



Padalsalai's Telegram Groups!

(தலைப்பிற்கு கீழே உள்ள லிங்கை கிளிக் செய்து குழுவில் இணையவும்!)

- Padalsalai's NEWS - Group
https://t.me/joinchat/NIfCqVRBNj9hhV4wu6_NqA
- Padalsalai's Channel - Group
<https://t.me/padasalaichannel>
- Lesson Plan - Group
<https://t.me/joinchat/NIfCqVWwo5iL-21gpzrXLw>
- 12th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_12th
- 11th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_11th
- 10th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_10th
- 9th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_9th
- 6th to 8th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_6to8
- 1st to 5th Standard - Group
https://t.me/Padalsalai_1to5
- TET - Group
https://t.me/Padalsalai_TET
- PGTRB - Group
https://t.me/Padalsalai_PGTRB
- TNPSC - Group
https://t.me/Padalsalai_TNPSC

பள்ளிக்கல்வித்துறை

சிவகங்கை மாவட்டம்

மெல்லக்கற்கும் மாணவர்களுக்கான

பயிற்சி கட்டகம்

2019-2020

வகுப்பு - 12

கணிதம்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும். நிரூபணம்:

A என்பது நேர்மாறு காணத்தக்க n வரிசையுடைய ஓர் அணி என்க. முடியுமானால் B மற்றும் C என்ற இரு அணிகள் A -ன் நேர்மாறு எனக்கொள்வோம். வரையறைப்படி $AB = BA = I_n$ மற்றும் $AC = CA = I_n$ ஆகும். இதன்மூலம் கிடைப்பது $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_n B = B \Rightarrow B = C$ எனவே தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற பூச்சியமற்றக்கோவை அணிக்கு A^{-1} காண்க.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. A, B மற்றும் C என்பன n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி மற்றும் $AB=AC$ எனில் $B=C$. நிரூபணம்:

A என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண இயலும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $AB=AC$ இன் இருபுறமும் முன்புறமாக A^{-1} -ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C$

4. A, B மற்றும் C என்பன n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி மற்றும் $BA=CA$ எனில் $B=C$. நிரூபணம்:

A என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண இயலும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $BA=CA$ இன் இருபுறமும் பின்புறமாக A^{-1} -ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \Rightarrow BI_n = CI_n \Rightarrow B = C$

5. A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணிகள் எனில் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் AB -யும் பூச்சியமற்றக்கோவை அணியாகும் மற்றும் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

நிரூபணம்:

A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணிகள் என்க. எனவே $|A| \neq 0, |B| \neq 0$. எனவே A^{-1} மற்றும் B^{-1} காணமுடியும் மற்றும் அவைகள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். மேலும் AB மற்றும் $B^{-1}A^{-1}$ -களின் பெருக்கற்பலன்கள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் விதிப்படி கிடைப்பது $|AB| = |A||B| \neq 0$ ஆகும். எனவே AB -யும்

பூச்சியமற்றக்கோவை அணியாகும் மற்றும் $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}B = I_n$
எனவே $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6.A என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் A^{-1} -யும் பூச்சியமற்றக்கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$
நிரூபணம்:

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் $|A| \neq 0$ மற்றும் A^{-1} காண இயலும்.
 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ ஆனது பூச்சியமற்றக்கோவை அணியாகும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $AA^{-1} = I_n \Rightarrow (AA^{-1})^{-1} = I \Rightarrow (A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$
இருபுறமும் பின்புறமாக A -ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $(A^{-1})^{-1} = A$.

7.A மற்றும் B என்பன n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணிகள் எனில் $\text{adj}(AB) = (\text{adj}B)(\text{adj}A)$
நிரூபணம்:

$\text{adj} A = |A|A^{-1}$. A -விற்கு பதில் AB எனப்பிரதியிட
 $\Rightarrow \text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|A^{-1}B^{-1}$
 $= (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = (\text{adj}B)(\text{adj}A)$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ எனில் $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ என்ற பண்பை சரிபார்க்க.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}; |A^T| = 14 - 9 = 5; \text{adj}(A^T) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|} \text{adj}(A^T) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

$$|A| = 14 - 9 = 5; \text{adj} A = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

9. $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக.

$$AA^T = A^T A = I_n$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \rightarrow (1)$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \rightarrow$$

(2)

(1), (2) இல் இருந்து, $AA^T = A^T A = I_2$, எனவே A செங்குத்து அணி ஆகும்.

$$10. \text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனில் } \text{adj}(\text{adj}A) - \text{ஐ காண்க.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj}(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} 2-0 & 0-0 & 0-2 \\ 0-0 & 1+1 & 0-0 \\ 0+2 & 0-0 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியை நிரை ஏறுபடிவடிவத்திற்கு மாற்றுக.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2 \end{array}$$

12. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணிகாணல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க: $5x + 2y = 3, 3x + 2y = 5$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = 10 - 6 = 4; \text{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

தீர்வு: $(x, y) = (-1, 4)$

13. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்க:

$$5x - 2y + 16 = 0, x + 3y - 7 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -48 + 14 = -34$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -16 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 16 = 51$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-34}{17} = -2 \quad ; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3$$

$$\text{தீர்வு: } (x, y) = (-2, 3)$$

14. A என்பது ஒற்றை வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் $|adj A|$ என்பது மிகை என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

A என்பது $2m + 1$ வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி என்க. இங்கு $m = 0, 1, 2, \dots$ எனவே $|A| \neq 0$ மற்றும் $|adj A| = |A|^{n-1}$ -ன் படி $|adj A| = |A|^{2m+1-1} = |A|^{2m}$.

$|A|^{2m}$ என்பது எப்பொழுதும் மிகை, எனவே $|adj A|$ ஆனது மிகை

15. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு சேர்ப்பு அணி காண்க.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow adj A = \begin{bmatrix} 8-7 & 7-6 & 3-4 \\ 3-6 & 4-3 & 3-2 \\ 21-12 & 9-14 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

16. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $(adj A)^{-1} = adj(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் $|A| \neq 0$.

$$\text{எனவே } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adj A) \Rightarrow adj A = |A| A^{-1}$$

$$\Rightarrow (adj A)^{-1} = (|A| A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} |A|^{-1} = \frac{1}{|A|} A \rightarrow (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adj A) \Rightarrow adj A = |A| A^{-1}$$

$$A\text{-விற்கு பதில் } A^{-1} \text{ -ஐ பிரதியிட, } adj(A^{-1}) = |A^{-1}| (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A \rightarrow (2)$$

$$(1), (2) \text{ இல் இருந்து, } (adj A)^{-1} = adj(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A$$

17. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $|adj A| = |A|^{n-1}$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

$$A(adj A) = (adj A)A = |A|I_n \Rightarrow \det[A(adj A)] = \det(A)\det(adj A) = \det[|A|I_n]$$

$$\Rightarrow |A||adj A| = |A|^n \Rightarrow |adj A| = |A|^{n-1}$$

18. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $adj(adj A) = |A|^{n-2} A$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

B என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $B(adj B) = (adj B)B = |B|I_n$

$$B = adj A \text{ எனப்பிரதியிட } \Rightarrow adj A (adj (adj A)) = |adj A| I_n$$

$$\Rightarrow adj A (adj (adj A)) = |A|^{n-1} I_n$$

இருபுறமும் முன்புறமாக A -ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது

$$\Rightarrow [A(adj A)](adj (adj A)) = A|A|^{n-1} I_n$$

$$\Rightarrow |A|I_n (adj (adj A)) = A|A|^{n-1} I_n$$

$$\Rightarrow adj (adj A) = |A|^{n-2} A$$

19. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1} adj(A)$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

$$(adj A)^{-1} = \frac{1}{|A|} A \Rightarrow adj A = |A| A^{-1}$$

A -விற்கு பதில் λA எனப்பிரதியிட

$$\Rightarrow adj(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1} = \lambda^n |A| \frac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda^{n-1} |A| A^{-1} = \lambda^{n-1} adj(A)$$

20. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $|adj(adj A)| = |A|^{(n-1)^2}$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

$$adj(adj A) = |A|^{n-2} A$$

$$\Rightarrow |adj(adj A)| = ||A|^{n-2} A| = (|A|^{n-2})^n |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$$

21. A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில் $(adj A)^T = adj(A^T)$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adj A)$$

A -விற்கு பதில் A^T எனப்பிரதியிட

$$\Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|} (adj(A^T))$$

$$\Rightarrow adj(A^T) = |A^T| (A^T)^{-1} = (|A| A^{-1})^T = (adj A)^T$$

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒவ்வொரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A -விற்கும், $A(adj A) = (adj A)A = |A|I_n$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

இத்தேற்றத்தை 3×3 வரிசையுடைய அணியைக் கொண்டு நிரூபிப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ என்க. } \Rightarrow adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A(adj A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I_3 \rightarrow (1)$$

$$(adj A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I_3 \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து $A(adj A) = (adj A)A = |A|I_n$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(9 - 2) + 1(-15 + 3) + 3(-10 + 9) \\ = 14 - 12 - 3 = -12 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow adj A = \begin{bmatrix} 8-7 & 7-6 & 3-4 \\ 3-6 & 4-3 & 3-2 \\ 21-12 & 9-14 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதியை எழுதி நிரூபி. (அல்லது)

A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணிகள் எனில்

அவற்றின் பெருக்கற்பலன் AB -யும் பூச்சியமற்றக்கோவை அணியாகும் மற்றும் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

நிரூபணம்:

A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக்கோவை அணிகள் என்க.

எனவே $|A| \neq 0, |B| \neq 0$. எனவே A^{-1} மற்றும் B^{-1} காணமுடியும் மற்றும்

அவைகள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். மேலும் AB மற்றும் $B^{-1}A^{-1}$ -களின்

பெருக்கற்பலன்கள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். அணிக்கோவைகளின்

பெருக்கற்பலன் விதிப்படி கிடைப்பது $|AB| = |A||B| \neq 0$ ஆகும். எனவே AB -

யும் பூச்சியமற்றக்கோவை அணியாகும் மற்றும்

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

எனவே $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$4. adj A = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ எனில், } A \text{ -ஐ காண்க.}$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj(adj A)$$

$$|adj A| = 7(77 - 35) - 7(-7 - 77) - 7(-15 - 121) = 1764$$

$$\sqrt{|adj A|} = \sqrt{1764} = 42.$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 5 & 7 & 11 \\ 7 & 7 & -7 & 7 \\ -1 & 11 & 7 & -1 \\ 11 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(adj A) = \begin{bmatrix} 77-35 & -35-49 & 49+77 \\ 77+7 & 49+77 & 7-49 \\ -5-121 & 77-35 & 77+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 42 & -84 & 126 \\ 84 & 126 & -42 \\ -126 & 42 & 84 \end{bmatrix}$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj(adj A) = \pm \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 42 & -84 & 126 \\ 84 & 126 & -42 \\ -126 & 42 & 84 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5. adj A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A^{-1} \text{ -ஐ காண்க.}$$

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|adj A|}} adj A$$

$$|adj A| = -1(1 - 4) - 2(1 - 4) + 2(2 - 2) = 3 + 6 + 0 = 9$$

$$\sqrt{|adj A|} = \sqrt{9} = 3$$

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}A|}} \text{adj}A = \pm \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -2+0 & -3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 0 + 6 = 6 ; \text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj}(AB) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

$$|B| = 2 + 0 = 2 ; \text{adj} B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} ; B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj} B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 + 3 = 3 ; \text{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ எனில் $A^2 + xA + yI_2 = 0_2$ எனுமாறு x மற்றும் y -ஐ காண்க.

இதிலிருந்து A^{-1} காண்க.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} ; xA = \begin{bmatrix} 4x & 3x \\ 2x & 5x \end{bmatrix} ; yI_2 = y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

$$A^2 + xA + yI_2 = 0_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x & 3x \\ 2x & 5x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x + y + 22 & 3x + 27 \\ 18 + 2x & 5x + y + 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 27 = 0 \Rightarrow x = -9 \\ 4x + y + 22 = 0 \Rightarrow -36 + y + 22 = 0 \Rightarrow y = 14 \end{cases}$$

$$A^2 + xA + yI_2 = 0_2 \Rightarrow A^2 - 9A - 14I_2 = 0_2$$

சமன்பாட்டின் இருபுறமும் A^{-1} ஆல் பெருக்குக, $A - 9I_2 - 14A^{-1} = 0_2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} [9I_2 - A] = \frac{1}{14} \left[9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$8. F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ எனில், } [F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha) \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

$$|F(\alpha)| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha (\cos \alpha) - 0 + \sin \alpha (\sin \alpha) \\ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha - 0 & 0 - 0 & 0 - \sin \alpha \\ 0 - 0 & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & 0 - 0 \\ 0 + \sin \alpha & 0 - 0 & \cos \alpha - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[F(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{|F(\alpha)|} \text{adj} F(\alpha) \Rightarrow [F(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[F(\alpha)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$

9. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 3A - 7I_2 = 0_2$ எனக்காட்டுக. இதன் மூலம் A^{-1} காண்க.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 - 3 & 15 - 6 \\ -5 + 2 & -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3A = -3 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-7I_2 = -7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A - 7I_2 = \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2$$

$$A^2 - 3A - 7I_2 = 0_2$$

இருபுறமும் முன்புறமாக A^{-1} -ஆல் பெருக்குக,

$$A - 3I_2 - 7A^{-1} = 0_2 \Rightarrow 7A^{-1} = A - 3I_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} [A - 3I_2]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{7} \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

10. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $A(adjA) = (adjA)A = |A|I_2$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

$$|A| = 24 - 20 = 4$$

$$|A|I_2 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(adjA) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

$$(adjA)A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow (3)$$

(1), (2) மற்றும் (3) இல் இருந்து, $A(adjA) = (adjA)A = |A|I_2$

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10 & -9 + 4 \\ -7 + 25 & -21 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = -77 + 90 = 13 ; adj(AB) = \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj(AB) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

$$|B| = -2 + 15 = 13 ; adj B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} ; B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 15 - 14 = 1 ; adj A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 10 - 21 & -4 + 9 \\ -25 + 7 & 10 - 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

12. $adj A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், A -ஐ காண்க.

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adjA|}} adj(adjA)$$

$$|adjA| = 2(24 - 0) - (-4)(-6 - 14) + 2(0 + 24) = 48 - 80 + 48 = 16$$

$$\sqrt{|adjA|} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & -4 & 12 \\ -7 & 2 & 2 & -7 \\ -3 & -2 & 2 & -3 \\ 12 & 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(adjA) = \begin{bmatrix} 24 - 0 & 0 + 8 & 28 - 24 \\ 14 + 6 & 4 + 4 & -6 + 14 \\ 0 + 24 & 8 - 0 & 24 - 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|adjA|}} adj(adjA) = \pm \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

13. $adj A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} -ஐ காண்க..

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|adjA|}} adjA$$

$$|adjA| = 0(12 - 0) - (-2)(36 - 18) + 0(0 + 6) = 0 + 36 + 0 = 36$$

$$\sqrt{|adjA|} = \sqrt{36} = 6$$

$$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|adjA|}} adjA = \pm \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ எனக்காட்டுக.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\sin x \cos x \\ \sin x \cos x & \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\sin x \cos x \\ \sin x \cos x & \cos^2 x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -\sin x \cos x - \sin x \cos x \\ \sin x \cos x + \sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

15. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ எனில், A -ஐ காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} B^{-1} \rightarrow (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -10 + 3 = -7; \text{adj } B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -28 + 7 & -42 + 35 \\ -14 + 7 & -21 + 35 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -21 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றி அணித்தரம் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \end{matrix}$$

கடைசி சமமான அணியானது ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது மற்றும் பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2. எனவே $\rho(A) = 2$

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறை மூலம் நேர்மாறு காண்க.

$$[A|I_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) R_1 \rightarrow (-)R_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) R_1 \rightarrow R_1 + 6R_2$$

$$= [I_2|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ எனும் அணிக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ என்க. } A \text{ -ன் வரிசை } 3 \times 3. \text{ எனவே } \rho(A) \leq \min\{3,3\} = 3$$

$$|A| = 1(-4 + 6) - (-2)(-2 + 30) + 3(2 - 20) = 2 + 56 - 54 = 4 \neq 0$$

$$\therefore \rho(A) = 3$$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow 7R_3 - 4R_2 \\ R_4 \rightarrow 4R_4 - 3R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_4 \rightarrow R_4 + 2R_3$$

கடைசி சமமான அணியானது ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது மற்றும் பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3. எனவே $\rho(A) = 3$.

20. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி

நேர்மாறு காண்க.

$$[A|I_2] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow \frac{1}{2} R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow 2R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{2} R_2$$

$$= [I_2|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

21.பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்க:

$$\frac{3}{x} + 2y = 12, \frac{2}{x} + 3y = 13$$

$$\text{Let } \frac{1}{x} = a, y = b \Rightarrow 3a + 2b = 12 ; 2a + 3b = 13$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 26 = 10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 24 = 15$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{1}{2} ; b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{தீர்வு: } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

2.கலப்பெண்கள்

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1.சுருக்குக:

$$(i) i^7 (ii) i^{1729} (iii) i^{-1924} + i^{2018} (iv) \sum_{n=1}^{102} i^n (v) i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \dots i^{40}$$

$$(i) i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$$

$$(ii) i^{1729} = i^{1728} \cdot i^1 = 1(i) = i$$

$$(iii) i^{-1924} + i^{2018} = i^{-1924} i^0 + i^{2016} i^2 = 1 + (-1) = 0$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{102} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{102}$$

$$= (i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + (i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + \dots + (i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + i^1 + i^2$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + i - 1$$

$$= -1 + i$$

$$(v) i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \dots i^{40} = i^{\frac{40 \times 41}{2}} = i^{820} = i^0 = 1$$

$$2. \text{சுருக்குக: } i^{1947} + i^{1950}$$

$$1947 \div 4 = 4(486) + 3 ; 1950 = 4(487) + 2$$

$$i^{1947} + i^{1950} = (i^4)^{486} (i)^3 + (i^4)^{487} (i)^2 = -i - 1 = -1 - i$$

$$3. \text{சுருக்குக: } i^{1948} - i^{-1869}$$

$$1948 \div 4 = 4(487) + 0 ; 1869 \div 4 = 4(467) + 1$$

$$i^{1948} - i^{-1869} = i^{1948} - \frac{1}{i^{1869}} = (i^4)^{487} (i)^0 - \frac{1}{(i^4)^{467} i^1} = 1 - \frac{1}{i} = 1 - \left(\frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-i}{-i^2}\right) = 1 + i (\because -i^2 = 1)$$

$$4. \text{சுருக்குக: } \sum_{n=1}^{12} i^n$$

$$\sum_{n=1}^{12} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12}$$

$$= i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^4 i + (i^2)^3 + (i^2)^3 i + (i^2)^4 + (i^3)^3 + (i^2)^5 + (i^2)^5 i$$

$$+ (i^2)^6$$

$$= i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1$$

$$= 0$$

$$5. \text{சுருக்குக: } i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$$

$$59 \div 4 = 4(14) + 3$$

$$i^{59} + \frac{1}{i^{59}} = (i^4)^{14} i^3 + \frac{1}{(i^4)^{14} i^3} = -i + \frac{1}{-i} = i + \frac{1}{-i} = -i + \frac{i}{1} = i - i = 0$$

$$6. \text{சுருக்குக: } i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \dots i^{2000}$$

$$= i^{(1+2+3+\dots+2000)}$$

$$= i^{\frac{2000 \times 2001}{2}} = i^{1000 \times 2001} = i^{1000} \cdot i^{2001}$$

$$= (i^4)^{250} (i^4)^{500} i^1 (\because 2001 \div 4 = 4(500) + 1)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot i = i$$

$$7. \text{சுருக்குக: } \sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$$

$$\sum_{n=1}^{10} i^{n+50} = i^{51} + i^{52} + i^{53} + \dots + i^{60}$$

$$= i^{50} (i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10})$$

$$= (i^4)^{12} i^2 (i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1)$$

$$= -1(i - 1) = 1 - i$$

$$8. \frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2} \text{ எனில் கலப்பெண் } z \text{ -ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.}$$

$$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2} \Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$\Rightarrow 2z + 6 = z - 5i + 4zi - 20i^2$$

$$\Rightarrow 2z - z - 4zi = -5i + 20 - 6$$

$$\Rightarrow z - 4zi = 14 - 5i$$

$$\Rightarrow z(1 - 4i) = 14 - 5i$$

$$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i}$$

$$= \left[\frac{14+20}{1^2+(-4)^2} \right] + i \left[\frac{-5+56}{1^2+(-4)^2} \right] = \frac{34}{17} + i \frac{51}{17} = 2 + 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right] + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

9. $z_1 = 3 - 2i$ மற்றும் $z_2 = 6 + 4i$ எனில் $\frac{z_1}{z_2}$ - ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i} = \frac{3-2i}{6+4i} \times \frac{6-4i}{6-4i} = \frac{18-12i-12i-8}{6^2+4^2} = \frac{10-24i}{52} = \frac{2(5-12i)}{52} = \frac{5-12i}{26}$$

10. $z = (2 + 3i)(1 - i)$ எனில் z^{-1} - ஐக் காண்க.

$$z = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$$

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) + i \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{5}{5^2+1^2} \right) + i \left(-\frac{1}{5^2+1^2} \right) = \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$$

11. $z = 5 - 2i$ மற்றும் $w = -1 + 3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$(i) z + w \quad (ii) z - iw \quad (iii) 2z + 3w \quad (iv) zw$$

$$(i) z + w = 5 - 2i - 1 + 3i = 4 + i$$

$$(ii) z - iw = 5 - 2i - i(-1 + 3i) = 5 - 2i + i - 3i^2 = 5 - 2i + i + 3 = 8 - i$$

$$(iii) 2z + 3w = 2(5 - 2i) + 3(-1 + 3i) = 10 - 4i - 3 + 9i = 7 + 5i$$

$$(iv) z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc); a = 5, b = -2, c = -1, d = 3$$

$$zw = (5 - 2i)(-1 + 3i) = [(5)(-1) - (-2)(3)] + i[(5)(3) + (-2)(-1)] = [-5 + 6] + i[15 + 2] = 1 + 17i$$

12. கீழ்க்காண்பவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக:

$$(i) \overline{(5 + 9i)} + \overline{(2 - 4i)} \quad (ii) \frac{10-5i}{6+2i} \quad (iii) \overline{3i} + \frac{1}{2-i}$$

$$(i) \overline{(5 + 9i)} + \overline{(2 - 4i)} = \overline{5 + 9i} + \overline{2 - 4i} = 5 - 9i + 2 + 4i = 7 - 5i$$

$$(ii) \frac{10-5i}{6+2i} = \frac{10-5i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i} = \frac{60-20i-30i+10i^2}{6^2+2^2} = \frac{60-50i-10}{40} = \frac{50-50i}{40} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}i$$

$$(iii) \overline{3i} + \frac{1}{2-i} = -3i + \frac{1}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = -3i + \frac{2+i}{2^2+1^2} = -3i + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i = \frac{2}{5} + \frac{-15i+i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{14}{5}i$$

13. $z = x + iy$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளின் செவ்வக வடிவினைக் காண்க.

$$(i) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right)$$

$$(ii) \operatorname{Re}(i\bar{z})$$

$$(iii) \operatorname{Im}(3z + 4\bar{z} - 4i)$$

$$(i) \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i \Rightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (\text{or})$$

$$\therefore \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \operatorname{Re}(z^{-1}) = \operatorname{Re} \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i \right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$(ii) i\bar{z} = i(\overline{x+iy}) = i(x-iy) = ix - i^2y = y + ix$$

$$\therefore \operatorname{Re}(i\bar{z}) = \operatorname{Re}(-y + ix) = y$$

$$(iii) 3z + 4\bar{z} - 4i = 3(x+iy) + 4\overline{x+iy} - 4i = 3x + 3yi + 4(x-iy) - 4i = 3x + 3yi + 4x - 4yi - 4i = 7x - yi - 4i = 7x + i(-y-4)$$

$$\therefore \operatorname{Im}(3z + 4\bar{z} - 4i) = \operatorname{Im}(7x + i(-y-4)) = -y-4$$

$$14. \text{கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க: (i) } \left| \frac{2+i}{-1+2i} \right|$$

$$(ii) |(1+i)(2+3i)(4i-3)| \quad (iii) \left| \frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2} \right|$$

$$(i) \left| \frac{2+i}{-1+2i} \right| = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$(ii) |(1+i)(2+3i)(4i-3)| = |1-i||2+3i||-3+4i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{26}$$

$$(iii) \left| \frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2} \right| = \frac{|i||2+i|^3}{|1+i|^2} = \frac{\sqrt{1^2} \cdot (\sqrt{2^2+1^2})^3}{(\sqrt{1^2+1^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}^3}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $(2+i)x + (1-i)y + 2i - 3$ மற்றும் $x + (-1+2i)y + 1 + i$ ஆகிய

கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$(2+i)x + (1-i)y + 2i - 3 = x + (-1+2i)y + 1 + i$$

$$\Rightarrow 2x + ix + y - yi + 2i - 3 = x - y + 2yi + 1 + i$$

$$\Rightarrow (2x + y - 3) + i(x - y + 2) = (x - y + 1) + i(2y + 1)$$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை சமன்படுத்தவும்,

$$2x + y - 3 = x - y + 1 \Rightarrow x + 2y = 4 \rightarrow (1)$$

$$x - y + 2 = 2y + 1 \Rightarrow x - 3y = -1 \rightarrow (2)$$

சமன் (1), (2) -ஐத் தீர்க்க, $x = 2, y = 1$

2. $z = 2 + 3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க.

$$(i) z, iz \text{ மற்றும் } z + iz \quad (ii) z, -iz \text{ மற்றும் } z - iz$$

$$(i) z = 2 + 3i = (2, 3)$$

$$iz = i(2 + 3i) = 2i + 3i^2 = -3 + 2i = (-3, 2)$$

$$z + iz = 2 + 3i + i(2 + 3i) = 2 + 3i - 3 + 2i = -1 + 5i = (-1, 5)$$



$$(ii) z = 2 + 3i = (2, 3)$$

$$-iz = -i(2 + 3i) = -2i - 3i^2 = 3 - 2i = (3, -2)$$

$$z - iz = 2 + 3i - i(2 + 3i) = 2 + 3i + 3 - 2i = 5 + i = (5, 1)$$



3. $(3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5$ மற்றும் $2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$z_1 = (3 - i)x - (2 - i)y + 2i + 5$$

$$= 3x - xi - 2y + yi + 2i + 5$$

$$= (3x - 2y + 5) + i(-x + y + 2)$$

$$z_2 = 2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i$$

$$= 2x - y + 2yi + 3 + 2i$$

$$= (2x - y + 3) + i(2y + 2)$$

$$\text{தரவு: } z_1 = z_2 \Rightarrow (3x - 2y + 5) + i(-x + y + 2) = (2x - y + 3) + i(2y + 2)$$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை சமன்படுத்த,

$3x - 2y + 5 = 2x - y + 3$	$-x + y + 2 = 2y + 2$
$3x - 2y + 5 - 2x + y - 3 = 0$	$-x + y + 2 - 2y - 2 = 0$
$x - y = -2 \rightarrow (1)$	$-x - y = 0 \rightarrow (2)$

$$(1) + (2) \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y = 1$$

$$y = -1 \text{ என சமன் (1)-ல் பிரதியிடுக } \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

4. $z_1 = 1 - 3i, z_2 = -4i$ மற்றும் $z_3 = 5$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

$$(i)(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(ii)(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$(i)(z_1 + z_2) + z_3 = (1 - 3i - 4i) + 5 = 1 - 7i + 5 = 6 - 7i \rightarrow (1)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = 1 - 3i + (-4i + 5) = 1 - 3i - 4i + 5 = 6 - 7i \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$$(ii)(z_1 z_2) z_3 = [(1 - 3i)(-4i)] 5 = (-4i + 12i^2) 5$$

$$= (-4i - 12) 5 = -60 - 20i \rightarrow (1)$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (1 - 3i)[(-4i)(5)] = (1 - 3i)[-20i]$$

$$= -20i + 60i^2 = -60 - 20i \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

5. $z_1 = 3, z_2 = -7i$ மற்றும் $z_3 = 5 + 4i$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

$$(i) z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (ii) (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

$$(i) z_1 \cdot (z_2 + z_3) = 3(-7i + 5 + 4i) = 3(5 - 3i) = 15 - 9i \rightarrow (1)$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 = (3)(-7i) + (3)(5 + 4i) = -21i + 15 + 12i = 15 - 9i \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

$$(ii) (z_1 + z_2) \cdot z_3 = (3 - 7i)(5 + 4i)$$

$$= 15 + 12i - 35i - 28i^2 = 15 + 12i - 35i + 28 = 43 - 23i \rightarrow (1)$$

$$z_1 z_3 + z_2 z_3 = (3)(5 + 4i) + (-7i)(5 + 4i)$$

$$= 15 + 12i - 35i - 28i^2 = 15 + 12i - 35i + 28 = 43 - 23i \rightarrow (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து, $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

6. $z_1 = 2 + 5i, z_2 = -3 - 4i$ மற்றும் $z_3 = 1 + i$ z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவற்றின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் நேர்மாறுகளைக் காண்க.

$z_1 = 2 + 5i$ -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_1 = -2 - 5i$ ஆகும்.

$z_2 = -3 - 4i$ -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_2 = 3 + 4i$ ஆகும்.

$z_3 = 1 + i$ -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z_3 = -1 - i$ ஆகும்.

$$z = x + iy \text{ -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு } z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$z_1 = 2 + 5i \text{ -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு } z_1^{-1} = \left(\frac{2}{2^2 + 5^2} \right) + i \left(-\frac{5}{2^2 + 5^2} \right) = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$$

$$z_2 = -3 - 4i \text{ -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு } z_2^{-1} = \left(\frac{-3}{(-3)^2 + (-4)^2} \right) + i \left(-\frac{-4}{(-3)^2 + (-4)^2} \right) = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

$$z_3 = 1 + i \text{ -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு } z_3^{-1} = \left(\frac{1}{1^2 + 1^2} \right) + i \left(-\frac{1}{1^2 + 1^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$7. \frac{3+4i}{5-12i} \text{ -ஐ } x + iy \text{ வடிவில் எழுதுக. இதிலிருந்து மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளைக் காண்க.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right] + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{3+4i}{5-12i} = \left[\frac{15-48}{5^2+(-12)^2} \right] + i \left[\frac{20+36}{5^2+(-12)^2} \right] = \frac{-33+56i}{169} = -\frac{33}{169} + \frac{56}{169}i$$

$$\text{மெய் பகுதி} = -\frac{33}{169}, \text{ கற்பனைப் பகுதி} = \frac{56}{169}$$

8. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 12i$ மற்றும் $z_3 = 6 + 8i$ எனில் $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_2 - z_3|$ மற்றும் $|z_1 + z_3|$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|z_2| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|z_3| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|z_1 + z_2| = |3 + 4i + 5 - 12i| = |8 - 8i| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{2 \times 64} = 8\sqrt{2}$$

$$|z_2 - z_3| = |5 - 12i - (6 + 8i)| = |-1 - 20i| = \sqrt{(-1)^2 + (-20)^2} = \sqrt{401}$$

$$|z_1 + z_3| = |3 + 4i + 6 + 8i| = |9 + 12i| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

9. z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகிய கலப்பெண்கள் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1$ என்றவாறு இருந்தால் $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right|$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

$$|z_2| = 1 \Rightarrow |z_2|^2 = 1 \Rightarrow z_2 \bar{z}_2 = 1 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

$$|z_3| = 1 \Rightarrow |z_3|^2 = 1 \Rightarrow z_3 \bar{z}_3 = 1 \Rightarrow \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$$

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

10. $|z| = 2$ எனில் $3 \leq |z + 3 + 4i| \leq 7$ எனக்காட்டுக.

$z_1 = z$ மற்றும் $z_2 = 3 + 4i$ என்க.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\Rightarrow |2 - \sqrt{3^2 + 4^2}| \leq |z + 3 + 4i| \leq 2 + \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow |2 - 5| \leq |z + 3 + 4i| \leq 2 + 5$$

$$\Rightarrow |-3| \leq |z + 3 + 4i| \leq 7$$

$$\Rightarrow 3 \leq |z + 3 + 4i| \leq 7$$

11. $6 - 8i$ வர்க்கமூலம் காண்க.

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \right)$$

$$a = 6, b = -8, |z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{6+8i} = \pm \left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} - i \frac{8}{8} \sqrt{\frac{10-6}{2}} \right) = \pm(\sqrt{8} - i\sqrt{2}) = \pm(2\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

12. $10 - 8i, 11 + 6i$ ஆகிய புள்ளிகளில் எப்புள்ளி $1 + i$ -க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்?

$$z_1 \text{ மற்றும் } z_2 \text{ -க்கு இடையே உள்ள தூரம்} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$z = 1 + i, z_1 = 10 - 8i$$

$$z z_1 = \sqrt{(1-10)^2 + (1+8)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = \sqrt{2 \times 81} = 9\sqrt{2}$$

$$z = 1 + i, z_2 = 11 + 6i$$

$$z z_2 = \sqrt{(1-11)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5 \times 25} = 5\sqrt{5}$$

$5\sqrt{5} < 9\sqrt{2}$ எனவே $11 + 6i$ ஆனது $1 + i$ -க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்.

13. $|z| = 3$ எனில் $7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$ எனக்காட்டுக.

$z_1 = z$ மற்றும் $z_2 = 6 - 8i$ என்க.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\Rightarrow |3 - \sqrt{6^2 + 8^2}| \leq |z + 6 - 8i| \leq 3 + \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$\Rightarrow |3 - 10| \leq |z + 6 - 8i| \leq 3 + 10$$

$$\Rightarrow |-7| \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$$

$$\Rightarrow 7 \leq |z + 6 - 8i| \leq 13$$

14. $|z| = 1$ எனில் $2 \leq |z^2 - 3| \leq 4$ எனக்காட்டுக.

$z_1 = z^2$ மற்றும் $z_2 = -3$ என்க.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\Rightarrow ||z|^2 - |-3|| \leq |z^2 - 3| \leq |z|^2 + |-3|$$

$$\Rightarrow |1^2 - 3| \leq |z^2 - 3| \leq 1^2 + 3$$

$$\Rightarrow |-2| \leq |z^2 - 3| \leq 4$$

$$\Rightarrow 2 \leq |z^2 - 3| \leq 4$$

15. $z^3 + 2\bar{z} = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும் என நிறுவுக.

$$z^3 + 2\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow z^3 = -2\bar{z}$$

$$\Rightarrow |z^3| = |-2||\bar{z}|$$

$$\Rightarrow |z^3| = 2|z|$$

$$\Rightarrow |z|^3 - 2|z| = 0$$

$$\Rightarrow |z|(|z|^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow |z| = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ என்பது ஒரு தீர்வு, } |z|^2 - 2 = 0 \Rightarrow z\bar{z} - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{2}{z}}$$

$$\bar{z} = \frac{2}{z} \text{ என } z^3 + 2\bar{z} = 0 \text{ இல் பிரதியிடுக,}$$

$$\Rightarrow z^3 + 2\left(\frac{2}{z}\right) = 0 \Rightarrow z^4 + 4 = 0 \text{ இதற்கு நான்கு தீர்வுகள் இருக்கும்.}$$

எனவே $z^3 + 2\bar{z} = 0$ -க்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும்.

16. கீழ்க்காண்பவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க :

$$(i) 4 + 3i \quad (ii) -6 + 8i \quad (iii) -5 - 12i.$$

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \right)$$

$$(i) 4 + 3i$$

$$a = 4, b = 3, |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4 + 3i} = \pm \left(\sqrt{\frac{5+4}{2}} + i \frac{3}{3} \sqrt{\frac{5-4}{2}} \right) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(ii) -6 + 8i$$

$$a = -6, b = 8, |z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{-6 + 8i} = \pm \left(\sqrt{\frac{10-6}{2}} + i \frac{8}{8} \sqrt{\frac{10+6}{2}} \right) = \pm (\sqrt{2} + i\sqrt{8}) = \pm (\sqrt{2} + i2\sqrt{2})$$

$$(iii) -5 - 12i$$

$$a = -5, b = -12, |z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{-5 - 12i} = \pm \left(\sqrt{\frac{13-5}{2}} + i \frac{-12}{12} \sqrt{\frac{13+5}{2}} \right) = \pm (\sqrt{4} - i\sqrt{9}) = \pm (2 - 3i)$$

17. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.

$$(i) |z| = |z - i| \quad (ii) |2z - 3 - i| = 3$$

$z = x + iy$ என்க.

$$\begin{aligned} (i) |z| = |z - i| &\Rightarrow |x + iy| = |x + iy - i| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ &\Rightarrow 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(ii) |2z - 3 - i| = 3 \Rightarrow |2(x + iy) - 3 - i| = 3$$

$$\Rightarrow |(2x - 3) + i(2y - 1)| = 3 \Rightarrow \sqrt{(2x - 3)^2 + (2y - 1)^2} = 3$$

$$\Rightarrow (2x - 3)^2 + (2y - 1)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 + 4y^2 - 4y - 1 = 9$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 12x - 4y - 1 = 0$$

18. பின்வரும் சமன்பாடுகள் வட்டத்தை குறிக்கிறது எனக்காட்டுக. மேலும் இதன் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க. (i) $|z - 2 - i| = 3$ (ii) $|2z + 2 - 4i| = 2$ (iii) $|3z - 6 + 12i| = 8$

$$\text{வட்டத்தின் சமன்பாடு : } \boxed{|z - z_0| = r}$$

$$(i) |z - 2 - i| = 3 \Rightarrow |z - (2 + i)| = 3$$

மையம் = $2 + i = (2, 1)$; ஆரம் = 3 அலகுகள்

$$(ii) |2z + 2 - 4i| = 2 \Rightarrow 2|z + 1 - 2i| = 2 \Rightarrow |z - (-1 + 2i)| = 1$$

மையம் = $-1 + 2i = (-1, 2)$; ஆரம் = 1 அலகு

$$(iii) |3z - 6 + 12i| = 8 \Rightarrow 3|z - 2 + 4i| = 8 \Rightarrow |z - (2 - 4i)| = \frac{8}{3}$$

மையம் = $2 - 4i = (2, -4)$; ஆரம் = $\frac{8}{3}$ அலகுகள்

19. $|z - 4| = 16$ என்ற சமன்பாட்டில் $z = x + iy$ -ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.

$$|z - 4| = 16 \Rightarrow |x + iy - 4| = 16$$

$$\Rightarrow |(x - 4) + iy| = 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 16$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 16^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 256$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 240 = 0$$

20. $z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ எனில் முதன்மை வீச்சு $\text{Arg } z$ -ஐக் காண்க.

$$\arg z = \arg \left(\frac{-2}{1+i\sqrt{3}} \right) = \arg(-2) - \arg(1 + i\sqrt{3}) \rightarrow (1)$$

$$\arg(-2) = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{0}{-2} \right| = 0$$

$-2 \Rightarrow (-, +)$, எனவே வீச்சானது இரண்டாவது கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\theta = \pi - \alpha \Rightarrow \theta = \pi - 0 = \pi$$

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{3}}{1} \right| = \frac{\pi}{3}$$

$1 + i\sqrt{3} \Rightarrow (+, +)$, எனவே வீச்சானது முதல் கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\theta = \alpha \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(1) \Rightarrow \arg\left(\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

21. முக்கோணச் சமனிலியை எழுதி நிறுவுக.

z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

22. $z^3 + 27 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$\begin{aligned} z^3 + 27 &= 0 \Rightarrow z^3 = -27 \Rightarrow z = (-27)^{1/3} = (27 \times -1)^{1/3} \\ z &= 3(-1)^{1/3} = 3[\operatorname{cis}(\pi)]^{1/3} = 3[\operatorname{cis}(2k\pi + \pi)]^{1/3}, k = 0, 1, 2 \\ &= 3\operatorname{cis}(2k + 1)\frac{\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \\ &= 3\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), 3\operatorname{cis}(\pi), 3\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

23. $\sum_{k=1}^8 \left(\cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}\right)$ -ன் மதிப்பு காண்க.

ஒன்றின் n -ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^8 \left(\cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \operatorname{cis}(0) + \sum_{k=1}^8 \left(\cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}\right) &= 0 \\ \Rightarrow 1 + \sum_{k=1}^8 \left(\cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^8 \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{9}\right) &= -1 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^8 \left(\cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}\right) &= -1 \end{aligned}$$

24. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் மூப்படி மூலம் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

$$(i)(1 - \omega + \omega^2)^6 + (1 + \omega - \omega^2)^6 = 128$$

$$(ii)(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) \dots (1 + \omega^{2^{11}}) = 1$$

$$\boxed{\omega^3 = 1 ; 1 + \omega + \omega^2 = 0}$$

$$(i)(1 - \omega + \omega^2)^6 + (1 + \omega - \omega^2)^6$$

$$\begin{aligned} &= (-\omega - \omega)^6 + (-\omega^2 - \omega^2)^6 \\ &= (-2\omega)^6 + (-2\omega^2)^6 = 2^6\omega^6 + 2^6\omega^{12} = 64(\omega^3)^2 + 64(\omega^3)^4 \\ &= 64 + 64 = 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) \dots (1 + \omega^{2^{11}}) \\ &= (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^2)(1 + \omega^2) \dots (1 + \omega^{2^{11}}) \end{aligned}$$

மேற்காணும் தொடரில் 12 உறுப்புகள் உள்ளன,

$$\begin{aligned} &= (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) \dots 12 \text{ உறுப்புகள்} \\ &= [(1 + \omega)(1 + \omega^2)][(1 + \omega)(1 + \omega^2)] \dots 6 \text{ உறுப்புகள்} \\ &= [(1 + \omega)(1 + \omega^2)]^6 \\ &= (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3)^6 \\ &= (0 + 1)^6 \\ &= 1 \end{aligned}$$

25. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_2)$ மற்றும் $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ எனில் $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

26. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_2)$ மற்றும் $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ எனில் $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \times \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

27. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ எனில் $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \times \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$ எனில் கலப்பெண் z -ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.

$$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2} \Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$\Rightarrow 2z + 6 = z - 5i + 4zi - 20i^2$$

$$\Rightarrow 2z - z - 4zi = -5i + 20 - 6$$

$$\Rightarrow z - 4zi = 14 - 5i$$

$$\Rightarrow z(1 - 4i) = 14 - 5i$$

$$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i}$$

$$= \left[\frac{14+20}{1^2+(-4)^2} \right] + i \left[\frac{-5+56}{1^2+(-4)^2} \right] = \frac{34}{17} + i \frac{51}{17} = 2 + 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right] + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

2. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக: (i) $(2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை.

(ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ என்பது மெய் எண்.

$$(i) z = (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$$

$$\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10} = (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$$

$$= (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10} = (2 - i\sqrt{3})^{10} - (2 + i\sqrt{3})^{10}$$

$$= -\{(2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}\} = -z$$

$\therefore (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை..

$$(ii) \frac{19-7i}{9+i} = \frac{19-7i}{9+i} \times \frac{9-i}{9-i} = \frac{171-19i-63i+7i^2}{9^2+1^2} = \frac{164-82i}{82} = \frac{82(2-i)}{82} = 2-i$$

$$\frac{20-5i}{7-6i} = \frac{20-5i}{7-6i} \times \frac{7+6i}{7+6i} = \frac{140+120i-35i-30i^2}{7^2+6^2} = \frac{170+85i}{85} = 2+i$$

$$z = \left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12} = (2-i)^{12} - (2+i)^{12}$$

$$\bar{z} = (2-i)^{12} - (2+i)^{12} = (2-i)^{12} - (2+i)^{12} = (2+i)^{12} - (2-i)^{12} = z$$

$\therefore \left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ என்பது மெய் எண்.

3. நிறுவுக: (i) $(2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10}$ ஒரு மெய் எண் மற்றும்

(ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண்.

$$(i) z = (2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10}$$

$$\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10} = (2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10}$$

$$= (2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10} = (2 - i\sqrt{3})^{10} + (2 + i\sqrt{3})^{10} = z$$

$$\Rightarrow \bar{z} = z$$

$\therefore (2 + i\sqrt{3})^{10} + (2 - i\sqrt{3})^{10}$ என்பது முழுவதும் மெய்யெண் ஆகும்..

$$(ii) \frac{19+9i}{5-3i} = \frac{19+9i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{(95-27)+i(45+57)}{5^2+3^2} = \frac{68+102i}{34} = 2+3i$$

$$\frac{8+i}{1+2i} = \frac{8+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(8+2)+i(1-16)}{1^2+2^2} = \frac{10-15i}{5} = 2-3i$$

$$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15} = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}$$

$$\bar{z} = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15} = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15} = (2-3i)^{15} -$$

$$(2+3i)^{15} = -\{(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\} = -z$$

$\therefore \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எண் ஆகும்..

4. $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ மற்றும் $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ மற்றும் } z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள்,

$$|z_1 - z_2| = \left| 1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$|z_2 - z_3| = \left| \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$|z_3 - z_1| = \left| \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

மூன்று பக்கங்களின் நீளங்கள் சமம், எனவே ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமையும்.

5. z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1| = |z_2| = 1$ மற்றும்

$z_1 z_2 \neq -1$ எனில் $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ ஓர் மெய் எண் எனக்காட்டுக.

தரவு : $|z_1| = |z_2| = 1$

$$|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

இதுபோலவே $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$.

$w = \frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ என்க.

$$\Rightarrow \bar{w} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_1 z_2}}{\frac{1+z_1 z_2}{z_1 z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2} = w$$

$\bar{w} = w$. எனவே w ஒரு மெய் எண்.

6. $\left|z - \frac{2}{z}\right| = 2$ எனில் $|z|$ -ன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகள் $\sqrt{3} + 1$ மற்றும் $\sqrt{3} - 1$ என நிறுவுக.

$$\left|z - \frac{2}{z}\right| = 2 \Rightarrow 2 = \left|z - \frac{2}{z}\right| \geq \left||z| - \left|\frac{2}{z}\right|\right|$$

$$\Rightarrow \left||z| - \left|\frac{2}{z}\right|\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq |z| - \left|\frac{2}{z}\right| \leq 2 \quad \because |x-a| \leq r \Rightarrow -r \leq x-a \leq r$$

$$\Rightarrow -2 \leq |z| - \frac{2}{|z|} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{|z|^2 - 2}{|z|} \leq 2 \Rightarrow -2|z| \leq |z|^2 - 2 \leq 2|z| \rightarrow (1)$$

(1)இல் இருந்து $\Rightarrow -2|z| \leq |z|^2 - 2$

$$\Rightarrow 2 \leq |z|^2 + 2|z|$$

$$\Rightarrow 3 \leq |z|^2 + 2|z| + 1 \quad (\text{இருபுறமும் } 1\text{-ஐ கூட்டுக})$$

$$\Rightarrow 3 \leq (|z| + 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \leq |z| + 1 \quad (\text{இருபுறமும் வர்க்கமூலம் காண})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 1) \leq |z| \rightarrow (2)$$

(1)இல் இருந்து $\Rightarrow |z|^2 - 2 \leq 2|z|$

$$\Rightarrow |z|^2 - 2|z| \leq 2$$

$$\Rightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 \leq 3 \quad (\text{இருபுறமும் } 1\text{-ஐ கூட்டுக})$$

$$\Rightarrow (|z| - 1)^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow |z| - 1 \leq \sqrt{3} \quad (\text{இருபுறமும் வர்க்கமூலம் காண})$$

$$\Rightarrow |z| \leq (\sqrt{3} + 1) \rightarrow (3)$$

(2), (3)இல் இருந்து, $\sqrt{3} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{3} + 1$

எனவே $|z|$ -ன் மீச்சிறு மற்றும் மீப்பெரு மதிப்புகள் $\sqrt{3} + 1$ மற்றும் $\sqrt{3} - 1$

ஆகும்.

7. z_1, z_2 மற்றும் z_3 என்ற மூன்று கலப்பெண்கள் $|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$ மற்றும் $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$ என்றவாறு உள்ளது எனில் $|9z_1 z_2 + 4z_1 z_3 + z_2 z_3| = 6$ என நிறுவுக.

$$|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 1$$

$$\because z \bar{z} = |z|^2$$

$$|z_2| = 2 \Rightarrow |z_2|^2 = 4 \Rightarrow z_2 \bar{z}_2 = 4$$

$$|z_3| = 3 \Rightarrow |z_3|^2 = 9 \Rightarrow z_3 \bar{z}_3 = 9$$

$$|9z_1 z_2 + 4z_1 z_3 + z_2 z_3| = |z_3 \bar{z}_3 z_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 z_1 z_3 + z_1 \bar{z}_1 z_2 z_3|$$

$$= |(z_1 z_2 z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)|$$

$$= |z_1 z_2 z_3| |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3|$$

$$= |z_1 z_2 z_3| |z_1 + z_2 + z_3|$$

$$= |z_1| |z_2| |z_3| |z_1 + z_2 + z_3|$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

8. $z = x + iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ எனுமாறு

அமைந்தால் z -ன் நியமப்பாதை மெய் அச்ச எனக்காட்டுக.

$z = x + iy$ என்க.

$$\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1 \Rightarrow |z - 4i| = |z + 4i|$$

$$\Rightarrow |x + iy - 4i| = |x + iy + 4i|$$

$$\Rightarrow |x + i(y - 4)| = |x + i(y + 4)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 4)^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y + 4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 + 8y + 16$$

$$\Rightarrow 8y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$\therefore z$ -ன் நியமப்பாதை மெய் அச்ச ஆகும்.

9. $z = x + iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ எனுமாறு

அமைந்தால் z -ன் நியமப்பாதை $2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$ எனக்காட்டுக.

$z = x + iy$ என்க.

$$\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}$$

$$\text{Im}(Z) = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

இங்கு $a = 2x + 1, b = 2y, c = 1 - y, d = x$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2y(1-y)-x(2x+1)}{(1-y)^2+x^2} = 0 \Rightarrow 2y - 2y^2 - 2x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$$

10.பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x + iy$ -ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க. $[Re(iz)]^2 = 3$.

$z = x + iy$ என்க.

$$(i)iz = i(x + iy) = y - ix$$

$$[Re(iz)]^2 = 3$$

$$\Rightarrow [Re(y - ix)]^2 = 3$$

$$\Rightarrow y^2 = 3$$

11.பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x + iy$ -ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க. $\operatorname{Im}[(1 - i)z + 1] = 0$

$z = x + iy$ என்க.

$$(1 - i)z + 1 = (1 - i)(x + iy) + 1 = x + iy - ix + y + 1$$

$$= (x + y + 1) + i(y - x)$$

$$\operatorname{Im}[(1 - i)z + 1] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}[(x + y + 1) + i(y - x)] = 0$$

$$\Rightarrow y - x = 0 \text{ (or)} x - y = 0$$

12.பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x + iy$ -ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க. $|z - 4|^2 - |z - 1|^2 = 16$

$z = x + iy$ என்க.

$$|z - 4|^2 - |z - 1|^2 = 16 \Rightarrow |x + iy - 4|^2 - |x + iy - 1|^2 = 16$$

$$\Rightarrow |(x - 4) + iy|^2 - |(x - 1) + iy|^2 = 16$$

$$\Rightarrow (\sqrt{(x - 4)^2 + y^2})^2 - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 - [(x - 1)^2 + y^2] = 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2 = 16$$

$$\Rightarrow -6x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 1 = 0$$

13.(i) $-1 - i$ (ii) $1 + i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்களை துருவ வடிவில் காண்க.

$$(i) -1 - i = r\operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-1}{-1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

$(-, -)$, எனவே வீச்சானது மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\Rightarrow \theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$(1) \Rightarrow -1 - i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$(ii) 1 + i\sqrt{3} = r\operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{3}}{1} \right| = \frac{\pi}{3}$$

$(+, +)$, எனவே வீச்சானது முதல் கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\Rightarrow \theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$(1) \Rightarrow 1 + i\sqrt{3} = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right], k \in \mathbb{Z}$$

14. $z = x + iy$ மற்றும் $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனில் $x^2 + y^2 = 1$ எனக்காட்டுக.

$z = x + iy$ என்க.

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} \times \frac{x+1-iy}{x+1-iy} = \frac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \arg\left(\frac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

15. $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \dots (x_n + iy_n) = a + ib$ எனில்

$$(i) (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \dots (x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$$

$$(ii) \sum_{r=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{b_r}{a_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$(i)(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \dots (x_n + iy_n) = a + ib$$

இருபுறமும் மட்டு காண,

$$\Rightarrow |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \dots (x_n + iy_n)| = |a + ib|$$

$$\Rightarrow |x_1 + iy_1| |x_2 + iy_2| \dots |x_n + iy_n| = |a + ib|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \dots \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\Rightarrow (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \dots (x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$$

$$(i)(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \dots (x_n + iy_n) = a + ib$$

இருபுறமும் வீச்சு காண,

$$\Rightarrow \arg[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \dots (x_n + iy_n)] = \arg(a + ib)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^n \tan^{-1}\left(\frac{b_r}{a_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

16. $\frac{1+z}{1-z} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ எனில் $z = i \tan \theta$ என நிறுவுக.

$$\frac{1+z}{1-z} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

இருபுறமும் 1-ஐ கூட்ட, $\frac{1+z}{1-z} + 1 = (1 + \cos 2\theta) + i \sin 2\theta$

$$\Rightarrow \frac{1+z+1-z}{1-z} = 2\cos^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-z} = 2\cos\theta [\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$\div 2 \Rightarrow \frac{1}{1-z} = \cos\theta [\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta[\cos\theta + i\sin\theta]} = 1 - z$$

$$\Rightarrow z = 1 - \frac{1}{\cos\theta[\cos\theta + i\sin\theta]}$$

$$\Rightarrow z = 1 - \frac{1}{\cos\theta[\cos\theta + i\sin\theta]} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow z = 1 - \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$\Rightarrow z = 1 - \left[\frac{\cos\theta}{\cos\theta} - i \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right]$$

$$\Rightarrow z = 1 - 1 + i \tan\theta$$

$$\Rightarrow z = i \tan\theta$$

17. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$ எனில்

(i) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ என நிறுவுக.

$a = cisa, b = cis\beta, c = cisy$ என்க.

$a + b + c = 0$ எனில் $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$\Rightarrow (cisa)^3 + (cis\beta)^3 + (cisy)^3 = 3cisa.cis\beta.cisy$

$$\Rightarrow cis(3\alpha) + cis(3\beta) + cis(3\gamma) = 3cis(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow (\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma) + i(\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma) = 3(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளை சமன்படுத்த,

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

18. $z = x + iy$ மற்றும் $\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ எனில் $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$

எனக்காட்டுக.

$$Z = x + iy$$

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(z-i) - \arg(z+2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(x + iy - i) - \arg(x + iy + 2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arg(x + i(y-1)) - \arg(x + 2 + iy) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y-1}{x} - \tan^{-1}\frac{y}{x+2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{y-1}{x} - \frac{y}{x+2}}{1 + \left(\frac{y-1}{x} \times \frac{y}{x+2}\right)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{((y-1)(x+2) - xy)}{x(x+2)}}{1 + \frac{y^2 - y}{x(x+2)}} = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)}{\frac{xy + 2y - x - 2 - xy}{x^2 + 2x + y^2 - y}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)}{-x + 2y - 2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y + x - 2y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$$

19. கூடுக்குக: (i) $(1+i)^{18}$ (ii) $(-\sqrt{3} + 3i)^{31}$

(i) $1 + i = r \operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{1}{1}\right| = \frac{\pi}{4}$$

$(+, +)$, எனவே வீச்சானது முதல் கால்பகுதியில் அமையும் $\Rightarrow \theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$

$$(1) \Rightarrow (1 + i) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (1 + i)^{18} = \left[\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]^{18} = \sqrt{2}^{18} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \times 18 \right) = 2^9 \left[\operatorname{cis} \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 2^9 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = 2^9(i) = 512i.$$

$$(ii) -\sqrt{3} + 3i = r \operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{3}{-\sqrt{3}} \right| = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$(-, +)$, எனவே வீச்சானது இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமையும்
 $\Rightarrow \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$(1) \Rightarrow -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow (-\sqrt{3} + 3i)^{31} = \left[2\sqrt{3} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]^{31} = (2\sqrt{3})^{31} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \times 31 \right)$$

$$= (2\sqrt{3})^{31} \operatorname{cis} \left(20\pi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= (2\sqrt{3})^{31} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= (2\sqrt{3})^{31} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= (2\sqrt{3})^{31} \left[-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= (2\sqrt{3})^{31} \left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

20. ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலங்களைக் காண்க.

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = (1)^{1/3} = [\operatorname{cis}(0)]^{1/3}$$

$$\Rightarrow z = [\operatorname{cis}(2k\pi + 0)]^{1/3}, k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis}(0), \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right), \operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis}(0), \operatorname{cis} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right), \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0, \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow z = 1, -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = 1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலங்கள் } 1, \omega, \omega^2 = 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

21. ஒன்றின் நான்காம் படிமூலங்களைக் காண்க.

$$z^4 = 1 \Rightarrow z = (1)^{1/4} = [\operatorname{cis}(0)]^{1/4}$$

$$\Rightarrow z = [\operatorname{cis}(2k\pi + 0)]^{1/4}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis}(0), \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{4} \right), \operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{4} \right), \operatorname{cis} \left(\frac{6\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis}(0), \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right), \operatorname{cis}(\pi), \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0, \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right), \cos(\pi) + i \sin(\pi),$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow z = 1, i, -1, -i$$

$\therefore$ ஒன்றின் நான்காம் படிமூலங்கள் $1, \omega, \omega^2, \omega^3 = 1, i, -1, -i$.

22. $z^3 + 8i = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. இங்கு $z \in \mathbb{C}$.

$$z^3 + 8i = 0 \Rightarrow z = (-8i)^{1/3}$$

$$\Rightarrow z = -2(i)^{1/3} = -2 \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \right)^{1/3} = -2 \left[\operatorname{cis} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/3}$$

$$= -2 \left[\operatorname{cis} \left(4k + 1 \right) \frac{\pi}{2} \right]^{1/3}, k = 0, 1, 2$$

$$= -2 \operatorname{cis} \left(4k + 1 \right) \frac{\pi}{6}, k = 0, 1, 2$$

$$z = -2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}, -2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}, -2 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{6}$$

23. $\sqrt{3} + i$ -ன் எல்லா மூன்றாம் படிமூலங்களையும் காண்க.

$$z = \sqrt{3} + i = r \operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6}$$

$(+, +)$, எனவே வீச்சானது முதல் கால்பகுதியில் அமையும் $\Rightarrow \theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{1/3} &= \left[2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]^{1/3} = \left[2 \operatorname{cis} \left(2k\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right]^{1/3} \\ &= 2^{1/3} \left[\operatorname{cis} \left(12k + 1 \right) \frac{\pi}{6} \right]^{1/3}, k = 0, 1, 2 \\ &= 2^{1/3} \operatorname{cis} \left(12k + 1 \right) \frac{\pi}{18}, k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$z = 2^{1/3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{18}, 2^{1/3} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{18}, 2^{1/3} \operatorname{cis} \frac{25\pi}{18}.$$

24. z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவை $|z| = 2$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் என்க. மேலும் $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ எனில் z_2 மற்றும் z_3 -ஐக் காண்க.

$|z| = 2$ என்பது மையம் $(0,0)$ மற்றும் ஆரம் 2 அலகு உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். A, B மற்றும் C என்பன சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகள் என்க. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே AB, BC மற்றும் CA ஆகியவை மையத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் $\frac{2\pi}{3}$ ரேடியன் ஆகும்.

z_1 -உடன் z_2 மற்றும் z_3 ஏற்படுத்தும் கோணம் $\frac{2\pi}{3}$ மற்றும் $\frac{4\pi}{3}$ ஆகும்.

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = (1 + i\sqrt{3}) \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= (1 + i\sqrt{3}) [\cos(180 - 60) + i \sin(180 - 60)] \\ &= (1 + i\sqrt{3}) (-\cos 60 + i \sin 60) \\ &= (1 + i\sqrt{3}) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= z_2 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= -2 [\cos(180 - 60) + i \sin(180 - 60)] \\ &= -2 (-\cos 60 + i \sin 60) \\ &= -2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$25. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^5 = -\sqrt{3} \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = r \operatorname{cis}(\theta) \rightarrow (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

$(+, +)$, எனவே வீச்சானது முதல் கால்பகுதியில் அமையும் $\Rightarrow \theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$(1) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^5 = \left[\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]^5 = \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\text{இதுபோலவே, } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^5 = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^5 &= \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(\frac{5 \times 180}{6} \right) = 2 \cos 150 = -2 \cos 30 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$26. \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}}{1 + \sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}} \right)^{10} \text{ -ன் மதிப்பு காண்க.}$$

$$z = \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} \text{ என்க. } \Rightarrow \frac{1}{z} = \sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}}{1 + \sin \frac{\pi}{10} - i \cos \frac{\pi}{10}} \right)^{10} = \left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} \right)^{10} = \left(\frac{1+z}{1+z} \times z \right)^{10} = z^{10}$$

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} \right)^{10} = \left[i \left(\cos \frac{\pi}{10} - i \sin \frac{\pi}{10} \right) \right]^{10} \\ &= i^{10} \left[\cos \left(10 \times \frac{\pi}{10} \right) - i \sin \left(10 \times \frac{\pi}{10} \right) \right] \\ &= -1 [\cos \pi - i \sin \pi] \\ &= -1 (-1 - 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

27. $2 \cos \alpha = x + \frac{1}{x}$ மற்றும் $2 \cos \beta = y + \frac{1}{y}$, எனக்கொண்டு கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

$$(i) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \cos(\alpha - \beta) \quad (ii) xy - \frac{1}{xy} = 2i \sin(\alpha + \beta)$$

$$(iii) \frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i \sin(m\alpha - n\beta) \quad (iv) x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2 \cos(m\alpha + n\beta)$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha \Rightarrow x = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$y + \frac{1}{y} = 2 \cos \beta \Rightarrow y = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$(i) \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \cos(\alpha - \beta) - i \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \cos(\alpha - \beta)$$

$$(ii) xy = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{1}{xy} = (xy)^{-1} = \cos(\alpha + \beta) - i \sin(\alpha + \beta)$$

$$xy - \frac{1}{xy} = 2i \sin(\alpha + \beta)$$

$$(iii) x^m = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha$$

$$y^n = (\cos \beta + i \sin \beta)^n = \cos n\beta + i \sin n\beta$$

$$\frac{x^m}{y^n} = \frac{\cos m\alpha + i \sin m\alpha}{\cos n\beta + i \sin n\beta} = \cos(m\alpha - n\beta) + i \sin(m\alpha - n\beta)$$

$$\frac{y^n}{x^m} = \left(\frac{x^m}{y^n}\right)^{-1} = \cos(m\alpha - n\beta) - i \sin(m\alpha - n\beta)$$

$$\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i \sin(m\alpha - n\beta)$$

$$(iv) x^m = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha$$

$$y^n = (\cos \beta + i \sin \beta)^n = \cos n\beta + i \sin n\beta$$

$$x^m y^n = (\cos m\alpha + i \sin m\alpha)(\cos n\beta + i \sin n\beta) = \cos(m\alpha + n\beta) + i \sin(m\alpha + n\beta)$$

$$\frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta) - i \sin(m\alpha + n\beta)$$

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2 \cos(m\alpha + n\beta)$$

$$28. \sqrt[4]{-1} \text{ -ன் மதிப்புகள் } \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \text{ என நிறுவுக.}$$

$$x = \sqrt[4]{-1} \text{ என்க.}$$

$$= (-1)^{1/4}$$

$$= (cis\pi)^{1/4}$$

$$= [cis(2k\pi + \pi)]^{1/4}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$= cis(2k + 1)\frac{\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$= cis\left(\frac{\pi}{4}\right), cis\left(\frac{3\pi}{4}\right), cis\left(\frac{5\pi}{4}\right), cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \cos 45 + i \sin 45, \cos 135 + i \sin 135, \cos 225 + i \sin 225, \cos 315 + i \sin 315$$

$$= \cos 45 + i \sin 45, \cos(90 + 45) + i \sin(90 + 45), \cos(180 + 45) + i \sin(180 + 45), \cos(360 - 45) + i \sin(360 - 45)$$

$$= \cos 45 + i \sin 45, -\cos 45 + i \sin 45, -\cos 45 - i \sin 45, \cos 45 - i \sin 45$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

3. சமன்பாட்டியல்

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. α, β மற்றும் γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருந்தால், கெழுக்களின் அடிப்படையில் $\sum \frac{1}{\beta\gamma}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\text{சமன்பாடு: } x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{p}{1} = -p$$

$$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{r}{1} = -r$$

$$\Sigma 1 = \sum \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-p}{-r} = \frac{p}{r}$$

2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க. இங்கு $a \neq 0$ ஆகும்.

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

3. p என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில், $4x^2 + 4px + p + 2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையை p -ன் அடிப்படையில் ஆராய்க.

$$\text{பண்புகாட்டி } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned}
 &= (4p)^2 - 4(4)(p+2) \\
 &= 16p^2 - 16p - 32 \\
 &= 16(p^2 - p - 2) \\
 &= 16(p+1)(p-2)
 \end{aligned}$$

$-1 < p < 2$ எனில் $\Delta < 0$, எனவே மூலங்கள் கற்பனை ஆகும்.

$p = -1$ or $p = 2$ எனில் $\Delta = 0$, எனவே மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் ஆகும்.

$-\infty < p < -1$ or $2 < p < \infty$ எனில் $\Delta > 0$, எனவே மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை ஆகும்.

4. ஒரு கனச் சதுரப் பெட்டியின் பக்கங்கள் 1,2,3 அலகுகள் அதிகரிப்பதால் கனச்சதுரப்பெட்டியின் கொள்ளளவைவிட 52 கன அலகுகள் அதிகமுள்ள கனச்செவ்வகம் கிடைக்கிறது எனில் கன செவ்வகத்தின் கொள்ளளவைக் காண்க.

கனச் சதுரத்தின் பக்கஅளவு x என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, கனச் செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும்

உயரம் முறையே $(x+1)$, $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ என்க.

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு + 52.

$$\Rightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 52$$

$$\Rightarrow (x^2 + 3x + 2)(x+3) = x^3 + 52$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 = x^3 + 52$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 - x^3 - 52 = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 11x - 46 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(6x+23) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ (or) } x = -23 \text{ (தீர்வு அல்ல)}$$

$$\text{கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு} = x^3 + 52 = 2^3 + 52 = 8 + 52 = 60 \text{ க.அ.}$$

5. கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக

(i) 1,2 மற்றும் 3 ii) 1,1 மற்றும் -2 (iii) 2, -2 மற்றும் 4

(i) 1,2 மற்றும் 3

$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ என்க.

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 1) = 2 + 6 + 3 = 11$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\sum \alpha)x^2 + (\sum \alpha\beta)x - (\sum \alpha\beta\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

ii) 1,1 மற்றும் -2

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$ என்க.

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\sum_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (1 \times 1) + (1 \times -2) + (-2 \times 1) = 1 - 2 - 2 = -3$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = 1 \times 1 \times (-2) = -2$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\sum 1)x^2 + (\sum 2)x - (\sum 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 0x^2 - 3x - (-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

(iii) 2, -2 மற்றும் 4

$\alpha = 2, \beta = -2, \gamma = 4$ என்க.

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2 - 2 + 4 = 4$$

$$\sum_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (2 \times -2) + (-2 \times 4) + (4 \times 2) = -4 - 8 + 8 = -4$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = 2 \times (-2) \times 4 = -16$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\sum 1)x^2 + (\sum 2)x - (\sum 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 4x - (-16) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$$

6. $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க.

சமன்பாடு: $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 = 0$; மூலங்கள் : α, β மற்றும் γ

$$a = 2, b = -8, c = 6, d = 0, e = -3$$

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2} = 4$$

$$\sum_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (4)^2 - 2(3) = 16 - 6 = 10$$

7. α, β, γ மற்றும் δ ஆகியன $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8 = 0$ எனும்

பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ மற்றும்

$\alpha\beta\gamma\delta$ ஆகியவற்றினை மூலங்களாகவும் முழு எண்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஓர் இருபடி சமன்பாட்டைக் காண்க.

சமன்பாடு: $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8 = 0$; மூலங்கள் : α, β, γ மற்றும் δ

$$a = 2, b = 5, c = -7, d = 0, e = 8$$

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$$

$$\sum_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{மூலங்களின் கூட்டுப்பலன்} = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2}$$

$$\text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \left(-\frac{5}{2}\right) 4 = -10$$

தேவையான இருபடிச்சமன்பாடு:

$$x^2 - (\text{மூ.கூ.ப}) x + (\text{மூ.பெ.ப}) = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{3}{2}\right) x + (-10) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 20 = 0$$

8. $lx^2 + nx + n = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p மற்றும் q எனில் $\sqrt{\frac{p}{q}} +$

$$\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = 0 \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$p + q = -\frac{n}{l} ; pq = \frac{n}{l}$$

$$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}} = \frac{p+q}{\sqrt{pq}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}} = \frac{-n/l}{\sqrt{n/l}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}} = 0$$

9. $x^2 + px + q = 0$ மற்றும் $x^2 + p'x + q' = 0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும்

ஒரு பொதுவான மூலம் இருப்பின், அம்மூலம் $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ அல்லது $\frac{q-q'}{p'-p}$ ஆகும்

எனக்காட்டுக.

$x^2 + px + q = 0$ மற்றும் $x^2 + p'x + q' = 0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொதுவான மூலம் α என்க.

$$\text{எனவே } \alpha^2 + p\alpha + q = 0 \rightarrow (1) ; \alpha^2 + p'\alpha + q' = 0 \rightarrow (2)$$

சமன் (1), (2) -ஐ குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் தீர்க்க,

$$\begin{array}{r} \alpha^2 \quad \alpha \quad 1 \\ p \quad q \quad 1 \quad p \\ p' \quad q' \quad 1 \quad p' \\ \hline \Rightarrow \frac{\alpha^2}{pq'-p'q} = \frac{\alpha}{q-q'} = \frac{1}{p'-p} \\ \Rightarrow \frac{\alpha^2}{pq'-p'q} = \frac{\alpha}{q-q'} \text{ (or) } \frac{\alpha}{q-q'} = \frac{1}{p'-p} \\ \Rightarrow \alpha = \frac{pq'-p'q}{q-q'} \text{ (or) } \alpha = \frac{q-q'}{p'-p} \end{array}$$

10. ஒரு எண்ணை அதன் கனமூலத்தோடு கூட்டினால் 6 கிடைக்கிறது எனில் அந்த எண்ணைக் காணும் வழியை கணிதவியல் கணக்காக மாற்றுக.

தேவையான எண் x என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி,

$$x + \sqrt[3]{x} = 6 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 6 - x$$

$$\text{இருபுறமும் 3-ன் அடுக்காக மாற்றுக, } x = (6 - x)^3$$

$$\Rightarrow x = (6)^3 - 3(6)^2x + 3(6)x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow x = 216 - 108x + 18x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow x^3 - 18x^2 + 109x - 216 = 0$$

11. $2 - \sqrt{3}i$ - ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\alpha = 2 - \sqrt{3}i$ எனில் மற்றொரு மூலம் $\beta = 2 + \sqrt{3}i$ ஆகும்.

$$\alpha + \beta = 2 - \sqrt{3}i + 2 + \sqrt{3}i = 4$$

$$\alpha\beta = (2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i) = 4 + 3 = 7$$

$$\therefore \text{தேவையான சமன்பாடு: } x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$$

12. $2 - \sqrt{3}$ - ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ எனில் மற்றொரு மூலம் $\beta = 2 + \sqrt{3}$ ஆகும்.

$$\alpha + \beta = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$\alpha\beta = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore \text{தேவையான சமன்பாடு: } x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

13. $2x^2 - 6x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு x -ன் எந்த மெய்யெண் மதிப்பும் தீர்வைத் தராது எனக்காட்டுக.

$$a = 2, b = -6, c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(7) = 36 - 56 = -20 < 0$$

$\therefore$ எனவே மூலங்கள் கற்பனை ஆகும்.

14. $x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில், k மதிப்பு காண்க.

$$a = 1, b = 2k + 4, c = 9k$$

$$\Delta = 0 \text{ (} \because \text{மூலங்கள் சமம்)}$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (2k + 4)^2 - 4(1)(9k) = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 16k + 16 - 36k = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 20k + 16 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow (k - 1)(k - 4) = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ or } 4$$

15. p, q, r ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் எனில் $x^2 - 2px + p^2 - q^2 + 2qr - r^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும் எனக்காட்டுக.

$$a = 1, b = -2p, c = p^2 - q^2 + 2qr - r^2$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (-2p)^2 - 4(1)(p^2 - q^2 + 2qr - r^2) \\ &= 4p^2 - 4p^2 + 4q^2 - 8qr + 4r^2 \\ &= 4q^2 - 8qr + 4r^2 \\ &= 4(q^2 - 2qr + r^2) \\ &= [2(q - r)]^2 \text{ ஒரு முழுவர்க்கம் ஆகும்.}\end{aligned}$$

எனவே மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும்

16. k என்பது மெய்யெண் எனில் $2x^2 + kx + k = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் இயல்பை, k வழியாக ஆராய்க.

$$a = 2, b = k, c = k$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 8k = k(k - 8)$$

$k < 0$ எனில் $\Delta > 0$, எனவே மூலங்கள் மெய் ஆகும்.

$k = 0, k = 8$ எனில் $\Delta = 0$, எனவே மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் ஆகும்.

$0 < k < 8$ எனில் $\Delta < 0$, எனவே மூலங்கள் கற்பனை ஆகும்.

$k > 8$ எனில் $\Delta > 0$, எனவே மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை ஆகும்.

17. $2 + \sqrt{3}i$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\alpha = 2 + \sqrt{3}i$ எனில் மற்றொரு மூலம் $\beta = 2 - \sqrt{3}i$ ஆகும்.

$$\alpha + \beta = 2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i = 4$$

$$\alpha\beta = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 4 + 3 = 7$$

$$\therefore \text{தேவையான சமன்பாடு: } x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$$

18. $2i + 3$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\alpha = 3 + 2i$ எனில் மற்றொரு மூலம் $\beta = 3 - 2i$ ஆகும்.

$$\alpha + \beta = 3 + 2i + 3 - 2i = 6$$

$$\alpha\beta = (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13$$

$$\therefore \text{தேவையான சமன்பாடு: } x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0$$

19. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடர்முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைப் பெறுக.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் மூலங்கள் $(a - d), a, (a + d)$ என்க.

$$\sum 1 = a - d + a + a + d = -\frac{b}{a} = -p$$

$$\Rightarrow 3a = -p \Rightarrow a = -\frac{p}{3}$$

$$a = -\frac{p}{3} \text{ என்பது } x^3 + px^2 + qx + r = 0 \text{ -ன் மூலமாதலால்,}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{p^3}{27} + p\left(\frac{p^2}{9}\right) - \frac{pq}{3} + r = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{p^3}{27} + \frac{p^3}{9} + r = \frac{pq}{3}$$

$$(\times) 27 \Rightarrow -p^3 + 3p^3 + 27r = 9pq$$

$$\Rightarrow 9pq = 2p^3 + 27r$$

20. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர்முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. இங்கு $a, b, c, d \neq 0$ எனக்கொள்க.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ -ன் மூலங்கள் $\left(\frac{a}{r}\right), a, (ar)$ என்க.

$$\sum_1 = \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{b}{a} \Rightarrow a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = -\frac{b}{a} \rightarrow (1)$$

$$\sum_2 = \left(\frac{a}{r}\right)(a) + a(ar) + (ar)\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{c}{a} \rightarrow (2)$$

$$\sum_3 = \left(\frac{a}{r}\right)a(ar) = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^3 = -\frac{d}{a} \rightarrow (3)$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow a = \left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{a}{b}\right) \Rightarrow a = -\frac{c}{b} \rightarrow (4)$$

(4) -ஐ (3)இல் பிரதியிடுக,

$$\Rightarrow \left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow -\frac{c^3}{b^3} = -\frac{d}{a} \Rightarrow ac^3 = db^3$$

21. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் மூலங்கள் இசைத் தொடர்முறையில் உள்ள எனில் $9pqr = 27r^3 + 2p$ என நிரூபிக்க. இங்கு $p, q, r \neq 0$ என்க.

மூலங்கள் இசைத் தொடர்முறையில் உள்ளதனால் அவற்றின் பெருக்கல் தலைகீழிகள் கூட்டுத் தொடர்முறையில் இருக்கும்.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 + p\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q\left(\frac{1}{x}\right) + r = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} + r = 0$$

$$(\times)x^3 \Rightarrow rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

$rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ -ன் மூலங்கள் $(a - d), a, (a + d)$ என்க.

$$\sum_1 = a - d + a + a + d = -\frac{b}{a} = -\frac{-q}{r} \Rightarrow 3a = \frac{-q}{r} \Rightarrow a = \frac{-q}{3r}$$

$a = \frac{-q}{3r}$ என்பது $rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ -ன் மூலமாதலால்,

$$\Rightarrow r\left(\frac{-q}{3r}\right)^3 + q\left(\frac{-q}{3r}\right)^2 + p\left(\frac{-q}{3r}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{rq^3}{27r^3} + \frac{q^3}{9r^2} - \frac{pq}{3r} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q^3}{27r^2} + \frac{q^3}{9r^2} - \frac{pq}{3r} + 1$$

$$(\times) 27r^2 \Rightarrow -q^3 + 3q^3 - 9pqr + 27r^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9pqr = 2q^3 + 27r^2$$

22. $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கூட்டுத்தொடர் முறையாக உள்ளது என அறியப்படுகிறது. சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0 \Rightarrow x^2(x - 6) - 4(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4; x = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm 2, 4$$

23. $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களில் இரண்டின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமெனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0 \text{ -ன் மூலங்கள் } \alpha, -\alpha, \beta \text{ என்க.}$$

$$\Sigma_1 = \alpha - \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma_2 = \alpha(-\alpha) + (-\alpha)(\beta) + (\beta)(\alpha) = \frac{c}{a} = -\frac{18}{2}$$

$$\Rightarrow -\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = -9$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 9$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm 3$$

எனவே மூலங்கள் $3, -3, \frac{1}{2}$ ஆகும்.

24. $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு இருப்பின் காண்க.

$$\cos x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 - y - 8y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow y(2y - 1) - 4(2y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(2y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 4, \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 4$$

$$\Rightarrow \cos x = 4 \text{ தீர்வு இல்லை.}$$

25. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க: $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

$$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$$

$$\sin x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1)(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1, 4$$

$y = 1, 4$ என சமன் (1)இல் பிரதியிடுக,

$$\sin x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 4 \text{ தீர்வு இல்லை..}$$

25. விகிதமுறு மூலங்கள் உள்ளதா என ஆராய்க.

$$(i) 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \quad (ii) x^8 - 3x + 1 = 0$$

$$(i) 2x^3 - x^2 - 1 = 0$$

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2 - 1 - 1 = 0$

$\therefore (x - 1)$ ஒரு காரணி.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = 2x^2 + x + 1 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4} \text{ (கற்பனை மூலங்கள்)}$$

$\therefore x = 1$ ஒரு விகிதமுறு மூலமாகும்..

$$(ii) x^8 - 3x + 1 = 0$$

$$P(x) = x^8 - 3x + 1.$$

$$a_n = 1; a_0 = 1 \Rightarrow p = \pm 1, q = \pm 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = \pm 1$$

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 - 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow 1$ ஒரு மூலமல்ல.

ஒற்றைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $\neq$ இரட்டைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $\Rightarrow -1$ ஒரு மூலமல்ல.

$\therefore P(x)$ -க்கு விகிதமுறு மூலங்கள் இல்லை.

26. தீர்க்க: $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{\frac{-3}{2n}} = 63$

$$y = x^{\frac{3}{2n}} \text{ என்க.}$$

$$8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{\frac{-3}{2n}} = 63 \Rightarrow 8x^{\frac{3}{2n}} - \frac{8}{x^{\frac{3}{2n}}} = 63$$

$$\Rightarrow 8y - \frac{8}{y} = 63$$

$$\Rightarrow \frac{8y^2 - 8}{y} = 63$$

$$\Rightarrow 8y^2 - 8 = 63y$$

$$\Rightarrow 8y^2 - 63y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 8y^2 - 64y + y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 8y(y - 8) + 1(y - 8) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 8)(8y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 8} \text{ (or) } y = -\frac{1}{8} \text{ (தீர்வு இல்லை)}$$

$$y = x^{\frac{3}{2n}} \Rightarrow x^{\frac{3}{2n}} = 8 \Rightarrow x^{\frac{3}{2n}} = 2^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2n}} = 2 \Rightarrow x = 2^{2n} \Rightarrow \boxed{x = 4^n}$$

27. தீர்க்க: $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$.

$$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $\left(2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\right)^2$

$$\Rightarrow 4\frac{x}{a} + 9\frac{a}{x} + 12\sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{36a^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{6a}{b}$$

$$\Rightarrow 4\frac{x}{a} + 9\frac{a}{x} + 12 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{36a^2}{b^2} + 12$$

$$\Rightarrow 4\frac{x}{a} + 9\frac{a}{x} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{36a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 + 9a^2}{ax} = \frac{b^4 + 36a^4}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow (4x^2 + 9a^2)ab^2 = (b^4 + 36a^4)x$$

$$\Rightarrow 4ab^2x^2 + 9a^3b^2 = (b^4 + 36a^4)x$$

$$\Rightarrow 4ab^2x^2 - (b^4 + 36a^4)x + 9a^3b^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4ab^2x^2 - b^4x - 36a^4x + 9a^3b^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2x(4ax - b^2) - 9a^3(4ax - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow (4ax - b^2)(b^2x - 9a^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^2}{4a}, \frac{9a^3}{b^2}$$

28. $9x^9 + 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு எனக்காட்டுக.

$$P(x) = 9x^9 + 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2$$

$$P(-x) = 9(-x)^9 + 2(-x)^5 - (-x)^4 - 7(-x)^2 + 2$$

$$= -9x^9 - 2x^5 - x^4 - x^2 + 2$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 2 மற்றும் 1 முறை குறிமாற்றங்கள் இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 2 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் 1 குறை மெய்யெண் மூலமும் இருக்கும்.

மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $= 9 - (2 + 1) = 9 - 3 = 6$. எனவே $P(x)$ -க்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு.

29. பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மை பற்றி ஆராய்க: (i) $x^{2018} + 1947x^{1950} + 15x^8 + 26x^6 + 2019$ (ii) $x^5 - 19x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 11$

$$(i) P(x) = x^{2018} + 1947x^{1950} + 15x^8 + 26x^6 + 2019$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 0. எனவே $P(x)$ -க்கு மிகை மெய்யெண் மற்றும் குறை மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை. எனவே $P(x)$ -ன் அனைத்து மூலங்களும் கலப்பெண் மூலங்களாகும்.

$$(ii) P(x) = x^5 - 19x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 11$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 2 மற்றும் 1 முறை குறிமாற்றங்கள் இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு 2 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் 1 குறை மெய்யெண் மூலமும் இருக்கும்.

மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $= 5 - (2 + 1) = 2$. எனவே $P(x)$ -க்கு 2 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு.

30. $9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் அதிகபட்ச சாத்தியமான மிகை எண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை ஆராய்க.

$$P(x) = 9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2$$

$$P(-x) = 9(-x)^9 - 4(-x)^8 + 4(-x)^7 - 3(-x)^6 + 2(-x)^5 + (-x)^3 + 7(-x)^2 + 7(-x) + 2$$

$$= -9x^9 - 4x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^3 + 7x^2 - 7x + 2$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 4 மற்றும் 3 முறை குறிமாற்றங்கள் இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 4 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் அதிகபட்சம் 3 குறை மெய்யெண் மூலங்களும் இருக்கும்.

31. $x^2 - 5x + 6$ மற்றும் $x^2 - 5x + 16$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் அதிகபட்ச சாத்தியமான மிகை எண் மற்றும் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கையை ஆராய்க. வளைவரைகளின் தோராய வரைபடம் வரைக.

$$P(x) = (x^2 - 5x + 6); P(-x) = (x^2 + 5x + 6)$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 2 மற்றும் 0 முறை குறிமாற்றங்கள்

இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 2 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் 0 குறை மெய்யெண் மூலங்கள் இருக்கும்.

$$Q(x) = x^2 - 5x + 16 ; Q(-x) = x^2 + 5x + 16$$

$Q(x)$ மற்றும் $Q(-x)$ -க்கு முறையே 2 மற்றும் 0 முறை குறிமாற்றங்கள்

இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 2 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் 0 குறை மெய்யெண் மூலங்கள் இருக்கும்.

$$y = x^2 - 5x + 6$$

x	-1	0	1	2	3	4
y	12	6	2	0	0	2

$$y = x^2 - 5x + 16$$

x	-1	0	1	2	3	4
y	22	16	12	10	10	12



32. $x^9 - 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு எனக்காட்டுக.

$$P(x) = x^9 - 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1$$

$$P(-x) = (-x)^9 - 5(-x)^5 + 4(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1$$

$$= -x^9 + 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 2 மற்றும் 1 முறை குறிமாற்றங்கள்

இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 2 மிகை மெய்யெண் மூலங்களும் மற்றும் 1 குறை மெய்யெண் மூலமும் இருக்கும்.

மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $= 9 - (2 + 1) = 9 - 3 = 6$. எனவே $P(x)$ -க்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு.

33. $x^9 - 5x^8 - 14x^7 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மிகையெண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்க.

$$P(x) = x^9 - 5x^8 - 14x^7$$

$$P(-x) = (-x)^9 - 5(-x)^8 - 14(-x)^7 = -x^9 + 5x^8 + 14x^7$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 1 மற்றும் 1 முறை குறிமாற்றங்கள்

இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு அதிகபட்சம் 1 மிகை மெய்யெண் மூலமும் மற்றும் அதிகபட்சம் 1 குறை மெய்யெண் மூலமும் இருக்கும்.

34. $x^9 + 9x^7 + 7x^5 + 5x^3 + 3x = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மெய்யெண் மற்றும் மெய்யற்ற கலப்பெண் பூச்சியமாக்கிகளின் துல்லியமான எண்ணிக்கையை கண்டறிக.

$$P(x) = x^9 + 9x^7 + 7x^5 + 5x^3 + 3x$$

$$P(-x) = (-x)^9 + 9(-x)^7 + 7(-x)^5 + 5(-x)^3 + 3(-x)$$

$$= -x^9 - 9x^7 - 7x^5 - 5x^3 - 3x$$

$P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ -க்கு முறையே 0 மற்றும் 0 முறை குறிமாற்றங்கள்

இருப்பதால் $P(x)$ -க்கு மிகை மெய்யெண் மூலம் மற்றும் குறை மெய்யெண் மூலம் இல்லை.

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $17x^2 + 43x - 73 = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் $\alpha + 2$ மற்றும் $\beta + 2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச்சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்.

$$\alpha + \beta = -\frac{43}{17} ; \alpha\beta = -\frac{73}{17}$$

$$\text{மூலங்களின் கூட்டுப்பலன்} = \alpha + 2 + \beta + 2 = \alpha + \beta + 4 = -\frac{43}{17} + 4 = \frac{25}{17}$$

$$\begin{aligned} \text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்} &= (\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 \\ &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \\ &= -\frac{73}{17} + 2\left(-\frac{43}{17}\right) + 4 \\ &= \frac{-73-86}{17} + 4 \\ &= \frac{-159+68}{17} \\ &= -\frac{91}{17} \end{aligned}$$

தேவையான இருபடிச்சமன்பாடு: $x^2 - (\text{மூ.கூ.ப})x + (\text{மூ.பெ.ப}) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{25}{17}\right)x + \left(-\frac{91}{17}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 25x - 91 = 0$$

2. $2x^2 - 7x + 13 = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் α^2 மற்றும் β^2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச்சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்.

$$\alpha + \beta = \frac{7}{2} ; \alpha\beta = \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{மூலங்களின் கூட்டுப்பலன்} &= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{13}{2}\right) \\ &= \frac{49}{4} - 13 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{தேவையான இருபடிச்சமன்பாடு: } x^2 - (\text{மூ.கூ.ப})x + (\text{மூ.பெ.ப}) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{169}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x + 169 = 0$$

3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $p:q:r$ எனும் விகிதத்தில் அமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

மூலங்கள் $p:q:r$ எனும் விகிதத்தில் அமைந்துள்ளதால், மூலங்கள் $p\lambda, q\lambda, r\lambda$ என்க.

$$\Sigma_1 = p\lambda + q\lambda + r\lambda = -\frac{a}{1} \Rightarrow \lambda(p+q+r) = -a \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{p+q+r} \rightarrow (1)$$

$$\Sigma_3 = (p\lambda)(q\lambda)(r\lambda) = -\frac{c}{1} \Rightarrow \lambda^3 pqr = -c \Rightarrow \lambda^3 = -\frac{c}{pqr} \rightarrow (2)$$

$$\begin{aligned} (1) - \text{ஐ} \quad (2) \text{இல் பிரதியிடுக} &\Rightarrow \left(-\frac{a}{p+q+r}\right)^3 = -\frac{c}{pqr} \\ &\Rightarrow -\frac{a^3}{(p+q+r)^3} = -\frac{c}{pqr} \\ &\Rightarrow pqr a^3 = c(p+q+r)^3 \end{aligned}$$

4. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களைக் மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

சமன்பாடு: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; மூலங்கள்: α, β மற்றும் γ

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{a}{1} = -a$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{b}{1} = b$$

$$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{c}{1} = -c$$

மூலங்கள்: $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

$$\Sigma_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = a^2 - 2b$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= b^2 - 2(-c)(-a) = b^2 - 2ca \end{aligned}$$

$$\Sigma_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-c)^2 = c^2$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\Sigma_1)x^2 + (\Sigma_2)x - (\Sigma_3) = 0$$

$$x^3 - (a^2 - 2b)x^2 + (b^2 - 2ca)x - c^2 = 0$$

5. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β மற்றும் γ எனில் கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்டு முப்படிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha, -\beta, -\gamma$

சமன்பாடு: $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$; மூலங்கள் : α, β மற்றும் γ

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

(i) மூலங்கள்: $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

$$\Sigma_1 = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2(-2) = -4$$

$$\Sigma_2 = (2\alpha)(2\beta) + (2\beta)(2\gamma) + (2\gamma)(2\alpha) = 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 4(3) = 12$$

$$\Sigma_3 = (2\alpha)(2\beta)(2\gamma) = 8(\alpha\beta\gamma) = 8 \times (-4) = -32$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\Sigma_1)x^2 + (\Sigma_2)x - (\Sigma_3) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - (-4)x^2 + 12x - (-32) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 12x + 32 = 0$$

(ii) மூலங்கள்: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\Sigma_2 = \left(\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\Sigma_1)x^2 + (\Sigma_2)x - (\Sigma_3) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - \left(\frac{3}{4}\right)x^2 + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

(iii) மூலங்கள்: $-\alpha, -\beta, -\gamma$

$$\Sigma_1 = -(\alpha + \beta + \gamma) = -(-2) = 2$$

$$\Sigma_2 = (-\alpha)(-\beta) + (-\beta)(-\gamma) + (-\gamma)(-\alpha) = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$$

$$\Sigma_3 = (-\alpha)(-\beta)(-\gamma) = -(\alpha\beta\gamma) = -(-4) = 4$$

முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம்:

$$x^3 - (\Sigma_1)x^2 + (\Sigma_2)x - \Sigma_3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

6. $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் பெருக்கல் 1 எனில் சமன்பாட்டினை தீர்க்க.

சமன்பாடு: $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$; மூலங்கள் : α, β மற்றும் γ

இரு மூலங்களின் பெருக்கல் $1 \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} \rightarrow (1)$

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{-16}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{16}{3} \rightarrow (2)$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{23}{3} \Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{23}{3} \rightarrow (3)$$

$$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 2 \rightarrow (4)$$

$$(1), (4) \text{ இல் இருந்து, } \Rightarrow (1)\gamma = 2 \Rightarrow \boxed{\gamma = 2}$$

$$(2) \Rightarrow \alpha + \beta + 2 = \frac{16}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{10}{3} \quad ((1) \text{ இல் இருந்து})$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3\alpha^2 - 10\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(3\alpha - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 3 \text{ (or) } \frac{1}{3}}$$

$$\alpha = 3 \text{ (or) } \frac{1}{3} \text{ எனில் } (1) \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{3} \text{ (or) } 3}$$

எனவே மூலங்கள் = $3, \frac{1}{3}, 2$

7. $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் அமைந்தால் சமன்பாட்டைக் காண்க.

சமன்பாடு: $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$; மூலங்கள் : α, β மற்றும் γ

இரு மூலங்கள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளதால், $\alpha, \beta = 3p, \gamma = 2p$

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9 \Rightarrow \alpha + 3p + 2p = 9$$

$$\Rightarrow \alpha = 9 - 5p \rightarrow (1)$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} \Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 14$$

$$\Rightarrow (9 - 5p)3p + (3p)(2p) + (2p)(9 - 5p) = 14$$

$$\Rightarrow 27p - 15p^2 + 6p^2 + 18p - 10p^2 - 14 = 0$$

$$\Rightarrow -19p^2 + 45p - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 19p^2 - 45p + 14 = 0$$

$$\Rightarrow 19p^2 - 38p - 7p + 14 = 0$$

$$\Rightarrow 19p(p - 2) - 7(p - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (p - 2)(19p - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 2} \text{ (or) } \frac{7}{19} \text{ (தீர்வு அல்ல)}$$

எனவே மூலங்கள் $9 - 5p, 3p, 2p = -1, 6, 4$.

8. α, β மற்றும் γ ஆகியன $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருப்பின், கெழுக்கள் வாயிலாக $\sum \frac{\alpha}{\beta\gamma}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

சமன்பாடு: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; மூலங்கள் : α, β மற்றும் γ

$$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\Sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

$$\begin{aligned} \Sigma 1 = \sum \frac{\alpha}{\beta\gamma} &= \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\Sigma\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{-\frac{d}{a}} \\ &= \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right) \left(-\frac{a}{d}\right) \\ &= \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right) \left(-\frac{a}{d}\right) \\ &= \frac{2ac - b^2}{ad} \end{aligned}$$

9. 12 மீ உயரமுள்ள ஒரு மரம் இரு பகுதிகளாக முறிந்துள்ளது. முறிந்த இடம் வரை இருக்கும் கீழ்ப்பகுதி, உடைப்பின் மேற்பகுதியின் நீளத்தின் கனமூலம் ஆகும். இந்தத் தகவலை கீழ்ப்பகுதியின் நீளம் காணும் வகையில் கணிதவியல் கணக்காக மாற்றுக.

முறிந்த பகுதியின் நீளம் x என்க. எனவே கீழ்ப்பகுதியின் நீளம் = x .

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $x^3 + x = 12 \Rightarrow x^3 + x - 12 = 0$

10. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ - ஒரு மூலமாகவும் முழுக்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. எனவே $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ என்பது ஒரு காரணி. $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ என்பது

மற்றொரு காரணி.

$$\text{காரணிகளின் பெருக்கல்} = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ என்பது ஒரு காரணி. $(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ என்பது மற்றொரு காரணி.

$$\text{காரணிகளின் பெருக்கல்} = (x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = (x^2)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2 = x^4 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 2 = 0$$

11. ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோடு இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது என்பதனை நிரூபிக்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு: $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (1)$

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு: $y = mx + c \rightarrow (2)$

(1), (2) இல் இருந்து $\Rightarrow x^2 + (mx + c)^2 = r^2$

$$\Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0$$

இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு. இதற்கு இரண்டு தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு. எனவே ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோடு இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது

12. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ - ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஒரு மூலம் $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. $\Rightarrow x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow x + \sqrt{3} = \sqrt{5}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $(x + \sqrt{3})^2 = \sqrt{5}^2$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = 2\sqrt{3}x$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $(x^2 - 2)^2 = (2\sqrt{3}x)^2$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 12x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

13. ஒரு நேர்க்கோடும் ஒரு பரவளையமும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது என்பதனை நிரூபிக்க.

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு: $y = mx + c \rightarrow (1)$

பரவளையத்தின் சமன்பாடு: $y^2 = 4ax \rightarrow (2)$

(1), (2) இல் இருந்து $\Rightarrow (mx + c)^2 = 4ax$

$$\Rightarrow m^2x^2 + 2mcx + c^2 = 4ax$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + 2mcx + c^2 - 4ax = 0$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + (2mc - 4a)x + c^2 = 0$$

இது ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு. இதற்கு இரண்டு தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு. எனவே ஒரு நேர்க்கோடும் ஒரு பரவளையமும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது

கொள்ளாது.

14. $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$x^2 = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Rightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y - 5y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 4) - 5(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow y = 4, 5$$

$y = 4, 5$ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,

$$\Rightarrow x^2 = 4 ; x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm 2 ; x = \pm \sqrt{5}$$

எனவே மூலங்கள் $= 2, -2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$.

15. $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 - 3 - 33 + 35 = 0$

$\therefore (x - 1)$ ஒரு காரணி.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -33 & 35 \\ & 0 & 1 & -2 & -35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -35 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = x^2 - 2x - 35$$

$$= x^2 + 5x - 7x - 35$$

$$= x(x + 5) - 7(x + 5)$$

$$= (x + 5)(x - 7)$$

$$\Rightarrow x = -5, 7$$

எனவே மூலங்கள் $= 1, -5, 7$

16. $2x^3 + 11x^2 - 9x - 18 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

ஒற்றைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2 - 9 = -7$

இரட்டைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 11 - 18 = -7$

$\therefore (x + 1)$ ஒரு காரணி.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 11 & -9 & -18 \\ & 0 & -2 & -9 & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 9 & -18 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = 2x^2 + 9x - 18$$

$$= (2x - 3)(x + 6)$$

$$x = \frac{3}{2}, -6$$

எனவே மூலங்கள் $= -1, \frac{3}{2}, -6$.

17. $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ -ன் மூலங்கள் கூட்டுத்தொடரில் அமைந்தவை எனில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ -ன் மூலங்கள் $(a - d), a, (a + d)$ என்க.

$$\sum_1 = a - d + a + a + d = -\frac{b}{a} = -\frac{-36}{9} = 4 \Rightarrow 3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \begin{array}{rrrr} 9 & -36 & 44 & -16 \\ 0 & 12 & -32 & 16 \\ \hline 9 & -24 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = \frac{1}{3}(9x^2 - 24x + 12)$$

$$= 3x^2 - 8x + 4$$

$$= 3x^2 - 6x - 2x + 4$$

$$= 3x(x - 2) - 2(x - 2)$$

$$= (x - 2)(3x - 2)$$

$$(x - 2)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2, \frac{2}{3}$$

எனவே மூலங்கள் $= \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2$. (அ) $2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}$.

18. $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ -ன் மூலங்கள் பெருக்குத்தொடரில் அமைந்தவை எனில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ -ன் மூலங்கள் $(\frac{a}{r}), a, (ar)$ என்க.

$$\sum_3 = (\frac{a}{r}) a(ar) = -\frac{d}{a} = -\frac{-24}{3} = 8 \Rightarrow a^3 = 2^3 \Rightarrow a = 2$$

$$2 \begin{array}{rrrr} 3 & -26 & 52 & -24 \\ 0 & 6 & -40 & 24 \\ \hline 3 & -20 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = 3x^2 - 20x + 12$$

$$= 3x^2 - 18x - 2x + 12$$

$$= 3x(x - 6) - 2(x - 6)$$

$$= (x - 6)(3x - 2)$$

$$(x - 6)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 6, \frac{2}{3}$$

எனவே மூலங்கள் $= \frac{2}{3}, 2, 6$. (அ) $6, 2, \frac{2}{3}$.

19. $2x^3 - 6x^2 + 3x + k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்ற இரு மூலங்களின் கூடுதலின் இருமடங்கு எனில் k -ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

சமன்பாடு: $2x^3 - 6x^2 + 3x + k = 0$ மூலங்கள்: α, β, γ

$$\alpha = 2(\beta + \gamma) \rightarrow (1)$$

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2(\beta + \gamma) = 6$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \alpha = 6 \Rightarrow 3\alpha = 6 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$2 \begin{array}{rrrr} 2 & -6 & 3 & k \\ 0 & 4 & -4 & -2 \\ \hline 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$\therefore \alpha = 2$ என்பது ஒரு மூலம், எனவே $k - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

$$\text{ஈவு} = 2x^2 - 2x - 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

எனவே மூலங்கள் $= 2, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

20. பின்வரும் முப்படி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$(i) 2x^3 - 9x^2 + 10x = 3 \quad (ii) 8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$(i) 2x^3 - 9x^2 + 10x = 3 \Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2 - 9 + 10 - 3 = 0$

$\therefore (x - 1)$ ஒரு காரணி.

$$1 \begin{array}{rrrr} 2 & -9 & 10 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 3 \\ \hline 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = 2x^2 - 7x + 3$$

$$= 2x^2 - x - 6x + 3$$

$$= x(2x - 1) - 3(2x - 1)$$

$$= (x - 3)(2x - 1)$$

$$\Rightarrow x = 3, \frac{1}{2}$$

எனவே மூலங்கள் $= 1, 3, \frac{1}{2}$.

$$(ii) 8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

ஒற்றைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 8 - 7 = 1$

இரட்டைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= -2 + 3 = 1$

$\therefore (x + 1)$ ஒரு காரணி.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 8 & -2 & -7 & 3 \\ & 0 & -8 & 10 & -3 \\ \hline & 8 & -10 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ஈவு} &= 8x^2 - 10x + 3 \\ &= 8x^2 - 4x - 6x + 3 \\ &= 4x(2x - 1) - 3(2x - 1) \\ &= (4x - 3)(2x - 1) \\ x &= \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

எனவே மூலங்கள் $= -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

21. $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - 4x + 20 &= 0 \Rightarrow x^2(x - 5) - 4(x - 5) = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 - 4)(x - 5) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 4 = 0; x - 5 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = 4; x = 5 \\ &\Rightarrow x = \pm 2, x = 5 \end{aligned}$$

22. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ -ன் மூலங்களைக் காண்க.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3.$$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{3}{2}\right) &= 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \\ &= 2\left(-\frac{27}{8}\right) + 3\left(\frac{9}{4}\right) - 3 + 3 \\ &= -\frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore -\frac{3}{2}$ ஒரு மூலமாகும்.

மற்ற மூலங்களைக் காண $(2x^3 + 3x^2 + 2x + 3) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3/2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ & 0 & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = \frac{1}{2}[2x^2 + 2] = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

எனவே மூலங்கள் $= -\frac{3}{2}, i, -i$.

23. $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

ஒற்றைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $\neq$ இரட்டைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $\Rightarrow -1$ ஒரு மூலமாகும்.

மற்ற மூலங்களைக் காண $(7x^3 - 43x^2 - 43x + 7) \div -1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 7 & -43 & -43 & 7 \\ & 0 & -7 & 50 & -7 \\ \hline & 7 & -50 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ஈவு} &= 7x^2 - 50x + 7 = 7x^2 - 49x - x + 7 = 7x(x - 7) - 1(x - 7) \\ &= (x - 7)(7x - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 7, \frac{1}{7}$$

எனவே மூலங்கள் $= -1, 7, \frac{1}{7}$.

24. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க: $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4$

$$12x^3 + 8x = 29x^2 - 4 \Rightarrow 12x^3 - 29x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$P(x) = 12x^3 - 29x^2 + 8x + 4$$

$$P(2) = 12(2)^3 - 29(2)^2 + 8(2) + 4 = 96 - 116 + 16 + 4 = 116 - 116 = 0$$

$\therefore (x - 2)$ ஒரு காரணி.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 12 & -29 & 8 & 4 \\ & 0 & 24 & -10 & -4 \\ \hline & 12 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{ஈவு} = 12x^2 - 5x - 2$$

$$= 12x^2 + 3x - 8x - 2 = 3x(4x + 1) - 2(4x + 1) = (4x + 1)(3x - 2)$$

$$(4x + 1)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$$

எனவே மூலங்கள் $= 2, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

25. $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அனைத்து மெய்யெண்களையும் காண்க.

$$4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x 2^2) + 32 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 12(2^x) + 32 = 0$$

$$2^x = y \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow (y)^2 - 12(y) + 32 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y - 8y + 32 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 4) - 8(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(y - 8) = 0$$

$$\Rightarrow y = 4, 8$$

y -ன் மதிப்புகளை $2^x = y$ இல் பிரதியிடுக,

$$y = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$y = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3} \quad \text{எனவே மூலங்கள்} = 2, 3.$$

26. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\frac{1}{3}$ எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$\frac{1}{3}$ ஒரு மூலம் எனில் மற்றொரு மூலம் 3 ஆகும். இதுபோலவே α ஒரு மூலம் எனில் மற்றொரு மூலம் $\frac{1}{\alpha}$ ஆகும்.

$$\Sigma 1 = \frac{5}{6} \Rightarrow 3 + \frac{1}{3} + \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{3} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{5}{6} - \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{5 - 20}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 2 = -5\alpha$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha + 4\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha(\alpha + 2) + 1(\alpha + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2)(2\alpha + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -2, -\frac{1}{2}$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}.$$

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $2 + i$ மற்றும் $3 - \sqrt{2}$ ஆகியவை $x^6 - 13x^5 + 62x^4 - 126x^3 + 65x^2 + 127x - 140 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் அனைத்து மூலங்களையும் காண்க.

$2 + i$ மற்றும் $3 - \sqrt{2}$ ஆகியவை பூச்சியங்கள் எனவே $2 - i$ மற்றும் $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ஆகியவையும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

$$x = 2 + i \Rightarrow x - 2 = i$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = (i)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow (x - 3)^2 = -\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 39x^2 - 39x + 135 \equiv$$

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 7)(x^2 + px - 4)$$

$$\text{இருபுறமும் } x \text{ -ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த, } 127 = 35p + 120 + 112$$

$$\Rightarrow p = 3$$

$$\text{எனவே, } x^2 + px - 4 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = -1, 4.$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = 2 + i, 2 - i, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, -1, 4 \text{ ஆகும்.}$$

$$2. 1 + 2i \text{ மற்றும் } \sqrt{3} \text{ ஆகியவை } x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 39x^2 - 39x + 135$$

என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் எனில் அனைத்து பூச்சியமாக்கிகளையும் கண்டறிக.

$$1 + 2i \text{ மற்றும் } \sqrt{3} \text{ ஆகியவை பூச்சியங்கள் எனவே } 1 - 2i \text{ மற்றும் } -\sqrt{3}$$

$$\text{ஆகியவையும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.}$$

$$x = 1 + 2i \Rightarrow x - 1 = 2i$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = (2i)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0$$

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 39x^2 - 39x + 135 \equiv$$

$$(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 3)(x^2 + px - 9)$$

$$\text{இருபுறமும் } x \text{ -ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த, } -39 = -54 - 15p \Rightarrow p = -1$$

$$\text{எனவே, } x^2 + px - 9 = x^2 - x - 9, \text{ solving } x^2 - x - 9 = 0.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 36}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2} = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}, \frac{1 - \sqrt{37}}{2}$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = 1 + 2i, 1 - 2i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{37}}{2}, \frac{1 - \sqrt{37}}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$$3. \text{ தீர்க்க: } (x - 2)(x - 7)(x - 3)(x + 2) + 19 = 0$$

$$[(x - 2)(x - 3)][(x - 7)(x + 2)] + 19 = 0$$

$$\Rightarrow [x^2 - 5x + 6][x^2 - 5x - 14] + 19 = 0$$

$$x^2 - 5x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow [y + 6][y - 14] + 19 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y - 84 + 19 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y - 65 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 13)(y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow y = 13, -5$$

$$y = 13, 5 \text{ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 13$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = -5$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 13 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-13)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{77}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = \frac{-5 \pm \sqrt{77}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$4. \text{ தீர்க்க: } (2x - 3)(6x - 1)(3x - 2)(x - 2) - 7 = 0$$

$$\Rightarrow [(2x - 3)(3x - 2)][(6x - 1)(x - 2)] - 7 = 0$$

$$(6x^2 - 13x + 6)(6x^2 - 13x + 2) - 7 = 0$$

$$6x^2 - 13x = y \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow (y + 6)(y + 2) - 7 = 0 \Rightarrow y^2 + 8y + 12 - 7 = 0 \Rightarrow y^2 + 8y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 13)(y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow y = 13, -5$$

$$y = 13, 5 \text{ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,}$$

$$5. \text{ தீர்க்க: } (i)(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504$$

$$(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504$$

$$\Rightarrow [(x - 5)(x + 4)][(x - 7)(x + 6)] = 504$$

$$\Rightarrow [x^2 - x - 20][x^2 - x - 42] = 504$$

$$x^2 - x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow [y - 20][y - 42] = 504$$

$$\Rightarrow y^2 - 62y + 840 - 504 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 62y + 336 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 56y + 336 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 6) - 56(y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 6)(y - 56) = 0$$

$$\Rightarrow y = 6, 56$$

$$y = 6, 56 \text{ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,}$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 6$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 56$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, 3$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = -7, 8$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = -7, -2, 3, 8.$$

$$6. \text{ தீர்க்க: } (x - 4)(x - 7)(x - 2)(x + 1) = 16$$

$$(x - 4)(x - 7)(x - 2)(x + 1) = 16$$

$$\Rightarrow [(x - 4)(x - 2)][(x - 7)(x + 1)] = 16$$

$$\Rightarrow [x^2 - 6x + 8][x^2 - 6x - 7] = 16$$

$$x^2 - 6x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow [y + 8][y - 7] = 16$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 56 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 72 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y + 9y - 72 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 8) + 9(y - 8) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 8)(y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow y = 8, -9$$

$$y = 8, -9 \text{ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 32}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{78}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 17}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = -9$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, 3$$

$$\text{எனவே மூலங்கள்} = 3, 3, 3 + \sqrt{17}, 3 - \sqrt{17}.$$

$$7. \text{ தீர்க்க: } (2x - 1)(x + 3)(x - 2)(2x + 3) + 20 = 0$$

$$\Rightarrow [(2x - 1)(2x + 3)][(x + 3)(x - 2)] + 20 = 0$$

$$\Rightarrow [4x^2 + 4x - 3][x^2 + x - 6] + 20 = 0$$

$$\Rightarrow [4(x^2 + x) - 3][x^2 + x - 6] + 20 = 0$$

$$x^2 + x = y \rightarrow (1) \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow [4y - 3][y - 6] + 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 24y - 3y + 18 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 27y + 38 = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 8y - 19y + 38 = 0$$

$$\Rightarrow 4y(y - 2) - 19(y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 2)(4y - 19) = 0$$

$$\Rightarrow y = 2, \frac{19}{4}$$

$y = 2, \frac{19}{4}$ என சமன் (1) இல் பிரதியிடுக,

$$\Rightarrow x^2 + x = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x = \frac{19}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 19 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(-19)}}{2(4)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{320}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{20}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{4 \times 5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

எனவே மூலங்கள் $= -2, 1, \frac{-1+2\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}$.

$$8. \text{தீர்க்க: } 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடானது முதல் வகை சார்ந்த இரட்டைப்படை படி தலைகீழ் சமன்பாடாகும்.

சமன்பாட்டினை $x^2 -$ ஆல் வகுக்க,

$$6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \rightarrow (1)$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{x}} \Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$(1) \Rightarrow 6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$$

$$\Rightarrow 6y^2 - 12 - 35y + 62 = 0$$

$$\Rightarrow 6y^2 - 35y + 50 = 0$$

$$\Rightarrow 6y^2 - 15y - 20y + 50 = 0$$

$$\Rightarrow 3y(2y - 5) - 10(2y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (2y - 5)(3y - 10) = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2} ; y = \frac{10}{3}}$$

y -ன் மதிப்புகளை $y = x + \frac{1}{x}$ இல் பிரதியிடுக,

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3 = 10x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x - 3) - 1(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(3x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, \frac{1}{3}$$

எனவே மூலங்கள் $= 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

$$9. \text{தீர்க்க: } x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடானது இரண்டாம் வகை சார்ந்த இரட்டைப்படை படி தலைகீழ் சமன்பாடாகும். எனவே இதன் மூலங்கள் 1 மற்றும் -1 ஆகும். மற்ற இரு மூலங்கள் α மற்றும் $\frac{1}{\alpha}$ ஆகும்.

$$\Sigma 1 = -1 + 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = -3$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 1 = -3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

எனவே மூலங்கள் $= -1, 1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$$10. x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0 \text{ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடானது முதல் வகை சார்ந்த இரட்டைப்படை படி தலைகீழ் சமன்பாடாகும்.

சமன்பாட்டினை $x^2 -$ ஆல் வகுக்க,

$$x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0 \rightarrow (1)$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{x}} \Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$(1) \Rightarrow y^2 - 2 - 10y + 26 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 6)(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow y = 6, 4$$

$$x + \frac{1}{x} = 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

எனவே மூலங்கள் $= 3 \pm 2\sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

5. இருபரிமாண பகுமுறை வடிவியல் - II

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. (1,1), (2,-1) மற்றும் (3,2) என்ற மூன்று புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \rightarrow (1)$

$$(1,1) \Rightarrow 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0 \Rightarrow 2g + 2f + c = -2 \rightarrow (2)$$

$$(2,-1) \Rightarrow 4 + 1 + 4g - 2f + c = 0 \Rightarrow 4g - 2f + c = -5 \rightarrow (3)$$

$$(3,2) \Rightarrow 9 + 4 + 6g + 4f + c = 0 \Rightarrow 6g + 4f + c = -13 \rightarrow (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2 - 4) - 2(4 - 6) + 1(16 + 12) = -12 + 4 + 28$$

$$= 20$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ -13 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(-2 - 4) - 2(-5 + 13) + 1(-20 - 26)$$

$$= 12 - 16 - 46 = -50$$

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & -13 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5 + 13) + 2(4 - 6) + 1(-52 + 30)$$

$$= 16 - 4 - 22 = -10$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & 4 & -13 \end{vmatrix} = 2(26 + 20) - 2(-52 + 30) - 2(16 + 12)$$

$$= 92 + 44 - 56 = 80$$

$$g = \frac{\Delta_g}{\Delta} = \frac{-50}{20} = -\frac{5}{2}; f = \frac{\Delta_f}{\Delta} = \frac{-10}{20} = -\frac{1}{2}; c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{80}{20} = 4$$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $(1) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 4 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

2. பாசன வாய்க்கால் மீது அமைந்த சாலையில் 20மீ அகலமுடைய இரண்டு அரைவட்ட வளைவு நீர்வழிகள் அமைக்கப்பட்டன. அவற்றின் துணைத்தூண்களின் அகலம் 2 மீ. புடத்தினைப் பயன்படுத்தி அந்த வளைவுகளின் மாதிரிக்கான சமன்பாடுகளைக் காண்க.

முதல் வளைவின் மையம் $c_1 = (12,0)$ மற்றும் ஆரம் $= 10$ மீ

முதல் வளைவின் சமன்பாடு: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\Rightarrow (x - 12)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 144 + y^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 24x + 144 = 0$$

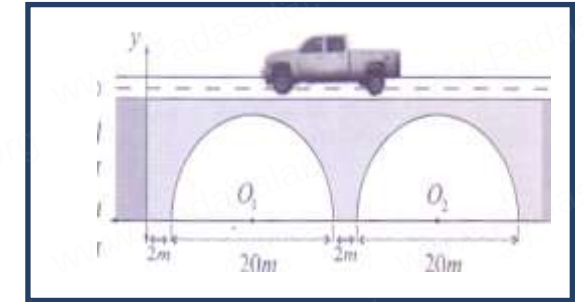
இரண்டாவது வளைவின் மையம் $c_1 = (34,0)$ மற்றும் ஆரம் $= 10$ மீ

இரண்டாவது வளைவின் சமன்பாடு: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\Rightarrow (x - 34)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 68x + 1156 + y^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 68x + 1056 = 0$$



4. மையம் (2,3) உடையதும் $3x - 2y - 1 = 0$ மற்றும் $4x + y - 27 = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

மையம் = (2,3)

$$3x - 2y = 1 \rightarrow (1); 4x + y = 27 \rightarrow (2)$$

$$(1) \Rightarrow 3x - 2y = 1$$

$$(2) \times 2 \Rightarrow 8x + 2y = 54 \rightarrow (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 11x = 55 \Rightarrow x = 5$$

$x = 5$ என சமன் (2) இல் பிரதியிடுக

$$(2) \Rightarrow 8(5) + 2y = 54 \Rightarrow 2y = 54 - 40 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$$

எனவே வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி = $P(5,7)$ ஆகும்.

$$\text{மையம் } C = (2,3); P(5,7)$$

$$\text{ஆரம் } CP = r = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 9 + 16 = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{வட்டத்தின் சமன்பாடு: } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

5. (1,0), (-1,0) மற்றும் (0,1) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$$\text{வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு : } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \rightarrow (1)$$

$$(1,0) \Rightarrow 1 + 0 + 2g + 0 + c = 0 \Rightarrow 2g + c = -1 \rightarrow (2)$$

$$(-1,0) \Rightarrow 1 + 0 - 2g + 0 + c = 0 \Rightarrow -2g + c = -1 \rightarrow (3)$$

$$(0,1) \Rightarrow 0 + 1 + 0 + 2f + c = 0 \Rightarrow 2f + c = -1 \rightarrow (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 0 + 1(-4-0) = -4 - 4 = -8$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(0-2) - 1 + 1(-2) = 2 - 1 = 0$$

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1+1) + 1(-2-0) + 1(2-0) = -2 + 2 = 0$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(0+2) - 0 - 1(-4-0) = 4 + 4 = 8$$

$$g = \frac{\Delta_g}{\Delta} = \frac{0}{-8} = 0; f = \frac{\Delta_f}{\Delta} = \frac{0}{-8} = 0; c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1$$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு (1) $\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ (அ) $x^2 + y^2 = 1$

6. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 8 = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு மற்றும்

செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளை (2,2) என்ற புள்ளியில் காண்க.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2y - 3(x+2) + 3(y+2) - 8 = 0 \quad (\because 2g = -6, 2f = 6)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y - 3x - 6 + 3y + 6 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow -x + 5y - 8 = 0$$

$$\times (-) \Rightarrow x - 5y + 8 = 0$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு: $5x + y + k = 0$

$$(2,2) - \text{வை பிரதியிடுக, } 5(2) + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -12$$

எனவே தேவையான செங்கோட்டின் சமன்பாடு $5x + y - 12 = 0$ ஆகும்.

7. $x^2 - 4x - 5y - 1 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$x^2 - 4x - 5y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 5y + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5y + 1 + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 5(y+1)$$

$$\Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

பரவளையம் மேல்புறமாக திறப்புடையது.

$$\text{முனை } V = (h, k) = (2, -1);$$

$$\text{குவியம் } F = (h, a+k) = \left(2, \frac{5}{4} - 1\right) = \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{இயக்குவரையின் சமன்பாடு } y = k - a \Rightarrow y = -1 - \frac{5}{4} \Rightarrow y = -\frac{9}{4} \Rightarrow 4y + 9 = 0$$

$$\text{செவ்வகல நீளம்} = 4a = 4\left(\frac{5}{4}\right) = 5$$

8. பின்வருவனவற்றிற்கான முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு மற்றும்

செவ்வகல நீளம் காண்க. $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$

$$x^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -8y - 17$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -8y - 17 + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -8y - 16$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -8(y+2)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -4(2)(y+2)$$

இதிலிருந்து $a = 2, V(h, k) = (1, -2)$

பரவளையம் கீழ்ப்புறமாக திறப்புடையது.

முனை $V(h, k) = (1, -2)$

குவியம் $F = (h, k - a) = (1, -2 - 2) = (1, -4)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $y = k + a \Rightarrow y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0$

செவ்வகல நீளம் $= 4a = 4(2) = 8$

9.பின்வருவனவற்றிற்கான முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு மற்றும் செவ்வகல நீளம் காண்க. $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

$$y^2 - 4y - 8x + 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 8x - 12$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 8x - 12 + 4$$

$$\Rightarrow (y - 2)^2 = 8x - 8$$

$$\Rightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 1)$$

$$\Rightarrow (y - 2)^2 = 4(2)(x - 1)$$

இதிலிருந்து $a = 2, V(h, k) = (1, 2)$

பரவளையம் வலப்புறமாக திறப்புடையது.

முனை $V(h, k) = (1, 2)$

குவியம் $F = (h + a, k) = (1 + 2, 2) = (3, 2)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = h - a \Rightarrow x = 1 - 2 \Rightarrow x = -1$

செவ்வகல நீளம் $= 4a = 4(2) = 8$

10.பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கூம்புவளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம், குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகள் காண்க. $18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$.

$$18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$$

$$\Rightarrow [18x^2 - 144x] + [12y^2 + 48y] = -120$$

$$\Rightarrow 18[x^2 - 8x] + 12[y^2 + 4y] = -120$$

$$\Rightarrow 18[x^2 - 8x + 16 - 16] + 12[y^2 + 4y + 4 - 4] = -120$$

$$\Rightarrow 18[(x - 4)^2 - 16] + 12[(y + 2)^2 - 4] = -120$$

$$\Rightarrow 18(x - 4)^2 + 12(y + 2)^2 - 288 - 48 = -120$$

$$\Rightarrow 18(x - 4)^2 + 12(y + 2)^2 = 216$$

$$\div 216 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{18} = 1$$

இச்சமன்பாடானது நெட்டச்சு y - அச்சிற்கு இணையாக அமைந்த நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

$$\Rightarrow a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, b^2 = 12$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{18 - 12}{18}} = \sqrt{\frac{6}{18}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$$

$$ae = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{6} ; \frac{a}{e} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}/3\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$$

மையம் $C(h, k) = (4, -2)$

குவியங்கள் $F_1 = (h, k + ae) = (4, -2 + \sqrt{6}) ; F_2 = (h, k - ae) = (4, -2 - \sqrt{6})$

முனைகள் $A = (h, k + a) = (4, -2 + 3\sqrt{2}) ; A' = (h, k - a) = (4, -2 - 3\sqrt{2})$

இயக்குவரைகளின் சமன்பாடு: $y = k + \frac{a}{e} = -2 + 3\sqrt{6} \Rightarrow y = -2 + 3\sqrt{6}$

மற்றும் $y = k - \frac{a}{e} = -2 - 3\sqrt{6} \Rightarrow y = -2 - 3\sqrt{6}$

11.பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கூம்புவளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம், குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகள் காண்க. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

$$9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow [9x^2 - 36x] - [y^2 + 6y] = -18$$

$$\Rightarrow 9[x^2 - 4x] - [y^2 + 6y] = -18$$

$$\Rightarrow 9[x^2 - 4x + 4 - 4] - [y^2 + 6y + 9 - 9] = -18$$

$$\Rightarrow 9[(x - 2)^2 - 4] - [(y + 3)^2 - 9] = -18$$

$$\Rightarrow 9(x - 2)^2 - (y + 3)^2 - 36 + 9 = -18$$

$$\Rightarrow 9(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 9$$

$$\div 9 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

இச்சமன்பாடானது குற்றச்சு x - அச்சிற்கு இணையாக அமைந்த அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடாகும்.

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, b^2 = 9$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1+9}{1}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10}$$

$$ae = 1 \times \sqrt{10} = \sqrt{10} ; \frac{a}{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

மையம் $C(h, k) = (2, -3)$

$$\text{குவியங்கள் } F_1 = (h + ae, k) = (2 + \sqrt{10}, -3)$$

$$F_2 = (h - ae, k) = (2 - \sqrt{10}, -3)$$

$$\text{முனைகள் } A = (h + a, k) = (3, -3); A' = (h - a, k) = (1, -3)$$

$$\text{இயக்குவரைகளின் சமன்பாடு: } x = h + \frac{a}{e} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ மற்றும்}$$

$$x = h - \frac{a}{e} \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{\sqrt{10}}$$

12. $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ என்ற பரவளையத்திற்கு $(1, -3)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$x^2 = xx_1; x = \frac{x+x_1}{2}; y = \frac{y+y_1}{2}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

$$xx_1 + 6\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 4\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + 5 = 0 \Rightarrow xx_1 + 3(x+x_1) + 2(y+y_1) + 5 = 0$$

$$(1, -3) - \text{ஐ பிரதியிடுக, } \Rightarrow x(1) + 3(x+1) + 2(y-3) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x + 3x + 3 + 2y - 6 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 2y + 2 = 0$$

$$\div 2 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0 \text{ என்பது தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.}$$

$$\text{செங்கோட்டின் சமன்பாடு: } x - 2y + k = 0$$

$$(1, -3) - \text{ஐ பிரதியிடுக, } \Rightarrow 1 - 2(-3) + k = 0 \Rightarrow k = -7$$

$$\text{எனவே செங்கோட்டின் சமன்பாடு: } x - 2y - 7 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

13. $x^2 + 4y^2 = 32$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ எனும்போது தொடுகோடு

மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$x^2 + 4y^2 = 32 \Rightarrow \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 32, b^2 = 8 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$$

$$\theta - \text{இல் நீள்வட்டத்திற்கு தொடுகோட்டின் சமன்பாடு: } \frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x \cos \frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}} + \frac{y \sin \frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x/\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + \frac{y/\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{8} = 1$$

$$\Rightarrow x + 2y = 8$$

$$\Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

$$\theta - \text{இல் நீள்வட்டத்திற்கு செங்கோட்டின் சமன்பாடு: } \frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}x}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{2\sqrt{2}y}{\sin \frac{\pi}{4}} = 32 - 8$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}x}{1/\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}y}{1/\sqrt{2}} = 24$$

$$\Rightarrow 8x - 4y - 24 = 0$$

$$\div 4 \Rightarrow 2x - y - 6 = 0$$

14. $x - y + 4 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + 3y^2 = 12$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

$$x - y + 4 = 0 \Rightarrow y = x + 4$$

$$y = mx + c \text{ உடன் ஒப்பிட, } \boxed{m = 1, c = 4}$$

$$x^2 + 3y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{a^2 = 12, b^2 = 4}$$

$$\text{கட்டுப்பாடு: } c^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 = 16 \rightarrow (1)$$

$$a^2m^2 + b^2 = 12(1)^2 + 4 = 16 \rightarrow (2)$$

$$(1), (2) - \text{இல் இருந்து, } c^2 = a^2m^2 + b^2.$$

எனவே $x - y + 4 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + 3y^2 = 12$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆகும்.

$$\text{தொடு புள்ளி} = \left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right) = \left(\frac{-12(1)}{4}, \frac{4}{4}\right) = (-3, 1)$$

15. $12x^2 - 9y^2 = 108$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $\theta = \frac{\pi}{3}$ -இல் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$12x^2 - 9y^2 = 108$$

$$\div 108 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 9, b^2 = 12$$

$$\Rightarrow a = 3, b = 2\sqrt{3}$$

$$\theta - \text{இல் அதிபரவளையத்திற்கு தொடுகோட்டின் சமன்பாடு: } \frac{x \sec \theta}{a} - \frac{y \tan \theta}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x \sec \frac{\pi}{3}}{3} - \frac{y \tan \frac{\pi}{3}}{2\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\sqrt{3}y}{2\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4x-3y}{6} = 1$$

$$\Rightarrow 4x - 3y = 6$$

$$\Rightarrow 4x - 3y - 6 = 0$$

θ -இல் அதிபரவளையத்திற்கு தொடுகோட்டின் சமன்பாடு: $\frac{ax}{\sec \theta} + \frac{by}{\tan \theta} = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow \frac{3x}{\sec \frac{\pi}{3}} + \frac{2\sqrt{3}y}{\tan \frac{\pi}{3}} = (3)^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{2\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} = 9 + 12$$

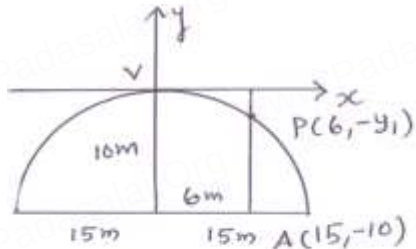
$$\Rightarrow \frac{3x}{2} + y = 21$$

$$\Rightarrow \frac{3x+2y}{2} = 21$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 42$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - 42 = 0$$

16. ஒரு பாலம் பரவளைய வளைவில் உள்ளது. மையத்தில் 10மீ உயரமும் அடிப்பகுதியில் 30மீ அகலமும் உள்ளது. மையத்திலிருந்து இருபுறமும் 6மீ தூரத்தில் பாலத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay \rightarrow (1)$

$$A(15, -10) \Rightarrow (15)^2 = -4a(-10) \Rightarrow 4a = \frac{225}{10}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = -\left(\frac{225}{10}\right)y$$

$$P(6, -y_1) \Rightarrow (6)^2 = -\left(\frac{225}{10}\right)(-y_1)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{36 \times 10}{225} = 1.6\text{m}$$

தேவையான உயரம் = $10 - 1.6 = 8.4\text{m}$

17. ஒரு நீருற்றில், ஆதியிலிருந்து 0.5மீ கிடைமட்ட தூரத்தில் நீரின் அதிகபட்ச உயரம் 4மீ. நீரின் பாதை ஒரு பரவளையம் எனில் ஆதியிலிருந்து 0.25மீ கிடைமட்ட தூரத்தில் நீரின் உயரத்தைக் காண்க.

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay \rightarrow (1)$

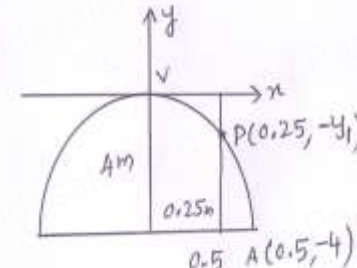
$$A(0.5, -4) \Rightarrow (0.5)^2 = -4a(-4) \Rightarrow 4a = \frac{0.25}{4}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = -\left(\frac{0.25}{4}\right)y$$

$$P(0.25, -y_1) \Rightarrow (0.25)^2 = -\left(\frac{0.25}{4}\right)(-y_1)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{0.25 \times 0.25 \times 4}{0.25} = 1\text{m}$$

தேவையான உயரம் = $4 - 1 = 3\text{m}$



18. பொறியாளர் ஒருவர் குறுக்கு வெட்டு பரவளையமாக உள்ள ஒரு துணைக்கோள் ஏற்பியை வடிவமைக்கிறார். ஏற்பி அதன் மேல்பாகத்தில் 5மீ அகலமும், முனையிலிருந்து குவியம் 1.2மீ தூரத்திலும் உள்ளது. (i) முனையை ஆதியாகவும், x -அச்ச பரவளையத்தின் சமச்சீர் அச்சாகவும் கொண்டு ஆய அச்சகளைப் பொருத்தி பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க. (ii) முனையிலிருந்து செயற்கைக்கோள் ஏற்பியின் ஆழம் காண்க.

$$\text{அகலம் } AB = 5\text{m} \Rightarrow AC = BC = 2.5\text{m}$$

முனையிலிருந்து குவியம் 1.2மீ தூரத்தில் உள்ளது $\Rightarrow VF = a = 1.2\text{m}$

$$(i) \text{ பரவளையத்தின் சமன்பாடு } y^2 = 4ax$$

$$\Rightarrow y^2 = 4(1.2)x$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.8x$$

$$(ii) VC = x_1 \text{ என்க. } AC = 2.5\text{m.}$$

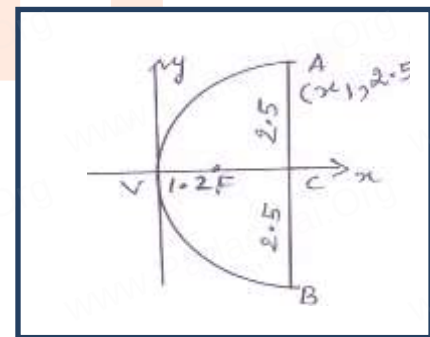
எனவே புள்ளி $A = (x_1, 2.5)$

பரவளையமானது புள்ளி $A(x_1, 2.5)$ வழியே

செல்வதால், $(2.5)^2 = 4.8x_1$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2.5 \times 2.5}{4.8} = 1.3\text{m}$$

$\therefore$ முனையிலிருந்து செயற்கைக்கோள் ஏற்பியின் ஆழம் 1.3m ஆகும்.



19. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் 60மீ சாலைப்பகுதிக்கு பரவளைய கம்பி வடம் படத்தில் உள்ளவாறு பொறுத்தப்பட்டுள்ளது. செங்குத்துக் கம்பி வடங்கள் சாலைப்பகுதியில் ஒவ்வொன்றுக்கும் 6மீ இடைவெளி இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. முனையிலிருந்து முதல் இரண்டு செங்குத்து கம்பி வடங்களுக்கான நீளத்தைக் காண்க.

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 4ay \rightarrow (1)$

$$A(30,13) \Rightarrow (30)^2 = 4a(13) \Rightarrow 4a = \frac{900}{13}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow x^2 = \left(\frac{900}{13}\right)y \rightarrow (2)$$

$B(12, u)$ -ஐ (2) -இல் பிரதியிடுக,

$$(12)^2 = \left(\frac{900}{13}\right)u \Rightarrow u = \frac{12 \times 12 \times 13}{900} = 2.08m$$

12m தொலைவில் உள்ள கம்பி வடத்தின் நீளம் = $3 + 2.08 = 5.08m$

$$C(6, v) -ஐ (2) -இல் பிரதியிடுக, (6)^2 = \left(\frac{900}{13}\right)v \Rightarrow v = \frac{6 \times 6 \times 13}{900} = 0.52m$$

6m தொலைவில் உள்ள கம்பி வடத்தின் நீளம் = $3 + 0.52 = 3.52m$

20. தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்த பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5 மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3மீ தூத்தில் உள்ளது எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதைக் காண்க.

$$x^2 = -4ay$$

$$P(3, -2.5) \Rightarrow (3)^2 = -4a(-2.5)$$

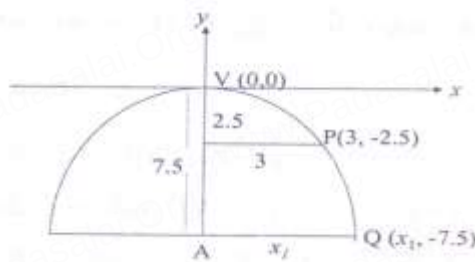
$$\Rightarrow a = \frac{9}{10}$$

$$x^2 = -4 \times \frac{9}{10} \times y$$

$$Q(x_1, -7.5) \Rightarrow$$

$$(x_1)^2 = -4 \times \frac{9}{10} (-7.5)$$

$$x_1 = 3\sqrt{3}m.$$

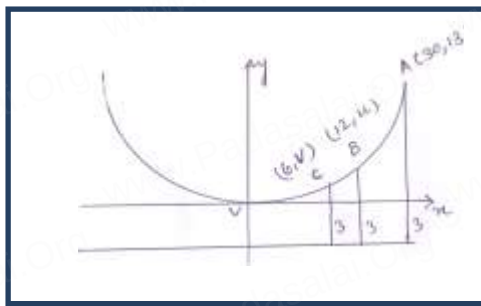


21. ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும்போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4மீ-ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்ட தூரம் 6மீ தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தப்படும் ஏறிகோணம் காண்க.

$$x^2 = -4ay$$

$$(6, -4) \Rightarrow (6)^2 = -4a(-4) \Rightarrow$$

$$4a = 9$$



$$x^2 = -9y$$

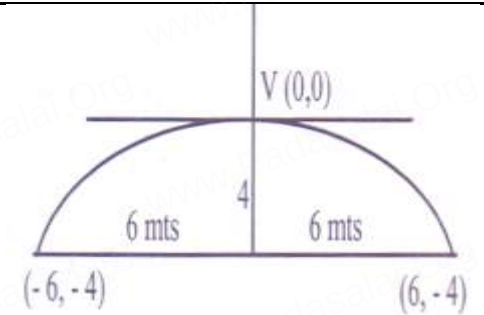
x -ஐப் பொருத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{9}$$

$(-6, -4)$ -இல் சாய்வு

$$\Rightarrow \tan \theta = -\frac{2x}{9}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3}$$



22. ஒரு கான்கிரீட் பாலம் பரவளைய வளைவில் உள்ளது. சாலையின் மேல் உள்ள பாலத்தின் நீளம் 40மீ மற்றும் அதன் அதிகபட்ச உயரம் 15மீ எனில் அந்தப் பரவளைய வளைவின் சமன்பாடு காண்க.

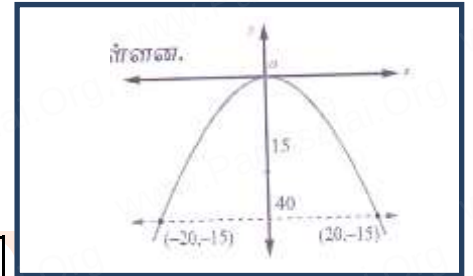
பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay \rightarrow (1)$

$$A(20, -15) \Rightarrow (20)^2 = -4a(-15)$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{400}{15}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = -\left(\frac{400}{15}\right)y \Rightarrow x^2 = -\left(\frac{80}{3}\right)y$$

$$\Rightarrow 3x^2 = -80y$$



23. ஒரு தேடும் விளக்கு பரவளைய பிரதிபலிப்பான் கொண்டது.

(குறுக்கு வெட்டு ஒரு கிண்ண வடிவம்). பரவளைய கிண்ணத்தின் விளிம்புகளுக்கு இடையே உள்ள அகலம் 40செ.மீ மற்றும் ஆழம் 30 செ.மீ.

குமிழ் குவியத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. (i) பிரதிபலிப்புக்கு பயன்படுத்தப்படும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க. (ii) ஒளி அதிகபட்ச தூரம் தெரிவதற்கு குமிழ் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து உவ்வளவு தூரத்தில் பொருத்தப்பட வேண்டும்.

$$\text{அகலம் } AB = 20cm \Rightarrow AC = BC = 10cm$$

$$\text{ஆழம் } 30cm \Rightarrow VC = 30cm.$$

$$\text{எனவே புள்ளி } A = (30, 20)$$

(i) பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax \rightarrow (1)$

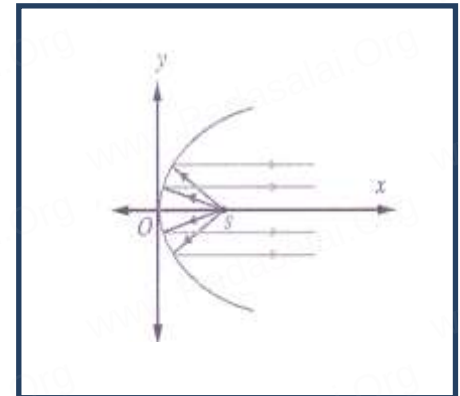
$$\Rightarrow (20)^2 = 4a(30)$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \text{பரவளையத்தின் சமன்பாடு } (1) \Rightarrow y^2 = \frac{40}{3}x$$

(ii) குமிழ் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து $\frac{10}{3}cm$ தூரத்தில் பொருத்தப்பட



வேண்டும்.

24. ஒரு நான்கு வழிச்சாலைக்கான மலை வழியே செல்லும் சுரங்கப்பாதையின் முகப்பு ஒரு நீள்வட்ட வடிவமாக உள்ளது. நெடுஞ்சாலையின் மொத்த அகலம் 16மீ. சாலையின் விளிம்பில் சுரங்கப்பாதையின் உயரம், 4மீ உயரமுள்ள சரக்கு வாகனம் செல்வதற்கு தேவையான அளவிற்கும் முகப்பின் அதிகபட்ச உயரம் 5மீ ஆகவும் இருக்க வேண்டுமெனில் சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$$b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$$

$$\text{நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow (1)$$

$$\text{புள்ளி } P = (x_1, 4) \Rightarrow \frac{x_1^2}{64} + \frac{4^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{64} + \frac{16}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{64} = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{64} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow x_1^2 = \frac{9 \times 64}{25}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3 \times 8}{5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4.8$$

$\therefore$ சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம் $= 2x_1 = 2(4.8) = 9.6m$

25. 1.2மீ நீளமுள்ள தடி அதன் முனைகள் எப்போதும் ஆய அச்சுகளைத் தொட்டுச் செல்லுமாறு நகருகின்றது. தடியின் x -அச்ச முனையிலிருந்து 0.3மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி P -ன் நியமப்பாதை ஒரு நீள்வட்டம் என நிறுவுக. மேலும் அதன் மையத்தொலைத்தகவும் காண்க.

$$\angle PAO = \angle BPQ = \theta$$

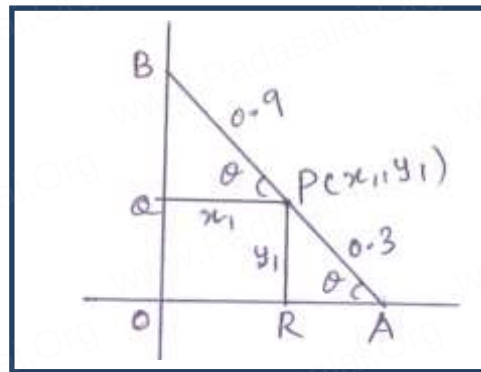
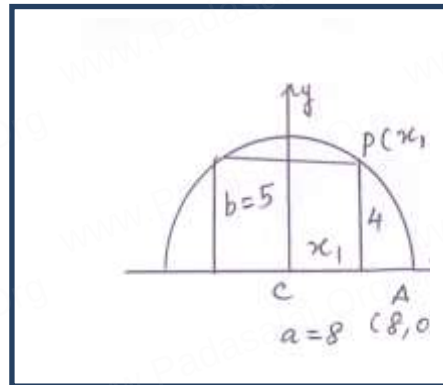
$$\Delta PQB \text{ இல் } \cos \theta = \frac{x_1}{0.9} = \frac{x_1}{9/10} = \frac{10x_1}{9}$$

$$\Delta ARP \text{ இல் } \sin \theta = \frac{y_1}{0.3} = \frac{y_1}{3/10} = \frac{10y_1}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{10y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{10x_1}{9}\right)^2 = 1$$

$$P\text{-ன் நியமப்பாதை } \frac{100x^2}{81} + \frac{100y^2}{9} = 1$$



$$\Rightarrow \frac{x^2}{81/100} + \frac{y^2}{9/100} = 1$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{81/100 - 9/100}{81/100}} = \sqrt{\frac{72/100}{81/100}} = \sqrt{\frac{72}{81}} = \sqrt{\frac{36 \times 2}{81}} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

26. ஒரு வழிப்பாதையில் உள்ள அரை நீள்வட்ட வளைவின் உயரம் 3மீ மற்றும் அகலம் 12மீ. ஒரு சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3மீ மற்றும் உயரம் 2.7மீ எனில் இந்த வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியுமா?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரப்படி, $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\text{நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow (1)$$

$$\text{புள்ளி } P = \left(\frac{3}{2}, y_1\right) \Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9/4}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = 1 - \frac{9}{144}$$

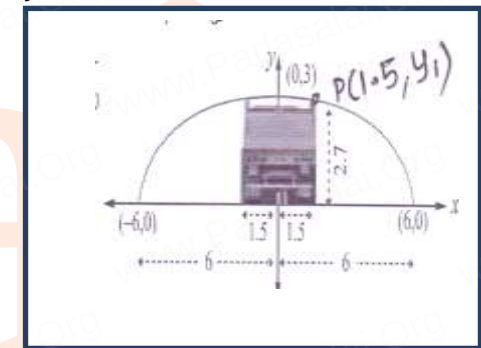
$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = \frac{135}{144}$$

$$\Rightarrow y_1^2 = \frac{9 \times 135}{144}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{3\sqrt{135}}{12} = \frac{\sqrt{135}}{4} = \frac{11.62}{4} \approx 2.9$$

வளைவின் மையத்திலிருந்து 1.5m தூரத்தில்,

வளைவின் உயரம் $= 2.9m > 2.7m$ = வாகனத்தின் உயரம். எனவே வாகனம் அவ்வளைவு வழியே செல்லும்.



27. நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{(x-11)^2}{484} + \frac{y^2}{64} = 1$ (x மற்றும் y -ன் மதிப்புகள் செ.மீ-இல் அளக்கப்படுகின்றது) நோயாளியின் சிறுநீரகக் கல் மீது அதிர்வலைகள் படுமாறு நோயாளி எந்த இடத்தில் இருக்க வேண்டும் எனக் காண்க.

$$\frac{(x-11)^2}{484} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow a^2 = 484, b^2 = 64$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 484 - 64 = 420 \Rightarrow c = 20.5cm$$

$\therefore$ நோயாளியின் சிறுநீரகக் கல் நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சில் மையத்திலிருந்து

20.5cm தூரத்தில் இருக்க வேண்டும்.

28. ஒரு அணு உலை குளிரூட்டும் தூணின் குறுக்கு வெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$. தூண் 150மீ உயரமுடையது. மேலும் அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல்பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுதி மற்றும் அடிப்பகுதியின் விட்டங்களைக் காண்க.

அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரம் = l என்க.

அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல்பகுதிக்கான தூரம் = $\frac{l}{2}$

தூணின் மொத்த உயரம் = 150m

$$\Rightarrow l + \frac{l}{2} = 150$$

$$\Rightarrow \frac{3l}{2} = 150$$

$$\Rightarrow l = 150 \times \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow l = 100m \text{ எனவே } \frac{l}{2} = 50m$$

புள்ளிகள் $A = (x_1, 50)$ மற்றும்

$B = (x_2, -100)$

ஆகும்.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$

$A = (x_1, 50)$ வழியே செல்வதால், $\frac{x_1^2}{30^2} - \frac{50^2}{44^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{900} = 1 + \frac{2500}{1936}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{900} = \frac{4436}{1936}$$

$$\Rightarrow x_1^2 = \frac{4436}{1936} \times 900$$

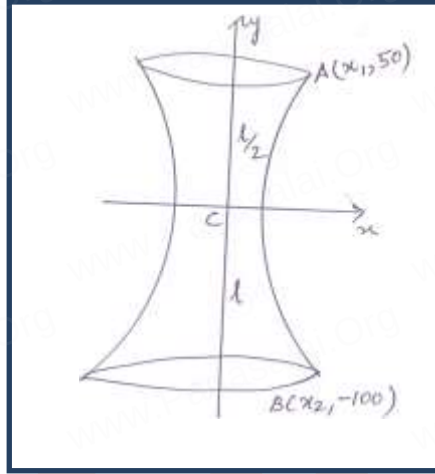
$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{4436}}{44} \times 30 = \frac{66.6 \times 30}{44} = 45.41$$

$\therefore$ தூணின் மேற்பகுதி விட்டம் = $2x_1 = 2(45.41) = 90.82m$

$B = (x_2, -100)$ வழியே செல்வதால், $\frac{x_2^2}{30^2} - \frac{(-100)^2}{44^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{900} = 1 + \frac{10000}{1936}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{900} = \frac{11936}{1936}$$



$$\Rightarrow x_2^2 = \frac{11936}{1936} \times 900$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{11936}}{44} \times 30 = \frac{109.25 \times 30}{44} = 74.49$$

$\therefore$ தூணின் அடிப்பகுதியின் விட்டம் = $2x_2 = 2(74.49) = 148.98m \approx 149m$

29. A, B என்ற இரு புள்ளிகள் 10 கி.மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச்சத்தத்திலிருந்து, வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் A என்ற புள்ளி B என்ற புள்ளியை விட 6 கி.மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது. வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபித்து அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

A, B என்ற இரு புள்ளிகளை இரு குவியங்கள் F_1, F_2 எனக்கொள்க.

$$F_1P - F_2P = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

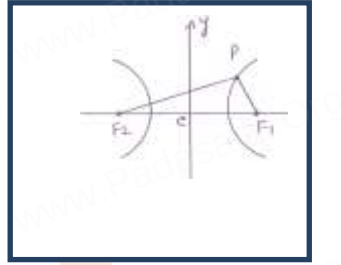
$$F_1F_2 = 10 \Rightarrow 2ae = 10 \Rightarrow ae = 5 \Rightarrow a^2e^2 = 25$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = a^2e^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow b^2 = 16$$

எனவே அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



30. இரு கடலோர காவல்படைத் தளங்கள் 600கி.மீ தொலைவில் $A(0,0)$ மற்றும் $B(0,600)$ என்ற புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளன. P என்ற புள்ளியில் உள்ள கப்பலிலிருந்து ஆபத்திற்கான சமிக்கைகள் இரு தளங்களிலிருந்து சிறிதளவு மாறுபட்ட நேரங்களில் பெறப்படுகின்றன. அவற்றிலிருந்து கப்பல், தளம் Bயை விட தளம் A-க்கு 200கி.மீ அதிக தூரத்தில் உள்ளதாக தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. எனவே அந்தக் கப்பல் இருக்கும் அடம் வழியாகச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

A, B என்ற கடலோர காவல்படைத் தளங்கள் இரு குவியங்கள் F_1, F_2 எனக்கொள்க.

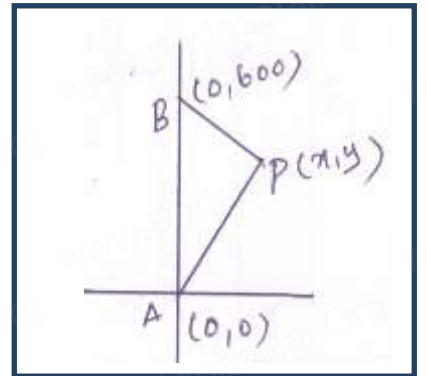
$$\text{மையம் } c(h, k) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+600}{2}\right) = (0, 300)$$

$$F_1P - F_2P = 200 \Rightarrow 2a = 200 \Rightarrow a = 100$$

$$\Rightarrow a^2 = 10000$$

$$F_1F_2 = 600 \Rightarrow 2ae = 600 \Rightarrow ae = 300$$

$$\Rightarrow a^2e^2 = 90000$$



$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = a^2e^2 - a^2 = 90000 - 10000 = 80000$$

$$\Rightarrow b^2 = 80000$$

$$\text{எனவே அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(y-300)^2}{10000} - \frac{x^2}{80000} = 1$$

31. ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைநோக்கியில் பரவளைய பிரதிபலிப்பான் மற்றும் அதிபரவளைய பிரதிபலிப்பான் இரண்டும் உள்ளது. படத்தில் உள்ள தொலைநோக்கியில் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து 14மீ உயரத்தில் உள்ள F_1 என்ற அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியம் பரவளையத்தின் குவியமாகவும் உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் இரண்டாவது குவியம் F_2 பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து 2மீ உயரத்தில் உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் முனை F_1 -க்கு 1 மீ கீழே உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் மையத்தை ஆதியாகவும் குவியங்களை y -அச்சிலும் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

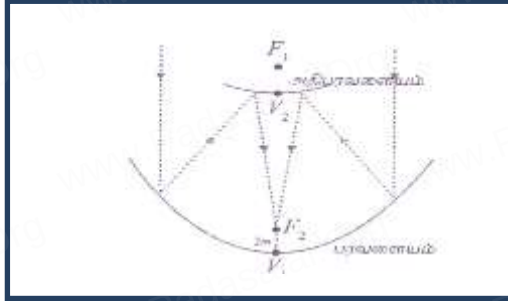
பரவளையத்தின் முனை V_1 மற்றும் அதிபரவளையத்தின் முனை V_2 என்க.

$$F_1F_2 = 14 - 2 = 12m \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

மையத்திலிருந்து அதிபரவளையத்தின் முனைக்கு உள்ள தூரம் $a = 6 - 1 = 5$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 25 = 11$$

$$\text{எனவே அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$$



6. வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. வெக்டர் முறையில் $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

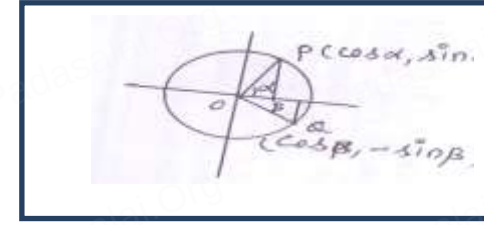
$$\vec{OP} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$$

$$\vec{OQ} = \cos\beta\vec{i} - \sin\beta\vec{j}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



2. வழக்கமான குறியீடுகளுடன் முக்கோணம் ABC -இல் வெக்டர்களைப்

பயன்படுத்தி $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ என நிறுவுக.

$$\vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}, \vec{AB} = \vec{c} \text{ என்க.}$$

Δ - ன் பரப்பு பண்பின்படி,

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} |\vec{c} \times \vec{a}|$$

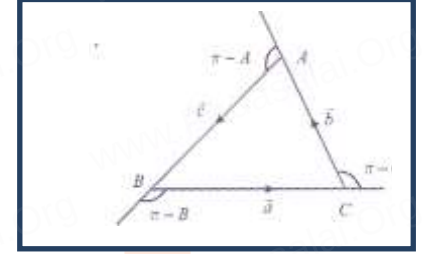
$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|$$

$$\Rightarrow ab \sin(\pi - C) = bc \sin(\pi - A) = ca \sin(\pi - B)$$

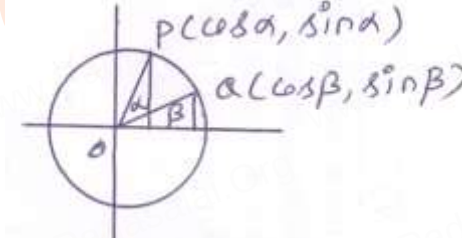
$$\Rightarrow ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

$$\div abc \Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\text{தலைகீழ் காண } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



3. வெக்டர் முறையில் $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.



$$\vec{OP} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}; \quad \vec{OQ} = \cos\beta\vec{i} + \sin\beta\vec{j}$$

$$\vec{OQ} \times \vec{OP} = \sin(\alpha - \beta) \vec{k}$$

$$\vec{OQ} \times \vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \vec{k}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

4. முக்கோணம் ABC -இல் BC என்ற பக்கத்தின் நடுப்புள்ளி D எனில் $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$ என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(அப்போலோனியஸ் தேற்றம்)

ஆதிப்புள்ளி A என்க. எனவே $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

BC - ன் நடுப்புள்ளி D , எனவே $\overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

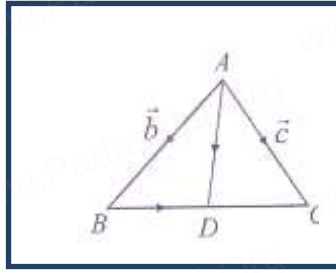
$$|\overrightarrow{AD}|^2 = \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}) \rightarrow (1)$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|^2 = \left|\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{b}\right|^2 = \left|\frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}\right|^2$$

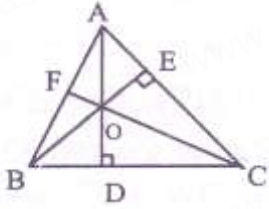
$$= \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) \rightarrow (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$$



5. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (1)$$

$$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow BA \perp CF$$

6. ΔABC -ன் நடுக்கோட்டு மையம் G எனில் வெக்டர் முறையில் $(\Delta GAB - \text{ன் பரப்பு}) = (\Delta GBC - \text{ன் பரப்பு}) = (\Delta GCA - \text{ன் பரப்பு}) = \frac{1}{3}(\Delta ABC - \text{ன் பரப்பு})$ என நிறுவுக.

$$\Delta ABC - \text{ன் நடுக்கோட்டு மையம் } G \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\Delta GAB - \text{ன் பரப்பு} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}|$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA})|$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} - \overrightarrow{OA}\right)|$$

$$= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA})|$$

$$= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \times ((\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}))|$$

$$= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})|$$

$$= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{6} |0 + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right)$$

$$= \frac{1}{3} (\Delta ABC - \text{ன் பரப்பு})$$

இதுபோலவே $(\Delta GBC - \text{ன் பரப்பு}) = (\Delta GCA - \text{ன் பரப்பு}) = \frac{1}{3} (\Delta ABC - \text{ன் பரப்பு})$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore (\Delta GAB - \text{ன் பரப்பு}) = (\Delta GBC - \text{ன் பரப்பு}) = (\Delta GCA - \text{ன் பரப்பு}) = \frac{1}{3} (\Delta ABC - \text{ன் பரப்பு})$$

7. வெக்டர் முறையில் $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

$$\overrightarrow{OP} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \cos\beta\vec{i} + \sin\beta\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

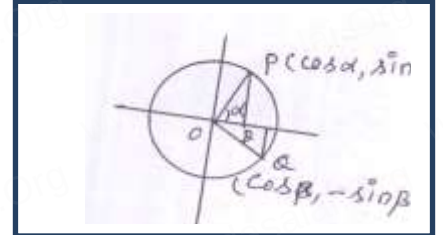
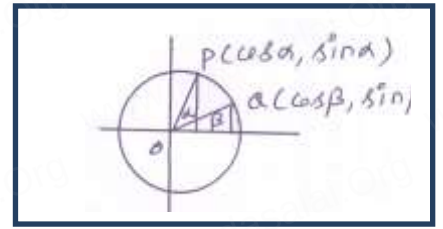
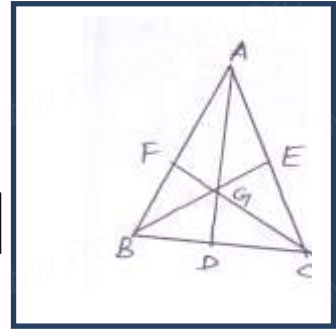
8. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

$$\overrightarrow{OP} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \cos\beta\vec{i} - \sin\beta\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \sin(\alpha + \beta) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$



$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\vec{k}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

9. $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ எனில் $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ மற்றும் $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் அவை சமமாகுமா எனக் காண்க.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(9 - 2) - \vec{j}(-6 + 6) + \vec{k}(2 - 9) = 7\vec{i} - 7\vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 35) - \vec{j}(7 + 14) + \vec{k}(-35 - 0)$$

$$= -35\vec{i} - 21\vec{j} - 35\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 + 15) - \vec{j}(3 - 6) + \vec{k}(-15 + 2)$$

$$= 14\vec{i} + 3\vec{j} - 13\vec{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & 3 & -13 \end{vmatrix} = \vec{i}(-39 + 6) - \vec{j}(26 + 28) + \vec{k}(-6 - 42)$$

$$= -33\vec{i} - 54\vec{j} - 48\vec{k}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

10. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $\vec{d} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ எனில் $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]\vec{d}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(4 - 0) - \vec{j}(-4 - 0) + \vec{k}(-1 + 1)$$

$$= 4\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3 + 5) - \vec{j}(0 + 2) + \vec{k}(0 - 6) = 8\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}(-24 + 0) - \vec{j}(-24 - 0) + \vec{k}(-8 - 32)$$

$$= -24\vec{i} + 24\vec{j} - 40\vec{k} \rightarrow (1)$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 + 20) + 1(1 + 8) + 0 = 19 + 9 = 28$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}]\vec{c} = 28(3\vec{j} - \vec{k}) = 84\vec{j} - 28\vec{k}$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 + 12) + 1(-1 + 0) + 0 = 13 - 1 = 12$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]\vec{d} = 12(2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}) = 24\vec{i} + 60\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]\vec{d} = 84\vec{j} - 28\vec{k} - 24\vec{i} - 60\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$= -24\vec{i} + 24\vec{j} - 40\vec{k} \rightarrow (2)$$

(1), (2) -இல் இருந்து, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]\vec{d}$

11. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ எனில்

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ என்பவற்றைச் சரிபார்க்க.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6 + 5) - \vec{j}(4 + 3) + \vec{k}(10 - 9) = 11\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & -7 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-21 + 2) - \vec{j}(33 + 1) + \vec{k}(-22 - 7)$$

$$= -19\vec{i} - 34\vec{j} - 29\vec{k} \rightarrow (1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = -2 - 6 - 3 = -11$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} = -11(3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = -33\vec{i} - 55\vec{j} - 22\vec{k}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = -3 - 10 + 6 = -7$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = -7(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = -14\vec{i} - 21\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = -33\vec{i} - 55\vec{j} - 22\vec{k} + 14\vec{i} + 21\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$= -19\vec{i} - 34\vec{j} - 29\vec{k} \rightarrow (2)$$

(1), (2) -இல் இருந்து, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

12. $(-5, 7, -4)$ மற்றும் $(13, -5, 2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க. மேலும் இந்த நேர்க்கோடு xy தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

$$(x_1, y_1, z_1) = (-5, 7, -4), (x_2, y_2, z_2) = (13, -5, 2)$$

இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் கார்டிசியன் சமன்பாடு:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{x+5}{13+5} = \frac{y-7}{-5-7} = \frac{z+4}{2+4} \Rightarrow \frac{x+5}{18} = \frac{y-7}{-12} = \frac{z+4}{6} \rightarrow (1)$$

xy தளத்தின் சமன்பாடு $z = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (1) \Rightarrow \frac{z+4}{2+4} &\Rightarrow \frac{x+5}{18} = \frac{y-7}{-12} = \frac{0+4}{6} \Rightarrow \frac{x+5}{18} = \frac{y-7}{-12} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{x+5}{18} = \frac{2}{3}; \frac{y-7}{-12} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow x+5 = 12; y-7 = -8 \\ &\Rightarrow x = 7; y = -1 \end{aligned}$$

$\therefore xy$ தளத்தை வெட்டும் புள்ளி $= (7, -1, 0)$

13. $(6, 7, 4)$ மற்றும் $(8, 4, 9)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு xz மற்றும் yz தளங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

$$(x_1, y_1, z_1) = (6, 7, 4), (x_2, y_2, z_2) = (8, 4, 9)$$

இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் கார்டிசியன் சமன்பாடு:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{x-6}{8-6} = \frac{y-7}{4-7} = \frac{z-4}{9-4} \Rightarrow \frac{x-6}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{5} \rightarrow (1)$$

xz தளத்தின் சமன்பாடு $y = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (1) \Rightarrow \frac{x-6}{2} &= \frac{0-7}{-3} = \frac{z-4}{5} \Rightarrow \frac{x-6}{2} = \frac{-7}{-3}; \frac{z-4}{5} = \frac{-7}{-3} \\ &\Rightarrow \frac{x-6}{2} = \frac{7}{3}; \frac{z-4}{5} = \frac{7}{3} \\ &\Rightarrow 3x - 18 = 14; 3z - 12 = 35 \\ &\Rightarrow 3x = 32; 3z = 47 \\ &\Rightarrow x = \frac{32}{3}; z = \frac{47}{3} \end{aligned}$$

$\therefore xz$ தளத்தை வெட்டும் புள்ளி $= \left(\frac{32}{3}, 0, \frac{47}{3}\right)$

yz தளத்தின் சமன்பாடு $x = 0$

$$\begin{aligned} \therefore (1) \Rightarrow \frac{x-6}{2} &= \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{5} \Rightarrow \frac{0-6}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{5} \\ &\Rightarrow \frac{y-7}{-3} = -3; \frac{z-4}{5} = -3 \\ &\Rightarrow y = 16; z = -11 \end{aligned}$$

$\therefore yz$ தளத்தை வெட்டும் புள்ளி $= (0, 16, -11)$

14. $\vec{r} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + t(2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$ மற்றும் $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் மற்றும் இவ்விருகோடுகளுக்கும் செங்குத்தானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + t(2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2} = \lambda \\ &\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \lambda, \frac{y-3}{3} = \lambda, \frac{z+1}{2} = \lambda \\ &\Rightarrow x = 2\lambda + 1, y = 3\lambda + 3, z = 2\lambda - 1 \end{aligned}$$

வெட்டும் புள்ளி $= (2\lambda + 1, 3\lambda + 3, 2\lambda - 1) \rightarrow (1)$

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4} = \mu &\Rightarrow \frac{x-2}{1} = \mu, \frac{y-4}{2} = \mu, \frac{z+3}{4} = \mu \\ &\Rightarrow x = \mu + 2, y = 2\mu + 4, z = 4\mu - 3 \end{aligned}$$

வெட்டும் புள்ளி $= (\mu + 2, 2\mu + 4, 4\mu - 3) \rightarrow (2)$

(1), (2) இல் இருந்து,

$$2\lambda + 1 = \mu + 2 \Rightarrow 2\lambda - \mu = 1 \rightarrow (3)$$

$$3\lambda + 3 = 2\mu + 4 \Rightarrow 3\lambda - 2\mu = 1 \rightarrow (4)$$

சமன் (3), (4)ஐத் தீர்க்க.

$$(3) \times 2 \Rightarrow 4\lambda - 2\mu = 2 \rightarrow (5)$$

$$(4) \Rightarrow 3\lambda - 2\mu = 1 \rightarrow (6)$$

$$(5) - (6) \Rightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = 1$ என சமன் (1)இல் பிரதியிடுக,

வெட்டும் புள்ளி $= (3, 6, 1)$ ஆகும்.

இங்கு $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{e} = \vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

ஒரு புள்ளி $\vec{d} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$ வழியாகவும் ஒரு வெக்டருக்கு $\vec{e} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$ இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு:

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = \vec{d} + t\vec{e}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}) + t(8\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k})$$

15. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1}, z-1=0$ மற்றும் $\frac{x-6}{2} = \frac{z-1}{3}, y-2=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் எனக்காட்டுக. மேலும் அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

$$z-1=0 \Rightarrow z=1$$

$$y-2=0 \Rightarrow y=2$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{2-3}{-1} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = 1 \Rightarrow x-3 = 3 \Rightarrow x = 6$$

∴ வெட்டும் புள்ளி = (6, 2, 1)

$$x = 6, y = 2 \text{ என பிரதியிட, } \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow \frac{6-3}{3} = \frac{2-3}{-1} \Rightarrow 1 = 1$$

∴ கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும்.

16. $x + 1 = 2y = -12z$ மற்றும் $x = y + 2 = 6z - 6$ என்ற கோடுகள் ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் எனக்காட்டி அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தையும் காண்க.

$$x + 1 = 2y = -12z \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1/2} = \frac{z}{-1/12} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$x = y + 2 = 6z - 6 \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1/6} \Rightarrow \vec{b} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{12}\vec{k}$$

$$\vec{c} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ 1 & 1 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)\vec{j} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\vec{k} = \frac{1}{6}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} \neq 0$$

∴ ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் ஆகும்.

$$\text{மீச்சிறு தூரம்} = \frac{|(\vec{c}-\vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})|}{|\vec{b} \times \vec{d}|} = \frac{|7/6|}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{7/6}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}}} = \frac{7/6}{\sqrt{7/12}} = 2 \text{ அலகுகள்.}$$

17. $(-1, 2, 1)$ என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதும் $\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + t(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தையும் காண்க.

$$\text{புள்ளி } \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} ; \text{ இணை வெக்டர் } \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

ஒரு புள்ளி வழியாகவும் ஒரு வெக்டருக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு:

$$\text{துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு: } \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + t(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} ; \vec{c} - \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$|(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9 + 25 + 49} = \sqrt{83}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{இருகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்} = \frac{|(\vec{c}-\vec{a}) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}} \text{ அலகுகள்.}$$

18. $(2, 3, 6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ மற்றும் $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{-3}$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\text{இங்கு புள்ளி } \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\text{இணை வெக்டர்கள் } \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-9 + 5) - \vec{j}(-6 - 2) + \vec{k}(-10 - 6) = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}$$

$$\text{துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: } (\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{r} - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k})] \cdot (-4\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-4\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}) - (-8 + 24 - 96) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-4\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}) + 80 = 0$$

$$\div 4 \Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) + 20 = 0$$

$$\text{கார்டிசியன் சமன்பாடு: } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ என்க.}$$

$$\vec{r} \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) + 20 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) + 20 = 0$$

$$\Rightarrow -x + 2y - 4z + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y + 4z - 20 = 0$$

$$19. (0, 1, -5) \text{ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் } \vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) +$$

$$s(2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ மற்றும் } \vec{r} = (\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) + t(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \text{ என்ற}$$

கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இங்கு புள்ளி $\vec{a} = 0\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

இணை வெக்டர்கள் $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3-6) - \vec{j}(-2-6) + \vec{k}(2-3) = -9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow [\vec{r} - (0\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k})] \cdot (-9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}) - (0 + 8 + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}) - 13 = 0$$

கார்டிசியன் சமன்பாடு: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

$$\vec{r} \cdot (-9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}) - 13 = 0 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}) - 13 = 0$$

$$\Rightarrow -9x + 8y - z - 13 = 0$$

$$\Rightarrow 9x - 8y + z + 13 = 0$$

20. $(1, -2, 4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x + 2y - 3z = 11$ என்ற

தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் $\frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும்

அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இங்கு புள்ளி $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

இணை வெக்டர்கள் $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-3) - \vec{j}(1+9) + \vec{k}(-1-6) = -\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow [\vec{r} - (\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})] \cdot (-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}) - (-1 + 20 - 28) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}) + 9 = 0$$

கார்டிசியன் சமன்பாடு: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

$$\vec{r} \cdot (-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}) + 9 = 0 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow -x - 10y - 7z + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x + 10y + 7z - 9 = 0$$

21. $\vec{r} = (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + t(2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k})$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 8$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இங்கு புள்ளி $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

இணை வெக்டர்கள் $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + s(2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) + t(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}); s, t \in R$$

$$\text{கார்டிசியன் சமன்பாடு: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(-1-8) - (y+1)(2-4) + (z-3)(4+1) = 0$$

$$\Rightarrow -9(x-1) + 2(y+1) + 5(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow -9x + 9 + 2y + 2 + 5z - 15 = 0$$

$$\Rightarrow -9x + 2y + 5z - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 9x - 2y - 5z + 4 = 0$$

22. $\vec{r} = (6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + s(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + t(-5\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k})$ என்ற தளத்தின் துணையலகு அல்லாத மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இங்கு புள்ளி $\vec{a} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

இணை வெக்டர்கள் $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-10+4) - \vec{j}(5+5) + \vec{k}(4+10) = -6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow [\vec{r} - (6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})] \cdot (-6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}) - (-36 + 10 + 14) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}) + 12 = 0$$

$$\div -2 \Rightarrow \vec{r} \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}) - 6 = 0$$

கார்டிசியன் சமன்பாடு: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

$$\vec{r} \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}) - 6 = 0 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 5y - 7z - 6 = 0$$

23.(2,2,1), (9,3,6) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லக்கூடியதும் $2x + 6y + 6z = 9$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\text{இங்கு புள்ளிகள் } \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\text{இணை வெக்டர் } \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} - 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\text{துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு: } \vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + s(7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}) + t(2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$\text{கார்டிசியன் சமன்பாடு: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(6 - 30) - (y - 2)(42 - 10) + (z - 1)(42 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow -24(x - 2) - 32(y - 2) + 40(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -24x + 48 - 32y + 64 + 40z - 40 = 0$$

$$\Rightarrow -24x - 32y + 40z + 72 = 0$$

$$\div (-8) \Rightarrow 3x + 4y - 5z - 9 = 0$$

$$24.(-1,2,0), (2,2,-1) \text{ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லக்கூடியதும் } \frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} =$$

$\frac{z+1}{-1}$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\text{இங்கு புள்ளிகள் } \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+1/2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\text{இணை வெக்டர் } \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} - 0\vec{k} = 3\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$$

$$\text{துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு: } \vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (-\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}) + s(3\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}) + t(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + 1) - \vec{j}(-3 + 1) + \vec{k}(3 - 0) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு:

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow (\vec{r} - (-\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (-1 + 4 + 0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - 3 = 0$$

$$\text{கார்டிசியன் சமன்பாடு: } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ என்க.}$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - 3 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z - 3 = 0$$

25.(2,2,1), (1,-2,3) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்வதும் (2,1,-3) மற்றும் (-1,5,-8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\text{இங்கு புள்ளிகள் } \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\text{இணை வெக்டர் } \vec{c} = (2,1,-3) - (-1,5,-8) = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} - 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு: } \vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + s(-\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) + t(3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\text{கார்டிசியன் சமன்பாடு: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(-20 + 8) - (y - 2)(-5 - 6) + (z - 1)(4 + 12) = 0$$

$$\Rightarrow -12(x - 2) + 11(y - 2) + 16(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -12x + 24 + 11y - 22 + 16z - 16 = 0$$

$$\Rightarrow -12x + 11y + 16z - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 11y - 16z + 14 = 0$$

26.(3,6,-2), (-1,-2,6) மற்றும் (6,-4,-2) ஆகிய ஒரே கோட்டிலமையாத

மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத மற்றும் கார்டிசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} \text{இங்கு புள்ளிகள் } \vec{a} &= 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}; \vec{c} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} - \vec{a} &= -\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} - 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} \\ \vec{c} - \vec{a} &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} - 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = 3\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k} \end{aligned}$$

துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$

$$\Rightarrow \vec{r} = (3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}) + s(-4\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}) + t(3\vec{i} - 10\vec{j} + 0\vec{k})$$

$$\begin{aligned} (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 + 80) - \vec{j}(0 - 24) + \vec{k}(40 + 24) \\ &= 80\vec{i} + 24\vec{j} + 64\vec{k} \\ &\div 8, = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k} \end{aligned}$$

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{r} - (3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k})) \cdot (10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}) - (30 + 18 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}) - 32 = 0$$

கார்டிசியன் சமன்பாடு: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க.

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}) - 32 &= 0 \Rightarrow (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}) - 32 = 0 \\ \Rightarrow 10x + 3y + 8z - 32 &= 0 \end{aligned}$$

27. $\vec{r} = (5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}) + s(4\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k})$ மற்றும் $\vec{r} = (8\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) + t(7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காண்பிக்க. மேலும் இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\vec{r} = (5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}) + s(4\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}) \Rightarrow \begin{aligned} \vec{a} &= 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{b} &= 4\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r} = (8\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) + t(7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \Rightarrow \begin{aligned} \vec{c} &= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{d} &= 7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

இரு கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைய கட்டுப்பாடு: $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\vec{c} - \vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} - 5\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 17\vec{i} - 47\vec{j} - 24\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (3\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}) \cdot (17\vec{i} - 47\vec{j} - 24\vec{k}) = 51 + 141 - 192 = 0$$

∴கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

ஒரு புள்ளி $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் இரு இணை வெக்டர்கள்

$\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ கொண்ட தளத்தின் துணையலகு

அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{r} - (5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k})) \cdot (17\vec{i} - 47\vec{j} - 24\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (17\vec{i} - 47\vec{j} - 24\vec{k}) - (85 - 329 + 72) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (17\vec{i} - 47\vec{j} - 24\vec{k}) + 172 = 0$$

28. $\vec{r} = (-\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) + s(3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k})$ மற்றும் $\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}) + t(\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k})$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காண்பிக்க. மேலும் இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\vec{r} = (-\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) + s(3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}) \Rightarrow \begin{aligned} \vec{a} &= -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k} \\ \vec{b} &= 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}) + t(\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}) \Rightarrow \begin{aligned} \vec{c} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{d} &= \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$

இரு கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைய கட்டுப்பாடு: $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\vec{c} - \vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} - (-\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (3\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot (7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}) = 21 - 98 + 77 = 0$$

∴கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

ஒரு புள்ளி $\vec{a} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ மற்றும் இரு இணை வெக்டர்கள்

$\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ கொண்ட தளத்தின் துணையலகு

அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{r} - (-\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})) \cdot (7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}) - (-7 + 42 - 35) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}) = 0$$

$$\div 7 \Rightarrow \vec{r} \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 0$$

29. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ மற்றும் $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ என்ற கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமையும் எனக்காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தினைக் காண்க.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3} \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{d} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

இரு கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைய கட்டுப்பாடு: $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} - 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-5\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}) = 5 - 10 + 5 = 0$$

∴கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

ஒரு புள்ளி $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ மற்றும் இரு இணை வெக்டர்கள் $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{d} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ கொண்ட தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர்

சமன்பாடு: $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{r} - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})) \cdot (-5\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}) = 0$$

$$\div 5 \Rightarrow (\vec{r} - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (-2 - 6 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + 4 = 0$$

30. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{m^2}$ மற்றும் $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{m^2} = \frac{z-1}{2}$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன எனில் m -ன் வேறுபட்ட மெய்மதிப்புகளைக் காண்க.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{m^2} \Rightarrow \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + m^2\vec{k}$$

$$; \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{m^2} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{d} = \vec{i} + m^2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & m^2 \\ 1 & m^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(4 - m^4) - 0 - 2(m^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2m^4 - 2m^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^4 + 2m^2 - 12 = 0$$

$$\div 2 \Rightarrow m^4 + m^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 2)(m^2 + 3) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 2; m^2 = -3$$

$$\Rightarrow m = \pm\sqrt{2} \in R; m = \pm\sqrt{3}i \notin R$$