பிணை $\times 100$

$$= -0.006 \times 100 = -0.6\%$$

5) பனிக் கடடியிலான ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ. அதன் ஆரம் 10 வீதத்து 9.8 ஆக குறைக்கிறது. பின்வருவன

வற்றின் தொடர்பு மதிப்பிணைக் காண்க.

பி) கோளத்தில் ஏற்படும் மாற்றம்

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்

$$\text{ஆரம் } r = 10 \quad \Delta r = \Delta r = 9.8 - 10 = -0.2$$

பி) கோளத்தின் கனஅளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

அது பொதுத்து வகையில்

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

கோளத்தில் ஏற்படும்

மாற்றம் $\Delta V \approx dV$

$$\approx 4\pi(10)^2(-0.2)$$

$$\approx -80\pi \text{ செ.மீ}^3$$

i.e கோளத்தில் ஏற்படும் குறைவு $80\pi \text{ செ.மீ}^3$

பி) வளைபரப்பு $S = 4\pi r^2$

அது பொதுத்து வகையில்

$$\frac{dS}{dr} = 8\pi r$$

$$dS = 8\pi r dr$$

வளைபரப்பில் ஏற்படும்

மாற்றம் $\Delta S \approx dS$

$$\approx 8\pi(10)(-0.2)$$

$$\approx -16\pi \text{ செ.மீ}^2$$

வளைபரப்பில் ஏற்படும் குறைவு

$$\approx 16\pi \text{ செ.மீ}^2$$

6) ல. நீளம் 2 மீ. ஒரு தனி ஊதலின்

(சூ. அளவு) கோளம் T என்பது $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு g

ஒரு மாறிலி - ல் ஏற்படும் 2 சதவீத

பிணைக்கு ஏற்ப T ல் ஏற்படும் தொடர்பு

சதவீதப்பிணையை காண்க.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \frac{dT}{dl} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

இதிலும் மடக்கை எடுக்க

$$\log T = \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log \frac{l}{g}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{l}{g}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} [\log l - \log g]$$

அது பொதுத்து வகையில்

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dl} = 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} - 0 \right]$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

T ல் ஏற்படும் தொடர்பு

$$\text{சதவீதப்பிணை} = \frac{dT}{T} \times 100$$

$$\approx \frac{1}{2x} \left(\frac{2x}{100} \right) \times 100$$

$$= 1\%$$

7-ன் சதவீதம் சதவீதப்பித்தம் = 1%

⑦ ஓர் எண்ணின் n ஆம் படிசூலம் கணக்கிடப்படும்போது தற்போத சதவீதப்பித்தம் ஒருநாள்மாக அந்த எண்ணின் சதவீதப்பித்தத்தின் h மடங்கு எனக் காட்டுக.

ஓர் எண் x என்க
அதன் n ஆம் படிசூலம் $y = x^{\frac{1}{n}}$ என்க

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\log \text{ எடுக்க}$$

$$\log y = \log x^{\frac{1}{n}}$$

$$\log y = \frac{1}{n} \log x$$

x ஐ வகைப்படுத்து வகையிட

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \right)$$

100 ஆம் வகைப்படுத்த

$$\frac{dy}{y} \times 100 = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

n ஆம் படிசூலம்

காணும்போது தற்போத

$$\text{சதவீதப்பித்தம்} = \frac{\Delta y}{y} \times 100$$

$$\approx \frac{\Delta y}{y} \times 100$$

$$\approx \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{x} \times 100 \right)$$

$$y \text{ ன் சதவீதப்பித்தம்} \approx \frac{1}{n} \left(\text{அந்த எண்ணின் சதவீதப்பித்தம்} \right)$$

வகையீடுகள்

① $y = f(x)$ ன் வகையீடு
 $dy = f'(x) dx$

② $f(x + \Delta x) \approx y + dy$

③ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

பயிற்சி-8.2

1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு dy காண்க.

④ (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-4x) 3(1-2x)^2(-2) - (1-2x)^3(0-4)}{(3-4x)^2}$$

$$= (1-2x)^2 \left[\frac{-6(3-4x) + 4(1-2x)}{(3-4x)^2} \right]$$

$$= (1-2x)^2 \left[\frac{-18 + 24x + 4 - 8x}{(3-4x)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-2x)^2 (16x - 14)}{(3-4x)^2}$$

வகையீடு

$$dy = \frac{2(1-2x)^2 (8x - 7)}{(3-4x)^2} dx$$

(ii) $y = (3 + \sin 2x)^{2/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (3 + \sin 2x)^{\frac{2}{3}-1} (0 + \cos 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} (3 + \sin 2x)^{-1/3} \cos 2x$$

$$\text{வகையீடு } dy = \frac{4}{3} \frac{\cos 2x}{(3 + \sin 2x)^{1/3}} dx$$

(iii) $y = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left(-\sin(x^2-1)(2x) \right)$$

$$+ \cos(x^2-1) (e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} (2x-5))$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left[-2x \sin(x^2-1) + (2x-5) \cos(x^2-1) \right]$$

வகையீடு

$$dy = e^{\frac{x^2-5x+7}{\cos(x^2-1)}} \left[(2x-5) \cos(x^2-1) - 2x \sin(x^2-1) \right] dx$$

② $f(x) = x^2 + 3x$ எனில் சார்பிற்கு

df காண்க மற்றும்

(i) $x=2, dx=0.1$ (ii) $x=3$ மற்றும் $dx=0.02$

எனும் போது df ஐ மதிப்பிடுக.

$$f(x) = x^2 + 3x$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 3$$

$$df = (2x+3)dx$$

$$\text{ii) } x=2, dx=0.1$$

$$df = (2(2)+3)(0.1)$$

$$= 7(0.1)$$

$$df = 0.7$$

$$\text{iii) } x=3, dx=0.02$$

$$df = (2(3)+3)0.02$$

$$= (9)(0.02)$$

$$df = 0.18$$

③ f என்ற சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட x, dx மதிப்புகளுக்கு Δf மற்றும் df காண்க. மூலம் அவற்றை ஒப்பிடுக.

$$\text{i) } f(x) = x^3 - 2x^2, x=2, \Delta x = dx = 0.5$$

$$f = x^3 - 2x^2$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$df = (3x^2 - 4x)dx$$

$$= (3(2^2) - 4(2))0.5$$

$$= (12 - 8)(0.5)$$

$$df = 2.0$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= f(2+0.5) - f(2)$$

$$= f\left(\frac{5}{2}\right) - f(2)$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (2^3 - 2(2)^2)$$

$$= \frac{125}{8} - \frac{50}{4} - (8 - 8)$$

$$= \frac{125 - 100}{8} = \frac{25}{8}$$

$$\Delta f = 3.125$$

$$df = 2.0, \Delta f = 3.125$$

$$df \neq \Delta f$$

$$\text{ii) } f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$x = -0.5$$

$$\Delta x = dx = 0.1$$

$$\frac{df}{dx} = 2x + 2$$

$$df = (2x + 2)dx$$

$$= (2(-0.5) + 2)(0.1)$$

$$= (1)(0.1)$$

$$df = 0.1$$

⑤

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= f(-0.5+0.1) - f(-0.5)$$

$$= f(-0.4) - f(-0.5)$$

$$= ((-0.4)^2 + 2(-0.4) + 3) - ((-0.5)^2 + 2(-0.5) + 3)$$

$$= (0.16 - 0.8 + 3) - (0.25 - 1 + 3)$$

$$= (3.16 - 0.8) - 2.25$$

$$= 3.16 - 3.05$$

$$\Delta f = 0.11$$

$$df = 0.1$$

$$df \approx \Delta f$$

4) $\log_{10} e = 0.4343$ எனக் கொண்டு

$\log_{10} 1003$ ன் தோராய மதிப்பு காண்க.

குறைய-I

$$y = f(x) = \log_{10} x$$

$$f(1000) = \log_{10} 1000$$

$$= \log_{10} 10^3$$

$$f(1000) = 3$$

$$y = \log_{10} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

$$dy = \frac{0.4343}{x} dx$$

$$= \frac{0.4343 \times 3}{1000}$$

$$dy = 0.001303$$

$$f(x+\Delta x) \approx y + dy$$

$$f(1000+3) \approx 3 + 0.001303$$

$$\log_{10} 1003 \approx 3.001303$$

குறைய-II

$$y = f(x) = \log_{10} x$$

என்க

இங்கு

$$x_0 = 1000$$

$$\Delta x = 3$$

$$f(x_0) = f(1000) = \log_{10} 1000 = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

$$f'(x_0) = \frac{0.4343}{1000}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (6)$$

$$L(x) = 3 + \frac{0.4343}{1000}(x - 1000)$$

$x = 1003$ எனப் பிரதியிட

$$L(x) = 3 + \frac{0.4343}{1000}(1003 - 1000)$$

$$= 3 + \frac{1.303}{1000}$$

$$= 3 + 0.001303$$

$$L(1003) = 3.001303$$

$$f(1003) \approx L(1003)$$

$$\log_{10} 1003 \approx 3.001303$$

⑤ ஒரு மரத்தின் அடிப்பகுதியின் விட்டம் 30 செ.மீ அருகே ஆண்டு அதன் சுற்றளவு 6 செ.மீ அதிகரிக்கின்றது, எனில்

(i) தோராயமாக மரத்தின் விட்டம் எவ்வளவு வளர்ந்துள்ளது?

(ii) அதன் குறுக்கு வெட்டு பரப்பு எவ்வளவு சதவீதம் அதிகரிக்கும்,

$$\text{விட்டம்} = 30 \text{ செ.மீ}$$

$$2r = 30$$

$$r = 15$$

(i) சுற்றளவு அதிகரிப்பு = 6 செ.மீ

$$2\pi r_2 - 2\pi r_1 = 6$$

$$\boxed{r_2 - r_1 = \frac{3}{\pi}}$$

$$\text{விட்டத்தின் அதிகரிப்பு} = \frac{6}{\pi} \text{ செ.மீ}$$

(ii) வட்டத்தின் பரப்பு = πr^2

$$A = \pi r^2$$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dr = \frac{3}{\pi}$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi(15) \frac{3}{\pi}$$

$$dA = 90$$

பரப்பு அதிகரிப்பு சதவீதம்

$$\approx \frac{dA}{A} \times 100$$

$$\approx \frac{90}{\pi \times 15 \times 15} \times 100$$

$$= \frac{40}{\pi} \%$$

பரப்பு அதிகரிப்பு சதவீதம் $\approx \frac{40}{\pi} \%$

⑥ ஒரு குறிப்பிட்ட பருமனின் குட்டை கிட்பதட்ட கோள வடிவமாக உள்ளது. குட்டையின் ஆரம் ஒட்டிக்கு உள்ளே 5 மி.மீ ஆகவும் ஒட்டிக்கு வெளியே 5.3 மி.மீ ஆகவும் உள்ளது எனில், ஒட்டின் தோராய கனஅளவைக் காண்க.

2ம் ஆரம் $r = 5$ மி.மீ

$$\text{ஒட்டின் தடிமன் } dr = \Delta r = 5.3 - 5$$

$$dr = 0.3$$

கோளத்தின் கனஅளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

குட்டை ஒட்டின்

கனஅளவு $\Delta V \approx dV$

$$V(5.3) - V(5) \approx 4\pi(5 \times 5) 0.3$$

$$\approx 30\pi \text{ mm}^3$$

⑦ மனிதனின் இறந்தக் குழாயின் (நுணியின்) குறுக்கு வெட்டானது வட்ட வடிவம் எனக் கொள்க, ஒரு தோராயமாக இறந்தக் குழாய் விரிவடைவதற்கான மருந்து கொடுக்கப் பட்டுள்ளது, இறந்தக் குழாயின் ஆரம் 2 மி.மீ லிருந்து 2.1 மி.மீ ஆக அதிகரிக்கும்போது அதன் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு தோராயமாக எந்த அளவு அதிகரிக்கும்,

ஆரம் $r = 2$ மி.மீ

$$\Delta r \approx dr = 2.1 - 2$$

$$dr = 0.1$$

வட்டத்தின் பரப்பு $A = \pi r^2$

r ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையில்

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\text{பரப்பு அதிகரிப்பு} = A(2.1) - A(2)$$

$$\approx dA$$

$$\approx 2\pi(2)(0.1)$$

$$= 0.4\pi$$

$$\text{பரப்பு அதிகரிப்பு} \approx 0.4\pi \text{ ச.மீ}^2$$

8) புதிதாக 2 டிரைவர்களுடன் ஒரு நகரத்தின் வாங்காளர்களின் எண்ணிக்கையின் (ஆயிரங்களில்) அதிகரிப்பு $V(t) = 30 + 12t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 8$ என்பதால் மதிப்பிடப் படுகின்றது. இங்கு t என்பது ஆண்டுகள் எனில் காலம் 4 ல் இருந்து $4\frac{1}{6}$ வருடமாக இருக்கும் போது ஏற்படும் தொராய வாங்காளர்களின் எண்ணிக்கை மாற்றத்தை காண்க.

$$V(t) = 30 + 12t^2 - t^3$$

$$t = 4 \quad \frac{dV}{dt} = (24t - 3t^2)$$

$$\Delta t \approx dt = 4\frac{1}{6} - 4$$

$$dt = \frac{1}{6} \quad dV = (24t - 3t^2)dt$$

$$V \text{ ல் மாற்றம்} = V(4\frac{1}{6}) - V(4)$$

$$\approx dV$$

$$\approx (24(4) - 3(4^2)) \frac{1}{6}$$

$$= (96 - 48) \frac{1}{6}$$

$$= 48 \frac{1}{6} = 8$$

வாங்காளர்களின் எண்ணிக்கை மாற்றம் ≈ 8000
அல்லது ≈ 8 ஆயிரம்

19) ஒரு வட்ட வடிவ தகடு வெப்பத்தின் சீராக விரிவடைகிறது என்க. அதன் ஆரம் 10.5 செ.மீ திவிடும் 10.75 செ.மீ ஆக அதிகரிக்கும் போது அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தொராய அதிகரிப்பு மற்றும் தொராய சதவீத அதிகரிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\text{ஆரம் } r = 10.5$$

$$\Delta r = dr = 10.75 - 10.5$$

$$dr = 0.25$$

வட்ட தகட்டின் பரப்பு

$$A = \pi r^2$$

ரஃஸ்பாற்றத்து வகையிட

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

ப) பரப்பில் ஏற்படும் தொராய மாற்றம்

$$= dA$$

$$= 2\pi(10.5)(0.25)$$

$$= 5.25\pi \text{ செ.மீ}^2$$

ப) பரப்பில் ஏற்படும் தொராய

$$\text{மாற்ற சதவீதம்} = \frac{dA}{A} \times 100$$

$$= \frac{5.25\pi}{\pi \times 10.5 \times 10.5} \times 100$$

$$= 4.76\%$$

9) ஒரு மனிதன் x மணி நேரத்தில் கறும் y வார்த்தைகளுக்கான தொடர்பு $y = 52\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. x ன் மதிப்பு மின்வருமானம் மாற்றம்போது கறும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கையில் ஏற்படும் தொராய (அதிகரிப்பு) மாற்றத்தை காண்க. ப) 1 லிருந்து 1.1 மணி ப) 4 லிருந்து 4.1 மணி

$$y = 52\sqrt{x}$$

$$\text{ப) } x = 1 \quad dx = \Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

$$\frac{dy}{dx} = 52 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = 26 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{வார்த்தை கறற்றலில் தொராய மாற்றம்} = dy$$

$$= 26 \frac{1}{\sqrt{1}} (0.1)$$

$$= 2.6$$

$$\approx 3 \text{ வார்த்தைகள்}$$

$$\text{ப) } x = 4 \quad dx = \Delta x = 4.1 - 4$$

$$dx = 0.1$$

$$dy = 26 \frac{1}{\sqrt{4}} dx$$

$$\text{வார்த்தை கறற்றலின் தொராய மாற்றம்} = dy$$

$$= 26 \frac{1}{2} (0.1)$$

$$= 26 \frac{1}{2} (0.1)$$

$$= 1.3$$

≈ 1 வார்த்தை

11) 10 செ.மீ பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனசதுரத்தின் பக்கங்களுக்கும் 0.2 செ.மீ கனத்திற்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. வகையீடுகளை பயன்படுத்தி அதன் வர்ணப்பூச்சிற்குத் தேவையான கனத்தான கன செ.மீ வர்ணம் பயன்படுத்தப்பட்டது என காண்க, மேலும் துல்லியமாக வர்ண அளவு என்ன என்பதையும் காண்க.

பக்கம் $a = 10$ செ.மீ

வர்ணத்தின் தடிமன் $da = 0.2$

கனசதுரத்தின் கனஅளவு

$$V = a^3$$

$$\frac{dV}{da} = 3a^2$$

$$dV = 3a^2 da$$

வர்ணப்பூச்சின் கனஅளவு

தேவையான $= dV$

$$= 3(10)^2 (0.2)$$

$$= 60 \text{ செ.மீ}^2$$

வர்ணத்தின் கனஅளவு $\approx 60 \text{ செ.மீ}^2$

துல்லியமான வர்ணப்பூச்சின்

கனஅளவு $= V(10.2) - V(10)$

$$= (10.2)^3 - 10^3 = 1066.208 - 1000$$

$$= 66.208 \text{ செ.மீ}^3$$

இரு மாறிகள் உடைய சார்புகளின் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி தன்மை.

சார்பின் எல்லை

$F: A \rightarrow R$ என்க F ஆனது

ஒவ்வொரு $(L-\epsilon, L+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ க்கும்

$(x,y) \in B_\delta(u,v) \setminus \{(u,v)\}$, $\delta > 0$

$$\Rightarrow f(x,y) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$$

எனவாறு (u,v) ன் ஒரு அண்மை

புள்ளி $B_\delta \subset A$ இருக்கும்.

(8)

எனில் F ன் எல்லை L எனப்படும்

தொடர்ச்சி தன்மை

$A \subset R^2$; $F: A \rightarrow R$ என்க சார்பு

$F(u,v)$ இல் தொடர்ச்சி எனில்

i) (u,v) ன் F வறையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது

$$\text{ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (u,v)} F(x,y) = L$$

$$\text{iii) } L = F(u,v)$$

பயிற்சி 8.3

$$\text{i) சார்பு } g(x,y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3} \text{ க்கு}$$

எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால்

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} g(x,y) \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 3}$$

$$= \frac{3(1)^2 - 1(2)}{1^2 + 2^2 + 3}$$

$$= \frac{3-2}{1+4+3}$$

$$= \frac{1}{8}$$

② எல்லை மதிப்பு இருக்குமானால்

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y + 2}\right) \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y + 2}\right) = \cos\left(\frac{0+0}{0+0+2}\right)$$

$$= \cos 0$$

$$= 1$$

$$\text{③ } (x,y) \neq (0,0) \text{ க்கு } f(x,y) = \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

எனில் $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ என நிறுவுக.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(y-x)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= 0(0+0)$$

$$= 0 //$$

④ ஸ்தலம் மதிப்பு இருக்குமானால்
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{e^x \sin y}{y}\right)$ க்கு
 மதிப்பிடுக.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{e^x \sin y}{y}\right) &= \cos\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x \sin y}{y}\right) \\ [\because \text{கொடுப்பு காரிய விதிப்படி}] &= \cos\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^x\right) \cdot \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{y}\right) \\ &= \cos(e^0 \cdot 1) \\ &= \cos(1). \end{aligned}$$

5) $(x,y) \neq (0,0)$ க்கு $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
 மற்றும் $g(0,0) = 0$ என்க

(i) ஆவ்வாறு $y = mx$ $m \in \mathbb{R}$
 கோடுகளாடும் பாதையிலும்

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ என நிறுவுக.

(ii) ஆவ்வாறு $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 பரவலையுடைய பாதையிலும்

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \frac{k}{1+k}$ என
 நிறுவுக.

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

$y = mx$ எனப் பதவிடுக

$$\begin{aligned} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 m x}{x^2 (x^2 + m^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{m x}{x^2 + m^2} \\ &= \frac{0}{0 + m^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

$y = kx^2$ எனப் பதவிடுக

$$\begin{aligned} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 k x^2}{x^4 + k^2 x^4} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 k}{x^4 (1 + k^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{1+k^2}$$

6) காற்று $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$, ஆவ்வாறு
 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ க்கும் தொடர்ச்சியானது
 என நிறுவுக

(i) ஆவ்வாறு $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ எனப் பதவிடு
 ஏதேனும் மிகுந்த புள்ளி என்க.

(ii) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$

$f(a,b) = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1}$ எனப் பதவிடு ஆவ்வாறு

(a,b) க்கும் வரையறுக்கப்படும் என்க.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$
 $= \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} = f(a,b)$

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ க்கு $f(x,y)$ க்கு ஸ்தலம்
 உடனாக.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b) = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1}$
 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

எனவே f எனப் பதவிடு ஆவ்வாறு
 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ க்கும் தொடர்ச்சியானது.

⑦ காற்று $g(x,y) = e^y \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$

மற்றும் $g(0,0) = 1$ என்க புள்ளி $(0,0)$
 இல் g தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(i) $g(0,0) = 1$ என தொடர்புக்கப்படும்
 எனவே $(0,0)$ ல் $g(x,y)$ வரையறுக்கப்
 படும் என்க.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \frac{\sin x}{x}$

$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{x}$

$= 1 \cdot 1$ $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

$(0,0)$ ல் $g(x,y)$ க்கு ஸ்தலம் உடனாக.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1 = g(0,0) = L$

$\therefore (0,0)$ ல் g சூதாது
தொடர்ச்சியாக உள்ளது;

பகுதி: வகைக்கெடுக்கல்

கிடைசு: ராய்ட்டுடன் கீழே

$F: A \rightarrow R$ என்ற சார்பு A ல்
 f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்படும்
சூதாது தொடர்ச்சியானதாகவும்
இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$
என்பதாக இருக்கும்.

இங்கு $A \subset R^2$

கிடைசு: ராய்ட்டுடன் கீழே

$A \subset R^2$ என்ற $U: A \rightarrow R^2$
என்ற சார்பு $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in R$

எனவே இருக்குமானால் U சூதாது
 A ல் சீரானது என்பதும், இது
கிடைசு: ராய்ட்டுடன் கீழே என்பதும்,

பயிற்சி 3.4

i) பின்வரும் சார்புகளுக்கு
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பகுதி
வகைக்கெடுக்கல் காண்க.

ii) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 5x + 2$
(2,-5) ல்

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y + 0 + 5 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y + 5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-5) &= 6(2) - 2(-5) + 5 \\ &= 12 + 10 + 5 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2x + 2y + 0 + 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(2,-5) &= -2(2) + 2(-5) \\ &= -4 - 10 \\ &= -14 \end{aligned}$$

(ii) $g(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5x + 2$ (1,-2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x + 0 + 5$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,-2) = 6(1) + 5 = 11$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 + 2y + 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,-2) = 2(-2) = -4,$$

(iii) $h(x,y,z) = x \sin(xy) + z^2 x$
(2, $\frac{\pi}{4}$, 1)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x \cos xy + \sin xy (1) + z^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(2, \frac{\pi}{4}, 1) &= 2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} + 1^2 \\ &= 0 + 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x \cos xy (x) + 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(2, \frac{\pi}{4}, 1) = 2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} (2) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 + 2zx$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(2, \frac{\pi}{4}, 1) = 2(2)(1) = 4,$$

(iv) $G(x,y) = e^{x+3y} \log(x^2+y^2)$, (-1,1)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{x+3y} (\log(x^2+y^2))' + \log(x^2+y^2) (e^{x+3y})'$$

$$= e^{x+3y} \left(\frac{1}{x^2+y^2} 2x \right) + \log(x^2+y^2) e^{x+3y} (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{x+3y} \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2) \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1,1) = e^{-1+3} \left(\frac{2(-1)}{1+1} + \log(1+1) \right)$$

$$\begin{aligned} &= e^2 \left(-\frac{2}{2} + \log 2 \right) \\ &= e^2 (\log 2 - 1) \end{aligned}$$

(11)

$$\frac{\partial G}{\partial y} = e^{x+3y} \left(\frac{2y}{x^2+y^2} \right) + \log(x^2+y^2) e^{x+3y} \quad (3)$$

$$= e^{x+3y} \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + 3 \log(x^2+y^2) \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} (-1, 1) = e^{-1+3} \left(\frac{2}{1+1} + 3 \log(1+1) \right)$$

$$= e^2 \left(\frac{2}{2} + 3 \log 2 \right)$$

$$= e^2 (1 + \log 2^3)$$

$$= e^2 (1 + \log 8)$$

2) பின்வரும் சார்புகளுக்கு f_x, f_y காண்க மேலும் $f_{xy} = f_{yx}$ எனக் காட்டுக.

i) $f(x, y) = \frac{3x}{y + \sin x}$

$$f_x = \frac{(y + \sin x)(3) - 3x(\cos x)}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_x = \frac{3y + 3\sin x - 3x\cos x}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_y = 3x \left(\frac{-1}{(y + \sin x)^2} \right) (1)$$

$$f_y = \frac{-3x}{(y + \sin x)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-3x}{(y + \sin x)^2} \right)$$

$$= \frac{(y + \sin x)^2 (-3) + 3x(2(y + \sin x)(\cos x))}{(y + \sin x)^4}$$

$$= \frac{(y + \sin x)(-3(y + \sin x) + 6x\cos x)}{(y + \sin x)^4}$$

$$f_{xy} = \frac{3(2x\cos x - y - \sin x)}{(y + \sin x)^3} \quad \text{--- ①}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3y + 3\sin x - 3x\cos x}{(y + \sin x)^2} \right)$$

$$= \frac{(y + \sin x)^2 (3 + 0) - (3y + 3\sin x - 3x\cos x)(2(y + \sin x))}{(y + \sin x)^4}$$

$$= (y + \sin x) \left(\frac{3(y + \sin x) - 2 \times 3(y + \sin x - x\cos x)}{(y + \sin x)^4} \right)$$

$$= \frac{3(y + \sin x - 2y - 2\sin x + 2x\cos x)}{(y + \sin x)^3}$$

$$= \frac{3(2x\cos x - y - \sin x)}{(y + \sin x)^3} \quad \text{--- ②}$$

①, ② விடும்படி

$$f_{xy} = f_{yx}$$

ii) $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

$$f_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_x = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{-x}{y^2} \right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{-x}{y^2} \right)$$

$$f_y = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(-1) + x(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{--- ①}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(y)' - y(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(1) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yx} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{--- ②}$$

①, ② விடும்படி $f_{xy} = f_{yx}$

(12)

$$(iii) f(x,y) = \cos(x^2 - 3xy)$$

$$f_x = -\sin(x^2 - 3xy) (2x - 3y)$$

$$f_y = -\sin(x^2 - 3xy) (0 - 3x)$$

$$f_y = 3x \sin(x^2 - 3xy)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y)$$

$$= 3x (\cos(x^2 - 3xy) (2x - 3y) + \sin(x^2 - 3xy) 3)$$

$$f_{xy} = 3 [(2x^2 - 3xy) \cos(x^2 - 3xy) + \sin(x^2 - 3xy) 3]$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x)$$

$$= -(2x - 3y) \cos(x^2 - 3xy) (-3) + (-\sin(x^2 - 3xy) (-3))$$

$$f_{yx} = 3 [(2x^2 - 3xy) \cos(x^2 - 3xy) + \sin(x^2 - 3xy) 3]$$

(i) (2) விடும்போது

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$(3) \text{ If } U(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{xy} + 3z^2y$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ மற்றும் } \frac{\partial U}{\partial z}$$

ஈடுபடுத்தி,

$$U = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} + 3z^2y$$

$$U = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3z^2y$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y} + y \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 3z^2$$

$$= \frac{-x^2 + y^2}{xy^2} + 3z^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 + 0 + 3y(2z) = 6yz$$

$$(4) \text{ If } U(x,y,z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$$

எனில் $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}$ ஈடு காண்க,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3} \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3z^2}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

(5) வினாவுக்கு எளியதற்கு g_{xy}, g_{yx} g_{yy} மற்றும் g_{yx} ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$(i) g(x,y) = xe^y + 3x^2y$$

$$g_x = e^y + 3y(2x) = e^y + 6xy$$

$$g_y = xe^y + 3x^2$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = e^y + 6x$$

$$g_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (g_x) = 0 + 6y = 6y$$

$$g_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (g_y) = xe^y + 0 = xe^y$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = e^y + 6x$$

$$(ii) g(x,y) = \log(5x + 3y)$$

$$g_x = \frac{5}{(5x + 3y)}$$

$$g_y = \frac{3}{5x + 3y}$$

$$g_{xx} = 5 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(5)} = \frac{-25}{(5x+3y)^2} \quad (13)$$

$$g_{yy} = 3 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(3)} = \frac{-9}{(5x+3y)^2}$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = 5 \left(\frac{-1}{(5x+3y)^2} \right)^{(3)}$$

$$g_{yx} = \frac{-15}{(5x+3y)^2}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = 3 \left(\frac{-1}{(3y+5x)^2} \right)^{(5)}$$

$$g_{xy} = \frac{-15}{(5x+3y)^2}$$

$$(iii) g(x, y) = x^2 + 3xy - 7y + \cos 5x$$

$$g_x = 2x + 3y - 5 \sin 5x$$

$$g_y = 0 + 3x - 7 + 0 = 3x - 7$$

$$g_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (g_y) = 0$$

$$g_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (g_y) = 3(1) = 3$$

$$g_{xx} = 2 - 5 \cos 5x(5) = 2 - 25 \cos 5x$$

$$g_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (g_x) = 0 + 3 - 0 = 3$$

$$(6) w(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ என}$$

காட்டுக,

$$w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (2x)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -x \left(-\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2x) \right) + (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (-1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

இதேபோல,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= 0.$$

$$(7) v(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ காட்டுக.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y) + (x \cos y - y \sin y) (e^x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x [\cos y + x \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x (\cos y) + (\cos y + x \cos y - y \sin y) (e^x)$$

$$= e^x [\cos y + \cos y + x \cos y - y \sin y]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x [2 \cos y + x \cos y - y \sin y] \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x (-x \sin y - y \cos y - \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^x (-x \cos y + y \sin y - \cos y - \cos y) = e^x (-2 \cos y - x \cos y + y \sin y) \quad \text{--- (2)}$$

①-② ⇒

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = e^x [2\cancel{\cos y} + x\cancel{\cos y} - y\cancel{\sin y} - 2\cancel{\cos y} - x\cancel{\cos y} + y\cancel{\sin y}]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

⑧ $w(x,y) = xy + \sin(xy)$ எனில்

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + \cos xy (y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y (1 + \cos xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = y(0 - \sin xy (x)) + (1 + \cos xy) (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1 - xy \sin xy + \cos xy \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x + \cos xy (x) = x (1 + \cos xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = x(0 - \sin xy (y)) + (1 + \cos xy) (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1 - xy \sin xy + \cos xy \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①, ② லிருந்து } \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$9) v(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$\text{எனில் } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2 + 3xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 3z^2 + 3xy$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0 + 3x = 3x \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 3y^2 + 0 + 3xz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = 3x \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①, ② லிருந்து } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$$

⑩ ஒரு நிறுவனம் சுகாதாரம் கட்டும் இது விதமான கணிப்பாண்களை உற்பத்தி செய்கின்றது. அவற்றில் A வகை கணிப்பாண்கள் x எண்ணிக்கை யும், B வகை கணிப்பாண்கள் y எண்ணிக்கை யும், உற்பத்தி, வார வாரிய லாபம் செய்கிற சார்புகள் (நிபாயில் குறைபாடு)

$$R(x,y) = 80x + 90y + 0.04xy - 0.05x^2 - 0.05y^2$$

லாபம் $C(x,y) = 8x + 6y + 2000$ எனக் கொள்ள, தற்போதுள்ள,

புதுபயிற்சார்பு $P(x,y)$ ஐக் காண்க.

$$\text{ii) } \frac{\partial P}{\partial x}(1200, 1800) \text{ லாபம் } \frac{\partial P}{\partial y}(1200, 1800)$$

ஆகியவற்றை கண்டு முடிவுகளை விளக்க.

i) இலாபம் = விற்பனை - செலவு

$$P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$

$$= 80x + 90y + 0.04xy - 0.05x^2 - 8x - 6y - 2000 - 0.05y^2$$

$$P(x,y) = 72x + 84y + 0.04xy - 0.05x^2 - 0.05y^2 - 2000$$

$$\text{ii) } \frac{\partial P}{\partial x} = 72 + 0.04y - 0.05(2x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(1200, 1800) = 72 + 0.04(1800) - 0.1(1200)$$

$$= 72 + 72 - 120$$

$$= 24$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 84 + 0.04x - 0.05(2y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(1200, 1800) = 84 + 0.04(1200) - 0.1(1800)$$

$$= 84 + 48 - 180$$

$$= -48$$

$$(1200, 1800) \text{ ல் } \frac{\partial P}{\partial x} = 24 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -48$$

யு ஐ மாநிலியாக வைத்துக்
கொண்டு x ஐ அதிகரிக்கும்போது
இலாயம் அதிகரிக்கும்.

பல மாநிலிகள் கொண்டு சாப்பிட்டு
தேவிய தோறாய மதிப்பு மற்றும்
வகைகள்.

① தேவியல் தோறாய மதிப்பு
 (x_0, y_0) ல் $F(x, y)$ க்கு

$$L(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

② $F(x, y, z)$ ன் தேவியல் தோறாய
மதிப்பு (x_0, y_0, z_0) ன்
புள்ளியில்

$$L(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

③ F ன் வகைகள் $F = F(x, y)$
 $df = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$
இங்கு $dx = \Delta x, dy = \Delta y$

④ $F(x, y, z)$ ன் வகைகள்
 $df = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$
இங்கு $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$

பயிற்சி 8.5

① $w(x, y) = x^3 - 3xy + 2y^2, x, y \in \mathbb{R}$
எனில் $(1, -1)$ ல் w ன் தேவியல்
தோறாய மதிப்பு காண்க.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1, -1) = 3 + 3 = 6$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -3x + 4y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1, -1) = -3 - 4 = -7$$

$$w(1, -1) = 1^3 - 3(1)(-1) + 2(-1)^2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

தேவிய தோறாய மதிப்பு

$$L(x, y) = w(1, -1) + \frac{\partial w}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial w}{\partial y}(1, -1)(y + 1) = 6 + 6(x - 1) + (-7)(y + 1) = 6 + 6x - 6 - 7y - 7 = 6x - 7y - 7$$

② $z(x, y) = x^2y + 3xy^4, x, y \in \mathbb{R}$
எனில் $(2, -1)$ இல் z ன் தேவியல்
தோறாய மதிப்பு காண்க

$$z(2, -1) = 2^2(-1) + 3(2)(-1)^4 = -4 + 6 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, -1) = 2(2)(-1) + 3(-1)^4 = -4 + 3 = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2, -1) = 2^2 + 12(2)(-1)^3 = 4 - 24 = -20$$

தேவியல் தோறாய மதிப்பு

$$L(x, y) = z(2, -1) + \frac{\partial z}{\partial x}(2, -1)(x - 2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2, -1)(y + 1)$$

$$= 2 + (-1)(x - 2) + (-20)(y + 1) = 2 - x + 2 - 20y - 20 = -x - 20y - 16$$

$$L(x, y) = -(x + 20y - 16)$$

③ $v(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + 7, x, y \in \mathbb{R}$
எனில் வகைகள் dv ன் காண்க.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial v}{\partial y} = -x + \frac{y}{2}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$dv = (2x-y)dx + (-x+\frac{y}{2})dy$$

4) $V(x,y,z) = xy + yz + zx$,

$x, y, z \in \mathbb{R}$ எனில் வகையீடு dv காண்க.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y + 0 + z = y + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + z + 0 = x + z$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + y + x = x + y$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dv = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

ஆய்வுக் கல்வியில் 5) காண்க

2) $W(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$

$x, y, z \in \mathbb{R}$ எனில் $(2, -1, 0)$ என்ற புள்ளியில் W இன் திசையன் வேகம் காண்க.

சார்பினை சார்பு விதி

① $w = f(x, y)$, x, y என்னும் t ல் அமைந்த சார்புகளின்

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

② $w = f(x, y, z)$, $x = x(s, t)$
 $y = y(s, t)$ எனில்

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

பயிற்சி 8.6

i) சார்பு $u(x, y) = x^2y + 3xy^4$,
 $x = e^t$ மற்றும் $y = \sin t$, எனில்
 $\frac{du}{dt}$ இன் காண்க மூலம்

$t=0$ ல் அமைந்த சார்புகளின்

$$u = x^2y + 3xy^4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^4 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

$$x = e^t$$

$$y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)e^t + (x^2 + 12xy^3)\cos t$$

$$\frac{du}{dt} = (2e^t \sin t + 3 \sin^4 t)e^t + (e^{2t} + 12e^t \sin^3 t)\cos t$$

$t=0$ என பிரதியிட

$$\frac{du}{dt} = (2e^0 \sin 0 + 3 \sin^4 0)e^0 + (e^{2 \cdot 0} + 12e^0 \sin^3 0)\cos 0$$

$$= (0 + 0)1 + (1 + 0)1 = 0 + 1$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = 1}$$

② $u(x, y, z) = x^2y^2z^3$, $x = \sin t$,

$y = \cos t$, $z = 1 + e^{2t}$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

$$u = x^2y^2z^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy^2z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y^2z^2$$

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = 1 + e^{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dz}{dt} = 2e^{2t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= y^2z^3 \cos t + 2xy^2z^3(-\sin t) + 3x^2y^2z^2(2e^{2t})$$

$$= \cos^2 t (1 + e^{2t})^3 \cos t + 2 \sin t \cos^2 t (1 + e^{2t})^3 (-\sin t)$$

$$+ 3 \sin^2 t \cos^2 t (1 + e^{2t})^2 2e^{2t}$$

$$\frac{du}{dt} = (1 + e^{2t})^2 [\cos^3 t (1 + e^{2t}) - 2 \sin^2 t \cos^2 t (1 + e^{2t}) + 6e^{2t} \sin t \cos^2 t]$$

(17)

$$\frac{dw}{dt} = (1+e^{2t})^2 [\cos^2 t (1+e^{2t}) - \sin t \sin 2t (1+e^{2t}) + 6e^{2t} \sin t \cos t]$$

③ $w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t$
 $y = e^t \sin t$ மற்றும் $z = e^t \cos t$

எனில் $\frac{dw}{dt}$ ஐக் காண்க.

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2z$$

$$x = e^t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t \cos t + \sin t e^t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dz}{dt} = e^t (-\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= 2x e^t + 2y e^t (\cos t + \sin t) + 2z e^t (\cos t - \sin t)$$

$$= 2e^t [x + y(\cos t + \sin t) + z(\cos t - \sin t)]$$

$$= 2e^t [e^t + e^t \sin t (\cos t + \sin t) + e^t \cos t (\cos t - \sin t)]$$

$$= 2e^t e^t [1 + \sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t]$$

$$= 2e^{2t} [1 + 1]$$

$$\frac{dw}{dt} = 4e^{2t}$$

④ $U(x,y,z) = xyz$, $x = e^t$

$$y = e^t \cos t, \quad z = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{dU}{dt}$ ஐ காண்க.

$$U = xyz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = xy$$

$$x = e^t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t (-\sin t) + e^t (-1) \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= yz (-e^t) + xz (-e^t (\sin t + \cos t)) + xy \cos t$$

$$= e^t [-e^t \cos t \sin t + \sin t (-e^t (\sin t + \cos t)) + e^t \cos t \cos t]$$

$$= e^{2t} [-\sin t \cos t - \sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t]$$

$$= e^{2t} [(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2 \sin t \cos t]$$

$$= e^{2t} [\cos 2t - \sin 2t]$$

5) If $w(x,y) = 6x^3 - 3xy + 2y^2$,

$$x = e^s, \quad y = \cos s, \quad s \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{dw}{ds}$ ஐக் காண்க மற்றும் $s=0$ இல் அதன் மதிப்பைக் காண்க.

$$w = 6x^3 - 3xy + 2y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 18x^2 - 3y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -3x + 4y$$

$$x = e^s, \quad y = \cos s$$

$$\frac{dx}{ds} = e^s, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin s$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

$$= (18x^2 - 3y) e^s + (-3x + 4y) (-\sin s)$$

$$= (18e^{2s} - 3\cos s) e^s + (-3e^s + 4\cos s) (-\sin s)$$

$$\frac{dw}{ds} = 18e^{3s} - 3e^s \cos s - 4 \sin s \cos s + 3e^s \sin s$$

$z=0$ என பிரதியிட

$$\frac{dw}{ds} = 18e^0 - 3e^0 \cos 0 - 4 \sin 0 \cos 0 + 3e^0 \sin 0$$

$$= 18 - 3$$

$$\frac{dw}{ds} = 15$$

(6) $z(x, y) = x \tan^{-1}(xy)$

$$x = t^2, y = se^t, s, t \in \mathbb{R}$$

எனில் $\frac{\partial z}{\partial s}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial t}$ ஆகியன $s=t=1$ இல் மதிப்பிடுக.

$$z = x \tan^{-1}(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{1}{1+x^2y^2} y + \tan^{-1}(xy) (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{1}{1+x^2y^2} x$$

$$x = t^2 \quad y = se^t$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0, \frac{\partial x}{\partial t} = 2t \quad \frac{\partial y}{\partial s} = e^t \quad \frac{\partial y}{\partial t} = se^t$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \tan^{-1}(xy) \right) 0 + \frac{x^2}{1+x^2y^2} (e^t)$$

$$= \frac{x^2 e^t}{1+x^2y^2} = \frac{t^4 e^t}{1+t^4 e^{2t} s^2}$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1 \cdot e^1}{1+1 \cdot e^2} = \frac{e}{1+e^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{xy}{1+x^2y^2} + \tan^{-1}(xy) \right) 2t + \left(\frac{x^2}{1+x^2y^2} \right) se^t \quad \text{put } s=t=1 \text{ என பிரதியிட}$$

$$= \left(\frac{t^2 se^t}{1+t^4 s^2 e^{2t}} + \tan^{-1}(t^2 se^t) \right) 2t + \left(\frac{t^4}{1+t^4 s^2 e^{2t}} \right) se^t$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{e}{1+e^2} + \tan^{-1}(e) \right) 2 + \frac{1}{1+e^2} e$$

$$= \frac{2e}{1+e^2} + 2 \tan^{-1} e + \frac{e}{1+e^2}$$

(18)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{3e}{1+e^2} + 2 \tan^{-1} e,$$

(7) $U(x, y) = e^x \sin y$ எனக் கொண்டு

$$x = st^2, y = s^2 t, s, t \in \mathbb{R},$$

$\frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial t}$ காண்க. மற்றும் $s=t=1$ இல் அவற்றை மதிப்பிடுக.

$$U = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \sin y \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$x = st^2 \quad y = s^2 t$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = t^2, \frac{\partial x}{\partial t} = 2st, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2st, \frac{\partial y}{\partial t} = s^2$$

$$(i) \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= e^x \sin y (t^2) + e^x \cos y (2st)$$

$$= e^x (t^2 \sin y + 2st \cos y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = e^{st^2} (t^2 \sin s^2 t + 2st \cos s^2 t)$$

$s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial U}{\partial s} = e^1 (\sin 1 + 2 \cos 1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e (\sin 1 + \cos 1)$$

$$(ii) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= e^x \sin y (2st) + e^x \cos y (s^2)$$

$$= se^x (2t \sin y + s \cos y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = se^{st^2} (2t \sin s^2 t + s \cos s^2 t)$$

put $s=t=1$ என பிரதியிட

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e^1 (2 \sin 1 + \cos 1)$$

(8) $z(x, y) = x^3 - 3x^2 y^3$ எனக் கொண்டு

$$x = se^t, y = se^{-t}, s, t \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial z}{\partial s} \text{ மற்றும்}$$

$\frac{\partial z}{\partial t}$ க்கு காண்க

$$z = x^3 - 3x^2 y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy^3 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 9x^2 y^2$$

$$x = se^t$$

$$y = se^{-t}$$

(19)

$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^t, \frac{\partial x}{\partial t} = se^t, \frac{\partial y}{\partial s} = e^{-t}, \frac{\partial y}{\partial t} = -se^t$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (3x^2 - 6xy^3)e^t + (-9x^2y^3)e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3s^2e^{2t} - 6se^t s^3e^{-3t})e^t \\ &\quad + (-9s^2e^{2t} s^2e^{-2t})e^{-t} \\ &= 3s^2e^t (e^{2t} - 2e^{-2t} s^2 - 3s^2e^{-2t}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 3s^2e^t (e^{2t} - 5e^{-2t} s^2)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (3x^2 - 6xy^3)se^t + (-9x^2y^3)(-se^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3s^2e^{2t} - 6se^t s^3e^{-3t})se^t \\ &\quad + 9s^2e^{2t} s^2e^{-2t} se^t \\ &= (3s^2e^{2t} - 6s^4e^t e^{-3t})se^t + 9s^5e^t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 3s^3e^{3t} + 3s^5e^t$$

$$9) w(x, y, z) = xy + yz + zx$$

$$x = u - v, y = uv, z = u + v$$

$$u, v \in \mathbb{R} \text{ எனில் } \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} \text{ காண்க}$$

மற்றும் $(\frac{1}{2}, 1)$ இல் அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$w = xy + yz + zx$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + z, \frac{\partial w}{\partial y} = x + z, \frac{\partial w}{\partial z} = y + x$$

$$x = u - v, y = uv, z = u + v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \frac{\partial y}{\partial u} = v, \frac{\partial y}{\partial v} = u, \frac{\partial z}{\partial u} = 1, \frac{\partial z}{\partial v} = 1$$

$$\text{ii) } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= (y+z)(1) + (x+z)v + (y+x)1$$

$$\begin{aligned} &= (uv + uv) + (u - v + uv)v + (uv + uv) \\ &= 2uv + 2u + 2uv \\ &= 4uv + 2u \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2u(2v + 1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}(\frac{1}{2}, 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} (2 + 1) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= (y+z)(-1) + (x+z)u + (y+x)1 \end{aligned}$$

$$= -y - z + (x+z)u + y + x$$

$$\begin{aligned} &= -u - v + (u - v + uv)u + u - v \\ &= -2v + (2u)u \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 2(u^2 - v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial v}(\frac{1}{2}, 1) &= 2(\frac{1}{4} - 1) = \frac{1}{2} - 2 \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

சமபடித்தான சார்புகள் மற்றும் ஆய்லரின் சததந்தம்

① F என்பது ஒரு சமபடித்தான சார்பு எனில்

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^P F(x, y)$$

அல்லது

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^P F(x, y, z)$$

இந்த P என்பது சார்பு F இன் படி என்பதும்.

② ஆய்லரின் சததந்தம்

F என்பது A ல் சமபடித்தான சார்பு P படி 2-தடவது எனில்

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = Pf$$

(20)

பயிற்சி 8.7

i) பின்வரும் ஒவ்வொரு சார்பும்
சமபடித்தானதா இல்லையா எனக்
கண்டு சமபடித்தானது எனில்
அதன் படிமையம் காண்க.

$$(i) f(x, y) = x^2y + 6x^3 + 7$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^2 \lambda y + 6(\lambda x)^3 + 7$$

$$= \lambda^3 x^2 y + 6\lambda^3 x^3 + 7$$

λ^3 ஐ மூலக்கூறுகளாக எண்ணிய
சமபடி இயல்பு

$\therefore f$ சமபடி சமபடித்தான சார்பு
அல்ல.

$$(ii) h(x, y) = \frac{6x^2y^3 - 11y^5 + 9x^4y}{2020x^2 + 2019y^2}$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = \frac{6\lambda^2 x^2 \lambda^3 y^3 - 11\lambda^5 y^5 + 9\lambda^4 x^4 \lambda y}{2020\lambda^2 x^2 + 2019\lambda^2 y^2}$$

$$= \frac{\lambda^5 (6x^2y^3 - 11y^5 + 9x^4y)}{\lambda^2 (2020x^2 + 2019y^2)}$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 h(x, y)$$

$h(x, y)$ சமபடி மூல 3 மூல
சமபடித்தான சார்பு ஆகும்.

$$(iii) g(x, y, z) = \frac{\sqrt{3x^2 + 5y^2 + z^2}}{4x + 7y}$$

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{\sqrt{3\lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2}}{4\lambda x + 7\lambda y}$$

$$= \frac{\lambda (\sqrt{3x^2 + 5y^2 + z^2})}{\lambda (4x + 7y)}$$

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^0 g(x, y, z)$$

g சமபடி மூல $n=0$ மூல
சமபடித்தான சார்பு ஆகும்.

$$(iv) u(x, y, z) = xy + \sin\left(\frac{y^2 - 2z^2}{xy}\right)$$

$$u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 xy + \sin\left(\frac{\lambda^2 y^2 - 2\lambda^2 z^2}{\lambda^2 xy}\right)$$

$$= \lambda^2 xy + \sin\left(\frac{y^2 - 2z^2}{xy}\right)$$

இதில் 2 மூல λ^2 ஐ மூலக்கூறுகளாக

எண்ணிய சமபடி இயல்பு

சமபடி u சமபடி சமபடித்தான சார்பு
அல்ல.

$$2) f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3$$

சமபடி சார்பு சமபடித்தானது சமபடித்தானது,
 f மூல மூல கணக்கிட f மூல
ஆய்வு மூல கணக்கிட சமபடித்தானது.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 \lambda y + 3\lambda^3 x \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 y + 3\lambda^3 x y^2 + \lambda^3 y^3$$

$$= \lambda^3 (x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$$

f சமபடி மூல $n=3$ மூல
சமபடித்தான சார்பு, ஆய்வு மூல கணக்கிட

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

சமபடித்தானது

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + 3y^2$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2x^2 + 6xy + 3y^2$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 6xy^2 + 3y^3 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2$$

$$- 2x^2y + 6xy^2 + 3y^3$$

$$= 3x^3 - 6x^2y + 9xy^2 + 3y^3$$

$$= 3(x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

சமபடித்தானது

③ $g(x, y) = x \log\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில் காண்பது
 சமவெக்தாண சாப்து, g ன்
 படிதய கணம்மிட்டு g ன் ஆய்லின்
 கதற்குதத சரிபார்க்க,

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \log\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$= \lambda \left(x \log \frac{y}{x}\right)$$

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda' g(x, y)$$

g எனபது படி $n=1$ ன் சமவெக்தாண
 சாப்து யுலின் கதற்குப்படி

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = 1g$$

சரிபார்க்கல்

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x \left(\log \frac{y}{x}\right)' + \log\left(\frac{y}{x}\right) (x)'$$

$$= x \frac{1}{y/x} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \log \frac{y}{x} (1)$$

$$= -\frac{x}{y} \left(\frac{y}{x^2}\right) + \log \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -1 + \log \frac{y}{x}$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} = -x + x \log \frac{y}{x} \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \frac{1}{y/x} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{y}$$

$$y \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①+②} \Rightarrow x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = -x + x \log \frac{y}{x} + x$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = 1g$$

யுலின்
 கதற்கு சரிபார்க்கப்பட்டது.

$$\text{④ } u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x+y}} \text{ எனில்}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u \text{ என நிறுவுக,}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}}$$

$$= \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^{1/2} (\sqrt{x+y})}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{3/2} u(x, y)$$

u எனபது படி $n=3/2$ ன் சமவெக்தாண சாப்து

யுலின் கதற்குப்படி

$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u //$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} u //$$

$$\text{⑤ } v(x, y) = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x+y}\right) \text{ எனில்}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \text{ என நிறுவுக}$$

சுதறு-I

v எனபது ஒரு சமவெக்தாண சாப்து

$$\text{அல்ல, } v = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{x+y}\right)$$

எதிர்மடக்கை எடுக்க

$$e^v = \frac{x^2 + y^2}{x+y} = u \text{ என்க}$$

$$u(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda (x+y)}$$

$$= \lambda' u(x, y)$$

u எனபது படி $n=1$ ன் சமவெக்தாண சாப்து

யுலின் கதற்குப்படி

$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1 u$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1 u$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} (e^v) + y \frac{\partial}{\partial y} (e^v) = 1 e^v$$

$$x e^v \frac{\partial v}{\partial x} + y e^v \frac{\partial v}{\partial y} = e^v$$

e^v ஆல் வகுக்க

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

சுதறு-II

$$v = \log (x^2 + y^2) - \log (x+y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x - \frac{1}{x+y}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x+y}$$

இதேபோல

(22)

$$y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{y}{x+y}$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} - \frac{x+y}{x+y}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} - 1 = 2-1$$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

நிறுவப்பட்டது.

$$⑥ w(x,y,z) = \log \left(\frac{5x^3y^4 + 7y^2xz^4 - 75y^3z^4}{x^2+y^2} \right)$$

$$\text{எனில் } x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z}$$

ஐக் காண்க.

w என்பது ஒரு சமஸுத்தான

சார்பு அல்ல

$$w = \log \left(\frac{5x^3y^4 + 7y^2xz^4 - 75y^3z^4}{x^2+y^2} \right)$$

எதிர்ப்புக்காக எடுக்க.

$$e^w = \frac{5x^3y^4 + 7y^2xz^4 - 75y^3z^4}{x^2+y^2}$$

என்க

$$u(x,y,z) = \frac{\lambda^7 (5x^3y^4 + 7y^2xz^4 - 75y^3z^4)}{\lambda^2 (x^2+y^2)}$$

$$u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^5 (u(x,y,z))$$

u என்பது n=5 ஐ உடைய

சமஸுத்தான சார்பு ஆகும்.

யுள்ளித் தேற்றப்படி

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 5u$$

$u = e^w$ என பிரதியிட

$$x \frac{\partial (e^w)}{\partial x} + y \frac{\partial (e^w)}{\partial y} + z \frac{\partial (e^w)}{\partial z} = 5e^w$$

$$x e^w \frac{\partial w}{\partial x} + y e^w \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} e^w = 5e^w$$

e^w ஆல் வகுக்க

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 5 //$$

—X—

Dr. கார்த்திகேயன்
திருவாரூர் மாவட்டம்

9715634957

9. தொலை நுண் கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

ரிமான் தொலைநுண்

இடது குறை வகிதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] \Delta x$$

வலது குறை வகிதி

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)] \Delta x$$

நடு குறை வகிதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \dots + f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})] \Delta x$$

பயிற்சி-9.1

1) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும் பிரிவினையுடன் இடது குறை வகிதியை பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x dx$ க்கு தொராய

மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \\ x_4=1.4 \quad x_5=1.5$$

$$\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

இடது குறை வகிதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_4)] \Delta x$$

$$\int_1^{1.5} x dx \approx [f(1) + f(1.1) + f(1.2) + f(1.3) + f(1.4)] 0.1 \\ = (1 + 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.4) 0.1 \\ = 6 \times 0.1$$

$$\int_1^{1.5} x dx = 0.6$$

② $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும்

பிரிவினையுடன் வலது குறை வகிதியை பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x^2 dx$

க்கு தொராய மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3 \quad x_4=1.4 \\ x_5=1.5$$

$$\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$$

வலது குறை வகிதி

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_5)] \Delta x$$

$$\approx [f(1.1) + f(1.2) + f(1.3) + f(1.4) + f(1.5)] 0.1$$

$$\approx [1.1^2 + 1.2^2 + 1.3^2 + 1.4^2 + 1.5^2] 0.1$$

$$= [1.21 + 1.44 + 1.69 + 1.96 + 2.25] 0.1 \\ = 8.55 \times 0.1$$

$$\int_1^{1.5} x^2 dx \approx 0.855$$

3) $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ எலும் பிரிவினையுடன் நடு குறை வகிதியை பயன்படுத்தி

$\int_1^{1.5} (2-x) dx$ க்கு தொராய மதிப்பு காண்க.

$$n=5$$

$$x_0=1 \quad x_1=1.1 \quad x_2=1.2 \quad x_3=1.3$$

$$x_4=1.4 \quad x_5=1.5 \quad \Delta x = 0.1$$

$$f(x) = 2-x$$

நடு குறை வகிதி.

$$\int_a^b f(x) dx \approx [f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \dots + f(\frac{x_4+x_5}{2})] \Delta x$$

$$\approx [f(\frac{1+1.1}{2}) + f(\frac{1.1+1.2}{2}) + f(\frac{1.2+1.3}{2}) + f(\frac{1.3+1.4}{2}) + f(\frac{1.4+1.5}{2})] 0.1$$

$$\approx [f(1.05) + f(1.15) + f(1.25) + f(1.35) + f(1.45)] 0.1$$

$$= [(2-1.05) + (2-1.15) + (2-1.25) + (2-1.35) + (2-1.45)] 0.1$$

$$= [0.95 + 0.85 + 0.75 + 0.65 + 0.55] 0.1 \\ = 0.375$$

$\int_a^b f(x) dx$ ஐ மதிப்பிட எல்லைக் குத்தி

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f(a + (b-a)\frac{r}{n})$$

$a=0, b=1$ எனில்

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

பயிற்சி 9.2

- i) கீழ்க்காணும் தொகையீடுகளை கூட்டலின் எல்லைகளாகக் காண்க.

ii) $\int_0^1 (5x+4) dx$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$f(x) = 5x+4$$

$$f\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{5r}{n} + 4$$

$$\sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right) = \sum_{r=1}^n \frac{5r}{n} + 4$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{5r}{n} + \sum_{r=1}^n 4$$

$$= \frac{5}{n} \sum_{r=1}^n r + 4 \sum_{r=1}^n 1$$

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{5}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 4n$$

$$\leq 1 = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5n(n+1)}{2} + 4n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 4$$

$$= \frac{5}{2} (1+0) + 4 = \frac{5}{2} + 4$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\int_0^1 (5x+4) dx = \frac{13}{2}$$

எளிதானதால் $\int_0^1 (5x+4) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x \right]_0^1$
 $= \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$

(ii) $\int_1^2 (4x^2-1) dx$ $a=1$
 $b=2$
 $f(x) = 4x^2-1$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$f(x) = 4x^2-1$$

$$f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = 4\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 - 1$$

$$= 4\left(1 + \frac{r^2}{n^2} + \frac{2r}{n}\right) - 1$$

$$\sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = 4 \sum_{r=1}^n \left(1 + \frac{r^2}{n^2} + \frac{2r}{n}\right) - \sum_{r=1}^n 1$$

$$= 4 \sum_{r=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{r=1}^n r^2 + \frac{8}{n} \sum_{r=1}^n r - \sum_{r=1}^n 1$$

$$= 4n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= 3n + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} (n+1)(2n+1) + 4(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f\left(1 + \frac{r}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(3n + \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{n})(2n+1) + 4(n+1) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= 3 + \frac{2}{3} (1+0)(2+0) + 4(1+0)$$

$$= 3 + \frac{4}{3} + 4 = \frac{25}{3}$$

எளிதானதால்

$$\int_1^2 (4x^2-1) dx = \left[\frac{4x^3}{3} - x \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 2 \right) - \left(\frac{4}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{28}{3} - 1 = \frac{25}{3}$$

முதல் தொகை முண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்

$f(x)$ எல்லை $[a, b]$ எல்லையில்

இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையீடு $F(x) = \int_a^x f(u) du$

$a < x < b$ எனில் $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ (3)

i.e $F(x)$ ஆனது $f(x)$ ன் அநிர்வகையர் ஆகும்.

இரண்டாம் தொடரக நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம்.

$f(x)$ என்கு $[a, b]$ ல் வரையறுக்கப் பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் $F(x)$ ஆனது $f(x)$ ன் அநிர்வகையர் எனில்,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

பண்புகள்

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du \quad a < b$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

இங்கு $a < c < b$

$$4) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

α, β மாறிலிகள்

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$6) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$7) \int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(2a-x)) dx$$

$$8) f(x) \text{ ஒரு இரட்டை சார்பு எனில்}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$9) f(x) \text{ ஒரு ஒற்றை சார்பு எனில்}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

10) $f(2a-x) = f(x)$ எனில்

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

11) $f(2a-x) = -f(x)$ எனில்

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0$$

$$12) \int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

இங்கு $f(a-x) = f(x)$ எனும்பொழுது.

பயிற்சி 9.3

i) பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காண்க.

$$1) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$$

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$$

$$= \left[\frac{1}{2(2)} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_3^4 \quad \left[\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{4-2}{4+2} \right| - \log \left| \frac{3-2}{3+2} \right| \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \frac{2}{6} - \log \frac{1}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{2}{6} \times \frac{5}{1}$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{5}{3}$$

$$(ii) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} \quad I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4$$

$$= (x+1)^2+2^2$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2^2+(x+1)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} \right]_{-1}^1 \quad \left[\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{1+1}{2} - \tan^{-1} \frac{-1+1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi}{8}$$

$$(iii) I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$x = \sin t$ எனில்

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$dx = \cos t dt$$

$x=0$ எனில் $t=0$

$x=1$ எனில் $t=\pi/2$

x	0	1
t	0	$\pi/2$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}} dt \cos t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin t} \times \sqrt{1-\sin t}}{\sqrt{1+\sin t} \sqrt{1-\sin t}} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin t)^2}{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin t}{\cos t} \cos t dt$$

$$= [t + \cos t]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - (0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$(iv) I = \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{2} \right) dx$$

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + C$$

$$= \left[e^x \tan \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= e^{\pi/2} \tan \frac{\pi}{4} - e^0 \tan 0$$

$$= e^{\pi/2}$$

$$(4) (v) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \sin^3 \theta d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$\cos \theta = t$ எனில்

$$-\sin \theta d\theta = dt$$

$$\sin \theta d\theta = -dt$$

$\theta=0$ எனில்

$$t = \cos 0 = 1$$

$\theta = \pi/2$ எனில்

$$t = 0$$

θ	0	$\pi/2$
t	1	0

$$I = \int_1^0 t^{1/2} (1-t^2) (-dt)$$

$$= \int_1^0 \left(t^{1/2} - t^{5/2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{7/2}}{7/2} \right]_1^0 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \right) - 0$$

$$= \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$$

$$(vi) \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$x = \tan \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$x=0$ எனில்

$$\tan \theta = 0$$

$\theta=0$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$x=1$ எனில்

$$\tan \theta = 1$$

$\theta = \pi/4$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan^2 \theta}{(1+\tan^2 \theta)^2} \sec^2 \theta d\theta$$

x	0	1
θ	0	$\pi/4$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan^2 \theta}{(\sec^2 \theta)^2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sec^2 \theta} - \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$$

(5)

② பின்வரும் வரையறுத்த

தொகையிடல்களை, தொகையிடலின்
பண்புகளை பயன்படுத்தி மதிப்பு
காண்க.

$$(i) I = \int_{-5}^5 x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx.$$

$$f(x) = x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$$f(-x) = -x \cos\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{-(e^x-1)}{e^x+1}\right)$$

$$= -x \cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$f(x)$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\therefore I = 0.$$

$$(ii) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1) dx$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1) dx$$

$$f(x) = x^5 + x \cos x + \tan^3 x + 1$$

$$f(x) \text{ ல் } x^5, x \cos x, \tan^3 x$$

இவை ஒற்றைச் சார்புகள்

இவற்றின் தொகைகள் = 0

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^5 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan^3 x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx$$

$$I = 0 + 0 + 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx$$

$$= \left[x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2}$$

$$I = \pi$$

$$(iii) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x dx.$$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x dx$$

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f(-x) = \sin^2(-x) = \sin^2 x = f(x)$$

$f(x)$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx.$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1 - \cos 2x}{2} \right] dx$$

$$= \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{2} \right] - (0 - 0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$(iv) I = \int_0^{2\pi} x \log \left(\frac{3 + \cos x}{3 - \cos x} \right) dx$$

$$f(x) = \log \left(\frac{3 + \cos x}{3 - \cos x} \right)$$

$$f(2\pi - x) = \log \left(\frac{3 + \cos(2\pi - x)}{3 - \cos(2\pi - x)} \right)$$

$$= \log \left(\frac{3 + \cos x}{3 - \cos x} \right)$$

$$f(2\pi - x) = f(x)$$

$$\int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

$$a = 2\pi$$

$$f(a-x) = f(x) \text{ எனில்}$$

$$I = \frac{2\pi}{2} \int_0^{2\pi} \log \left(\frac{3 + \cos x}{3 - \cos x} \right) dx$$

$$I = 2\pi \int_0^{\pi} \log \left(\frac{3 + \cos x}{3 - \cos x} \right) dx$$

$$\left[\because \int_0^{2\pi} g(\cos x) dx = 2 \int_0^{\pi} g(\cos x) dx \right]$$

$$I = 2 \int_0^{\pi} \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right) dx$$

$$f(x) = \log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(\pi-x) = \log \left(\frac{3+\cos(\pi-x)}{3-\cos(\pi-x)} \right)$$

$$= \log \left(\frac{3-\cos x}{3+\cos x} \right)$$

$$= -\log \left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x} \right)$$

$$f(\pi-x) = -f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x) dx = 0$$

$$f(2a-x) = -f(x)$$

$$I = 0$$

$$(v) \quad I = \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(2\pi-x) = (\sin(2\pi-x))^4 (\cos(2\pi-x))^3$$

$$= (-\sin x)^4 (\cos x)^3$$

$$= \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(2\pi-x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$I = 2 \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(\pi-x) = \sin^4(\pi-x) (\cos(\pi-x))^3$$

$$= \sin^4 x \cos^3 x$$

$$f(\pi-x) = f(x)$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0 \quad f(2a-x) = f(x)$$

$$I = 0$$

$$(vi) \quad \int_0^1 |5x-3| dx$$

$$|5x-3| = \begin{cases} (5x-3) & 5x-3 > 0 \text{ or } x > \frac{3}{5} \\ -(5x-3) & (5x-3) \leq 0 \text{ or } x \leq \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x-3 & x > \frac{3}{5} \\ -(5x-3) & x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 |5x-3| dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{5}} -(5x-3) dx + \int_{\frac{3}{5}}^1 (5x-3) dx$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{(5x-3)^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{5} \left[\frac{(5x-3)^2}{2} \right]_{\frac{3}{5}}^1$$

$$= -\frac{1}{10} [0 - (-3)^2] + \frac{1}{10} [2^2 - 0]$$

$$= -\frac{1}{10} (-9) + \frac{4}{10} = \frac{9+4}{10}$$

$$= \frac{13}{10}$$

$$(vii) \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$\sqrt{f} = \sin x \cos x$$

$$t = \sin^2 x$$

$$dt = 2 \sin x \cos x dx$$

$$dt = \sin 2x dx$$

$$t=0 \quad \sin^2 0 = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$t=\sin^2 x \quad \sin^2 0 = \sin^2 x \quad 0=x$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} t \sin 2x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

$$t = \cos^2 x$$

$$\sqrt{f} = \cos x$$

$$dt = -2 \sin x \cos x dx$$

$$t=0 \quad \cos^2 0 = 0$$

$$t=\cos^2 x \Rightarrow 0=\pi/2$$

t	0	$\cos^2 x$
0	$\pi/2$	x

$$I_2 = \int_{\pi/2}^x -\theta \sin 2\theta d\theta$$

$$I = \int_0^x \theta \sin 2\theta d\theta - \int_{\pi/2}^x \theta \sin 2\theta d\theta$$

$$= \int_0^x \theta \sin 2\theta d\theta + \int_x^{\pi/2} \theta \sin 2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \sin 2\theta d\theta}{u \quad dv}$$

$$u = \theta \quad dv = \sin 2\theta d\theta$$

$$u' = 1 \quad v = \int \sin 2\theta d\theta$$

$$= \left[uv - u'v_1 + \dots \right]_0^{\pi/2} \quad v = -\frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$v_1 = -\frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$= \left[\theta \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) - 1 \left(-\frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos \pi}{2} \right) + 0 \right] - \left[0 + 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

மாற்றி மாற்றி

விதிக்கிட்டு காட்டுக

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right] = \left\{ \frac{d}{dx} (\psi(x)) \right\} f(\psi(x))$$

$$- \left\{ \frac{d}{dx} (\phi(x)) \right\} f(\phi(x))$$

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \sin^2 \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^2 \sqrt{t} dt \quad \text{--- (1)}$$

விதிக்கிட்டு காட்டுக

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (\sin^2 x) \sin^2 \sqrt{\sin^2 x} - 0$$

$$+ \frac{d}{dx} (\cos^2 x) \cos^2 \sqrt{\cos^2 x} - 0$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot (x) + 2 \cos x (-\sin x) \cdot x$$

$$= x \sin 2x - x \sin 2x$$

$$f'(x) = 0$$

தொடர்ச்சியில் $f(x) = c$
 i.e $f(x)$ ஒரு மாறாத மாறாது
 எனவே $f(\pi/4) = c$ என
 காட்டுக

⑦

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{t} dt + \int_0^{\sqrt{x}} \cos \sqrt{t} dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} (\sin \sqrt{t} + \cos \sqrt{t}) dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{2} [t]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{x}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$(viii) \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$x = \tan t \quad \text{or} \quad \sin t$$

$$dx = \sec^2 t dt$$

$$x=0 \Rightarrow \tan t=0 \quad t=0$$

$$x=1 \quad \tan t=1 \quad t=\pi/4$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan t) \sec^2 t dt}{1+\tan^2 t}$$

x	0	1
t	0	$\pi/4$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan t) \sec^2 t dt}{\sec^2 t}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan t) dt \quad \text{--- (1)}$$

$$f(t) = 1 + \tan t$$

$$a = \pi/4 \quad f(\pi/4 - t) = \log(1 + \tan(\pi/4 - t))$$

$$= \log \left(1 + \frac{\tan \pi/4 - \tan t}{1 + \tan \pi/4 \tan t} \right)$$

$$= \log \left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right)$$

$$= \log \left(\frac{1 + \tan t + 1 - \tan t}{1 + \tan t} \right)$$

$$f(\pi/4 - t) = \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right)$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) dt \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow I + I = \int_0^{\pi/4} \left(\log(1 + \tan t) + \log \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) \right) dt$$

$$2I = \int_0^{\pi/4} \left(\log(1 + \tan t) \times \frac{2}{1 + \tan t} \right) dt$$

$$2I = \int_0^{\pi/4} \log 2 \, dt$$

$$2I = \log 2 \left[t \right]_0^{\pi/4}$$

$$I = \frac{1}{2} \log 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right]$$

$$I = \frac{\pi}{8} \log 2$$

$$(ix) I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

$$a = \pi$$

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1 + \sin x} = f(x)$$

$$f(\pi - x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^a x f(x) \, dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) \, dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \tan^2 x) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - (\sec^2 x - 1)) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\sec x - \tan x + x \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(\sec \pi - \tan \pi + \pi) - (\sec 0 - \tan 0 + 0) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(-1 - 0 + \pi) - (1 - 0) \right]$$

$$I = \frac{\pi}{2} [\pi - 2]$$

(8)

$$(x) \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} \, dx$$

$$= \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}} \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \, dx \quad \text{--- (1)}$$

$$a = \pi/8 \quad b = 3\pi/8 \quad a + b = \frac{4\pi}{8} = \pi/2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a + b - x) \, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx \quad \text{--- (2)}$$

① + ②

$$I + I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} 1 \, dx$$

$$2I = \left[x \right]_{\pi/8}^{3\pi/8} = \left[\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right]$$

$$2I = \frac{2\pi}{8} \quad I = \frac{\pi}{8}$$

(xi)

$$I = \int_0^{\pi} x (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)) \, dx$$

$$f(x) = \sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)$$

$$a = \pi \quad f(a - x) = f(\pi - x)$$

$$= \sin^2 \sin(\pi-x) + \cos^2 \cos(\pi-x) \quad (9)$$

$$= \sin^2 \sin x + \cos^2 (-\cos x)$$

$$= \sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x$$

$$f(a-x) = f(x)$$

$$\therefore \int_0^a x f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} [\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)] dx$$

மேலும்

$$f(2a-x) = f(x) \text{ எனில்}$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$2a = \pi$$

$$a = \pi/2$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x) dx \quad \text{--- ①}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) + \cos^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$= \sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x) dx \quad \text{--- ②}$$

①, ② க்கு கூட்ட

$$I + I = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \sin x + \cos^2 \cos x + \sin^2 \cos x + \cos^2 \sin x) dx$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi/2} (1+1) dx$$

$$2I = 2\pi \left[x \right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \pi \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

பெர்னாலி. சூத்திரம்

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

பயிற்சி 9.4

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக,

$$1) \int_0^1 x^3 e^{-2x} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{u} \frac{e^{-2x}}{dv}$$

$$u = x^3$$

$$dv = e^{-2x}$$

$$v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$u' = 3x^2$$

$$v_1 = \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$u'' = 6x$$

$$v_2 = -\frac{1}{8} e^{-2x}$$

$$u''' = 6$$

$$v_3 = \frac{1}{16} e^{-2x}$$

$$u^{iv} = 0$$

$$I = \int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

$$I = \left[x^3 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - 3x^2 \frac{1}{4} e^{-2x} + 6x \left(-\frac{1}{8} \right) e^{-2x} - 6 \frac{1}{16} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$= \left[-\frac{e^{-2}}{2} - \frac{3}{4} e^{-2} - \frac{6}{8} e^{-2} - \frac{6}{16} e^{-2} \right] - \left[0 + 0 + 0 - \frac{6}{16} e^0 \right]$$

$$= -e^{-2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \right] + \frac{3}{8}$$

$$= -e^{-2} \left[\frac{4+6+6+3}{8} \right] + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} - e^{-2} \frac{19}{8}$$

$$= \frac{1}{8} (3 - 19e^{-2})$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{\sin(3 \tan^{-1} x) \tan^{-1} x}{1+x^2} dx$$

$$\tan^{-1} x = t \text{ எனில்}$$

$$x=0 \quad t = \tan^{-1} 0 = 0$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt$$

$$x=1 \quad t = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

x	0	1
t	0	$\pi/4$

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin 3t (t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{t}{u} \frac{\sin 3t}{dv}$$

$$u = t$$

$$dv = \sin 3t dt \quad (10)$$

$$v = -\frac{\cos 3t}{3}$$

$$u' = 1$$

$$v_1 = -\frac{1}{9} \sin 3t$$

$$u'' = 0$$

$$-$$

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \dots$$

$$I = \left[t \left(-\frac{1}{3} \cos 3t \right) - 1 \left(-\frac{1}{9} \sin 3t \right) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \right] - [0 + 0]$$

$$= -\frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{9} \right)$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos 135^\circ = \cos (180 - 45)$$

$$= -\cos 45$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3) I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x} \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\sin^{-1}x = t \text{ எனில்}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$$

$$x=0 \Rightarrow$$

$$t = \sin^{-1}0 = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} e^t t dt$$

x	0	1/√2
t	0	π/4

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{t}{u} \frac{e^t dt}{dw}$$

$$u = t$$

$$dw = e^t dt$$

$$v = e^t$$

$$u' = 1$$

$$v_1 = e^t$$

$$u'' = 0$$

$$I = uv - u'v_1 - \dots$$

$$= \left[t e^t - 1 e^t \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} e^{\pi/4} - e^{\pi/4} \right) - (0 - 1)$$

$$I = e^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + 1$$

$$4) I = \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{u} \frac{\cos 2x dx}{dw}$$

$$u = x^2 \quad dv = \cos 2x dx$$

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$u' = 2x$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$$

$$u'' = 2$$

$$v_2 = -\frac{\sin 2x}{8}$$

$$u''' = 0$$

$$I = \left[x^2 \frac{1}{2} \sin 2x - 2x \left(-\frac{1}{4} \cos 2x \right) + 2 \left(-\frac{1}{8} \sin 2x \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} (-1) - 0$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

முதல்படி நெகரிப்புகள்

பயிற்சி 9.5

$$10) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 5 \right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 5} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan^2 x + 5} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{6 + \tan^2 x} dx$$

$$\tan x = t \text{ எனில்}$$

$$\sec^2 x dx = dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=\tan 0=0$$

$$x=\pi/2 \Rightarrow t=\tan \pi/2=\infty$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{6+t^2}$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

$$a^2=6$$

$$a=\sqrt{6}$$

இது முறையற்ற தொலைகையில்

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{6}} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0] = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5\sec^2 x + 4\tan^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5(1+\tan^2 x) + 4\tan^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x dx}{5+9\tan^2 x}$$

$\tan x = t$ என்க

$$\sec^2 x dx = dt$$

$$x=0 \quad t=0$$

$$x=\pi/2 \quad t=\tan \pi/2 = \infty$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{5+9t^2}$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

இது முறையற்ற தொலைகையில்

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{9 \left(\frac{5}{9} + t^2 \right)} dt = \frac{1}{9} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 + t^2}$$

$$a = \sqrt{5}/3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\frac{1}{9} \frac{\pi}{2\sqrt{5}/3}$$

$$I = \frac{\pi}{6\sqrt{5}}$$

குறையற்ற நுழைதிறங்கள்

(i) n இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒற்றை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3}$$

$$(2) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n)!}$$

m, n மிகைக்குறிகள்

3)

(i) n இரட்டை, m இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \dots \frac{1}{m+2}$$

$$\cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ஒரு ஒற்றை, m இரட்டை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \dots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1}$$

(iii) n இரட்டை m ஒற்றை எண் எனில்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx =$$

$$= \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{m-3}{m+n-2} \dots \frac{2}{n+3} \cdot \frac{1}{n+1}$$

பயிற்சி 9.6

1) பின்வரும் தொலைக்காட்சி மாதிரிப்புகள்.

$$(i) I = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

n=10 இரட்டை எண்

$$I = \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{63\pi}{512}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$$

n=7 (odd) ஒற்றை எண்

$$I = \frac{6^2}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$(iii) I = \int_0^{\pi/4} \sin^6 2x dx$$

2x=t என்க

$$2dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$x=0 \quad t=0$$

$$x=\pi/4 \quad t=2\pi/4=\pi/2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt$$

n=6 இரட்டை எண்

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{64}$$

$$(iv) I = \int_0^{\pi/6} \sin^5 3x dx$$

3x=t என்க

$$3dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{3}$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=\pi/6 \Rightarrow t=\pi/2$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt$$

n=5 ஒற்றை எண்

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{45}$$

(12)

$$(v) I = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$$

$$m=2 \quad n=4$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{4-1}{2+4} \times \frac{4-3}{2+4-2} \times \frac{2-1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

தொலைக்காட்சி

$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{16} \left[1 - \frac{5}{6} \right] = \frac{3\pi}{16} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{32}$$

$$(vi) I = \int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4} dx$$

$$\frac{x}{4} = t \text{ என்க}$$

$$dx = 4dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=2\pi \Rightarrow t=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t dt$$

n=7 ஒற்றை எண்

$$= 4 \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{64}{35}$$

$$(vii) I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^5 \theta d\theta$$

m=3 n=5 ஒற்றை எண்

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1}$$

(13)

$$= \frac{5-1}{3+5} \frac{5-3}{3+5-2} \times \frac{1}{3+1}$$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$(viii) I = \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

$$m=2 \quad n=3$$

$$I = \frac{2! \times 3!}{(2+3+1)!} = \frac{2 \times 6}{6!} = \frac{2 \times 6}{6 \times 5!}$$

$$= \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

கனம் தொழக்கயிடல்

$$(1) \int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$a=1$ எனில்

$$(2) \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$$

$$(3) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)! = n!$$

$$(கனம் n) n = (n-1)!$$

பயிற்சி 9.7

மதிப்பிடுக

$$(i) \int_0^\infty x^5 e^{-3x} dx$$

$$n=5 \quad a=3$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I = \frac{5!}{3^{5+1}} = \frac{5!}{3^6}$$

$$(ii) I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x} dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\tan x} \sec^6 x dx$$

$\tan x = t$ எனில்

$$\sec^2 x dx = dt$$

$$x=0 \quad t=\tan 0=0$$

$$x=\pi/2 \quad t=\tan \pi/2=\infty$$

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\tan x} \sec^4 x \sec^2 x dx$$

x	0	$\pi/2$
t	0	∞

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$= \int_0^\infty (1+t^2+t^4) e^{-t} dt$$

$$= \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt + \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt$$

$$+ \int_0^\infty t^4 e^{-t} dt$$

$$= 0! + 2(2!) + 4! \quad n=4$$

$$= 1 + 4 + 24$$

$$= 29$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^3 dx = 32, \quad \alpha > 0$$

எனில் α மதிப்பை காண்க

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^3 dx$$

$\alpha x^2 = t$ எனில்

$$\alpha x = \frac{dt}{dx} \quad x^2 = \frac{t}{\alpha}$$

$$x dx = \frac{dt}{2\alpha}$$

$$x=0 \quad t=0$$

$$x=\infty \quad t=\infty$$

$$I = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t}{\alpha} \frac{dt}{2\alpha}$$

$$I = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t}{2\alpha^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^\infty t^1 e^{-t} dt$$

$$I = \frac{1}{2\alpha^2} (1!) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\text{மதிப்பிடுக } I = 32$$

$$\frac{1}{2\alpha^2} = 32$$

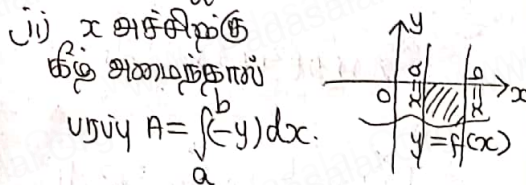
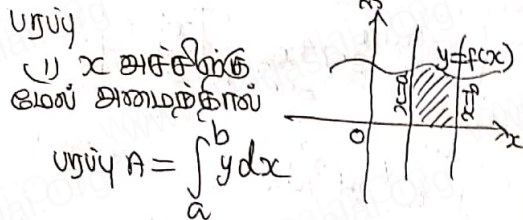
$$\frac{1}{2\alpha^2} = 64 \quad \alpha^2 = \frac{1}{64}$$

$$\alpha = \frac{1}{8}$$

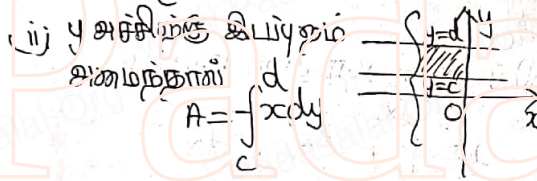
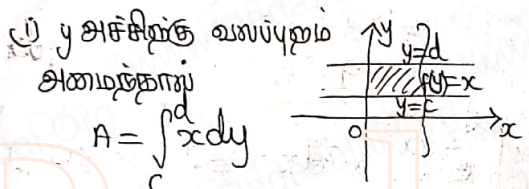
$$\alpha > 0$$

14) ஒதானகயிடல் ஓலம் பரப்பு காணுதல்

- 1) கோடுகள் $x=a, x=b$ மற்றும் வளைவான $y=f(x)$, x அச்ச இவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு



- 2) வளைவான $x=f(y)$ கோடுகள் $y=c, y=d$ மற்றும் y அச்ச இவற்றால் அடைபடும் பரப்பு



- 3) $y=f(x), y=g(x)$ தனித்த இரு வளைவான்களால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு

$$A = \int_a^b (y_U - y_L) dx$$

- 4) $x=f(y), x=g(y)$ தனித்த இரு வளைவான்களால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு

$$A = \int_c^d (x_R - x_L) dy$$

பயிற்சி 9.8

- 1) $3x-2y+6=0, x=-3, x=1$ மற்றும் x -அச்ச ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு காண.

$$3x-2y+6=0$$

$$-2y = -3x-6$$

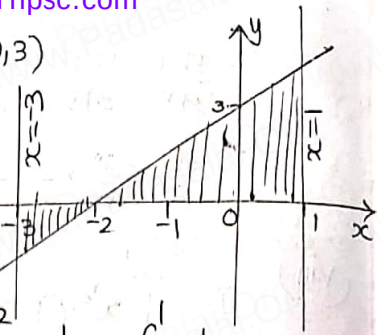
$$y = \frac{3}{2}x+3$$

$$x=0 \Rightarrow y=3 (0,3)$$

$$y=0 \Rightarrow 3x=-6$$

$$x=-2$$

$$(-2,0)$$



பரப்பளவு $A = \int_{-2}^1 -y dx + \int_{-2}^1 y dx$

$$= \int_{-2}^1 (-\frac{3}{2}x-3) dx + \int_{-2}^1 (\frac{3}{2}x+3) dx$$

$$= \left[-\frac{3x^2}{4} - 3x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{3x^2}{4} + 3x \right]_{-2}^1$$

$$= \left[-\frac{3(1)}{4} - 3(1) \right] - \left[-\frac{3(4)}{4} - 3(-2) \right] + \left[\frac{3(1)}{4} + 3(1) \right] - \left[\frac{3(4)}{4} + 3(-2) \right]$$

$$= (-3.75 - 3) - (-3 - 6) + (3.75 + 3) - (3 - 6)$$

$$= -6.75 - (-9) + 6.75 - (-3) = -6.75 + 9 + 6.75 + 3 = 15$$

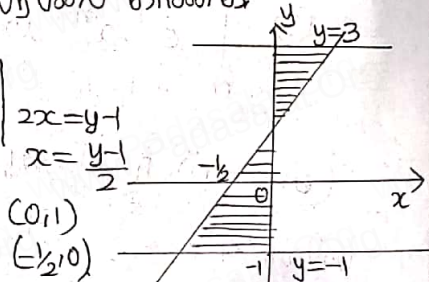
$$= 15 \text{ ச.அ.}$$

- 2) $2x-y+1=0, y=-1, y=3$ மற்றும் y அச்ச ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை காண்க.

$$2x-y+1=0$$

$$-y = -2x-1$$

$$y = 2x+1$$



$$x=0 \Rightarrow y=1 (0,1)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} (-\frac{1}{2},0)$$

பரப்பளவு $= \int_{-1}^3 x dy = \int_{-1}^1 -x dy + \int_1^3 x dy$

$$= \int_{-1}^1 -\frac{1}{2}(y-1) dy + \int_1^3 \frac{1}{2}(y-1) dy$$

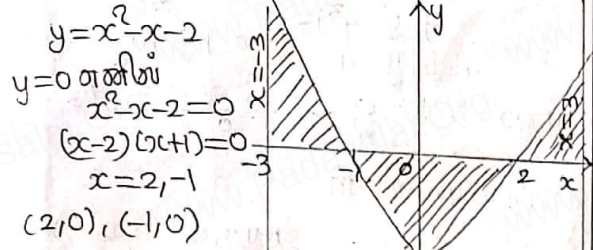
$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{4} [(1-1)^2 - (-1-1)^2] + \frac{1}{4} [(3-1)^2 - (1-1)^2]$$

$$= -\frac{1}{4} (0-4) + \frac{1}{4} (4-0)$$

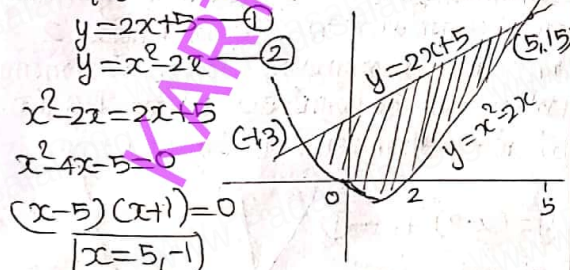
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1+1 = 2 \text{ ச.அ}$$

3) வண்ணவகை $2+x-x^2+y=0$, (15)
 x அச்சு, $x=-3$ மற்றும் $x=3$ ஆகிய
 வற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



பரப்பை $= \int_{-3}^{-1} y dx + \int_{-1}^2 -y dx + \int_2^3 y dx$
 $= \int_{-3}^{-1} (x^2-x-2) dx - \int_{-1}^2 (x^2-x-2) dx + \int_2^3 (x^2-x-2) dx$
 $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3$
 $= \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{-27}{3} - \frac{9}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right)$
 $+ \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right)$
 $= \left(\frac{-2}{3} - \frac{2}{2} + 4 \right) + \frac{54}{3} - \frac{18}{2} - \frac{6}{2} - 2 - \frac{16}{3} + \frac{8}{2} + 3$
 $= -\frac{2}{3} + 3 + \frac{54}{3} - 12 - \frac{16}{3} + 12 = \frac{54-18}{3} + 3$
 $= 12 + 3 = 15$ ச.அ.

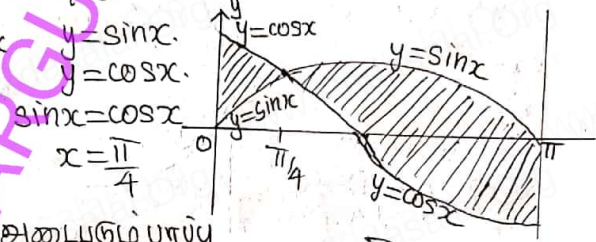
4) கோடு $y=2x+5$ மற்றும் பரவணையம்
 $y=x^2-2x$ ஆகியவற்றால் அடைபடும்
 அரங்கத்தின் பரப்பை காண்க.



$x=5$ ① $\Rightarrow y=15$ (5,15)
 $x=-1$ ② $\Rightarrow y=3$ (-1,3)
 பரப்பு $= \int_{-1}^5 (y_U - y_L) dx$
 $= \int_{-1}^5 ((2x+5) - (x^2-2x)) dx$

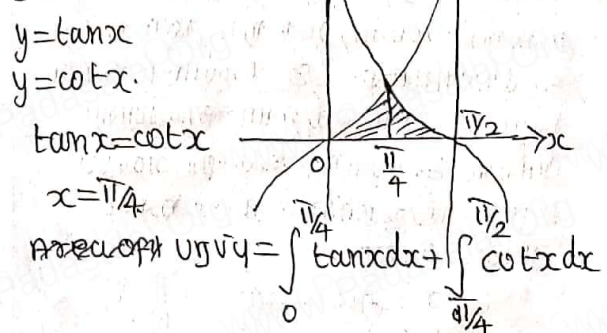
$= \int_{-1}^5 (5+4x-x^2) dx$
 $= \left[5x + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^5$
 $= (25 + 50 - \frac{125}{3}) - (-5 + 2 + \frac{1}{3})$
 $= 75 - \frac{125}{3} + 3 - \frac{1}{3} = 78 - \frac{126}{3}$
 $= 36$ ச.அ.

5) வண்ணவகை $y=\sin x$, $y=\cos x$
 மற்றும் கோடுகள் $x=0$ மற்றும் $x=\pi$
 ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



அடைபடும் பரப்பு
 $= \int_0^{\pi/4} (y_U - y_L) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (y_U - y_L) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$
 $= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi}$
 $= (\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0) - (\cos \pi + \sin \pi) + (\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4})$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (0+1) - (-1+0) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{4}{\sqrt{2}} - 1 + 1 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$ ச.அ.

6) $y=\tan x$, $y=\cot x$ மற்றும்
 கோடுகள் $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$
 ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தின்
 பரப்பை காண்க.



$$= [\log \sec x]_{\pi/4}^{\pi/2} + [\log \sin x]_{\pi/2}^{\pi/4}$$

$$= \log \sec \pi/4 - \log \sec 0 + \log \sin \pi/2 - \log \sin \pi/4$$

$$= \log \sqrt{2} - \log 1 + \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \log \sqrt{2} + \log \sqrt{2} = 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

ச.அ.

7) பரவணையம் $y^2 = x$ மற்றும் கோடு $y = x - 2$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் அளவுகூறுகளின் பரப்பை காண்க.

$$y^2 = x \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 = x - 2 \quad \text{--- ②}$$

$$(x-2)^2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 - x = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1, 4$$

$$\text{②} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1-2=-1 \quad (1, -1)$$

$$x=4 \Rightarrow y=4-2=2 \quad (4, 2)$$

வளைவும் புள்ளிகளும் $(1, -1), (4, 2)$

$$\text{அடைபடும் பரப்பு} = \int_{-1}^2 (x_R - x_L) dy$$

$$= \int_{-1}^2 (y+2 - y^2) dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \left[\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9}{2} \text{ ச.அ.}$$

8) ஒரு குகைப் தளவரை $x=0, x=4$ $y=4$ மற்றும் $y=0$ ஆகியவற்றால் அடைபடும் சதுர நிலத்தின் பரப்பை

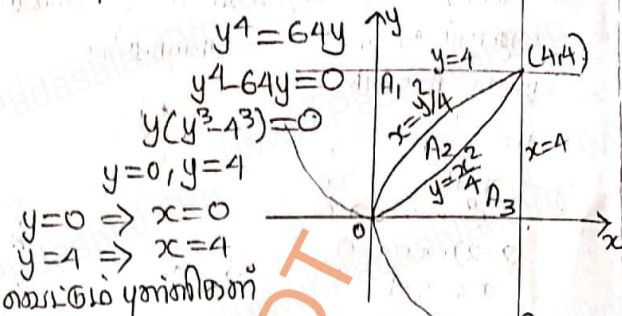
$y^2 = 4x$ மற்றும் $x^2 = 4y$ என்ற வளைவற்றையின் வாயிலாக தண்டுவடைய

மற்றும், மகன், மற்றும் மகன் ஆகியோர்க்கு 3 சமவாகங்கமாக பிரிக்க விரும்புகிறார் அவ்வாறு பிரிக்க இயலுமா, இயலுமெனில் ஆய்வொருவருக்கும் கிடைக்கும் பரப்பை காண்க.

$$x^2 = 4y \quad \text{--- ①}$$

$$y^2 = 4x \quad \text{--- ②}$$

$$x = \frac{y^2}{4} \quad \text{①} \Rightarrow \frac{y^4}{16} = 4y$$



சதுரவடிவ வடிவின் பரப்பு $= 4^2 = 16$ ச.அ.

$$\text{பரப்பு } A_1 = \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_1 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$$\text{பரப்பு } A_3 = \int_0^4 y dx = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_3 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$$\text{பரப்பு } A_2 = \text{சதுரப்பரப்பு} - (A_1 + A_3)$$

$$= 16 - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right)$$

$$= 16 - \frac{32}{3} = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \frac{16}{3} \text{ ச.அ.}$$

$\therefore$ மூன்றாண்டு சமமாக பிரித்து பிரிக்க காரணமாகப் பட்ட சமவாகப்பரப்பு $= \frac{16}{3}$ ச.அ.

9) P என்பது $y = (x-2)^2 + 1$ என்ற வளைவற்றைக்கு ஒரு மீச்சிற் புள்ளி. P என்ற புள்ளியானது P-ன் சாய்வு 2 உள்ளவாறு வளைவற்றையின் மீதம் உள்ளது. அதில் வளைவற்றைக்கும் நான் P-க்கும் இடையில் அடைபடும் பரப்பை காண்க.

$$y = (x-2)^2 + 1 \quad \text{--- ①}$$

x-ஐ வளவையிட

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2)$$

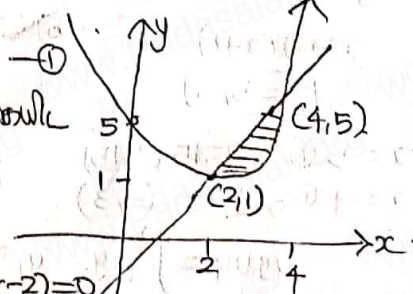
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$y'' = 2 \quad x=2 \text{ அதில் } y'' = 2 > 0$$

y-க்கு $x=2$ ன் சமவாகப்பரப்பு



$x=2$ எனில் பிரதியிட

$$y = (2-2)^2 + 1 = 1$$

இவ்வாய்வினை $P(2,1)$.

இவ் சாய்வு $m=2$.

பெண் சமன்பாடு $y=mx+C$

$$y=2x+C$$

இது $(2,1)$ வழி செல்லும்

$$1=2(2)+C$$

$$1-4=C \quad C=-3$$

பெண் சமன்பாடு $y=2x-3$ — (2)

$$①, ② \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 2x - 3$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1 - 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x=2, 4$$

$$x=2 \quad ① \Rightarrow y=0+1=2 \quad (2,1)$$

$$x=4 \quad ① \Rightarrow y=4+1=5 \quad (4,5)$$

வெட்டும் புள்ளிகளை $(2,1), (4,5)$

$$\text{பரப்ப} = \int_2^4 (y_u - y_L) dx$$

$$= \int_2^4 (2x-3 - ((x-2)^2 - 1)) dx$$

$$= \int_2^4 (2x-4 - (x-2)^2) dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - 4x - \frac{(x-2)^3}{3} \right]_2^4$$

$$= \left(\frac{16-16-\frac{2^3}{3}}{2} \right) - \left(\frac{4-8-0}{2} \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8+12}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ ச.அ.}$$

10) $x^2+y^2=16$ என்க வட்டத்திற்கும் $y^2=6x$ என்க பரவளையத்திற்கும் வெட்டான அரங்கத்தின் பரப்பை காண்க

$$x^2+y^2=16 \quad ①$$

$$y^2=6x \quad ②$$

$$y^2=16-x^2$$

$$y=\sqrt{4^2-x^2}$$

$$① \Rightarrow x^2+6x=16$$

$$x^2+6x-16=0$$

$$(x+8)(x-2)=0$$

$$x=-8, 2$$

$$x=-8 \text{ எனில்}$$

$$y^2=6(-8)$$

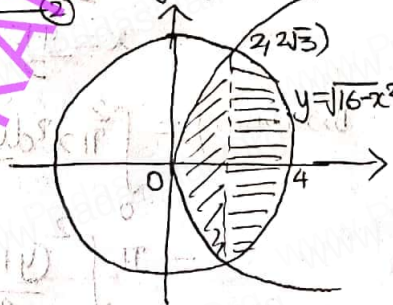
$$y^2=-48 \text{ பொருந்தாது}$$

$$x=2 \text{ எனில்}$$

$$y^2=12$$

$$y=\pm 2\sqrt{3}$$

வெட்டும் புள்ளிகள் $(2, 2\sqrt{3}), (2, -2\sqrt{3})$



அடைபடும் அரங்கத்தின்

$$\text{பரப்ப} = 2 \left[\int_0^2 \sqrt{6x} dx + \int_2^4 \sqrt{4^2-x^2} dx \right]$$

$$= 2 \left[\int_0^2 \sqrt{6} x^{1/2} dx + \int_2^4 \sqrt{4^2-x^2} dx \right]$$

$$= 2 \left[\left(\sqrt{6} \frac{x^{3/2}}{3/2} \right)_0^2 + \left[\frac{x}{2} \sqrt{4^2-x^2} + \frac{16}{2} \sin^{-1} \frac{x}{4} \right]_2^4 \right]$$

$$= 2 \left[\sqrt{6} \frac{2^{3/2}}{3/2} \right] + \left[\frac{4}{2} (0) + 8 \sin^{-1}(1) \right] - \left(\frac{2}{2} \sqrt{16-4} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left[\frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{3} + 8 \frac{\pi}{2} - \sqrt{12} - 8 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{4\sqrt{12} + 4\pi - \sqrt{12} - 4\pi}{3} \right]$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{12} + 8\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} (2\sqrt{3} + 8\pi)$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{3} + 4\pi) \text{ ச.அ.}$$

கணிதமைய

① $y=f(x)$ என்க வளைவதையின் $x=a, x=b$ x அச்ச இவற்றால் அடைபடும் பரப்பை x அச்சை பற்றி சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமைய

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

② $x=f(y)$ என்க வளைவதையின் $y=c, y=d$ y அச்ச இவற்றால் அடைபடும் பகுதியை y அச்சை பற்றி சுழற்றுவதால் ஏற்படும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமைய

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

பயிற்சி 9.9

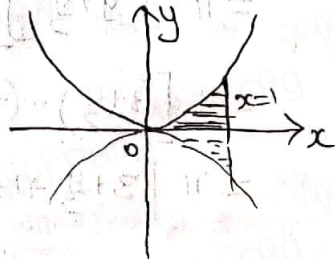
1) $y=2x^2, y=0$ மற்றும் $x=1$

ஆகியவற்றால் அடைபடும் அரங்கத்தை x அச்சை வெட்டி சுழற்றுவதால் உருவாகும் திட்டுப்பாடுகளின் கணிதமையை காண்க.

$$y=2x^2$$

$$y=0 \Rightarrow x=0$$

$$x=1$$



$$\text{கனஅளவு } V = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 4x^4 dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{4\pi}{5} [1-0]$$

$$= \frac{4\pi}{5} \text{ க.அ.}$$

2) $y = e^{-2x}$ $y=0$, $x=0$ மற்றும் $x=1$
ஆகியவற்றால் அடைபடும் அளங்கத்தின்
பரப்பை x அச்சை லொடுத்து
சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின்
கனஅளவை காண்க.

$$y = e^{-2x}$$

$$y^2 = e^{-4x}$$

$$x=0, x=1$$

$$\text{கனஅளவு} = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 e^{-4x} dx$$

$$= \pi \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{4} [e^{-4} - e^0]$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-4}) \text{ க.அ.}$$

3) $x^2 = 1+y$ மற்றும் $y=3$

ஆகியவற்றால் அடைபடும் அளங்கத்தின்
பரப்பை y அச்சை லொடுத்து
சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின்
கனஅளவு காண்க.

$$x^2 = 1+y$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1$$

$$V = \pi \int_{-1}^3 x^2 dy$$

$$= \pi \int_{-1}^3 (1+y) dy$$

$$= \pi \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^3$$

$$= \pi \left[\left(3 + \frac{9}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \pi \left[3 + \frac{9}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right] = \pi \left[4 + \frac{8}{2} \right] = 8\pi \text{ க.அ.}$$

(18)

4) $y=x$ மற்றும் $y=x^2$ எந்த
வளைவுகளுக்கானது அடைபடும்
அளங்கத்தின் பரப்பு R எனில், R ஐ
 x அச்சை லொடுத்து 360° சுழற்றுவதால்
உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவை
காண்க.

$$y = x^2$$

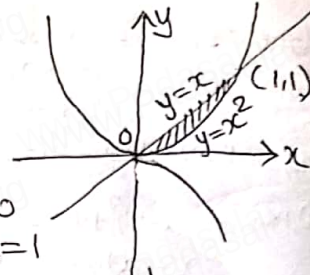
$$y = x$$

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x=0, x=1$$



$$\text{கனஅளவு} = \pi \int_0^1 (y_u^2 - y_l^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{5-3}{15} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{15} \text{ க.அ.}$$

5) ஒரு தொண்டைப்பண் ஆனது
குதிரைக்காலின் கிடைக்கண்டம்
வழியிலிருந்து (புடக்கியிருக்கவாறு)
அதன் கனஅளவை தொண்டையிடல்
மூலம் காண்க.

$$x_1, y_1, x_2, y_2$$

$$(1,0), (2,2)$$

$$\text{வழியிலிருந்து}$$

$$\text{கனஅளவை}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{2-0}{2-1} = \frac{y-0}{x-1}$$

$$\frac{y}{2} = x-1$$

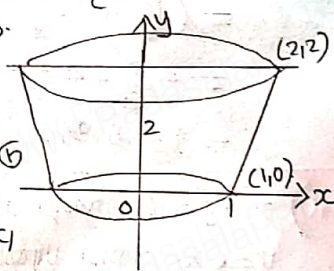
$$\frac{y}{2} + 1 = x$$

$$x = \frac{y+2}{2}$$

$$\text{கனஅளவு} = \int_0^2 \pi x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{y+2}{2} \right)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(y+2)^3}{3} \right]_0^2$$



(19)

$$= \frac{\pi}{12} [(2+2)^3 - 2^3]$$

$$= \frac{\pi}{12} [64 - 8] = \frac{\pi 56}{12 \cdot 3}$$

$$= \frac{14\pi}{3} \text{ க.அ}$$

6. ஒரு தாழ்ப்புண்ணியானது நீர்வட்ட நினைம வடிவில் உள்ளது. இந்த நீர்வட்ட நினைமத்தை பெற முதலச்சின் நீளம் 20 மீட்டர் குற்றச்சின் நீளம் 10 மீட்டர் கொண்டு நீர்வட்டத்தை சூழ்ந்து வளைந்த தாழ்ப்புண்ணியின் கனஅளவை மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

$$2a = 20$$

$$a = 10$$

$$a^2 = 100$$

$$2b = 10$$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

நீர்வட்ட சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{100}$$

$$y^2 = \frac{25}{100} (100 - x^2)$$

கனஅளவு = 2 (சூழ்ந்து வளைந்த தாழ்ப்புண்ணியின் கனஅளவு)

$$= 2 \int_0^{10} \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{10} \frac{1}{4} (100 - x^2) dx$$

$$= \frac{2\pi}{4} \left[100x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[(1000 - \frac{10^3}{3}) - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2000}{3} \right]$$

$$= \frac{1000\pi}{3} \text{ க.அ}$$

6. காந்தத்தையன்
மீட்டர் மாவட்டம்

ச.கா. 9.69

$$y = \log x, y = 0, x = 0, y = 2.$$

கனஅளவு பற்றிய யுத்தரணை பொதுத்து
சூழ்ந்து வளைந்த தாழ்ப்புண்ணியின் கனஅளவை மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

$$y = \log x$$

மீட்டர் கனஅளவு

$$e^y = x$$

$$x^2 = e^{2y}$$

$$\text{கனஅளவு } V = \pi \int_0^2 x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 e^{2y} dy$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} [e^4 - e^0]$$

$$= \frac{\pi}{2} [e^4 - 1] \text{ க.அ}$$

4. காந்தத்தில் $x^2 = e^y$ என எடுத்துக்கொண்டு
கனஅளவு மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.

ச.கா. 9.21

$$\text{மீட்டர் கனஅளவு } I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$f(\pi - x) = \frac{1}{1 + \sin(\pi - x)} = f(x)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} [\tan x - \sec x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} [(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$$

$$= \frac{\pi}{2} [(0 - 1) - (0 - 1)] = \frac{\pi}{2} (2)$$

$$= \pi \text{ (4. காந்தத்தில் } \pi \text{ க.அ } 2 \text{ என எடுத்துக்கொண்டு கனஅளவு மீட்டர் கனஅளவில் பயன்படுத்தி காண்க.)}$$

வணக்க நெடு சுவாமிநாதர்

ചിത്രം (ORDER) ലാറ്റിനും 419

ஒரு வணிகர்களுக்கு சமண்பாட்டில்
காணப்படும் மிக உயர்ந்த வணிகக்
கருவியின் வரிவசூலு அச்சமண்பாட்டின்
வரிவசூலு (ரட்டை) ஆகும்.

119 (DEGREE)

ஒரு வகைநகரங்கு சமண்பாட்டை
பல்லுதுய்யு கதாவை வடிவில் அருந
இயலுமையில், அச்சுண்பாட்டில்
கதானிலும் மிக உயர்ந்த வானை
உடைய வகைநகரங்குமின் குருணை
படியை அச்சுண்பாட்டின் படி
அண்படும.

* ஒரு வகைக்கெடு சமன்பாட்டை
யிகையாற்றி வரிசை கொண்டு வகைக்கெடு
வை முதன்மை அடிப்படையில் கொண்டு
புள்ளிப்படி வகைவை சமன்பாட்டை
எடுத்த உதாரணத்தில் வை வரிசை அச்சுமண்
-பாட்டின் உதாரண வகைக்கெடு
முடியாது

பயிற்சி 10.1)

1. பின்வரும் உணவுகளுக்கு சமஸ்பாடுகள்
ஆவனவாண்றின் வரிசை மற்றும் பிடி
(கிருக்குமாதாள்) ஆகியவற்றை காண்க.

ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right) + xy = \cot x$

ചിങ്ങം = 1
 ചി = 1

$$(ii) \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^{2/3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{2/3} = 3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4$$

கனபுத்த

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \left(3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4\right)^3$$

ചരിത്രം = 3
 പുറം = 2

$$(iii) \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x \sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\text{ചരിത്രം} = 2$$

இச்சமண்பாட்டை அந்நாட்டைய மன்னகிட்டு
தொண்டிப் பஸ்ஸுறுப்புநகரைய சமண்பாடாக
எடுத்த இயலாந். எனவே

படி வகுப்பிற்குப் பட்டமில்லை.

$$(iv) \sqrt{\frac{dy}{dx}} - 4 \frac{dy}{dx} - 7x = 0$$

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 4 \frac{dy}{dx} + 7x$$

வர்க்கப்படுக்த

$$\frac{dy}{dx} = \left(4 \frac{dy}{dx} + 7x \right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 56x\frac{dy}{dx} + 49x^2$$

$$16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 56x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + 49x^2 = 0$$

ചിഹ്നം = 1
119 = 2

$$(v) \quad y \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 = x$$

$$\begin{aligned} \text{ചരിങ്ങ} &= 1 \\ \text{പിറ} &= 4 \end{aligned}$$

$$(vi) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

உயர்க்கப்படுத்த

$$(x^2)^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

ചരിത്രം = 2
 പുറം = 2

$$(vii) \left(\frac{dz}{dx^2} \right)^3 = \sqrt[3]{1 + \frac{dy}{dx}}$$

வாங்கப் படுத்த

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ചരിത്രം = 2 $\Rightarrow$ $119 = 6$

$$(viii) \frac{d^2y}{dx^2} = xy + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

வரிசை=2

இதை ஒரு பல்படிப்புகளாக
யாக எடுத்த இயலாது.
(வகைகளெல்லாம்)

படி = வகையறுக்கப்படவில்லை.

$$(ix) \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$$

x ஐ ஸ்பாஸுத்து வகையிட

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 5 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2$$

வரிசை=3
படி=1

$$(x) \quad x = e^{xy \frac{dy}{dx}}$$

இருபுறமும் டெக்ரை எடுக்க

$$\log x = xy \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

வரிசை=1
படி=1

(முத்தகவிடை தவறு)

வகைகள் எடுக்க சமன்பாடுகளை
வகைப்படுத்தல்

* ஒரு ஒரு சமன்பாட்டின்

ஸ்பாஸுத்து ஆனது அல்லது அதற்கு
மேற்பட்ட சார்புகளின் சமன்பாடு
வகைகளைக் கொண்டு வகைகளைக்
சமன்பாடு சமன்பாடு வகைகளைக்
சமன்பாடு எனப்படும்.

* இதே போல பகுதிவகைகளுக்கு
களை டெக்ரை கொண்டு
பகுதி வகைகளைக் சமன்பாடு எனப்படும்.

வகைகளைக் சமன்பாட்டின் உருவாக்கம்

பயிற்சி.10.2

1) பின்வரும் இயற்பியல் சூழ்நிலைகள்
ஆய்வொன்றையும், வகைக்கொடு
சமன்பாடு எடுத்துக்.

அ) ரேடியம் சிதைவுறும் வீதமானது
காணப்படும் அளவு இடம்
நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

t நேரத்தில் ரேடியத்தின் அளவு
இடம்

$$\frac{dQ}{dt} \propto Q$$

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad (k \text{ ஒரு மாறிலி})$$

ii) ஒரு நகரத்தின் மக்கள்தொகை P ஆனது
மக்கள்தொகை மற்றும் 5,00,000 க்கும்
மக்கள்தொகைக்கும் உள்ள வேறுபாடு
ஆகியவற்றை ஸ்பாஸுக்கி கிடைக்கும்
மூலப்பித்த நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

t நேரத்தில் மக்கள்தொகை P
மாறும் வீதம் $\propto P(5,00,000 - P)$

$$\frac{dP}{dt} \propto P(5,00,000 - P)$$

$$\frac{dP}{dt} = kP(5,00,000 - P)$$

iii) ஒரு ஸ்பாஸுத்தின் வையப்பதிவை T ஆய்
ஸ்பாஸுத்து ஆகி அடுத்தும் P-ன்
மாறும் வீதமானது, ஆகி அடுத்தத்திற்கு
நேர்விகிதத்திலும், வையப்பதிவின்
வந்தத்திற்கு நேர்விகிதத்திலும்
உள்ளது.

வையப்பதிவை T ஆய்

ஸ்பாஸுத்து P மாறும் வீதம் $\propto \frac{P}{T^2}$

$$\frac{dP}{dT} \propto \frac{P}{T^2}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{kP}{T^2}$$

(t ஐ ஸ்பாஸுத்து என புத்தகவிடையில்
கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $\frac{dP}{dT}$ தவறு)

iv) ஒரு சமீபிய தொகைக்கு ஒரு
வருடத்திற்கு வளங்கப்படும் 8% வட்டி

தொகையானது தொடர்ச்சியாக
அசையுடன் சேர்க்கப்படுகிறது. மேலும்
மற்றொரு முதலீட்டிலிருந்து ஆய்வொன்றும்
ஆண்டும் கிடைக்கும் வரவு ₹400
இதே தொகையுடன் தொடர்ச்சியாக
சேர்க்கப்படுகிறது.

t நேரத்தில் தொகை x என்க

$$\frac{dx}{dt} \propto x$$

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad k = 8\% = \frac{8}{100}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8}{100} x$$

400 ரூபாயை வட்டாவட்டம்
சேர்க்கப்படுகிறது.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{28}{25} x + 400$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{25} + 400,$$

2) ஒரு கோளவடிவ மைதந்தூளி.
ஆனது அதன் வளைபரப்பின்
மாறுவேதத்திற்கு ஒரேவிகிதத்தில்
ஆவியாகிறது. மைதந்தூளியின்
ஆரத்தின் மாறுவேதத்தை 2-ம் அளவில்
வளைகளுக்கு சமன்பாட்டை 2-வதாகிடுக.

7 அளவு ஆரத்தைய கோளவடிவ
மைதந்தூளியின் கனஅளவு V என்க
வளைபரப்பு 3 என்க

கனஅளவு மாறு $\propto$ வளைபரப்பு
வேதம் (கூறகிறது)

$$\frac{dV}{dt} \propto r - R$$

$$\frac{d}{dt} (4\pi r^3) \propto - (4\pi r^2)$$

$$\frac{4\pi}{3} \frac{dr^3}{dt} = -k(4\pi r^2)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^2}{r^2} k$$

$$\frac{dr}{dt} = -k$$

வளைகளுக்கு சமன்பாட்டை
2-வதாகிடுக.

பயிற்சி 10.3

1. ஒரு தளத்தில் (i) ஒளர்க்குத்து
அல்லாத ஒளர்க்கோடுகள் (ii)
கிடைமட்டம் அல்லாத ஒளர்க்கோடுகள்
ஆகிய ரேபாடுப்புகளின் வளைகங்களுக்கு
சமன்பாடுகளை காண்க.

(i) ரெங்குத்து அல்லாத ஒளர்க்கோடுகள்
ஒளர்க்கோடு ரேபாடுப்பின் சமன்பாடு

$$ax + by + c = 0$$

இங்கு $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$

a, b எண்பன இரு மாறிலிகள் 2-ம் அளவு
(c இல்லாமலும் இருக்கலாம்)

இருகூற வளைகப்படுத்த
 x ஐ ரேபாடுத்து

$$ax + by' = 0$$

$$y' = -\frac{a}{b}$$

$b=0$ எனில்.
ரெங்குத்து
கோடு கிடைக்கும்

$$y'' = 0 \text{ அதாவது } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 //$$

(ii) கிடைமட்டம் அல்லாத ஒளர்க்கோடு
ரேபாடுப்பின் சமன்பாடு

$$ax + by = c \quad a \neq 0$$

y ஐ ரேபாடுத்து வளைகயிட

$$a \frac{dx}{dy} + b = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a}$$

$a=0$ எனில்
கிடைமட்டகோடு
கிடைக்கும்

மீண்டும் y ஐ ரேபாடுத்து வளைகயிட

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

2) $x^2 + y^2 = r^2$ எனும் வட்டத்தை இடாடும்
எல்லா ஒளர்க்கோடுகளின் வளைகங்களுக்கு
சமன்பாட்டை காண்க.

$x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்திற்கு
வளைபரப்பும் ஒளர்க்கோடுப்பின் சமன்பாடு

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \quad \text{--- (1)}$$

(iii) மட்டம மாறிலி மாறுதக்கது
 r ரெங்குக்கப்பட்ட மாறிலி மாறுதது

ஒருகூற x ஐ ரேபா. வளைகயிட

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\Rightarrow y = \frac{dy}{dx} x \pm r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y - x \frac{dy}{dx} = \pm r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

வர்க்கப்படுத்த

$$\left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 = r^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

3) ஆதிப்புள்ளி வழியாக ரெங்குமும்,
மைதந்தை x அச்சின் மீது ரெகாண்ட எல்லா
வட்டங்களின் வளைகங்களுக்கு சமன்பாட்டை
காண்க.

ஆதிப்புள்ளி வழி ரெங்குமும் மைதந்தை
($a, 0$) மைதந்தை வட்டத்தின் சமன்பாடு

www.Padasalai.Net (4)
 $(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ — ①

 x ஐ 0 லிருந்து வரையில்
 a மட்டுமே மாற்றக்க மாறிலி

$2(x-a) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ a-மாற்றக்கந்து

$x-a = -y \frac{dy}{dx}$

$a = x + y \frac{dy}{dx}$

① $\Rightarrow (-y \frac{dy}{dx})^2 + y^2 = (x + y \frac{dy}{dx})^2$

$y^2 (\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = x^2 + y^2 (\frac{dy}{dx})^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$

$x^2 + 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$

4) ரெக்டங்குலம் $4a$ மீட்டும் x அச்சத்துக்கு இணையான அச்சுகளை கொண்டு, பரவணைய நொதுப்பின் வரைக்கெடு சமன்பாட்டை காண்க.

பரவணைய நொதுப்பின் சமன்பாடு

$(y-k)^2 = 4a(x-h)$

h, k மட்டுமே மாற்றக்க மாறிலி
 x ஐ 0 லிருந்து வரையில்

$2(y-k)y' = 4a(1)$

$(y-k)y' = 2a$ — ②

மீண்டும் x ஐ 0 லிருந்து வரையில்

$(y-k)y'' + y' y' = 0$

$(y-k) = \frac{-y'^2}{y''}$

② $\Rightarrow \frac{-y'^2}{y''} y' = 2a$
 $-y'^3 = 2ay''$
 $2ay'' + y'^3 = 0$

5) குறை (0, -1) மீட்டும் y அச்சத்துக்கு அச்சாகவும் கொண்டு பரவணைய நொதுப்பின் வரைக்கெடு சமன்பாட்டை காண்க

www.TrbTnpssc.com
 பரவணைய நொதுப்பின் சமன்பாடு

$(x-0)^2 = 4a(y+1)$ — ①

a மட்டுமே மாற்றக்க மாறிலி

x ஐ 0 லிருந்து 0-க்கு வரையில்

$2x = 4a \frac{dy}{dx}$ $x = 2ay'$

$\frac{x}{y'} = 2a$

① $\Rightarrow x^2 = 2(\frac{x}{y'})^2 (y+1)$

$\frac{x^2 y'}{x} = 2y+2$

$xy' - 2y - 2 = 0$

6) ஆகியுள்ளியை மையமாகவும் ரெக்டங்குலம் y அச்சின் மீது குவியங்களுக்கும் கொண்டு நீள்வட்ட நொதுப்பின் வரைக்கெடு சமன்பாட்டை காண்க.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ — ①

a, b மீட்டும் மாறிலிகள்
 x ஐ 0 லிருந்து வரையில்

$\frac{2x}{b^2} + \frac{2yy'}{a^2} = 0$

2 $\div \frac{x}{b^2} + \frac{yy'}{a^2} = 0$ — ②

மீண்டும் x ஐ 0 லிருந்து வரையில்

$\frac{1}{b^2} + \frac{yy'' + y'y'}{a^2} = 0$ — ③

$\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}$ ஆகிக்கிட

$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x & yy' & 0 \\ 1 & yy'' + y'y' & 0 \end{vmatrix} = 0$

$x^2(0-0) - y^2(0-0) + 1(xy'' + y'y') = 0$
 $-yy' = 0$
 $xy'' + xy'^2 - yy' = 0$

⑦ $y = Ae^{8x} + Be^{-8x}$ எனும் சமன்பாட்டை கொண்டு வரைக்கெடு குவியத்தின் வரைக்கெடு சமன்பாட்டை காண்க, இங்கு A, B என்ன இரு மாறிலிகள்.

www.Padasalai.Net

$$y = Ae^{8x} + Be^{-8x}$$

x ஐ ஸபா. வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = 8Ae^{8x} - 8Be^{-8x}$$

மீண்டும் x ஐ ஸபா. வகையிட

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 64Ae^{8x} + 64Be^{-8x} \\ &= 64(Ae^{8x} + Be^{-8x})\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 64y$$

8). $xy = ae^x + be^{-x} + x^2$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிப்பிடப்படும் வளைவறையின் வகைகளுக்கு சமன் பட்டை காண்க.

$$xy - x^2 = ae^x + be^{-x}$$

a, b மாறாத மாறிலிகள்

x ஐ ஸபா. வகையிட

$$xy' + y - 2x = ae^x - be^{-x}$$

மீண்டும் x ஐ ஸபா. வகையிட

$$xy'' + y' + y' - 2 = ae^x + be^{-x}$$

$$xy'' + 2y' - 2 = xy - x^2$$

$$xy'' + 2y' + x^2 - xy - 2 = 0$$

சாதாரண வகைகளுக்கு சமன்பாடுகளின் தீர்வு

பயிற்சி 10.4

① மின்னும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் அதற்கெதிரே தொடுக்கப்பட்ட வகைகளுக்கு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக் காட்டுக.

i) $y = 2x^2$; $xy' = 2y$

$$y = 2x^2 \quad \text{--- ①}$$

x ஐ ஸபா. வகையிட

$$y' = 4x$$

x ஆல் ஸபா. வகையிட

$$xy' = 4x^2$$

$$xy' = 2(2x^2)$$

$$xy' = 2y$$

⑤

ii) $y = ae^x + be^{-x}$; $y'' - y = 0$

x ஐ ஸபா. வகையிட (கிடைசு)

$$y' = ae^x - be^{-x}$$

$$y'' = ae^x + be^{-x}$$

$$y'' = y$$

$$y'' - y = 0$$

2). $y = e^{mx}$ எனும் சாய்வு தொடுக்கப்பட்ட வகைகளுக்கு சமன்பாட்டின் தீர்வாக அமையுமாறு m-ன் மதிப்புகளை காண்க.

i) $y' + 2y = 0$ --- ①

$$y = e^{mx}$$

x ஐ ஸபா. வகையிட

$$y' = e^{mx}(m)$$

$$y' = my$$

$$y' - my = 0 \quad \text{--- ②}$$

①, ② ஐ ஒப்பிட

$$-m = 2$$

$$m = -2$$

ii) $y'' - 5y' + 6y = 0$ --- ③

$$\Rightarrow y - my = 0$$

$$y' = my$$

x ஐ ஸபா. வகையிட

$$y'' - my' = 0 \Rightarrow y'' = mmy$$

$$y'' = m^2y$$

$$\Rightarrow m^2y - 5my + 6y = 0$$

$$y(m^2 - 5m + 6) = 0$$

$$y = 0, \quad m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m = 2, 3$$

③ தகையும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவறையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு அப்புள்ளியின் y அச்ச தொலைவின் 4 மடங்கின் தகையுமாகும். மேலும் வளைவறை (2,5) வகையே நெருங்குகையில் வளைவறையின் சமன்பாட்டை காண்க.

$$\text{சாய்வு} = \frac{1}{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y}$$

$$1y dy = dx$$

மீதானதையிட $\int 1y dy = \int dx$

$$\frac{2 \times y^2}{2} = x + C$$

$$2y^2 = x + C \quad \text{--- ①}$$

இது (2,5) மூலம் செல்கிறது

$$① \Rightarrow 2(5)^2 = 2 + C$$

$$50 - 2 = C$$

$$C = 48$$

எதனையானது சமன்பாடு

$$2y^2 = x + 48$$

4). $y = e^{-x} + mx + n$ எனப்படு

$$e^x \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) - 1 = 0$$
 எனும்

வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்
எனக்காட்டுக.

$$y = e^{-x} + mx + n$$

m, n மாறிலிகள்

இருகூறு x ஐ ஸா. வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(-1) + m$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{e^x}$$

$$e^x \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = 1$$

$$e^x \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) - 1 = 0$$

எனக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்,
சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்,

5). $y = ax + \frac{b}{x}$, $x \neq 0$ எனப்படு

$x^2y'' + xy' - y = 0$ எனும் வகைக்கெடு
சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக.

$$y = ax + \frac{b}{x} \quad \text{--- ①}$$

a, b இரு மாறிலிகள் 2-வது
x ஐ ஸா. வகையிட

$$y' = a + b \left(-\frac{1}{x^2} \right) \quad \text{--- ②}$$

மீண்டும் x. ஸா. வகையிட

$$y'' = 0 + \frac{2b}{x^3} \quad \text{--- ③}$$

$$2b = x^3 y''$$

$$b = x^3 y'' / 2$$

6) ② $\Rightarrow y' = a - \frac{x^2 y''}{2} \times \frac{1}{x^2}$

$$y' = a - \frac{x y''}{2}$$

$$y' + \frac{x y''}{2} = a$$

$$① \Rightarrow y = \left(y' + \frac{x y''}{2} \right) x + \frac{x^2 y''}{2x}$$

$$y = x y' + \frac{x^2 y''}{2} + \frac{x^2 y''}{2}$$

$$y = x y' + \frac{x^2 y''}{2}$$

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

மாற்றுகூறு

$$(1, 2, 3)$$

விதிந்து a, b-ன்
எனக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்

$$\begin{vmatrix} y & x & \frac{1}{x} \\ y' & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ y'' & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$y \left(\frac{2}{x^3} - 0 \right) - x \left(\frac{y' \cdot 2}{x^3} + \frac{y''}{x^2} \right) + \frac{1}{x} (0 - y'') = 0$$

$$\frac{2y}{x^3} - \frac{2y'}{x^2} - \frac{y''}{x} - \frac{y''}{x} = 0$$

$$-\frac{2y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} + \frac{2y}{x^3} = 0$$

$$-\frac{x^3}{2} \text{ ஆல் ஸா.வகை } x^2 y'' + x y' - y = 0$$

6) $y = a e^{-3x} + b$ எனப்படு $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = 0$

எனும் வகைக்கெடு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்
எனக்காட்டுக இங்கு a, b எத்தனையும்
இரு எதெச்சி மாறிலிகள்

$$y = a e^{-3x} + b$$

x ஐ ஸா. வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = a(-3) e^{-3x} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -3a e^{-3x} \quad \text{--- ①}$$

மீண்டும் x ஐ ஸா. வகையிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9a e^{-3x}$$

⑦

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3(-3ae^{-3x})$$

ஒரு பயன்படுத்த

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3 \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = 0$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட சார்பு

கொடுக்கப்பட்ட வகைகளுக்கு சமன் பாட்டின் தீர்வு ஆகும்,

$$7). y^2 = 2a(x + a^{2/3}) \text{ எனும்}$$

வகைவகைந்த கொடுக்கியைக் குறிக்கும் வகைகளுக்கு சமன்பாடு

$$(y^2 - 2xy \frac{dy}{dx})^3 = 8(y \frac{dy}{dx})^5 \text{ என்காட்டுக}$$

இங்கு a என்பது மிகைமூலியுடைய குணையலகாகும்,

$$y^2 = 2a(x + a^{2/3}) \text{ --- ①}$$

x ஐ ஸா. வகையில்

$$2y \frac{dy}{dx} = 2a(1 + \frac{2}{3}a^{-1/3})$$

$$y \frac{dy}{dx} = a$$

① இரட்டியில்

$$y^2 = 2y \frac{dy}{dx} (x + (\frac{y \frac{dy}{dx}}{a})^{2/3})$$

$$y^2 = 2xy \frac{dy}{dx} + 2y^{5/3} \frac{dy}{dx} \frac{1}{a^{1/3}}$$

$$y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 2y^{5/3} \frac{dy}{dx} \frac{1}{a^{1/3}}$$

கனப்படுத்த

$$(y^2 - 2xy \frac{dy}{dx})^3 = 8(y \frac{dy}{dx})^5$$

$$8). y = a \cos bx \text{ என்பது } \frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$$

எனும் வகைகளுக்கு சமன்பாட்டின் தீர்வாகும் எனக்காட்டுக,

$$y = a \cos bx$$

x ஐ ஸா. வகையில்

$$\frac{dy}{dx} = a(-\sin bx)b$$

மீண்டும் x ஸா. வகையில்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos bx (b^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$$

மாறிகள் பிரிக்க கூடியன,

பயிற்சி 10.5

1) திசை M லை ஒரு தாசியாகி. இயந்திரத்தின் இயக்கியால் 2 ருவாக்கப் படும் மாறாத விசை F எனில் அதனுடைய திசைவேகம் V என்பது

$M \frac{dv}{dt} = F - kV$ எனும் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது k என்பது மாறிலி ஆகும், $t=0$ எனில் $V=0$ என கொடுக்கப்படும் போது V ஐ t ன் சார்பாக எழுதுக.

$$M \frac{dv}{dt} = F - kV$$

$$\frac{dv}{F - kV} = \frac{1}{M} dt$$

$$\text{கொண்கையில் } \int \frac{dv}{F - kV} = \int \frac{1}{M} dt$$

இதிலும் $-k$ ஆல் வகுக்க

$$\int \frac{-k dv}{F - kV} = \frac{-k}{M} \int dt$$

$$\log(F - kV) = -\frac{k}{M} t + C \text{ --- ①}$$

$t=0$ எனில் $V=0$

$$\text{①} \Rightarrow \log F = C$$

$$C = \log F$$

$$\text{①} \Rightarrow \log(F - kV) = -\frac{k}{M} t + \log F$$

$$\frac{k}{M} t = \log F - \log(F - kV)$$

$$\frac{k}{M} t = \log \left(\frac{F}{F - kV} \right)$$

எதிர்மயத்தை எடுக்க

$$e^{\frac{k}{M} t} = F / (F - kV)$$

$$(F - kV) e^{\frac{k}{M} t} = F //$$

2) ரெசுல்டுந்தாக விரும் வான்குடை நிதனவயின் நிசைகவகம்
 V ஆனது $V \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$ எனும் சமன்பாட்டை நிதனவு ரெய்கிறது,
 இங்கு g மற்றும் k எனபன மாநிலிணர் ஆகும், ஆரம்பநிலையில் V
 மற்றும் x ஆகிய கிரண்டும் யுச்சியமானால் V ஐ x ன் சார்பாக காண்க.

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$$

$$\frac{v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)} = g dx$$

$-\frac{2}{k^2}$ ஆல் இருபுறமும் ரெடுக்க

$$\frac{-\frac{2v}{k^2} dv}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2} dx$$

ரெதானகவில $\int \frac{-\frac{2v}{k^2} dv}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2} \int dx$

$$\log \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2} x + C \quad \text{--- (1)}$$

ஆரம்ப நிலையில் $v=0, x=0$

$$\text{(1)} \Rightarrow \log 1 = 0 + C$$

$$\boxed{C=0}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \log \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2gx}{k^2} + 0$$

taking antilog ரெடுக்க

$$1 - \frac{v^2}{k^2} = e^{-\frac{2gx}{k^2}}$$

$$1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}} = \frac{v^2}{k^2}$$

$$k^2 \left(1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right) = v^2 //$$

3) ஆரு வண்ணவதரயின் சாய்வு $\frac{y-1}{x^2+x}$ ஆகும் வண்ணவதர $(1,0)$

எனும் யுள்ளி வுதிச் ரெஸுலுமனில் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x}$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} dx$$

(Using partial fraction)

$$\frac{dy}{y-1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

எதிர்த்தகவல்:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\log y - 1 = \log x - \log(x+1) + \log c$$

$$\log(y-1) = \log \frac{xc}{x+1}$$

Using anti log எதிர்த்தகவல்

$$y-1 = \frac{cx}{x+1} \quad \text{--- (1)}$$

இது (1,0) வரிக் களத்தில்

$$\therefore 0-1 = \frac{c}{1+1}$$

$$-2 = c$$

$$\text{(1)} \Rightarrow y-1 = \frac{-2x}{x+1}$$

$$y = 1 - \frac{2x}{x+1}$$

$$= \frac{x+1-2x}{x+1}$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

4) பின்வரும் வகைகளைக் கணக்கிடுக. கண் தீர்க்க.

$$\text{ii) } \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integrating

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin^{-1} y = \sin^{-1} x + c$$

$$\text{(ii) } y dx + (1+x^2) \tan^{-1} x dy = 0$$

$$y dx = -(1+x^2) \tan^{-1} x dy$$

$$\frac{dx}{(1+x^2) \tan^{-1} x} = -\frac{dy}{y}$$

take $v = \tan^{-1} x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$dv = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$$

$$\text{Integrating } \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\log v = -\log y + \log c$$

$$\log v + \log y = \log c$$

$$\log vy = \log c$$

$$\text{taking anti log } vy = c$$

$$y \tan^{-1} x = c //$$

$$(iii) \sin \frac{dy}{dx} = a, y(0) = 1$$

$$\sin \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} a$$

$$dy = \sin^{-1} a \, dx$$

$$\text{Integrating } \int dy = \sin^{-1} a \int dx$$

$$y = (\sin^{-1} a) x + C \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{When } x=0, y=1 \quad (1) \Rightarrow 1 = \sin^{-1} a (0) + C$$

$$\boxed{C=1}$$

$$(1) \Rightarrow y = (\sin^{-1} a) x + 1$$

$$\frac{y-1}{x} = \sin^{-1} a$$

$$\sin\left(\frac{y-1}{x}\right) = a //$$

$$(iv) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^3 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y + x^3 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + e^x) e^y$$

$$e^{-y} dy = (x^3 + e^x) dx$$

$$\text{Integrating } \int e^{-y} dy = \int (x^3 + e^x) dx$$

$$-e^{-y} = \frac{x^4}{4} + e^x + C_1$$

$$e^x + e^{-y} + \frac{x^4}{4} = -C_1$$

$$e^x + e^{-y} + \frac{x^4}{4} = C$$

$$(v) (e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$$

$$(e^y + 1) \cos x \, dx = -e^y \sin x \, dy$$

$$\frac{\cos x \, dx}{\sin x} = -\frac{e^y}{e^y + 1} dy$$

$$\text{Integrating } \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = -\int \frac{e^y}{e^y + 1} dy$$

$$\log \sin x = -\log(e^y + 1) + \log C$$

$$\log \sin x + \log(e^y + 1) = \log C$$

$$\log \sin x (e^y + 1) = \log C$$

$$\text{taking anti-log } (e^y + 1) \sin x = C$$

$$(vi) (y \, dx - x \, dy) \cot\left(\frac{x}{y}\right) = n y^2 \, dx$$

$$\frac{y \, dx - x \, dy}{y^2} \cot \frac{x}{y} = n \, dx$$

(11)

$$\cot\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = n dx$$

Integrating $\int \cot\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = n \int dx$

$$\log \sin \frac{x}{y} = nx + C$$

taking antilog $\sin\left(\frac{x}{y}\right) = e^{nx+C}$

(vii) $\frac{dy}{dx} - x\sqrt{25-x^2} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{25-x^2}$$

$$dy = x\sqrt{25-x^2} dx$$

put $25-x^2 = t$

$$-2x = \frac{dt}{dx}$$

$$x dx = \frac{dt}{-2}$$

$$\therefore dy = \sqrt{t} \left(\frac{dt}{-2}\right)$$

Integrating $\int dy = \int t^{1/2} dt$

$$+2y = -\frac{t^{3/2}}{3/2} + 2C$$

multiply both sides
by $\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}(2y) = -t^{3/2} + \frac{3}{2}(2C)$$

$$3y = -(25-x^2)^{3/2} + 3C$$

(viii) $x \cos y dy = e^x (x \log x + 1) dx$

$$\cos y dy = e^x \frac{(x \log x + 1)}{x} dx$$

$$\cos y dy = e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= (e^x \log x + e^x \frac{1}{x}) dx$$

$$= \log x d(e^x) + e^x d(\log x)$$

$$\Rightarrow \cos y dy = e^x \log x dx + e^x \frac{1}{x} dx$$

$$\cos y dy = d(e^x \log x)$$

Integrating

$$\int \cos y dy = \int d(e^x \log x)$$

$$\sin y = e^x \log x + C$$

G. Karthikeyan
Thiruvananthi

$$\boxed{d(uv) = u dv + v du}$$

(ix) $\tan y \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$$\tan y \frac{dy}{dx} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2 \cos x \cos y$$

$$\frac{\tan y dy}{\cos y} = 2 \cos x dx$$

$$\sec y \tan y dy = 2 \cos x dx$$

Integrating

$$\int \sec y \tan y dy = \int 2 \cos x dx$$

$$\sec y = 2 \sin x + C$$

(12)

$$(x) \quad \frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{Let } x+y=z$$

diff w. r to x

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \tan^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \tan^2 z$$

$$\frac{dz}{dx} = \sec^2 z \Rightarrow \frac{dz}{\sec^2 z} = dx$$

$$\cos^2 z dz = dx$$

$$\left(\frac{1 + \cos 2z}{2} \right) dz = dx$$

$$\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{2} \sin 2z \right] = x + C$$

$$z = x+y$$

$$\frac{1}{2} \left[(x+y) + \frac{1}{2} \sin 2(x+y) \right] = x + C$$

$$\frac{1}{2} \left[(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x+y) \cos(x+y) \right] = x + C$$

$$-\frac{1}{2} \left[(x+y) + \sin(x+y) \cos(x+y) \right] = x + C$$

(Homogeneous Differential Equation)

சமவர்கத்தான வகைக்கெடு சமன்பாடு

(Exercise 10.6) பயிற்சி 10.6

① பின்வரும் சமவர்கத்தான, சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$1) \left[x + y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx = x \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$$

$$\frac{x + y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவர்கத்தான வகைக்கெடு சமன்பாடு
put $y = vx$ எனப்பிடுக

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \frac{x + vx \cos vx}{x \cos vx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{x(1 + v \cos v)}{x \cos v} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1 + v \cos v}{\cos v} - v = x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1 + v \cos v - v \cos v}{\cos v} = x \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{\cos v} = x \frac{dv}{dx}$$

(15)

$$\frac{dx}{x} = \cos v dv$$

எனவே

$$\int \cos v dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

Replace v by $\frac{y}{x}$

$$\sin \frac{y}{x} = \log|x| + \log|C|$$

Log எடுத்துக்கொண்டு

$$\log \sin \frac{y}{x} = \log|x| + \log|C|$$

$$2) (x^3 + y^3) dy - x^2 y dx = 0$$

$$(x^3 + y^3) dy = x^2 y dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad \text{--- ①}$$

இது ஒரு சமவிகிதமான வ. சமன்பாடு

$$\text{put } y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\text{①} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 vx}{x^3 + v^3 x^3}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^3 v}{x^3(1+v^3)}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

G. Karthikeyan
Thiruvannamalai

$$\frac{1+v^3}{v^4} dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^4} + \frac{1}{v}\right) dv = -\frac{dx}{x} \quad \text{--- ②}$$

integrating

$$\int v^{-4} dv + \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + \log|v| = -\log|x| + \log|C|$$

$$\log|v| + \log|C| - \log|x| = \frac{1}{3v^3}$$

$$\log\left|\frac{vx}{C}\right| = \frac{1}{3v^3}$$

Replace $v = \frac{y}{x}$

$$\log\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{1}{3\frac{y}{x}} = \frac{x}{3y}$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{x}{3y}$$

taking anti log

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{\frac{x}{3y}}$$

$$y = \pm C e^{\frac{x}{3y}}$$

Thus.

$$y = C e^{\frac{x}{3y}}$$

where $C = \pm C$

$$\text{③ } y e^{\frac{x}{y}} dx = (x e^{\frac{x}{y}} + y) dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x e^{\frac{x}{y}} + y}{y e^{\frac{x}{y}}} \quad \text{--- ①}$$

இது ஒரு சமவிகிதமான வ. ச.

put $x = vy$

$$\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{x}{y} = v$$

① $\Rightarrow$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{vy e^{vy} + y}{y e^{vy}}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{y(v e^v + 1)}{y e^v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{v e^v + 1}{e^v} - v$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{v e^v + 1 - v e^v}{e^v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{1}{e^v}$$

$$e^v dv = \frac{dy}{y}$$

Integrating $\int e^v dv = \int \frac{dy}{y}$

$$e^v = \log|y| + \log|C|$$

$$e^{xy} = \log|cy|$$

$$4) 2xy dx + (x^2 + 2y^2) dy = 0$$

$$2xy dx = -(x^2 + 2y^2) dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(x^2 + 2y^2)}{2xy} \quad \text{--- ①}$$

put $x = vy$

$$\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

$$\text{①} \Rightarrow v + y \frac{dv}{dy} = \frac{-(x^2 + 2y^2)}{2vy}$$

$$v + y \frac{dv}{dy} = \frac{-y^2(v^2 + 2)}{2vy^2}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-v^2 - 2}{2v} - v$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-v^2 - 2 - 2v^2}{2v}$$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{-(3v^2 + 2)}{2v}$$

$$\text{--- ②} \quad \frac{2v dv}{(3v^2 + 2)} = -\frac{dy}{y}$$

$$\text{Integrating} \quad \frac{1}{3} \int \frac{6v dv}{(3v^2 + 2)} = - \int \frac{dy}{y}$$

$$\log|3v^2 + 2| = -3 \log|y| + \log|C|$$

$$\log|3v^2 + 2| + 3 \log|y| = \log|C|$$

$$\log|(3v^2 + 2)y^3| = \log|C|$$

put $v = \frac{x}{y}$ and taking anti log

$$(3 \frac{x^2}{y^2} + 2) y^3 = |C|$$

$$|3x^2y + 2y^3| = |C|$$

$$3x^2y + 2y^3 = \pm C$$

(15)

$$(y^2 - 2xy) dx = (x^2 - 2xy) dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy} \quad \text{--- ①}$$

இது ஒரு ஈகோமீத்திரான வ.ச

put $y=vx$ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 x^2 - 2xvx}{x^2 - 2xvx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2(v^2 - 2v)}{x^2(1 - 2v)}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 2v}{1 - 2v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 2v - v + 2v^2}{1 - 2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 3v}{1 - 2v}$$

$$\frac{1-2v}{3(v^2-v)} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1-2v}{v(v-1)} dv = 3 \frac{dx}{x}$$

Using partial fraction (பகுதி) $\left(-\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}\right) dv = 3 \frac{dx}{x}$ பின்னங்களைப் பிரிப்பதை பயன்படுத்த

Integrating $\int \frac{dv}{v-1} + \int \frac{dv}{v} = -3 \int \frac{dx}{x}$

$$\log|v-1| + \log|v| = -3 \log|x| + \log|c|$$

$$\log|v(v-1)| + 3 \log|x| = \log|c|$$

$$\log|(v^2-v)| + \log|x^3| = \log|c|$$

$$\log|x^3(v^2-v)| = \log|c|$$

(taking antilog)

$$|x^3(v^2-v)| = |c|$$

putting $v = \frac{y}{x}$

$$|x^3(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x})| = |c|$$

$$\frac{x^3 y^2}{x^2} - \frac{x^3 y}{x} = \pm c$$

$$xy^2 - x^2 y = \pm c$$

$$xy^2 - x^2 y = c$$

where $c = \pm c$

⑥ $x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ --- ① இது ஒரு ஈகோமீத்திரான வ.ச

put $y=vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow x(v + x \frac{dv}{dx}) = vx - x \cos^2 \frac{vx}{x}$$

$$vx + x^2 \frac{dv}{dx} = vx - x \cos^2 v$$

$$x^2 \frac{dv}{dx} = -x \cos^2 v$$

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Integrating } \int \sec^2 v dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\tan v = -\log|x| + \log|C|$$

$$\tan v = \log\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\tan\frac{y}{x} = \log\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\text{taking antilog } e^{\tan\frac{y}{x}} = \left|\frac{C}{x}\right|$$

$$xe^{\tan\frac{y}{x}} = \pm C$$

$$\therefore xe^{\tan\frac{y}{x}} = C$$

$$\textcircled{7} (1+3e^{y/x})dy + 3e^{y/x}(1-y/x)dx = 0$$

$$(1+3e^{y/x})dy = -3e^{y/x}(1-y/x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3e^{y/x}(1-y/x)}{1+3e^{y/x}} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவர்க்கமான வ.ச.

$$\text{put } y= vx \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^{vx}(1-vx)}{1+3e^{vx}}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^v(1-v)}{1+3e^v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-3e^v + 3ve^v}{1+3e^v} - v$$

$$= \frac{-3e^v + 3ve^v - v(1+3e^v)}{1+3e^v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-(3e^v + v)}{3e^v + 1}$$

$$x dv = \frac{-(3e^v + v) dx}{(3e^v + 1)}$$

$$\left(\frac{3e^v + 1}{3e^v + v}\right) dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{Integrating } \int \frac{3e^v + 1}{3e^v + v} dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\log|3e^v + v| = -\log|x| + \log|C|$$

$$\log|x(3e^v + v)| = \log|C|$$

$$\text{taking antilog } |3xe^{y/x} + vx| = |C|$$

Replace v by y/x $|3xe^{y/x} + y| = |C| \Rightarrow 3xe^{y/x} + y = \pm C$

$$3xe^{y/x} + y = C \quad \text{--- (1)}$$

when $x=1 \Rightarrow y=0$

$$\Rightarrow 3e^0 + 0 = C$$

$$C = 3$$

$$\Rightarrow 3xe^{y/x} + y = 3 //$$

⑧ $(x^2 + y^2) dy = xy dx$, $y(1) = 1$

மேலும் $y(x_0) = e$, x_0 கண்டறியுங்கள்.

$$(x^2 + y^2) dy = xy dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{--- (1)}$$

இது ஒரு சமவர்க்கமான வ.ச

put $y = vx$ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{xvx}{x^2 + v^2x^2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2v}{x^2(1+v^2)} - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2v - v^3}{1+v^2}$$

$$dv \frac{1+v^2}{v^3} = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^3} + \frac{v^2}{v^4}\right) dv = -\frac{dx}{x}$$

integrating

$$\int v^{-3} dv + \int \frac{1}{v} dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-2}}{-2} + \log|v| = -\log|x| + \log|C|$$

$$\log\left|\frac{vx}{e}\right| = \frac{1}{2v^2}$$

taking antilog, $\left|\frac{vx}{e}\right| = e^{\frac{1}{2v^2}}$

Replacing $v = y/x$ $\left|\frac{y}{e}\right| = e^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$y = \pm ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$y = ce^{\frac{x^2}{2y^2}} \quad \text{--- (1)}$$

given $x=1, y=1$ $\Rightarrow 1 = ce^{\frac{1}{2}}$

$$c = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \quad \text{--- (2)}$$

$$y(x_0) = e$$

$$y = e \Rightarrow e = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x_0^2}{2e^2}}$$

$$e^1 e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x_0^2}{2e^2}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x_0^2}{2e^2}$$

$$\frac{3 \times 3e^2}{2} = \frac{x_0^2}{2}$$

$$x_0^2 = 3e^2$$

$$x_0 = \pm \sqrt{3}e //$$

I இது y ல் ஒருவியது $\frac{dy}{dx} + py = q$ இங்கு p, q எவை x ன் சார்புகள்
 (i) தொகையீட்டு காரணி $IF = e^{\int p dx}$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு
 $y(IF) = \int q(IF) dx + c$

II x ல் ஒருவியது $\frac{dx}{dy} + px = q$ இங்கு p, q எவை y ன் சார்புகள்.

(i) தொகையீட்டு காரணி $IF = e^{\int p dy}$
 (ii) தீர்வு y க்கு $x(IF) = \int q(IF) dy + c$

பயிற்சி 10.7

பின்வரும் ஒருவியல் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க,

① $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$

divide by $\cos x$ $\frac{dy}{dx} + y \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

$p = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, q = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

$\frac{dy}{dx} + py = q$ y ல் ஒருவியது

$IF = e^{\int p dx}$
 $= e^{\int \tan x dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$

solution is

$y(IF) = \int q(IF) dx + c$

$y \sec x = \int \sec x \sec x dx + c$

$y \sec x = \int \sec^2 x dx + c$

$y \sec x = \tan x + c$

$\frac{y}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + c$

multiply by $\cos x$
 $y = \sin x + c \cos x$

② $(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1$

divide by $1-x^2$ $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$

$p = -\frac{x}{1-x^2}, q = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} + py = q$ y ல் ஒருவியது

$$\begin{aligned} \text{IF} &= e^{\int p dx} \\ &= e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} \\ &= e^{\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{\log(1-x^2)^{1/2}} \\ &= e^{\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{\log(1-x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\text{IF} = \sqrt{1-x^2}$$

solution is

$$y(\text{IF}) = \int Q(\text{IF}) dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2} \sqrt{1-x^2} dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + C$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x + C$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$p = \frac{1}{x}, \quad Q = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + py = Q \quad \text{இது } y \text{ ல் தொல்வது}$$

$$\begin{aligned} \text{IF} &= e^{\int p dx} \\ &= e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} \end{aligned}$$

$$\text{IF} = x$$

solution is

$$y(\text{IF}) = \int Q(\text{IF}) dx + C$$

$$yx = \int \sin x (x) dx + C$$

$$xy = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{dv} dx + C$$

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx + C \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$xy = -x \cos x + \sin x + C$$

$$xy + x \cos x = \sin x + C$$

$$x(y + \cos x) = \sin x + C$$

$$\textcircled{4} \quad (x^2+1) \frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{x^2+4}$$

divide by x^2+1

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1} y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$$

$$p = \frac{2x}{x^2+1} \quad Q = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} + py = Q \quad \text{இது } y \text{ ல் தொல்வது}$$

$$\text{IF} = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\log(x^2+1)} = x^2+1$$

solution is $y(\text{IF}) = \int Q(\text{IF}) dx + C$

$$y(x^2+1) = \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1} dx + C$$

$$= \int \sqrt{x^2+4} dx + C$$

$$y(x^2+1) = \frac{x}{2} \sqrt{2^2+x^2} + \frac{2^2}{2} \log |x+\sqrt{x^2+4}| + C$$

$$y(x^2+1) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} + 2 \log |x+\sqrt{x^2+4}| + C$$

$$5) (2x-10y^3)dy + ydx = 0$$

$$ydx = -(2x-10y^3)dy$$

$$y \frac{dx}{dy} = -2x + 10y^3$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2x}{y} + \frac{10y^3}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 10y^2$$

$$P = \frac{2}{y} \quad Q = 10y^2$$

$$\frac{dx}{dy} + Px = Q$$

Thus is linear in x

$$IF = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \log y} = e^{\log y^2} = y^2$$

solution is

$$x(IF) = \int Q(IF) dy + C$$

$$xy^2 = \int 10y^2 (y^2) dy + C$$

$$= 10 \int y^4 dy + C$$

$$= \frac{10 y^5}{5} + C$$

$$xy^2 = 2y^5 + C$$

$$6) x \sin x \frac{dy}{dx} + (x \cos x + \sin x) y = \sin x$$

divide by $x \sin x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} y = \frac{\sin x}{x \sin x}$$

$$P = \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} \quad Q = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \text{This is linear in y}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x} dx}$$

$$= e^{\log(x \sin x)} = x \sin x$$

$$\text{solution is } y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y(x \sin x) = \int \frac{1}{x} (x \sin x) dx + C$$

$$xy \sin x = -\cos x + C$$

$$7) (y - e^{\sin^{-1} x}) \frac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$(y - e^{\sin^{-1} x}) \frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2}$$

(2)

$$y - e^{\sin^{-1}x} = -\frac{dy}{dx} \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{1-x^2} + y = e^{\sin^{-1}x}$$

divide by $\sqrt{1-x^2}$ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad Q = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = e^{\sin^{-1}x}$$

solution is $y(IF) = \int Q(IF) dx + C$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\sin^{-1}x} dx + C$$

$$= \int e^t e^t dt + C$$

$$= \int e^{2t} dt + C$$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2t}}{2} + C$$

$$y e^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2} + C$$

put $\sin^{-1}x = t$
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

⑥ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x)\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$

$$P = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} \quad Q = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx}$$

$$= e^{\int \frac{2dt}{1-t^2}} = e^{\int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)}}$$

$$= e^{\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt} = e^{\log(1+t) - \log(1-t)}$$

$$= e^{\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} = e^{\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$IF = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} (1-\sqrt{x}) dx + C$$

$$= x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C //$$

G. Karthikeyan
GGHSS
Thirumakudalur
Thiruvannamalai

(22)

$$(9) (1+x+xy^2) \frac{dy}{dx} + (y+y^3) = 0$$

$$1+x+xy^2 \frac{dy}{dx} = -(y+y^3)$$

$$1+x(1+y^2) = -y(1+y^2) \frac{dx}{dy}$$

$$y(1+y^2) \frac{dx}{dy} + x(1+y^2) = -1$$

divide by $(1+y^2)y$ $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{-1}{y(1+y^2)}$

$P = \frac{1}{y}$ $Q = \frac{-1}{y(1+y^2)}$ This is linear in x

$$IF = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\log y} = y$$

solution is

$$x(IF) = \int Q(IF) dy + C$$

$$xy = \int \frac{-1}{y(1+y^2)} y dy + C$$

$$xy = -\tan^{-1} y + C$$

$$xy + \tan^{-1} y = C$$

$$10) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = \frac{\sin 2x}{\log x}$$

$$P = \frac{1}{x \log x}$$

$$Q = \frac{\sin 2x}{\log x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\log \log x}$$

$$IF = \log x$$

solution is

$$y(IF) = \int Q IF dx + C$$

$$y \log x = \int \frac{\sin 2x}{\log x} \log x dx + C$$

$$y \log x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$y \log x + \frac{\cos 2x}{2} = C$$

$$11) (x+a) \frac{dy}{dx} - 2y = (x+a)^4$$

divide by $x+a$ $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+a} = (x+a)^3$

$$P = -\frac{2}{x+a} \quad Q = (x+a)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{2}{x+a} dx}$$

$$= e^{-2 \log(x+a)} = e^{\log(x+a)^{-2}}$$

$$= (x+a)^{-2}$$

$$IF = \frac{1}{(x+a)^2} \quad (23)$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y \left(\frac{1}{(x+a)^2} \right) = \int \frac{1}{(x+a)^2} (x+a)^2 dx + C$$

$$y \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2}{2} + C$$

$$2y = (x+a)^2 + 2C(x+a)^2$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} - \frac{3x^2}{1+x^3} y$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3} y = \frac{\sin^2 x}{1+x^3}$$

$$P = \frac{3x^2}{1+x^3} \quad Q = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx} = e^{\log(1+x^3)} = (1+x^3)$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \int \frac{\sin^2 x}{1+x^3} (1+x^3) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx + C$$

$$y(1+x^3) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(13) x \frac{dy}{dx} + y = x \log x$$

divide by x

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$$

$$P = \frac{1}{x} \quad Q = \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$$

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx = \int x \log x dx + C$$

$$xy = \int \frac{x \log x}{u} \frac{dx}{dv} + C$$

$$xy = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx + C$$

$$xy = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$4xy = 2x^2 \log x - x^2 + 4C$$

$$u = \log x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(24)

$$14) x \frac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

$$\text{divide by } x \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x \log x$$

$$P = \frac{2}{x} \quad Q = x \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

This is linear in y

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2}$$

$$IF = x^2$$

solution is

$$y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx^2 = \int x \log x \cdot x^2 dx + C$$

$$= \int \log x \cdot \frac{x^3}{3} dx + C \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right.$$

$$= \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx + C$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C$$

$$yx^2 = \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

$$15) \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{Given } y=2 \text{ when } x=1$$

$$P = \frac{3}{x} \quad Q = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad (\text{This is linear in } y)$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \log x} = e^{\log x^3}$$

$$IF = x^3$$

$$\text{solution is } y(IF) = \int Q(IF) dx + C$$

$$yx^3 = \int \frac{1}{x^2} \cdot x^3 dx + C$$

$$yx^3 = \int x dx + C$$

$$yx^3 = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{given } y=2 \text{ when } x=1 \quad \text{--- (2)} \Rightarrow 2(1)^3 = \frac{1^2}{2} + C$$

$$2 - \frac{1}{2} = C$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$\text{--- (1)} \Rightarrow yx^3 = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$2yx^3 = x^2 + 3 //$$

பயன்பாடுகள்

(25)

பயிற்சி-10.8

1. துணுதுயிர்வளின் எப்போதிலும் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கையின் எப்போதும் கீழ்க்காணும் ஆகிய காரணப்படி பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக உள்ளது. இப்போதிலும் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை மூலமாக காரணம் எனில் 10 மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கை என்னவாக இருக்கும்?

t நேரத்தில் பாக்டீரியாக் களின் எண்ணிக்கை A என்க

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = ce^{kt} \quad \text{--- (1)}$$

(i) t=0 எனில் A=A₀

$$\text{--- (1) } \Rightarrow A_0 = ce^0 \quad \boxed{C=A_0}$$

$$\text{--- (1) } \Rightarrow A = A_0 e^{kt} \quad \text{--- (2)}$$

(ii) t=5 எனில் A=3A₀

$$\text{--- (2) } \Rightarrow 3A_0 = e^{5k} A_0 \quad \boxed{e^{5k} = 3}$$

(iii) t=10 எனில் A=?

$$\begin{aligned} \text{--- (2) } \Rightarrow A &= A_0 e^{10k} \\ &= A_0 (e^{5k})^2 \\ &= A_0 (3^2) \\ &= 9A_0 \end{aligned}$$

10 மணி நேர முடிவில்

பாக்டீரியாக் கள் ஆறம்புள்ளவை போல 9 மடங்கு இருக்கும்.

2) ஒரு நகரத்தின் மக்கள்தொகை வளர்ச்சி கீழ்க் t நேரத்தில் உள்ள மக்கள்தொகையின் விகிதமாக உள்ளது. நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40 ஆண்டுகளில் 3,00,000 லிருந்து 4,00,000 ஆக அதிகரித்துள்ளது எனில் t நேரத்தில் அந்நகரத்தின் மக்கள்தொகையை காண்க

t நேரத்தில் மக்கள்தொகை A என்க

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = ce^{kt} \quad \text{--- (1)}$$

t=0 எனில் A=3,00,000

$$\text{--- (1) } \Rightarrow 3,00,000 = ce^0$$

$$\boxed{C=3,00,000}$$

$$\text{--- (1) } \Rightarrow A = 3,00,000 e^{kt} \quad \text{--- (2)}$$

(ii) t=40 எனில் A=4,00,000

$$\text{--- (2) } \Rightarrow 4,00,000 = 3,00,000 e^{40k}$$

$$\frac{4}{3} = e^{40k}$$

$$(e^k)^{40} = \frac{4}{3}$$

$$e^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{40}}$$

$$\text{--- (2) ல் பதிலிட } A = 3,00,000 (e^k)^t$$

$$= 3,00,000 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$$

3) மின்னோட்ட மூலம் தன்மின் தூண்டல் கொண்ட ஒரு மின்சுற்றின் மின் இயக்கு விசையின் எல்லைப்பாடு $E = -Ri + L \frac{di}{dt}$ ஆகும். இங்கு E என்பது மின்சுற்று மிகைக்கப்படும் மின் இயக்குவிசை, R என்பது மின்னோட்ட மூலம் L என்பது தன்மின் தூண்டல் ஆகும். $E=0$ எனும்போது t நேரத்தில் மின்சாரம் i ஐக் காண்க.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

L ஆல் வகுக்க

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$$

$$P = \frac{R}{L}, Q = \frac{E}{L} \text{ என்க}$$

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

இது இல் டோரிய வகைகளுக்கு சமன்பாடு

$$\begin{aligned} IF &= e^{\int P dt} = e^{\int \frac{R}{L} dt} \\ &= e^{\frac{Rt}{L}} \end{aligned}$$

தேவையான தீர்வு

$$i(IF) = \int g(IF) dt + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \int \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}} dt + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{L} \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{\frac{R}{L}} + C$$

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{R} e^{\frac{Rt}{L}} + C \quad \text{--- (1)}$$

$$E=0 \text{ எனில் } i e^{\frac{Rt}{L}} = 0 + C$$

$$i = C e^{-\frac{Rt}{L}}$$

4) மினாடிக்கு 10 மீ வேகத்தில் இயங்கும் ஒரு மின்விசைப்படகின் இயந்திரம் நிறுத்தப்படுகிறது. அதன் பின்னர் அதே வேகம் ஒரு கிரேதத்தில் (இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட பிறகு) மின் விசைப்படகின் வேகம் குறையும் வீதமானது அந்த கிரேதத்தில் அதன் திசைவேகத்திற்கு சமமாக உள்ளது. இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட 2 மினாடி களுக்கு பிறகு விசைப்படகின் திசைவேகம் காண்க.

t கிரேதத்தில் திசைவேகம் V எனில் வேகம் குறையும் வீதம் = திசைவேகம்

$$-\frac{dv}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{v} = -dt$$

$$\text{தொகையிட } \int \frac{dv}{v} = - \int dt$$

$$\log v = -t + \log c$$

$$\log \frac{v}{c} = -t$$

$$\frac{v}{c} = e^{-t}$$

$$v = c e^{-t} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0 \text{ எனில் } v=10$$

$$\text{(1)} \Rightarrow 10 = c e^0 \quad \boxed{c=10}$$

$$\boxed{v = 10 e^{-t}} \quad \text{--- (2)}$$

$$t=2 \text{ எனில் } \text{(2)} \Rightarrow v = 10 e^{-2}$$

$$v = \frac{10}{e^2}$$

5) வரலாற்றில் 5% தொகை ஆண்டு வீதத்தில் ஒருவாடு 10,000 தகவல் வரலாற்றில் குறையச் செய்கிறது. 18 மாதங்களுக்கு பின்னர் அவர் வரலாற்றில் எவ்வளவு தொகை இருக்கும்.

t கிரேதத்தில் வரலாற்றில் குறையும் வீதம் A எனில்

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$k = 5\%$$

$$k = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A$$

$$A = c e^{0.05t} \quad \text{--- (1)}$$

$$t=0 \text{ எனில் } A=10,000$$

$$\text{(1)} \Rightarrow 10,000 = c e^0$$

$$\boxed{c=10,000}$$

$$A = 10,000 e^{0.05t} \quad \text{--- (2)}$$

$$t = \frac{3}{2} \text{ எனில்}$$

$$\boxed{18 \text{ மாதம்} = 1.5 \text{ ஆண்டும்}} \\ \boxed{0.05 \times \frac{3}{2} = \frac{0.075}{2} = 0.0375}$$

$$\text{(2)} \Rightarrow A = 10,000 e^{0.0375}$$

$$A = 10,000 e^{0.0375}$$

6) ஒரு மாதிரியில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் சிதைவு வீதமானது அந்த மாதிரியில் காணப்படும் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 100 ஆண்டு கால இடைவெளியில் ஒரு மாதிரியில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் எண்ணிக்கையில் 10% சிதைவுறுகிறது. 1000 ஆண்டுகள் பின்னர் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்களின் எண்ணிக்கையில் எவ்வளவு மீதமிருக்கும்?

t கிரேதத்தில் (மீதமிருக்கும்)

கதிரியக்க பொருளின் அளவு A எனில்

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A = c e^{kt} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{ii) } t=0 \text{ எனில் } A=A_0$$

$$\text{(1)} \Rightarrow A_0 = c e^0 \quad \boxed{c=A_0}$$

$$A = A_0 e^{kt} \quad (2)$$

(27)

(ii) $t=100$ எனில் $A = \frac{90}{100} A_0$
 $A = \frac{9}{10} A_0$

இப்பிரதிகாரம்

$$\frac{9}{10} A_0 = A_0 e^{100k}$$

$$e^{100k} = \frac{9}{10}$$

(iii) $t=1000$ எனில்

$$\Rightarrow A = A_0 e^{1000k}$$

$$A = A_0 (e^{100k})^{10}$$

$$= A_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = A_0 \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

$$A = A_0 \frac{9^{10}}{10^{10}} \times 100\%$$

$$= A_0 \frac{9^{10}}{10^8} \%$$

7) வெப்பநிலை 25°C ஆக உள்ள ஒரு அளவையில் வைக்கப்பட்டுள்ள நீரின் வெப்பநிலை 10°C ஆகும். 10 நிமிடங்களில் நீரின் வெப்பநிலை 80°C ஆக குறைந்துவிடுகிறது. எனில்

(i) 20 நிமிடங்களுக்கு விண்ணர் நீரின் வெப்பநிலை

(ii) வெப்பநிலை 40°C ஆக இருக்கும்போது நேரம் காண்க.

$$\log\left(\frac{11}{15}\right) = -0.3101, \log 5 = 1.6094$$

t நேரத்தில் வெப்பநிலை T என்க

அளவையின் வெப்பநிலை S என்க

$$S = 25^\circ$$

$$\frac{dT}{dt} \propto T - S$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - S)$$

$$T - S = ce^{kt}$$

$$T - 25 = ce^{kt} \quad (1)$$

(i) $t=0$ எனில் $T=100$

$$\Rightarrow 100 - 25 = ce^0$$

$$c = 75^\circ$$

$$\Rightarrow T - 25 = 75e^{kt} \quad (2)$$

(ii) $t=10$ எனில் $T=80$

$$\Rightarrow 80 - 25 = 75e^{10k}$$

$$\frac{55}{75} = e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{11}{15}$$

(i) $t=20$ எனில்

இப்பிரதிகாரம்

$$T - 25 = 75(e^{10k})^2$$

$$= 75(e^{10k})^2$$

$$= 75 \left[\frac{11}{15} \times \frac{11}{15} \right]$$

$$T - 25 = \frac{121}{3}$$

$$T = 25 + 40.33$$

$$T = 65.33^\circ\text{C}$$

(ii) இலிருந்து $\frac{11}{15} = e^{10k}$

$$\log \frac{11}{15} = 10k$$

$$-0.3101 = 10k$$

$$-0.3101 = k$$

$$k = -0.03101$$

$T=40$ எனில்

இப்பிரதிகாரம்

$$40 - 25 = 75e^{kt}$$

$$\frac{15}{75} = e^{kt}$$

$$e^{kt} = 5$$

$$-kt = \log 5$$

$$t = \frac{1.6094}{0.03101} \times \frac{10000}{10000}$$

$$t = \frac{16094}{310.1}$$

$$t = 51.89 \text{ நிமிடங்கள்}$$

(8) காண 10,00 மணிக்கு எவன் ஒருவர் அமகந்தரா அணை சதமயஸ் அடுப்பிலிருந்து சூடான காலியை வெளியில் எடுத்து அது

குளிர்வதற்காக அருகில் உள்ள
சமையல் அறையில் வைக்கிறார்.
அந்தறத்தில் காபியின் வெப்பநிலை 180°F
ஆகும். 10 நிமிடங்களுக்கு பிறகு அதன்
வெப்பநிலை 160°F ஆகும். சமையல்
அறையின் நிலையான வெப்பநிலை
 70°F எனில்

ii) காலை 10.15 மணிக்கு காபியின்
வெப்பநிலை காண்க.

iii) வெப்பநிலை $130^{\circ}\text{F} - 140^{\circ}\text{F}$ க்கு
இடைப்பட்டதாக இருக்கும்போது அவர்
காபியை அடுத்த நினைத்தால்
அந்தறத்திற்கு இடையில் அவர்காபியை
அடுத்த வேண்டும்.

t நேரத்தில் தேநீரின் வெப்பநிலை
T என்க

$$S = 70$$

S - அறைவெப்பநிலை

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T-S)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-S)$$

$$T-S = ce^{kt}$$

$$T-70 = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் T=180

$$\text{①} \Rightarrow 180 - 70 = ce^0$$

$$c = 110$$

$$T-70 = 110e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

t=10 எனில் T=160

$$\text{②} \Rightarrow 160 - 70 = 110e^{10k}$$

$$\frac{90}{110} = e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{9}{11}$$

iv) t=15 எனில் T=?

② இலிருதியிட

$$T-70 = 110e^{15k} = 110e^{\frac{30k}{2}}$$

$$= 110(e^{10k})^{3/2}$$

$$= 110\left(\frac{9}{11}\right)^{3/2}$$

$$= 110 \cdot \frac{9}{11} \left(\frac{9}{11}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = 0.9045$$

$$= 90(0.9045)$$

$$T-70 = 81.4$$

$$T = 70 + 81.4$$

$$T = 151.4^{\circ}\text{F}$$

v) K க்கு மண்டலிய வேண்டும்

$$\text{③} \Rightarrow \frac{9}{11} = e^{10k}$$

$$\log \frac{9}{11} = 10k$$

$$-0.2006 = k$$

$$k = -0.02006$$

T=130 எனில் t=?

$$\text{②} \Rightarrow 130 - 70 = 110e^{kt}$$

$$\frac{60}{110} = e^{-0.02006t}$$

$$\log \frac{6}{11} = -0.02006t$$

$$-0.606135 = -0.02006t$$

$$t = 30.216 \text{ நிமிடம்}$$

T=140 எனில்

$$\text{②} \Rightarrow 140 - 70 = 110e^{kt}$$

$$\frac{70}{110} = e^{kt}$$

$$\log \frac{7}{11} = kt$$

$$-0.45198 = -0.02006t$$

$$\frac{0.452}{0.02006} = t$$

$$t = 22.53 \text{ நிமிடம்}$$

வெப்பநிலை 130-140 வரும் நேரம்

காலை 10.22 - 10.30 வரை

(தோறாயமாக)

9) ஒரு பத்திரத்தில் 100°C வெப்பநிலையில்
கொதித்து கொண்டிருக்கும் திராசு t=0
மேலும் அதற்கில் அடுப்பி விடுவது
இருக்கி. குளிர்வதற்காக சமையலறையில்
வைக்கப்படுகிறது. 5 நிமிடங்களுக்குப்
பிறகு திரின் வெப்பநிலை 80°C , மேலும்
5 நிமிடங்களுக்கு பிறகு திரின் வெப்பநிலை

www.Padasalai.Net
65°C ஆக குறைகிறது எனில்
சமையலறையின் வெப்பநிலையை காண்க.

t ஆளத்தில் தீரின் வெப்பநிலை T
என்க அறைவெப்பநிலை S என்க

$$\frac{dT}{dt} \propto T-S$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T-S)$$

$$T-S = ce^{kt} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் T=100

$$\text{①} \Rightarrow 100-S = ce^0$$

$$c = 100-S$$

$$\text{①} \Rightarrow T-S = (100-S)e^{kt} \quad \text{--- ②}$$

t=5 எனில் T=80

$$\text{②} \Rightarrow 80-S = (100-S)e^{5k}$$

$$e^{5k} = \frac{80-S}{100-S}$$

t=10 எனில் T=65

$$\text{②} \Rightarrow 65-S = (100-S)e^{10k}$$

$$= (100-S)(e^{5k})^2$$

$$= \frac{(100-S)(80-S)(100-S)}{(100-S)(100-S)}$$

$$65-S = \frac{(80-S)^2}{100-S}$$

$$6500 - 65S + S^2 = 6400 - 160S + S^2$$

$$6500 - 6400 = 160S - 65S$$

$$5S = 100$$

$$S = 20^\circ\text{C}$$

அறைவெப்பநிலை = 20°C

10) ஆரம்பத்தில் ஒரு தொட்டியில்
50 லி. தூய்மையான தீர் 20°C ல் ஒரு லி.
தொட்டிக் குதரம் t=0 ல் ஒரு லி.
தீரில் 2 கிராம் கீதம் கரைக்கப்பட்ட
20°C கரைசலானது ஒரு நிமிடத்திற்கு
3 லி கீதம் தொட்டியில் விடப்படுகிறது.
இக்கரைசல் நன்கு கலக்கப்பட்டு
அதே கீதத்தில் தொட்டியிலிருந்து
வெளியேறுகிறது. t>0 எனும்

www.TrbTnps.Net
குதரம் ஒரு நிமிடம் தொட்டியில்
20°C ல் உள்ள அளவிற்கு காண்க.

t ஆளத்தில் தொட்டியில் 20°C
20°C ல் உள்ள x என்க

$$\frac{dx}{dt} = 20 - x \quad \text{--- ①}$$

$$20 - x = 20 - 20 = 0$$

$$20 - x = 20 - 20 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 20 - x$$

$$= -\frac{3}{50} \left(x - \frac{2 \times 50}{2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{50} (x-100)$$

$$\frac{dx}{x-100} = -\frac{3}{50} dt$$

$$\int \frac{dx}{x-100} = -\frac{3}{50} \int dt$$

$$\log(x-100) = -\frac{3t}{50} + \log c$$

$$\log\left(\frac{x-100}{c}\right) = -\frac{3t}{50}$$

$$\frac{x-100}{c} = e^{-\frac{3t}{50}}$$

$$x-100 = c e^{-\frac{3t}{50}} \quad \text{--- ①}$$

t=0 எனில் x=0

$$\text{①} \Rightarrow 0-100 = ce^0$$

$$c = -100$$

$$\text{①} \Rightarrow x-100 = -100 \left(e^{-\frac{3t}{50}} \right)$$

$$x = 100 - 100 e^{-\frac{3t}{50}}$$

$$x = 100 \left(1 - e^{-\frac{3t}{50}} \right)$$

Dr. கார்த்திகேயன்
திருவாரூர் மாவட்டம்
9715634957

11. நிகழ்தகவு பரவல்கள்

சமவாய்ப்பு மாற்றி

ஒரு சமவாய்ப்பு மாற்றி X என்பது 3 அளவும் கூறுவெளியிலிருந்து R அளவும் மெய்யெண் கணத்திலிருந்து பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் சார்பாகும்.

R ன் 2-ன் இடைவெளி அல்லது 2-ஊடகம் அல்லது கூறுபுள்ளிகளின் தொகுப்பு பிம்பங்கள் S -இல் ஒரு நிகழ்வாக அமைகிறது.

ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவை கொண்டிருக்கும்.

பயிற்சி 11.1

6-காந்திதகையன் திருவாரூர் DT

1) X என்பது ஒன்று சீரான நாளையங்களை ஒரு சமயத்தில் ஒரு குறை சிண்டம் போது விலும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாற்றியான X -இன் மதிப்பையும் அதன் தொகுப்பு பிம்பங்களில் 2-ன் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

கூறுவெளி $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$$n(S) = 8$$

சமவாய்ப்பு மாற்றி X என்பது விலும் பூக்களின் எண்ணிக்கை

$$X = 0, 1, 2, 3$$

$$0 \text{ y } X(HHH) = 0$$

$$1 \text{ y } X(HHT) = 1, X(HTH) = 1, X(THH) = 1$$

$$2 \text{ y } X(HTT) = 2, X(THT) = 2, X(TTH) = 2$$

$$3 \text{ y } X(TTT) = 3$$

$X(W)$ என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க

$$X(W) = \begin{cases} 0, & W = HHH \text{ எனில்} \\ 1, & W = HHT, THH, HTH \\ 2, & W = HTT, THT, TTH \\ 3, & W = TTT \text{ எனில்} \end{cases}$$

அம்மைப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
தொகுப்பில் 2-ஊடகத்தின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

2) 52 சீட்டு (கூட்டு)களை 2-ஊடக ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டுகள் ஒரு சமயத்தில் சமவாய்ப்பு குறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப் பட்ட சீட்டுகள் கருப்பாக இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் மதிப்புகளையும், அதன் தொகுப்பு பிம்பங்களில் 2-ன் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க

$$n(S) = 52C_2$$

$$= \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 1326$$

X என்பது சமவாய்ப்பு மாற்றி.

எடுக்கப்படும் கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$$X = 0, 1, 2$$

$$X(W) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

கருப்பு சீட்டு இல்லாமல் ஒரு கருப்பு சீட்டு இல்லாமல் கருப்பு சீட்டு

X (கருப்பு அல்லாத சீட்டு)

$$= X(0) = 26C_0 \times 26C_2$$

$$= 1 \times \frac{26 \times 25}{1 \times 2} = 325$$

$$X(\text{ஒரு கருப்பு சீட்டு}) = X(1)$$

$$= 26C_1 \times 26C_1$$

$$= 26 \times 26$$

$$= 676$$

$$X(2 \text{ கருப்பு}) = X(2)$$

$$= 26C_2 \times 26C_0$$

$$= \frac{26 \times 25}{1 \times 2} = 325$$

அம்மைப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
தொகுப்பில் 2-ஊடகத்தின் எண்ணிக்கை	325	676	325	1326

3) ஒரு கூட்டத்தில் 5 மாண்களிகள் மற்றும் 4 ஆப்பிள்கள் 2-ன்.

அதிலிருந்து ஒன்று முதல்கள் சமவாய்ப்பு குறையில் தொகுப்புகளை எடுக்கப்படும் ஆப்பிள் பூக்களின்

எண்ணிக்கையின் மதிப்பையும் (2)
ஆதன் ஒருமாவது பிம்ப புள்ளிகளின்
எண்ணிக்கையையும் காண்க.

மொத்த பதங்கள் = 9

ஆப்பிள்	மா
4	5

$$n(S) = 9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

சமவாய்ப்பு மாறி x எண்பது
கிடைக்கும் ஆப்பிள்களின்
எண்ணிக்கை என்க

$$x = 0, 1, 2, 3$$

$$x(W) = \begin{cases} 0 & \text{ஆப்பிள் இல்லாமல்} \\ 1 & 1 \text{ ஆப்பிள்} \\ 2 & 2 \text{ ஆப்பிள்} \\ 3 & 3 \text{ ஆப்பிள்} \end{cases}$$

$$x(0) = 4C_0 \times 5C_3 = 1 \times 5C_3 = \frac{1 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 10$$

$$x(1) = 4C_1 \times 5C_2 = 4 \times 10 = 40$$

$$x(2) = 4C_2 \times 5C_1 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} \times 5 = 30$$

$$x(3) = 4C_3 \times 5C_0 = 4 \times 1 = 4$$

x மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
ஒருமாவது பிம்ப புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	10	40	30	4	84

4) 6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு
பந்துகள் உள்ள ஒரு தொகையினில்
இருந்து இருபந்துகள் எடுக்கையில்
ஒவ்வொரு சிவப்பு பந்திற்கும் ₹15
வெவ்வேறாகவும், ஒவ்வொரு கருப்பு
பந்திற்கும் ₹30.10 தொகையாகவும்
தொன்க, வெவ்வேறு தொகையை x
என குறிப்பிட்டால் x மதிப்புகளையும்,
ஒருமாவது பிம்பங்களில்
புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும்
காண்க.

சிவப்பு கருப்பு மொத்தம்
6 8 14

$$n(S) = 14C_2 = \frac{14 \times 13}{1 \times 2} = 91$$

சமவாய்ப்பு மாறி x எண்பது
மொத்த தொகை

$$x = -10 \times 2, -10 + 15, 15 + 15$$

$$x = -20, 5, 30$$

$$x(W) = \begin{cases} -20 & \text{இரண்டும் கருப்பு எனில்} \\ 5 & \text{ஒரு கருப்பு ஒரு சிவப்பு} \\ 30 & \text{இரண்டும் சிவப்பு} \end{cases}$$

$$x(2 \text{ கருப்பு}) = x(-20) = 6C_0 \times 8C_2 = \frac{1 \times 8 \times 7}{1 \times 2} = 28$$

$$x(1 \text{ கருப்பு } 1 \text{ சிவப்பு}) = x(5) = 6C_1 \times 8C_1 = 6 \times 8 = 48$$

$$x(2 \text{ சிவப்பு}) = x(30) = 6C_2 \times 8C_0 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \times 1 = 15$$

x மதிப்புகள்	-20	5	30	மொத்தம்
ஒருமாவது பிம்ப புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	28	48	15	91

5) ஆறுபக்க பக்கை ஒன்றின் ஒரு
பக்கத்தில் 2 எண்களும் இரு பக்கங்களில்
3 எண்களும் கீழே உள்ள 3 பக்கங்களில்
4 எண்களும் உள்ளது. கீழே உள்ள 2-ஓடும்
பொது கிடைக்கும் கருத்து x எனில்
x மதிப்புகளையும் ஆதன் ஒருமாவது
பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
களையும் காண்க.

I	2	3	3	4	4	4	
II	2	4	5	5	6	6	6
2	4	5	5	6	6	6	
3	5	6	6	7	7	7	
3	5	6	6	7	7	7	
4	6	7	7	8	8	8	
4	6	7	7	8	8	8	
4	6	7	7	8	8	8	

$$n(S) = 36$$

x எண்பது (α, β) முகங்களின்

$$x(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

$$x(2, 2) = 4$$

$$x(2, 3) = x(3, 2) = 5$$

$$x(2, 4) = x(3, 3) = x(4, 2) = 6$$

$$x(4, 3) = x(3, 4) = 7 \quad x(4, 4) = 8$$

x ன் மதிப்புகள் 4, 5, 6, 7, 8

x ன் மதிப்பு	4	5	6	7	8	கூடுதல்
ஒவ்வொரு பிம்பப் பூனிகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

சமவாய்ப்பு மாறியின் வரைபடம்

தனித்தனியாக சமவாய்ப்பு மாற்றி.

முடியுமா அல்லது எண்ணிக்கை மதிப்புகளை மட்டும் பெற்றுள்ள சமவாய்ப்பு மாற்றி

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (PMF)

x என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாற்றி.

$$f(x_k) = P(X=x_k)$$

என்பது நிகழ்தகவு நிறை சார்பு எனப்படும்.

$$\text{குறிப்பு} \leq f(x_k) = 1$$

$$f(x_k) > 0$$

குவிபு பரவல் சார்பு

குவிபு பரவல் சார்பு.

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad x \in R$$

$$x_1 < x_2 < x_3, \dots$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$* f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),$$

$$i=1, 2, 3, \dots$$

பயிற்சி 11.2

1) ஒன்று சீரான நாணயங்கள் ஆகிய இருபத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் காண்க.

$$\text{கூறுகளின் } S = \{HHH, HHT, THH, HTH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$n(S) = 8$$

சமவாய்ப்பு மாற்றி. x என்பது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை என்க

$$x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

x	0	1	2	3	கூடுதல்
பிம்பப் பூனிகள்	1	3	3	1	8

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x=0, 3 \text{ எனில்} \\ \frac{3}{8} & x=1, 2 \text{ எனில்} \end{cases}$$

2) ஒரு அறுபக்க பலகையின் ஒரு பக்கத்தில் 1 எனவும், இருபக்கங்களில் 3 எனவும் ஏனைய இரு பக்கங்களில் 5 எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. பலகை இருமுறை வீசப்படுகிறது, இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கை x குறிக்கிறது.

i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

ii) குவிபு பரவல் சார்பு

$$(iii) P(4 \leq x < 10) \quad (iv) P(x \geq 6)$$

I \ II	1	3	3	5	5	5	n(S)=36
1	2	4	4	6	6	6	சமவாய்ப்பு
3	4	6	6	8	8	8	மாற்றி x
3	4	6	6	8	8	8	என்பது
5	6	8	8	10	10	10	கிடைக்கும்
5	6	8	8	10	10	10	எண்ணிக்கை
5	6	8	8	10	10	10	என்க.
x=2, 4, 6, 8, 10							

$$P(X=2) = \frac{1}{36}, P(X=4) = \frac{4}{36}, P(X=6) = \frac{10}{36}$$

$$P(X=8) = \frac{12}{36}, P(X=10) = \frac{9}{36}$$

iii) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & x=2 \\ \frac{4}{36} & x=4 \\ \frac{10}{36} & x=6 \\ \frac{12}{36} & x=8 \\ \frac{9}{36} & x=10 \end{cases}$$

iv) குவிபு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & x=2 \\ \frac{5}{36} & x=4 \\ \frac{15}{36} & x=6 \\ \frac{27}{36} & x=8 \\ 1 & x=10 \end{cases}$$

$$(ii) P(4 \leq x < 10) = P(X=4) + P(X=6) + P(X=8)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$(iv) P(x \geq 6) = P(X=6) + P(X=8) + P(X=10)$$

$$\frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$$

3) மகன் மற்றும் மகளுக்கு சமவாய்ப்பு ④
நிகழ்தகவுகள் எண்க் கருதி 4
குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில்
2-கள், மகன்களின் எண்ணிக்கையின்
நிகழ்தகவு நிறை சார்பினையும் குவியல்
பரவல் சார்பினையும் காண்க.

$$n(S) = 2^4 = 16$$

சமவாய்ப்பு மாதிரி
X என்பது (ஸப்ஸ்) மகன்களின்
எண்ணிக்கை

$$X = 0, 1, 2, 3, 4$$

X	0	1	2	3	4	ஸமந்தம்
பிம்புள்ளி எண்ணிக்கை	$4C_0$	$4C_1$	$4C_2$	$4C_3$	$4C_4$	16
	1	4	6	4	1	

$$P(X=0) = \frac{1}{16} = P(X=4)$$

$$P(X=1) = \frac{4}{16} = P(X=3)$$

$$P(X=2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & x=0,4 \text{ எனில்} \\ \frac{4}{16} & x=1,3 \text{ எனில்} \\ \frac{6}{16} & x=2 \text{ எனில்} \end{cases}$

(ii) குவியல் பரவல் சார்பு

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{11}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{15}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

குவியல்
பரவல் சார்பு

x	0	1	2	3	4
F(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

4) ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாதிரி.

0, 1 மற்றும் 2 மதிப்புகளை மட்டும்
எதிரொள்க.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{K} & x=0,1,2 \\ 0 & \text{xன் மதிப்பு} \\ & \text{மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

என வகையாகப்பட்ட நிகழ்தகவு

நிறை சார்பிற்கு

- i) K-இன் மதிப்பு ii) குவியல் பரவல் சார்பு
iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றை காண்க.

ப) எதிரொள்கப்பட்டது

f(x) ஒரு நி. நி. சார்பு.

$$\therefore \sum f(x) = 1$$

$$\frac{0^2+1}{K} + \frac{1^2+1}{K} + \frac{2^2+1}{K} = 1$$

$$\frac{1}{K} + \frac{2}{K} + \frac{5}{K} = 1$$

$$\frac{8}{K} = 1$$

$$K = 8$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{8} & x=0,1,2 \\ 0 & \text{மற்றவைகளிலும்} \end{cases}$$

எவ்வளவு

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$

குவியல்
பரவல் சார்பு.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \text{ எனில்} \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq x < 2 \text{ எனில்} \\ 1, & 2 \leq x \text{ எனில்} \end{cases}$$

$$(iii) P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{5}{8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$5) F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \leq x < 0 \\ 0.35 & 0 \leq x < 1 \\ 0.60 & 1 \leq x < 2 \\ 0.85 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தனிநிலை
சமவாய்ப்பு மாதிரியின் குவியல் பரவல்
சார்பிற்கு i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

ii) $P(X < 1)$ மற்றும் iii) $P(X > 2)$
காண்க.

$$P(X=-1) = F(-1) = 0.15$$

$$P(X=0) = F(0) - F(-1) = 0.35 - 0.15 = 0.20$$

$$P(X=1) = F(1) - F(0) = 0.60 - 0.35 = 0.25$$

$$P(X=2) = F(2) - F(1) = 0.85 - 0.60 = 0.25$$

$$P(X=3) = F(3) - F(2) = 1 - 0.85 = 0.15$$

பி) நிகழ்தகவு நினைவு சார்பு

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = P(X=x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

$$\begin{aligned} \text{பி) } P(X < 1) &= P(X \leq 0) = f(0) + f(1) \\ &= P(X = -1) + P(X = 0) \\ &= 0.15 + 0.20 = 0.35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{பி) } P(X \geq 2) &= P(2 \leq X \leq 3) \\ &= P(X=2) + P(X=3) \\ &= 0.25 + 0.15 = 0.40 \end{aligned}$$

6) ஒரு சமவாய்ப்பு மாற்றி X க்கு நிகழ்தகவு நினைவு சார்பு

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

சரிவில் பி) k மதிப்பு பி) $P(2 \leq X \leq 5)$

பி) $P(3 < X)$ ஆகியவற்றை காண்க.

பி) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அளவு நினைவு சார்பு $\therefore \sum f(x) = 1$

$$k^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1$$

$$6k^2 + 5k - 1 = 0$$

$$(k + \frac{6}{5})(k - \frac{1}{6}) = 0$$

$$k = -1 \quad k = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{6}}$$

(ii) x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

$$\text{பி) } P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{12}{36} = \frac{17}{36}$$

$$\begin{aligned} \text{பி) } P(3 < X) &= P(X=4) + P(X=5) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

சரிவில் ஒரு நனிநிலை சமவாய்ப்பு மாற்றின் குவியல் பரவல் சார்பு சரிவில் பி) நிகழ்தகவு நினைவு சார்பு பி) $P(X < 3)$ மற்றும் பி) $P(X \geq 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$f(0) = P(X=0) = F(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = P(X=1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$$

$$f(2) = P(X=2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f(3) = P(X=3) = F(3) - F(2) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$$

$$f(4) = P(X=4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

பி) நிகழ்தகவு நினைவு சார்பு

x	0	1	2	3	4
$f(x) = P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{பி) } P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

பி)

$$P(X < 3) = F(2) = \frac{4}{5}$$

$$\text{பி) } P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - F(1)$$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

தொடர்ச்சியான பரவல்கள்தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாற்றி

ஒரு குறியிட்ட இடைவெளியில்
உள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் சமவாய்ப்பு மாற்றி.

நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு (P.d.f)

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

* $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அ.சார்பு எனில்

$x \in [a, b]$ எனுமாறு கமற்கண்ட
பண்பு இருக்க வேண்டும்,

* $f(x)$ ஒரு நிக.அ.சார்பு எனில்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

குவிப்பு பரவல் சார்பு

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$-\infty < u < \infty$

$$* f(x) = \frac{dF}{dx} \text{ எனில் } F'(x)$$

பயிற்சி 11.3

1) சமவாய்ப்பு மாற்றி. x ன் நிகழ்தகவு
அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} kx e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

எனில் k ன் மதிப்பை காண்க. $f(x)$ ஒரு P.d.f.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} kx e^{-2x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \begin{matrix} a=2 \\ n=1 \end{matrix} \quad k \left[\frac{1!}{2^{1+1}} \right] = 1$$

$k = 2^2$
 $[k=4]$

② சமவாய்ப்பு மாற்றி x ன் நிக.அ.சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{மிகமதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

i) $P(0.2 \leq x < 0.6)$ ii) $P(1.2 \leq x \leq 1.8)$

⑥

$P(0.2 \leq x < 1.5)$ குவிப்பு வரத்தை
காண்க

i) $P(0.2 \leq x < 0.6)$

$$\begin{aligned} &= \int_{0.2}^{0.6} f(x) dx = \int_{0.2}^{0.6} x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.2}^{0.6} = \frac{1}{2} [0.6^2 - 0.2^2] \\ &= \frac{0.36 - 0.04}{2} = \frac{0.32}{2} = 0.16 \end{aligned}$$

ii) $P(1.2 \leq x < 1.8)$

$$\begin{aligned} &= \int_{1.2}^{1.8} f(x) dx \\ &= \int_{1.2}^{1.8} (2-x) dx = - \left[\frac{(2-x)^2}{2} \right]_{1.2}^{1.8} \\ &= - \frac{1}{2} [(2-1.8)^2 - (2-1.2)^2] \\ &= - \frac{1}{2} [0.2^2 - 0.8^2] \\ &= - \frac{1}{2} [-0.60] = 0.30 \end{aligned}$$

iii) $P(0.5 \leq x \leq 1.5)$

$$\begin{aligned} &= \int_{0.5}^{1.5} f(x) dx = \int_{0.5}^1 f(x) dx + \int_1^{1.5} f(x) dx \\ &= \int_{0.5}^1 x dx + \int_1^{1.5} (2-x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 + \left[\frac{(2-x)^2}{2} \right]_1^{1.5} \\ &= \frac{1}{2} [1^2 - 0.5^2 - (2-1.5)^2 + (2-1)^2] \\ &= \frac{1}{2} [1 - 0.25 - 0.5^2 + 1] \\ &= \frac{1}{2} [2 - 0.50] = \frac{1.5}{2} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

3) ஒரு பாஸ் கிறிஸ்தொனாய்ஸ்க்
கிளியோகிக்கப்படும் பாலின் அளவு
சமவாய்ப்பு மாற்றி x என்க, குறைந்தபட்சம்
200 லிட்டர்கள் மற்றும் அதிகபட்சம்

600 லிட்டர்களுடன் தகுந்தகரவு அடர்த்தி காப்பு

$$f(x) = \begin{cases} k & 200 \leq x \leq 600 \\ 0 & \text{மற்றவற்றுக்கான} \end{cases}$$

- (i) k மதிப்பு காண்க
(ii) பரவல் காப்பு காண்க
(iii) 300 லி மற்றும் 500 லி இடையே தினசரி விற்பனை இருப்பதற்கான தகுந்தகரவு காண்க,

(iv) $f(x)$ ஒரு நி.அ.காப்பு.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{200}^{600} k dx = 1 \Rightarrow k[x]_{200}^{600} = 1$$

$$k[600-200] = 1$$

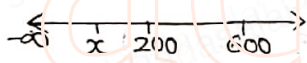
$$400k = 1$$

$$k = \frac{1}{400}$$

(ii) பரவல் காப்பு

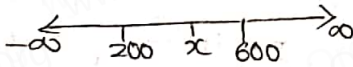
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

a) $x \in (-\infty, 200)$ எனில்



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{200} 0 dx = 0$$

b) $x \in [200, 600]$ எனில்



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{200} 0 dt + \int_{200}^x f(t) dt$$

$$= 0 + \int_{200}^x \frac{1}{400} dt = \frac{1}{400} [t]_{200}^x$$

$$= \frac{x}{400} - \frac{200}{400} = \frac{x}{400} - \frac{1}{2}$$

c) $x \in (600, \infty)$ எனில்

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



www.TrhTnpsc.com

$$F(x) = \int_{-\infty}^{200} f(t) dt + \int_{200}^{600} f(t) dt + \int_{600}^x f(t) dt$$

$$= 0 + 1 + 0$$

$$= 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 200 \\ \frac{x}{400} - \frac{1}{2} & , x \in [200, 600] \\ 1 & , x \in (600, \infty) \end{cases}$$

$$(iii) P(300 < x < 500) = F(500) - F(300)$$

$$= \left(\frac{500}{400} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{300}{400} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{500-300}{400} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

4) சமவாய்ப்பு மாநில x யின் தகுந்தகரவு அடர்த்தி காப்பு

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/3} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

- (i) k மதிப்பு (ii) பரவல் காப்பு (iii) $P(x < 3)$
(iv) $P(5 \leq x)$ (v) $P(x \leq 4)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$f(x)$ ஒரு நி.அ.கா.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} ke^{-x/3} dx = 1$$

$$\frac{k}{-1/3} [e^{-x/3}]_0^{\infty} = 1$$

$$-3k [e^{-\infty} - e^0] = 1$$

$$-3k(-1) = 1 \quad k = \frac{1}{3}$$

(ii) பரவல் காப்பு

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

a) $x \in (-\infty, 0]$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$

b) $x \in (0, \infty)$ எனில்

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= 0 + \int_0^x \frac{1}{3} e^{-t/3} dt$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[e^{-t/3} \right]_0^x = -e^{-x/3} + e^0$$

$$= 1 - e^{-x/3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/3} & x > 0 \text{ மட்டும்} \\ 0 & x \leq 0 \text{ மட்டும்} \end{cases}$$

$$(iii) P(X < 3) = P(X \leq 3) = F(3) \\ = 1 - e^{-3/3} \\ = 1 - e^{-1}$$

$$(iv) P(5 \leq x) = P(x \geq 5) = 1 - P(x < 5) \\ = 1 - F(5) \\ = 1 - (1 - e^{-5/3}) \\ = e^{-5/3}$$

$$(v) P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{-4/3}$$

5) சமவாய்ப்பு மரபில் x ன் திறக்கதையு
அடங்குதல் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{பிற} \end{cases}$$

(i) பதவல் சார்பு $F(x)$

(ii) $P(-0.5 \leq x \leq 0.5)$ காண்க.

(i) a) $x \in (-\infty, -1)$ மட்டும்

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

b) $x \in [-1, 0)$ மட்டும்

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt$$

$$= 0 + \int_{-1}^x (t+1) dt \\ = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^x$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

c) $x \in [0, 1)$ மட்டும்

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= 0 + \int_{-1}^0 (t+1) dt + \int_0^x (t+1) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^x$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - (0 + 0)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x$$

d) $x \in [1, \infty)$ மட்டும்

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \int_0^1 (t+1) dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$= 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & -1 \leq x < 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

(ii) $P(-0.5 \leq x \leq 0.5)$

$$= F(0.5) - F(-0.5)$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{8} + 1\right) - \left(-\frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

$$= 0.75$$

6) சமவாய்ப்பு மரபில் x ன் பதவல் சார்பு $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

மட்டும் (i) திறக்கதையு அடங்குதல் சார்பு $f(x)$

(ii) $P(0.3 \leq x \leq 0.6)$ காண்க

$$f(x) = \frac{d}{dx} (F(x))$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{மற்றவைகளில்} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (ii) P(0.3 \leq x \leq 0.6) &= F(0.6) - F(0.3) \\ &= \frac{1}{2}(0.6^2 + 0.6) - \frac{1}{2}(0.3^2 + 0.3) \\ &= \frac{1}{2}[0.36 + 0.6 - 0.09 - 0.3] \\ &= \frac{1}{2}[0.96 - 0.39] \\ &= \frac{1}{2}[0.57] \\ &= 0.285 \quad (\text{புத்தகவிடை தவறு}) \end{aligned}$$

கணித எதிர்பார்ப்பு

கணித எதிர்பார்ப்பு அல்லது சராசரி

$$E(x) = \begin{cases} \sum x f(x), & x \text{ தனித்த } f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & x \text{ தொடர் } f(x) \end{cases}$$

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum g(x) f(x), & x \text{ தனித்த } f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & x \text{ தொடர் } f(x) \end{cases}$$

$$E(1) = \begin{cases} \sum f(x) = 1 & x \text{ தனி.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 & x \text{ தொடர்} \end{cases}$$

பரவல்

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$V(x) = E(x - E(x))^2 = E(x - \mu)^2$$

பண்புகள்

$$1) E(ax+b) = aE(x) + b$$

$$2) \text{Var}(ax+b) = a^2 \text{Var}(x)$$

பயிற்சி - 11.4

1) கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் மிகப்பெரிய மிகக் குறைந்த சராசரி மற்றும் பரவல் காண்க.

$$ii) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x=2,5 \\ \frac{1}{5} & x=0,1,3,4, \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
xf(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{10}$
x ² f(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{25}{10}$

$$\begin{aligned} \text{சராசரி} &= \sum x f(x) \\ E(x) &= 0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{10} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{10} \\ &= \frac{8}{5} + \frac{7}{10} = \frac{16+7}{10} = \frac{23}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{சராசரி} = 2.3}$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum x^2 f(x) \\ &= 0 + \frac{1}{5} + \frac{4}{10} + \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + \frac{25}{10} \\ &= \frac{29}{10} + \frac{26}{5} = \frac{29+52}{10} = \frac{81}{10} \\ &= 8.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= 8.1 - 2.3^2 \\ &= 8.10 - 5.29 \\ &= 2.81 \end{aligned}$$

$$\text{சராசரி} = 2.3$$

$$\text{பரவல்} = 2.81$$

$$(ii) f(x) = \frac{4-x}{6} \quad x=0,1,2,3$$

x	1	2	3
f(x)	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$xf(x) \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{3}{6}$$

$$x^2 f(x) \quad \frac{3}{6} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{9}{6}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum x f(x) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{3} = 1.667, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum x^2 f(x) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{20}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= \frac{20}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$= 0.56$$

(10)

$$\text{சராசரி} = 1.67 \quad \text{பரவல்} = 0.56$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{மற்றவிடங்களில்} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_1^2 x f(x) dx$$

$$= 2 \int_1^2 x(x-1) dx = 2 \int_1^2 (x^2 - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = 2 \left[\frac{7}{3} - \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{14-9}{6} \right] = \frac{5}{3}$$

$$E(x) = \frac{5}{3}$$

$$E(x^2) = \int_1^2 x^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \cdot 2(x-1) dx$$

$$= 2 \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= 2 \left[\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{16}{4} - \frac{1}{4} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right] = 2 \left[\frac{15}{4} - \frac{7}{3} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{45-28}{12} \right] = \frac{17}{6}$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \frac{17}{6} - \frac{25}{9}$$

$$= \frac{51-50}{18} = \frac{1}{18}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{5}{3}, \quad \text{பரவல்} = \frac{1}{18}$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & x > 0 \text{ லில்} \\ 0 & \text{மற்றவிடங்களில்} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-x/2} dx$$

$$\left[\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \right] \quad n=1, a=\frac{1}{2} \quad = \frac{1!}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$E(x) = 2$$

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x/2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2!}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2+1}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^3$$

$$E(x^2) = 8$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= 8 - 4$$

$$= 4$$

$$\text{சராசரி} = 2$$

$$\text{பரவல்} = 4$$

2) நான்கு சிவப்பு பந்துகள் மற்றும்

3 கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு

கூடைலிருந்து பதிலீடாக இயற்கை

சுருக்கடுத்து இரு பந்துகள் வெளியில்

செக்கையில், சிவப்பு பந்து எடுக்கும்

சாத்திய தகவல்களை X எனக், X-ன்

பிரபலத்தகவல் பின்னர் சார்பையும்

சராசரியையும் காண்க.

சிவப்பு	கருப்பு	மொத்தம்
4	3	7

X என்பது சமவாய்ப்பு மாதிரி.

சிவப்பு பந்து எண்ணிக்கை

$$x = 0, 1, 2$$

$$f(0) = P(X=0) = \frac{4C_0 \cdot 3C_2}{7C_2} = \frac{1 \times 3}{21} = \frac{3}{21}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{4C_1 \cdot 3C_1}{7C_2} = \frac{4 \times 3}{21} = \frac{4}{7}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{4C_2 \cdot 3C_0}{7C_2} = \frac{2 \times 1}{21} = \frac{2}{21}$$

பிரபலத்தகவல் பின்னர் சார்பு

$$x \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$P(X=x) \quad \frac{3}{21} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{2}{21}$$

$$E(x) = \sum x f(x)$$

$$= 0 \left(\frac{3}{21} \right) + 1 \left(\frac{4}{7} \right) + 2 \left(\frac{2}{21} \right)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7} \quad \text{சராசரி} = \frac{8}{7}$$

3) μ மற்றும் σ^2 ஆகியவை முறையாக
தரப்பட்டுள்ள சமயாய்வு மாதிரி. x ன்
நோக்கி மற்றும் பரவல்படி மற்றும்
 $E(x+3)=10$ மற்றும் $E(x+3)^2=116$
எனில் μ மற்றும் σ^2 காண்க

$$\begin{aligned} E(x+3) &= 10 \\ E(x)+3 &= 10 \quad [E(ax+b)=aE(x)+b] \\ E(x) &= 10-3 \\ \mu &= E(x) = 7 \\ E(x+3)^2 &= 116 \\ E(x^2+6x+9) &= 116 \\ E(x^2)+6E(x)+9 &= 116 \\ E(x^2)+6(7)+9 &= 116 \\ E(x^2)+51 &= 116 \\ E(x^2) &= 116-51 \\ E(x^2) &= 65 \\ \text{Var}(x) &= E(x^2)-(E(x))^2 \\ &= 65-49 \\ &= 16 \quad \mu=7 \\ &\quad \sigma^2=16 \end{aligned}$$

4) நான்கு சீரான நாணயங்கள் ஒன்றை
சுண்டப்படுகின்றன. தலைவாழ்கின்
எண்ணிக்கை நிகழ்தகவு நிகழ்தகவு
நிகழ்சார்பு, சராசரி, மற்றும் பரவல்படி
காண்க.

$$\begin{aligned} n(S) &= 2^4 = 16 \\ x \text{ எதிர்ப்பு சமயாய்வு மாதிரி. விடும்} \\ \text{தலைவாழ்கின் எண்ணிக்கை என்க} \\ x &= 0, 1, 2, 3, 4 \\ P(x=0) &= \frac{4C_0}{16} = \frac{1}{16} \quad P(x=1) = \frac{4C_1}{16} = \frac{4}{16} \\ P(x=2) &= \frac{4C_2}{16} = \frac{6}{16} \quad P(x=3) = \frac{4C_3}{16} = \frac{4}{16} \\ P(x=4) &= \frac{4C_4}{16} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

நிகழ்தகவு நிகழ்சார்பு

x	0	1	2	3	4
$P(x=x)$ $P(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
$xf(x)$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$
$x^2f(x)$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{24}{16}$	$\frac{36}{16}$	$\frac{16}{16}$

$$E(x) = \sum x f(x)$$

$$= 0 + \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x) \quad [\text{சராசரி}=2]$$

$$= 0 + \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= 5 - (2)^2 = 5 - 4$$

$$= 1 \quad \text{சராசரி}=2 \\ \text{பரவல்படி}=1$$

5) ஒரு பயணிகள் திரயில் ஆவ்வாறு
உள்ளமணி நேரத்திற்கும் ஒரு நிமிஷத்திற்கு
சரிவான நேரத்தில் வந்து சேரும், ரயில்களை
ஒரு மாணவன் காத்திருக்கும் நேரம்
நேரம் x நிமிடங்கள், x ன் நி.அ.சா

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிறமதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனில் சமயாய்வு மாதிரி. x ன் எதிர்ப்பு
மதிப்பை கணித்து விளக்க.

x எதிர்ப்பு சமயாய்வு மாதிரி.
காத்திருக்கும் நேரம்
 x ஆனது $(0, 30)$ ல் தொடர்ச்சியானது.

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{30} x \frac{1}{30} dx \\ &= \frac{1}{30} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{30} = \frac{1}{30 \times 2} [30^2 - 0] \\ &= \frac{30 \times 30}{30 \times 2} = 15 \\ E(x) &= 15 \end{aligned}$$

எதிர்ப்பு மட்டும் காத்திருப்பு
நேரம் = 15 நிமிடங்கள்.

6) கணினி தயாரிக்கப்படும்போது
ஆயிரக்கணக்கான மணிநேரம் பயன்படுத்த
படும் ஒரு மின்னணு சாதனமானதின்
பகுமதையும் நேரத்தின் அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0 & \text{பிறமதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

கிம்மின்னணு சாதனத்தின் எதிர்ப்பு
படும் ஆயுட்காலத்தை காண்க

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^1 e^{-3x} dx$$

$$= 3 \frac{1!}{3^{2+1}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 3e^{-3x} dx \quad n=2, a=3$$

$$= 3 \frac{2!}{3^{2+1}} = 3 \times \frac{2}{9 \times 3} = \frac{2}{9}$$

($E(X^2)$) காண்க என
கொடுக்கப்படவில்லை ஆனால் விடை
2-ம் மதிப்பு

7) சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் நிகழ்தகவு
வடிவத்தி் காப்பு

$$f(x) = \begin{cases} 16x e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் சராசரி
பரவற்பு காண்க.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x 16x e^{-4x} dx$$

$$= 16 \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x} dx = 16 \frac{2!}{4^{2+1}}$$

$$n=2, a=4$$

$$= 16 \times \frac{2}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} 16x^3 e^{-4x} dx = 16 \times \frac{3!}{4^4}$$

$$= \frac{16 \times 6}{16 \times 16} = \frac{3}{8}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{1}{2}, \text{பரவற்பு} = \frac{1}{8}$$

8) 600 டிசுக்கட்டுகள் கொண்டு ஒரு
பரிசு ₹ 200 க்கும், நான்கு பரிசுகள்
₹.100 க்கும், ஆறு பரிசுகள் ₹ 50 க்கும்
கொடுக்கிறது. டிசுக்கட்டுசெய்யு ₹ 2
செலாவால் ஒரு டிசுக்கட்டு-இன் எதிர்பார்ப்பு
வெற்றித்தொகையை காண்க (இலாப
கொடுக்காததால்)

$$n(C) = 600$$

X என்பது ஒரு டிசுக்கட்டில் கிடைக்கும்
(இலாப) தொகை

$$X = 200, 100, 50, 0$$

$$P(X=200) = \frac{1}{600} \quad P(X=100) = \frac{4}{600}$$

$$P(X=50) = \frac{6}{600} \quad P(X=0) = \frac{589}{600}$$

X	200	100	50	0
$P(X=X)$ $= f(x)$	$\frac{1}{600}$	$\frac{4}{600}$	$\frac{6}{600}$	$\frac{589}{600}$

$x f(x)$	$\frac{200}{600}$	$\frac{400}{600}$	$\frac{300}{600}$	0
----------	-------------------	-------------------	-------------------	---

எதிர்பார்ப்புத்தொகை

$$E(X) = \sum x f(x)$$

$$= \frac{200}{600} + \frac{400}{600} + \frac{300}{600} + 0$$

$$= \frac{900}{600} = \frac{3}{2} = 1.50$$

எதிர்பார்ப்புத்தொகை = ₹ 1.50

டிசுக்கட்டின் விலை = ₹ 2.00

$$\text{இலாபம்} = 1.50 - 2.00$$

$$= -0.50$$

அதாவது,
நஷ்டம் ₹.50

பெர்னாஸ்கி பரவல்

$$X(\text{வெற்றி}) = 1, \quad X(\text{தோல்வி}) = 0$$

என வகையாகவும் ஒரு
பெர்னாஸ்கி கோதனையுடன் இணைந்த
சமவாய்ப்பு மாற்றி X -க்கு

$$f(x) = \begin{cases} P, & x=1 \text{ எனில்} \\ 1-P=q, & x=0 \end{cases}$$

$$0 < P < 1$$

X -பெர்னாஸ்கி சமவாய்ப்பு மாற்றி

$f(x)$ -பெர்னாஸ்கி பரவல்

சராசரி = P , பரவல் = Pq

பா.ருவாய்ப்பு பரவல்

சமவாய்ப்பு மாற்றி X கிடைக்கும்
வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை
குறிக்கிறது என்க, வெற்றியின் நிகழ்தகவு
 p எனக் கொண்டால், $q=1-p$
 X நிகழ்தகவு நிகழ்ச்சார்பு

$$f(x) = nC_x p^x (1-p)^{n-x} \quad x=0,1,\dots,n$$

X - ஆனது பா.ருவாய்ப்பு பரவலை
பின்பற்றுகிறது எனலாம், $X \sim B(n,p)$

சராசரி $= np$, பரவல் $= npq$

பயிற்சி 11.5

i) கீழ்க்காணும் பா.ருவாய்ப்பு பரவல் $B(n,p)$
-க்காக $P(X=k)$ எண்பதை கணிக்க

ப) $n=6, p=\frac{1}{3}, k=3$

$$P(X=x) = nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=k) = 6C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-k}$$

$k=3$

$$P(X=3) = 6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-3}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= 20 \times \frac{2^3}{3^6} = \frac{20 \times 8}{9 \times 9 \times 9}$$

$$= \frac{160}{729}$$

ii) $n=10, p=\frac{1}{5}, k=4$

$$P(X=k) = nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=4) = 10C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-4}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$P(X=4) = 210 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

iii) $n=9, p=\frac{1}{2}, k=7$

$$P(X=k) = nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=7) = 9C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{9-7}$$

$$= 9C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9 \times 8}{1 \times 2} \times \frac{1}{2^9} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$

(3)

2) எந்த டிராப்சிலும் ஒரு இலக்கை
கீழ் 9 தாக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும், புத்து
ஒன்று இலக்கை அவர் தாக்க டிராப்சிக்
கிறார் எனில் இலக்கை
ப) சரியாக 4 ஒன்று ப) குறைந்த
பட்சம் ஒரு ஒன்று தாக்கிட
நிகழ்தகவு காண்க.

$n=10$ வெற்றியின் நிகழ்தகவு $p=\frac{1}{4}$

சமவாய்ப்பு மாற்றி X எனப்படு $q=1-p$
கிடைக்கும் வெற்றிகளின் $q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
எண்ணிக்கை என்க

$X=0,1,2,\dots,10$

பா.ருவாய்ப்பு பரவலை பின்பற்றுகிறது

$$f(x) = nC_x p^x q^{n-x}$$

$$f(x) = 10C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{10-4}$$

ப) சரியாக 4 ஒன்று

$$f(4) = 10C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{10-4}$$

$$= 10C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு ஒன்று

$$= P(X \geq 1)$$

$$= 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - 10C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10-0}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

3) கீழ்க்காணும் சோதனையில்

பா.ருவாய்ப்பு பரவலை பயன்படுத்தி
சமவாய்ப்பு மாற்றி X சராசரி பரவல்
காண்க.

ப) 100 தடவை ஒரு சீரான மூலையில்

எண்ப்படுகிறது தலைகளின்
எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது

$n=100$ $p =$ தலையின்
நிகழ்தகவு

$p=\frac{1}{2}$ $q=1-p$

சராசரி $= np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ $q=1-\frac{1}{2}$

$q=\frac{1}{2}$

பரவல் $= npq$

$$= 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

(11) 240 தடவை ஒரு சீரான பகுதல் (14)
சுண்டிப்படுகிறது. எண் 4 தொண்ணூற்றை
எண்ணிக்கையை x குறிக்கிறது,

$$n=240, \quad p = \text{ஒரு பகுதியில்} \\ 4 \text{ சுண்டிப்படுதல்} \\ p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$$

$$\text{சீராசரி} = np = 240 \times \frac{1}{6} = 40$$

$$\text{பரவல்} = npq = 240 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{200}{3} \\ = 100 \frac{2}{3}$$

(4) ஒரு மின் சோதனையில் ஒரு
குறிப்பிட்ட சாதனத்தின் தாமதம்
திறவுக்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$,
சோதிக்கப்பட்ட ஆந்தில் சரியாக 3
தாமத திறவுக்கான நிகழ்தகவு
கண்டறிக.

$$n=5 \quad p = \text{திறவுக்கான} \\ \text{நிகழ்தகவு}$$

$$p = \frac{3}{4} \quad q = 1-p \\ q = \frac{1}{4}$$

$$\text{சமவாய்ப்பு மாற்றி} x \\ \text{தாமதம் சாதனத்திற்கு} \\ P(X=x) = nCx p^x q^{n-x} \quad x=0,1,\dots,5$$

$$P(X=x) = 5Cx \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$$

$$P(\text{சரியாக 3}) = P(X=3) \\ = 5C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} \\ = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ = 10 \times \frac{3^3}{4^3} \times \frac{1}{4^2} \\ = \frac{270}{1024}$$

5) ஒரு உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஒரு
குறிப்பிட்ட ஒரு மின்னகை கருவியை
ஒரு விநியோகஸ்தர் தொழிலாளர்
செய்திறார். உற்பத்தியாளர் கருவியின்
பகுதலும் வீதம் 5% என கூறுகிறார்.
தொழிலாளர் செய்வப்பட்டதிலிருந்து
10 ரொபட்டுகளை ஒரு பரிசோதனை
சமவாய்ப்பு குறையில் தொந்தரவுக்கி
றார். அவற்றை

(1) குறைந்த பட்சம் ஒரு பகுது

(2) சரியாக 2 பகுது ஆக
கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க.

$$n=10$$

x எண்பது சமவாய்ப்பு மாற்றி பகுதுகளின்
எண்ணிக்கை எண்க

$$p = 5\% = \frac{5}{100} \quad \times \text{ஆனது} \\ p = 0.05 \quad \text{சமவாய்ப்பு பரவலை} \\ q = 1-p \quad \text{பின்பற்றுகிறது} \\ q = 0.95 \quad \text{எனில்}$$

$$P(X=x) = nCx p^x q^{n-x}$$

$$P(X=x) = 10Cx (0.05)^x (0.95)^{10-x}$$

(1) குறைந்தபட்சம் ஒரு குறையாக (பகுது)
கிடைக்க நிகழ்தகவு
 $= P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X < 1)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - 10C_0 (0.05)^0 (0.95)^{10-0}$$

$$= 1 - (0.95)^{10}$$

(2) சரியாக 2 பகுது

$$= P(X=2)$$

$$= 10C_2 (0.05)^2 (0.95)^{10-2}$$

$$= 10C_2 (0.05)^2 (0.95)^8$$

6) ஒரு பருத்தி ஆலை மின்னகைகள் பயன்படும்
காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணி
எனில் நிகழ்தகவு 0.9 எனில் அத்தனைபய
12 மின்னகைகளில்

(1) சரியாக 10 மின்னகைகளின் பயன்படும்
காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணி

(2) குறைந்தபட்சம் 11 மின்னகைகளின்
பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணி

(3) குறைந்தபட்சம் 2 மின்னகைகளின்
பயன்படும் காலம் குறைந்தபட்சம் 600 மணி
இல்லாததற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

$$n=12 \quad p = \text{விநியோகஸ்தர்} \\ p = 0.9 \quad q = 1-p \\ q = 1-0.9 = 0.1$$

சமவாய்ப்பு மாற்றி x எண்பது ஆயுட்காலம்
குறைந்தபட்சம் 600 மணி உடைய மின்னகைகள்
எண்ணிக்கை

$$x \sim B(12, 0.9)$$

$$P(X=x) = nCx p^x q^{n-x}$$

$$P(X=x) = 12Cx (0.9)^x (0.1)^{12-x}$$

$$x=0,1,2,\dots,12$$

1) சரிவாக 10

$$P(X=10) = {}^{12}C_{10} (0.9)^{10} (0.1)^{12-10}$$

$$= {}^{12}C_{10} (0.9)^{10} (0.1)^2$$

ii) குறைந்தபட்சம் 11

$$P(X \geq 11) = P(X=11) + P(X=12)$$

$$= {}^{12}C_{11} (0.9)^{11} (0.1)^{12-11} + {}^{12}C_{12} (0.9)^{12} (0.1)^{12-12}$$

$$= {}^{12}C_{11} (0.9)^{11} (0.1) + 1 \cdot (0.9)^{12}$$

$$= (0.9)^{11} [12(0.1) + 0.9]$$

$$P(X \geq 11) = (2.1) (0.9)^{11}$$

iii) குறைந்தது 2 கிஸ்ஸாமல்
(2 கிஸ்ஸாமல் எண்ணல் = $P(X < 11)$
10 தனித்தனியானவை) = $1 - P(X \geq 11)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - 2.1 (0.9)^{11} = 1 - (2.1) (0.9)^{11}$$

எனவும் காணலாம்

7) ஒரு நகரவாசியு சமவாய்ப்பு மாற்றி X ன் சராசரி திட்டமிடலுக்கம் குறைந்தது 6 மற்றும் 2 ஆகும்.

i) திகழ்த்தகைய திகழ்ச்சாபு

$$(ii) P(X=3)$$

$$(iii) P(X \geq 2) \text{ காண்க,}$$

i) சராசரி = 6 திட்டமிடலுக்கம் = 2
 $np = 6$ — ①
 $\sigma = 2$
 $\sigma^2 = 4$
 $npq = 4$ — ②

$$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{npq}{np} = \frac{4}{6}$$

$$q = \frac{2}{3} \quad p = \frac{1}{3}$$

$$① \Rightarrow n \cdot \frac{1}{3} = 6 \quad \boxed{n=18}$$

ii) திகழ்த்தகைய திகழ்ச்சாபு

$$P(X=x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$P(X=x) = {}^{18}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$

$$x=0,1,2,\dots,18$$

$$(ii) P(X=3) = {}^{18}C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{18-3}$$

$$= {}^{18}C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

$$(iii) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - \left[{}^{18}C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{18-0} + {}^{18}C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{18-1} \right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{18} + 18 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \left[\frac{2}{3} + 6 \right]$$

$$= 1 - \frac{20}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{17}$$

8) $4P(X=4) = P(X=2)$ மற்றும்

$n=6$ எனவும் படி 2 ன்ற $X \sim B(n,p)$ ன் சராசரி மற்றும் திட்டமிடலுக்கம் காண்க,

$$P(X=x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$n=6$$

$$4P(X=4) = P(X=2)$$

$$4({}^6C_4 p^4 q^{6-4}) = {}^6C_2 p^2 q^{6-2}$$

$$4 \times {}^6C_2 p^4 q^2 = {}^6C_2 p^2 q^4$$

$$4 \frac{p^4}{p^2} = \frac{q^4}{q^2}$$

$$4p^2 = q^2$$

வாங்கக் கொடுக்கலாம் காண

$$2p = q$$

$$2p = 1 - p$$

$$2p + p = 1 \quad 3p = 1 \quad \boxed{p = \frac{1}{3}}$$

$$q = 1 - p$$

$$\boxed{q = \frac{2}{3}}$$

$$\text{சராசரி} = np = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$\text{பரவல்} = npq = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{திட்டமிடலுக்கம்} = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

9) 5 சாபுத்தர் சோதனைகளை 2 தடவை

ஒரு நகரவாசியு பரவலின் 1 மற்றும் 2

வெற்றிக் கான திகழ்த்தகைய குறைந்தது

0.4096 மற்றும் 0.2048 ஆகும்.

செ. கார்த்திகேயன்
 ஓ.க.ஆ. அ.ம.மருதிபாளி
 திருமங்கலாபட்ட
 மண்ணார்குடி (TK)
 திருவாரூர் மாவட்டம்
 9715634957

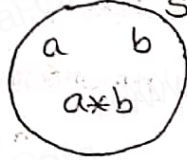
12. தனிதிறவு கணிதம்

நடுநடுப்புச் செயலிகள்

வகையானது (அடைவுப்பண்பு)

செயல்பு மூன்றற்ற கணம் என்க. $\forall a, b \in S$ க்கும் தனித்த $a \times b$ ஆனது $a \times b \in S$ எனும்படி அமைப்பது மூலம், $\times$ ஆனது S ல் நடுநடுப்பு செயலி எனப்படும்.

பெ. நார்த்திகேயன், PGT
சென்னை கிடைக்கக்கூடிய
தமிழ்நாடு மாநிலம்



① பரிமாற்றுப்பண்பு

ஆவனாரு $a, b \in S$ க்கும்
 $a \times b = b \times a$

② சேர்ப்புப் பண்பு

$\forall a, b, c \in S$ க்கு
 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

③ சமனிப் பண்பு

$e \in S$ எனப்படு S -ன் சமனி
மூலம் எனில்
 $\forall a \in S$ க்கு $a \times e = e \times a = a$

④ எதிர்மறைப் பண்பு

b எனப்படு a ன் எதிர்மறை
மூலம் எனில்
 $\forall a \in S$ $a \times b = b \times a = e$
 $b = a^{-1}$ ஆகும்

பயிற்சி 12.1

1. கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள
கணங்களின் மீது வகையானதுக்கப்
பட்டிருக்கும் $\times$ ஆர் நடுநடுப்புச்
செயலியா எனத் தீர்மானிக்க.

ப) R ன் மீது $a \times b = a \cdot |b|$

$a, b \in R$ என்க
 $\Rightarrow |b| \in R$

$a \cdot |b| \in R$

$\Rightarrow a \times b \in R \quad \forall a, b \in R$

$a, b \in R \Rightarrow a \times b \in R$

$\times$ ஆனது R ல் நடுநடுப்பு செயலி ஆகும்

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ -ன் மீது

$a \times b = (a, b)$ -ல் சிலியது

$a, b \in A$ என்க

எடுத்துக்காட்டாக $\min(1, 2) = 1 \in A$

$\min(1, 5) = 1 \in A$

$\min(2, 3) = 2 \in A$

$\therefore \min(a, b) \in A$

$a \times b \in A \quad \forall a, b \in A$

$a, b \in A \Rightarrow a \times b \in A$

$\times$ ஆனது A ல் நடுநடுப்பு செயலியாகும்

(iii) $a \times b = a \sqrt{b}$, R ன் மீது

$a, b \in R$ என்க

மிகை எண்ணுக்கு $a \sqrt{b} \in R$ என
இருப்பினும்

குறை எண்ணுக்கு $a \sqrt{b} \notin R$

$\because 2, -2 \in R$
 $2\sqrt{-2} \notin R$

$\Rightarrow a \times b \notin R$

எனவே $\times$ ஆனது R ல் நடுநடுப்பு

செயலி அல்ல.

2) Z -ன் மீது $\otimes$ என்ற செயலி
பின்வருமாறு வகையானதுக்கப்பட்டுள்ளது.

$(m \otimes n) = m^n + n^m ; \forall m, n \in Z$

$\otimes$ ஆனது Z ல் அடைவுப் பண்பை
பூர்த்தி செய்யுமா?

$m, n \in Z$ என்க

2தாரணமாக $m=2$ $n=-2$ எனில்

$m^n + n^m = 2^{-2} + (-2)^2$

$= \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \notin Z$

$m^n + n^m \notin Z$

$m \otimes n \notin Z$

எனவே $\otimes$ ஆனது Z ல் நடுநடுப்பு
செயலி அல்ல.

③ R ன் மீது $*$ ஆனது

$(a*b) = a+b+ab-7$ என வரையறுக்கப் பட்டால் $*$ R ன் மீது அடையுபவற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில் $3 * \left(\frac{-7}{15}\right)$ காண்க.

$a, b \in R$ என்க

$$\Rightarrow a, b, ab \in R$$

$$\Rightarrow a+b+ab-7 \in R$$

$$\Rightarrow a*b \in R$$

$\therefore *$ ஆனது R ல் அடையுபவற்றுள்ளது

$$3 * \left(\frac{-7}{15}\right)$$

$$a*b = a+b+ab-7$$

$$3 * \left(\frac{-7}{15}\right) = 3 - \frac{7}{15} + 3\left(\frac{-7}{15}\right) - 7$$

$$= \frac{45-7-21-105}{15} = \frac{45-133}{15}$$

$$= \frac{-88}{15}$$

$$\textcircled{4} A = \{a + \sqrt{5}b, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

என்க வடிவக்கொண்ட எருக்கல் A ன் மீது ஆர் $\cap$ -குறியீடு செயலி? ஆகுமா என பரிசோதிக்க.

$$x = a + \sqrt{5}b \quad y = c + \sqrt{5}d$$

$$x, y \in A \text{ மற்றும் } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} xy &= (a + \sqrt{5}b)(c + \sqrt{5}d) \\ &= ac + 5bd + \sqrt{5}ad + \sqrt{5}bc \\ &= (ac + 5bd) + \sqrt{5}(ad + bc) \end{aligned}$$

$$\therefore xy \in A$$

$$x, y \in A \Rightarrow xy \in A$$

$\therefore$ வடிவக்கொண்ட எருக்கல் A ல் ஆர் $\cap$ -குறியீடு செயலியாகும்.

⑤ $*$ என்க ஆர் $\cap$ -குறியீடு செயலி

ஏன் மீது வரையறுக்கப் படுகிறது

$$a*b = \frac{a+b}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}, *$$
 ஆனது

அடையுபவற்று, பரிமாற்றப்பண்பு

②

செய்யப்பண்பு ஆகியவற்றை நினைவு செய்கிறதா என சோதிக்க.

① அடையுபவற்று

$$a, b \in \mathbb{Q} \quad a, b \text{ எப்பன விகிதமுள்ளன}$$

$$\Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow a*b \in \mathbb{Q}$$

$$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a*b \in \mathbb{Q}$$

$*$ ஆனது $\mathbb{Q}$ ல் அடையுபவற்றுள்ளது.

② பரிமாற்றப்பண்பு

$$a*b = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$a*b = b*a \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

$*$ ஆனது பரிமாற்ற பண்பை நினைவு செய்கிறது.

③ செய்யப்பண்பு

$$a*(b*c) = a*\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \left(\frac{b+c}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{2a + b + c}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$a*(b*c) = \frac{2a + b + c}{4} \text{ --- ①}$$

$$(a*b)*c = \left(\frac{a+b}{2}\right)*c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$(a*b)*c = \frac{a+b+2c}{4} \text{ --- ②}$$

①, ② லிருந்து

$$(a*b)*c \neq a*(b*c)$$

$\mathbb{Q}$ ல் $*$ ஆனது செய்யப்பண்பை நினைவு செய்வாது.

(ii) $*$ ஆனது சமனிப்பண்பு மற்றும்

தனிமண்பண்பு ஆகியவை ஏன் மீது உண்மையாகுமா என சோதிக்க

$$a*b = \frac{a+b}{2}; \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

① சமனிப் பண்பு

③

a ∈ G என்க

e என்பது G ன் சமனி உறுப்பு என்க

* ன் வகையணதல்படி $a * e = \frac{a+e}{2}$ e ன் வகையணதல்படி $a * e = a$

$$\frac{a+e}{2} = a$$

$$a+e = 2a$$

$$e = 2a - a$$

$$e = a \quad \forall a \in G$$

ஒவ்வொரு உறுப்பும் சமனி உறுப்பு
இது நவநானது

எனவே * க்கு சமனி உறுப்பு
இல்லை

சமனி பண்பை நிறைவு செய்யாது.

② எதிர்மறைப் பண்பு

* க்கு சமனி உறுப்பு இல்லை

எனவே $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ எனுமாறு
வகையணதல் இயலாது

* ஆனது எதிர்மறை பண்பை
நிறைவு செய்யாது.

(சமனி பண்பு இல்லை எனவே

எதிர்மறை பண்பு இல்லை)

என ஒரு வரியில் எழுதலாம்

⑥ * என்ற ஈடுபாட்டை செயலி ஆனது

 $A = \{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் மீது

பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்படலாம்

பின்வரும் பட்டியலை பூர்த்தி செய்க

*	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

i) அட்ட வகையிலிருந்து

$$b * a = c$$

$$\therefore a * b = c \quad \text{* ஆனது பரிமாற்று பண்பு உடையது}$$

$$\text{ii) } c * a = a \Rightarrow a * c = a$$

$$\text{iii) } b * c = a \Rightarrow c * b = a$$

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

⑦ $A = \{a, b, c, d\}$ என்ற கணத்தின் மீது
* என்ற ஈடுபாட்டை செயலியை பின்வரும்
பட்டியலுடன் கருதுக

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

இது பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும்
சேர்ப்பு பண்புகளை எபற்றுகின்றன?

① பரிமாற்று பண்பு

$$a * b = c \quad \text{ஆனால்} \quad b * a = d$$

$$\Rightarrow a * b \neq b * a$$

$$a * c = b \quad \text{ஆனால்} \quad c * a = c$$

$$\Rightarrow a * c \neq c * a$$

எனவே * ஆனது பரிமாற்று பண்பு
உடையதல்ல.

② சேர்ப்பு பண்பு

$$(a * b) * c = c * c = a$$

$$a * (b * c) = a * b = c$$

$$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

* ஆனது சேர்ப்பு பண்பை
உடையதல்ல.

$$\textcircled{8} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{என்பவைகள்}$$

ஒரு மாதிரியான வகையிலான உடைய
உருவம் கொண்டு பூலியன் அணிகளின் மீது

(i) $A \vee B$ (ii) $A \wedge B$ (iii) $(A \vee B) \wedge C$ (iv) $(A \wedge B) \vee C$ ஆகியவைகளை காண்க.

$$(i) A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) (A \vee B) \wedge C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) (A \wedge B) \vee C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9 (i) M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in R - \{0\} \right\}$$

* என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க * ஆனது M ல் அடையுபவற்றுள்ளதா, அவ்வாறானால் * ஆனது M ன் மீது பரிமாற்று பண்பு, சேர்ப்பு பண்புகளையும் நிறைவு செய்யுமா என சோதிக்க.

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$A, B \in M$ இங்கு $x, y \in R - \{0\}$
 $x \neq 0, y \neq 0$

① அடையுப பண்பு

$A, B \in M$ என்க

$$AB = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \because x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \Rightarrow xy \neq 0 \end{matrix}$$

$AB \in M$

$A, B \in M$ மிகு $AB \in M$

i.e. $A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$

* ஆனது M ல் அடையுபவற்றுள்ளது.

② பரிமாற்று பண்பு

$A, B \in M$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+xy & xy+xy \\ xy+xy & xy+xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2yx & 2yx \\ 2yx & 2yx \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$A * B = B * A$$

* ஆனது M ல் பரிமாற்று பண்பை நிறைவு செய்கிறது

③ சேர்ப்பு பண்பு

அணிகளின் பெருக்கல் எப்போதும்

சேர்ப்பு பண்பிற்கு உட்படம்

$$i.e. A * (B * C) = (A * B) * C.$$

$\forall A, B, C \in M$

* ஆனது M ன் மீது சேர்ப்பு பண்பு நிறைவு செய்கிறது.

$$(ii) M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in R - \{0\} \right\}$$

* என்பது M ன் மீது அடையுபவற்றுள்ளதா (* - அணிப் பெருக்கல்), அவ்வாறு எனில் M -ன் மீது அணிப்பண்பு எதிர்மறை பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனவும் சோதிக்க.

① அடையுப்பண்பு

 $A, B \in M$

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in M$$

$$A * B \in M$$

$$A, B \in M \Rightarrow A * B \in M$$

* ஆனது அடையுப் பண்புடையது.

② சமனிப்பண்பு

$$E = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} \text{ என்பது } M \text{ ன் சமனித்துவத் தனி}$$

$$A \in M \text{ க்கு}$$

$$AE = A$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$$2xe = x$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2} \neq 0 \quad x \in R \setminus \{0\}$$

M ன்

சமனித்துவத்

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$$

இதிலுள்ள $EA = A \quad \forall A \in M$
எனவும் காணலாம்.M ஆனது சமனித்துவப் பண்புடையது
சமனித்துவப் பண்புடையது.

③ எதிர்மறைப் பண்பு

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} \text{ என்பது } A \text{ ன்}$$

எதிர்மறைத் தனி $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in M$

$$AA^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \\ 2xx^{-1} & 2xx^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2xx^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{4x} \in R \setminus \{0\}$$

⑤

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in M \text{ என்பது}$$

A ன் எதிர்மறை

இதிலுள்ள $A^{-1}A = E \quad \forall A \in M$
எனவும் காணலாம்.* ஆனது எதிர்மறைப் பண்புடையது
எனவும்.10) 1) $A = \{0, 1\}$ என்க A ன் மீது
* பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$x * y = x + y - xy \quad * \text{ ஆனது } A \text{ ன் மீது}$$

அடையுப் பண்புடையது அல்லாவிடில்

A ன் மீது * ஆனது பரிமாற்றுப் பண்பு

மற்றும் இசைப்புப் பண்புகளை
நினைவுச் செய்யுமா என இசைக்க?

$$A = \{0, 1\}$$

$$x, y \in A \text{ என்க} \quad x \neq 1, y \neq 1$$

$$x * y = x + y - xy$$

① அடையுப்பண்பு

$$x, y \in A \text{ என்க}$$

$$\therefore x \neq 1, y \neq 1$$

$$x - 1 \neq 0, y - 1 \neq 0$$

$$(x - 1)(y - 1) \neq 0$$

$$xy - x - y + 1 \neq 0$$

$$1 \neq x + y - xy$$

$$x * y \neq 1$$

$$\therefore x * y \in A$$

$$x, y \in A \Rightarrow x * y \in A$$

* ஆனது A ன் அடையுப் பண்புடையது.

② பரிமாற்றுப் பண்பு

$$x, y \in A \text{ என்க}$$

$$x * y = x + y - xy$$

$$= y + x - yx$$

$$x * y = y * x$$

* ஆனது பரிமாற்றுப் பண்புடையது
எனவும்.

③ இசைப்புப் பண்பு

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z$$

P	q	$P \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

④ நிபந்தனை கூற்று ($\rightarrow$)

P	q	$P \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤ இரு நிபந்தனைக் கூற்று ($\leftrightarrow$)

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

⑥ விலக்கி கூற்ற்தல் (Exclusive OR) $\oplus$ OR (∇)

P	q	$P \nabla q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

மையம்:-

ஒரு கூட்டு கூற்றின் மையமதிப்பு எல்லா நினைககளிலும் T ஆக இருப்பின் அக்கூட்டுகூற்று மையம் என்பர். இதை T ண குறிப்பிடுவர்.

குறண்பாடு:-

ஒரு கூட்டு கூற்றின் மைய மதிப்பு எல்லா நினைககளிலும் F ண இருப்பின் அது குறண்பாடு, இதை F ண குறிப்பிடுவர்.

நிச்சயமின்மை:-

ஒரு கூற்று மையமும் அல்ல

⑦

குறண்பாடும் அல்ல எனில் அதற்கு நிச்சயமின்மை என்னுடையர்,

பயிற்சி 12.2

i) P என்பது ஜீபிடர் ஒரு கோளாகும் மற்றும் Q என்பது இந்தியா ஒரு தீவு " மின்வடும்

கூற்றுக்களுக்கிடைய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாகக்கியங்களை அமைக்க

P : ஜீபிடர் ஒரு கோளம்

Q : இந்தியா ஒரு தீவு

ii) $\neg P$ ஜீபிடர் ஒரு கோளம் அல்ல

iii) $P \wedge \neg Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் மற்றும் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல

iv) $\neg P \vee Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் அல்ல அல்லது இந்தியா ஒரு தீவு

v) $P \rightarrow \neg Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் எனில் மின்னார் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல.

vi) $P \leftrightarrow Q$: ஜீபிடர் ஒரு கோளம் எனினால் மட்டுமே இந்தியா ஒரு தீவு.

2. P மற்றும் Q என்க கூற்று மாற்றிகளைக் கொண்டு மின்வடும் ஒருவாறு வாகக்கியத்தையும் குறியீட்டு அமைப்பில் எழுதுக.

P : 19 ஒரு பகா எண்

Q : ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம்

i) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம்

$\neg P \wedge Q$

ii) 19 ஒரு பகா எண் அல்லது ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமமல்ல

$P \vee \neg q$

(iii) 19 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அணைத்து இகாணாங்களுக்கும் சமம்.

 $P \wedge q$

(iv) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல.

 $\neg p$

3) பின்வரும் கூற்றுக்களுக்கு மைய மதிப்பை தீர்மானிக்க

(i) $6+2=5$ எனில், பாலின் திரும்பும் வண்ணம்.

 $p: 6+2=5 \quad F$
 $q: \text{பாலின் திரும்பும் வண்ணம்}$

குறியீடு வடிவம் $p \rightarrow q$
 $F \rightarrow T = T$

$p \rightarrow q$ ன் மைய மதிப்பு T

(ii) சீனா ஆசியாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{3}$ ஒரு முக்கோணம்.

 $p: \text{சீனா ஆசியாவில் உள்ளது}$
 $q: \sqrt{3} \text{ ஒரு முக்கோணம்}$

குறியீடு வடிவம் $p \vee q$
 $F \vee F = F$

$p \vee q$ ன் மைய மதிப்பு F

(iii) $5+5=9$ என்பது மையமல்ல அல்லது $\sqrt{3}$ ஒரு கோணம்

 $p: 5+5=9 \text{ என்பது மையம்}$
 $q: \sqrt{3} \text{ ஒரு கோணம்}$

குறியீடு வடிவம் $\neg p \vee q$

மைய மதிப்பு $T \vee T = T$

$\neg p \vee q$ ன் மைய மதிப்பு T

(iv) 11 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு சமவகத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சமம்.

$p: 11 \text{ ஒரு பகா எண்}$

$q: \text{ஒரு சமவகத்தின் எல்லா பக்கங்களும் சமம்}$

குறியீடு வடிவம் $p \wedge q$
 $T \wedge F = F$

$p \wedge q$ ன் மைய மதிப்பு F

4) பின்வரும் வாக்கியங்களில் எது கூற்று?

(i) $4+7=12$ (இது ஒரு கூற்று)

(ii) நீ என்ன சொத்து கொண்டுக்கொண்டாய்? (கூற்று அல்ல)

(iii) $3^n \leq 81, n \in \mathbb{N}$ (இது ஒரு கூற்று)

(iv) மயில் நுழைந்தேயி பறவை (இது ஒரு கூற்று)

(v) இந்த மனை எவ்வளவு உயரம்! (இது கூற்று அல்ல)

(i), (iii), (iv) இவை கூற்றுகள்.

5) பின்வரும் கூற்றுகள் சம்பந்தமான மனதனை, எதிர்மறை மற்றும் இரண்டாவது களை எடுத்து.

(i) x, y ஒன்றாக இருக்க $x=y$ என்றவாறு உள்ளது எனில், பின்னர் $x^2=y^2$

x, y ஒன்றாக இருக்க

$p: x=y$ என்றவாறு உள்ளது.

$q: x^2=y^2$

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் குறியீடு வடிவம் $[p \rightarrow q]$

① மனதனை:- $q \rightarrow p$

x மற்றும் y ஒன்றாக இருக்க $x^2=y^2$ என்றவாறு உள்ளது எனில் பின்னர் $x=y$.

② எதிர்மறை:- $\neg p \rightarrow \neg q$

x, y என்கிற இரண்டு எண்கள் $x \neq y$ எனில் $x^2 \neq y^2$

③ தொடர்மானம் $\neg q \rightarrow \neg p$

x, y என்கிற இரண்டு எண்கள் $x^2 \neq y^2$ எனில் $x \neq y$

5 (ii) ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் எனில், பின்னர் இது ஒரு செவ்வகமாகும்.

P : ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம்

Q : ஒரு நாற்கரம் ஒரு செவ்வகம்

தொடுக்கப்பட்ட கூற்றின் குறியீட்டு வடிவம் $P \rightarrow Q$

① மறுதலம்: $Q \rightarrow P$

ஒரு நாற்கரமானது செவ்வகம் எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரமாகும்.

② தெரிர்மானம்: $\neg P \rightarrow \neg Q$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சதுரம் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு செவ்வகம் அல்ல.

③ தொடர்மானம்: $\neg Q \rightarrow \neg P$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு செவ்வகம் அல்ல எனில் பின்னர் அது ஒரு சதுரம் அல்ல.

6) பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க.

(i) $\neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

6. கார்த்திகேயன்
இ.க.ஆ., அ.ம.உ.ம.நிவாஸ்
திருமகக்கோட்டை, திருவாரூர் (DT)

(ii) $\neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(iii) $(P \vee Q) \vee (\neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee (\neg Q)$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

(iv) $(\neg P \rightarrow r) \wedge (P \leftrightarrow Q)$

P	Q	r	$\neg P$	$\neg P \rightarrow r$	$P \leftrightarrow Q$	$(\neg P \rightarrow r) \wedge (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

⑦ பின்வரும் கூற்றுகளில் எவைகள்

மெய்மை அல்லது குறையாடுகிற அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க.

ப) $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$

(10)

$$\text{vi) } (P \wedge q) \wedge \neg (P \vee q)$$

P	q	$P \wedge q$	$P \vee q$	$\neg (P \vee q)$	$(P \wedge q) \wedge \neg (P \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் F எனவே இது ஒரு "மெய்யம்"

$$\text{vii) } ((P \vee q) \wedge \neg P) \rightarrow q$$

P	q	$P \vee q$	$\neg P$	$(P \vee q) \wedge \neg P$	$((P \vee q) \wedge \neg P) \rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் T எனவே இது ஒரு மெய்யம்

$$\text{viii) } (P \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow q)$$

P	q	$P \rightarrow q$	$\neg P$	$\neg P \rightarrow q$	$(P \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் F, T இரண்டும் உள்ளது, எனவே இது ஒரு "நிச்சயமின்மை"

$$\text{ix) } ((P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r)$$

P	q	r	$P \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$P \rightarrow r$	$(P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$((P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

மெய்யம் அட்டவகைகளின் கடைசி நிரல் மூலதனம் T எனவே இது ஒரு "மெய்யம்"

$$\text{⑩) } \neg (P \wedge q) \equiv \neg P \vee \neg q \text{ எனக் காட்டுக.}$$

LHS அட்டவகை ①

P	q	$P \wedge q$	$\neg (P \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

RHS அட்டவகை ②

P	q	$\neg P$	$\neg q$	$\neg P \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

8cii)

(1) $\neg(P \rightarrow q) \equiv P \wedge \neg q$ எனக் காட்டுக.

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$P \rightarrow q$	$\neg(P \rightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg q$	$P \wedge \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி உள்ளன.
எனவே $\neg(P \rightarrow q) \equiv P \wedge \neg q$

9). $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$ என நிறுவுக.

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$q \rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் சமமாக உள்ளன.
எனவே $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

10) $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$ ஆகியவைகள் சமானமற்றவை என காட்டுக.

அட்டவணை (1)

P	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

அட்டவணை (2)

P	q	$q \rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் சமமற்றவை.

$$p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$$

11) $\neg(P \leftrightarrow q) \equiv P \leftrightarrow \neg q$ எனக் காட்டுக.

LHS அட்டவணை (1)

P	q	$P \leftrightarrow q$	$\neg(P \leftrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

RHS அட்டவணை (2)

P	q	$\neg q$	$P \leftrightarrow \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

அட்டவணை (1), (2) ன் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி உள்ளன.

$$\therefore \neg(P \leftrightarrow q) \equiv P \leftrightarrow \neg q$$

12) மையமை அட்டவணையை பயன்படுத்தாமல் $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ என்பது ஒரு மையம் அல்லது ஒரு குறண்பாடா என சாதிக்க.

(12)

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \rightarrow P) &\equiv P \rightarrow (\neg Q \vee P) \\
 &\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee P) \\
 &\equiv \neg P \vee (P \vee \neg Q) \quad (\text{இயல்பு பண்பு}) \\
 &\equiv (\neg P \vee P) \vee \neg Q \quad (\because \text{செய்ய பண்பு}) \\
 &\equiv T \vee \neg Q \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

$\therefore P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ என்பது ஒரு மெய்யெனும்

13) மெய்யை அட்டவணைகளை பயன்படுத்தி $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ மற்றும் $\neg P$ என்ற கூற்றுகள் தர்க்க சமனமானவை என்பதை சாதிக்க,

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

அட்டவணையின் இவ்வு மூலம் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரி உள்ளன.

எனவே $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv \neg P$

14) மெய்யை அட்டவணைகளை பயன்படுத்தாமல் $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$ என சாதிக்க.

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\equiv P \rightarrow (\neg Q \vee R) \\
 &\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\
 &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \quad (\because \text{செய்ய பண்பு}) \\
 &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee R
 \end{aligned}$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$$

15) $P \rightarrow (\neg Q \vee R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ என்பதை மெய்யை அட்டவணைகளை பயன்படுத்தி சாதிக்க.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \vee R$	$P \rightarrow (\neg Q \vee R)$	$\neg P \vee (\neg Q \vee R)$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

மெய்யை அட்டவணையின் கடைசி இரண்டு நிரல்கள் சமமாக உள்ளன எனவே $P \rightarrow (\neg Q \vee R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R)$

எ. காந்தியை அமெரிக்கா திரும்பக் கண்டித்தது என்பதை மெய்யெனும்